

ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ
ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА
ВАРИАНТ 42101 для 10 класса

Рабочий день Харона Эребовича, перевозчика, начинается, когда солнце склоняется к западу. В это время он забирает в лодку всех собравшихся на берегу, садится на весла и перевозит на противоположный берег реки.

Рассмотрим этот процесс более подробно.

Для простоты будем считать русло прямолинейным с постоянной шириной $H = 200$ м. Пусть скорость течения u изменяется по мере приближения к середине реки и составляет $u(d) = 0,02 \cdot d \cdot (H - d)$ м/мин на расстоянии d м от берега. Пусть частота гребли составляет 10 взмахов в минуту, а в стоячей воде лодка развивала бы скорость $w = 120$ м/мин.

Во время переправы лодку сносит течением, и гребец, каждый раз опуская весла в воду, направляет ее носом прямо к берегу. Размерами лодки пренебрежем. Движение лодки между гребками будем считать равномерным. Изменением скорости течения на расстоянии, проходимом лодкой между гребками, пренебрежем.

1. Определите положение лодки (по отношению к пункту отправления) через одну минуту после отчаливания.
2. Определите время, которое будет затрачено на достижение противоположного берега.
3. Определите, насколько ниже по течению (по отношению к пункту отправления) лодка достигнет противоположного берега.
4. Определите скорость, с которой лодка подойдет к противоположному берегу.

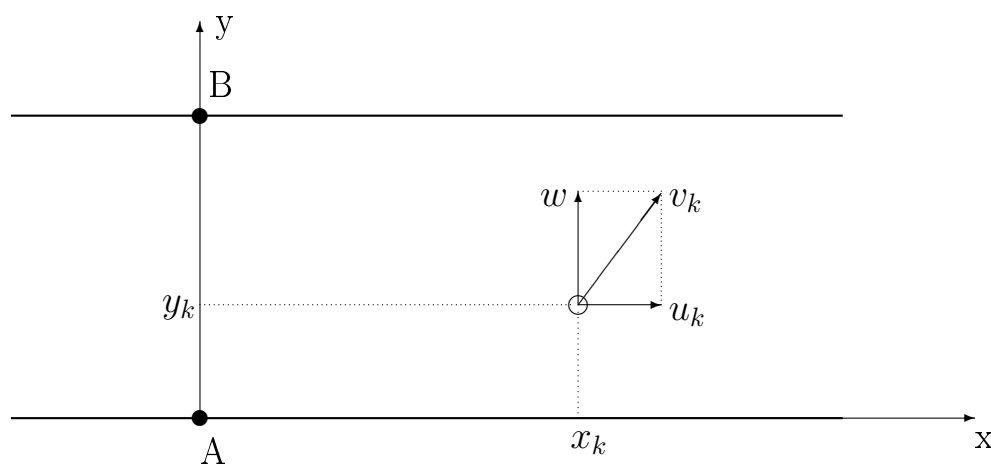
УКАЗАНИЕ. Считайте любое «пересечение» линии противоположного берега причаливанием.

Решение. 9 класс, 10 класс

1. Введем систему координат, связанную с берегами реки. Пусть ось OX направлена по течению (прямолинейной) реки, ось OY – перпендикулярно берегу. Начало координат совместим с пунктом отправления A . Тогда пункт назначения B будет иметь координаты $(0, H)$.

Обозначим скорость реки через u , скорость лодки (относительно берегов) $v(t)$. Согласно условию, $u = u(y) = 0.02 \cdot y \cdot (H - y)$.

Ясно, что все изменения в процессе движения лодки происходят в момент гребков, которые происходят с интервалом $\Delta t = 60/10 = 6$ секунд, поэтому достаточно рассматривать только моменты времени $t_k = k \cdot \Delta t$. Индексом k будем помечать величины, относящиеся к моменту времени t_k .



2. Рассмотрим сначала движение лодки между двумя гребками. Пусть в момент времени t_k лодка находилась в точке K с координатами (x_k, y_k) .

