Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17111 для 11 класса

Задача 1.

Три электрогенератора имеют мощности x_1, x_2, x_3, суммарная мощность всех трех не превосходит 2 МВт. В энергосистеме с такими генераторами некоторый процесс описывается функцией

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2 x_3} + \sqrt{x_2^2 + x_1 x_3} + \sqrt{x_3^2 + x_1 x_2}.$$

Найдите максимальное и минимальное значения этой функции.

Решение.

Ясно, что минимальное значение функции равно нулю (достигается при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

Найдем максимум. Можно считать, что $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$. Докажем два неравенства:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2 x_3} \leq x_1 + \frac{x_3}{2},$$

$$\sqrt{x_2^2 + x_3 x_1} + \sqrt{x_3^2 + x_1 x_2} \leq \frac{2x_1 + 3x_2 + x_3}{2}.$$

Первое из них эквивалентно неравенству $4x_3(x_1 - x_2) + x_3^2 \geq 0$.

Для доказательства второго неравенства воспользуемся тем, что для $u \geq 0$ и $v \geq 0$ верно $\sqrt{u} + \sqrt{v} \leq \sqrt{2(u+v)}$.

Итак,

$$\sqrt{x_2^2 + x_3 x_1} + \sqrt{x_3^2 + x_1 x_2} \leq \sqrt{2(x_2^2 + x_3 x_1 + x_3^2 + x_1 x_2)}.$$

Нетрудно проверить, что

$$2(x_2^2 + x_3 x_1 + x_3^2 + x_1 x_2) \leq \left(\frac{x_1 + 3x_2 + 2x_3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + 8x_3(x_2 - x_3) \geq 0.$$

Имеем:

$$\sqrt{x_1^2 + x_2 x_3} + \sqrt{x_2^2 + x_1 x_3} + \sqrt{x_3^2 + x_1 x_2} \leq x_1 + \frac{x_3}{2} + \frac{x_1 + 3x_2 + 2x_3}{2} =$$
$$= \frac{3}{2}(x_1 + x_2 + x_3) \leq \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

Ответ: $\max f(x_1, x_2, x_3) = 3$, $\min f(x_1, x_2, x_3) = 0$
при $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

Задача 2.

На кондитерской фабрике решили разработать новый сорт конфет. По технологическим соображениям конфета должна иметь вид цилиндра объемом V и с площадью полной поверхности S. При каких условиях на V и S любые два цилиндра с такими параметрами равны?

Решение.

Решение этой задачи разделим на две части: нахождение крайнего отношения между S и V и доказательство того, что в остальных случаях цилиндр может оказаться неединственным.

1. Пусть $r, h > 0$ – высота и радиус некоторого цилиндра. Тогда

$$V = \pi r^2 h, \qquad S = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Построим экстремальную оценку. Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим трёх чисел имеем

$$S = \pi rh + \pi rh + 2\pi r^2 \geq 3\sqrt[3]{\pi rh \cdot \pi rh \cdot 2\pi r^2} = 3\sqrt[3]{2\pi^3 r^4 h^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Причём равенство достигается только при $\pi rh = 2\pi r^2$, т.е при $h = 2r$.

Таким образом, если $S = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$, то цилиндр задаётся однозначно.

2. Покажем, что при $S > 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ (или, что эквивалентно, $S^3 > 54\pi V^2$) цилиндр не определен однозначно.

Пусть $r_0 = \sqrt{S/2\pi} > 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = (S - 2\pi x^2)x/2$ при $x \in [0, r_0]$. Заметим, что $f(0) = f(r_0) = 0$, $f(r_0/\sqrt{3}) = \sqrt{\dfrac{S^3}{54\pi}}$.

По предположению $V^2 < S^3/54\pi = f^2(r_0/\sqrt{3})$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, найдутся такие $r_1 \in (0, r_0/\sqrt{3})$ и $r_2 \in (r_0/\sqrt{3}, 0)$, что $f(r_1) = f(r_2) = V$.

Примем теперь $h_1 = \dfrac{S - 2\pi r_1^2}{2\pi r_1}$, $h_2 = \dfrac{S - 2\pi r_2^2}{2\pi 2}$. Подстановкой убеждаемся, что площади полной поверхности каждого цилиндра (с радиусами основания r_1 и r_2) равны S, а также равны и их объёмы. Таким образом, найдено два различных цилиндра с одними и теми же значениями S, V.

Ответ: при условии $S^3 = 54\pi V^2$.

Задача 3.

Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами обладает свойствами

$$P(1) = 2019, \qquad P(2019) = 1, \qquad P(k) = k,$$

где число k целое. Найдите это число k.

Решение.

Так как многочлен $P(x)$ имеет целые коэффициенты, то $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$ для любых целых a и b.

Получаем, что

$$P(k) - P(1) = (k - 2019) \text{ делится на } (k - 1),$$
$$P(k) - P(2019) = (k - 1) \text{ делится на } (k - 2019).$$

Это может иметь место только при $|k - 1| = |k - 2019|$.

Решением полученного уравнения является $k = 1010$.

Ответ: $k = 1010$.

Задача 4.

На каждую грань куба установлена правильная 4-угольная пирамида, основанием которой является эта грань куба. Все пирамиды равны.

• 4А. Могут ли боковые ребра трех пирамид