Вектор скорости лодки $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + \mathbf{w}$. Первое слагаемое действует вдоль оси OX , поэтому оно будет изменять только координату x . Второе действует вдоль оси OY , поэтому оно будет изменять только координату y . Следовательно, нет необходимости вычислять каждый раз результирующий вектор скорости \mathbf{v}_k , а можно записать, что координаты точки, в которой лодка окажется в момент следующего гребка, будут равны

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + u_k \Delta t, \\y_{k+1} &= y_k + w \Delta t.\end{aligned}\tag{*}$$

3. Теперь можно сформулировать базовый алгоритм расчета.

Алгоритм "Базовый"

Задать $H, \Delta t$; положить $x_0 := 0, y_0 := 0$;

ДЛЯ $k = 0, 1, 2, \dots$

 Вычислить x_{k+1}, y_{k+1} по формулам (*);

конец алгоритма

Этот основной алгоритм мы будем дополнять действиями, необходимыми для поиска ответов на вопросы задачи.

4. Для ответа на 1-й вопрос нужно найти x_{10} , y_{10} , поскольку за одну минуту происходит 10 взмахов веслами. Для этого достаточно выполнить 10 повторений цикла алгоритма (k от 0 до 9).

5. Для ответа на 2-й вопрос задачи нужно производить расчет до тех пор, пока y_{k+1} не окажется больше H . Это означает, что нужно использовать цикл ПОКА с условием продолжения $y_k < H$. Номер последнего шага k_H будет совпадать с количеством проделанных шагов. Тогда общее время переправы $T = k_H \cdot \Delta t$.

Соответствующий алгоритм примет вид

Алгоритм "Время переправы"

Задать H , Δt ; положить $x_0 := 0$, $y_0 := 0$, $k := 0$;

ПОКА $y_k < H$

 Вычислить скорость течения $u_k := y_k \cdot (H - y_k)$;

 Вычислить x_{k+1} , y_{k+1} по формулам (*);

 Увеличить счетчик $k := k + 1$;

КОНЕЦ_ПОКА

Вычислить общее время $T := k \cdot \Delta t$;

Вывести T ;

конец алгоритма

Заметим, что время переправы можно получить гораздо быстрее, разделив ширину реки на собственную скорость лодки. Алгоритм "Время переправы" можно применять для решения более сложных задач. Рекомендуется ознакомиться с соответствующим этапом решения задачи для 11 класса.

6. Теперь, когда мы умеем определять номер шага, на котором лодка достигает берега, мы можем определить координату x_H точки причаливания. Так как лодка отошла из начала координат, то величина x_H будет показывать, насколько ниже по течению закончилась переправа.

7. (Только для 10 класса.) Наконец, для ответа на 4-й вопрос придется искать полную скорость v_k при $k = k_H - 1$. В момент последнего (перед причаливанием) взмаха весел лодка находилась в точке с координатами (x_{k_H-1}, y_{k_H-1}) . После этого момента скорость лодки уже не изменялась. в указанной точке скорость течения равна $u_H = y_{k_H-1}(H - y_{k_H-1})$. Поэтому $v_H = \sqrt{u_H^2 + w^2}$.

Итоговый алгоритм примет вид (значок % означает комментарий)

Алгоритм "Время переправы и снос"

Задать H , Δt ; положить $x_0 := 0$, $y_0 := 0$, $k := 0$;

ПОКА $y_k < H$

 Вычислить скорость течения $u_k := y_k \cdot (H - y_k)$;

 Вычислить x_{k+1} , y_{k+1} по формулам (*);

 Увеличить счетчик $k := k + 1$;

КОНЕЦ_ПОКА

% теперь переменная k содержит количество повторний цикла

Вывести x_{10} и y_{10} ; % это ответ на первый вопрос

Вычислить общее время $T := k \cdot \Delta t$;

Вывести T ; % это ответ на второй вопрос

Вывести 'Причалили ниже на ' + x_k % это ответ на третий вопрос

Вычислить $v := \sqrt{u_k + w}$

Вывести 'Причалили со скоростью ' + v ; % это ответ на четвертый вопрос

конец алгоритма

8. Числовые данные, которые должны были бы быть получены в результате выполнения описанных алгоритмов не приводятся. Их отсутствие следует рассматривать как стимул для повторной самостоятельной проработки задачи.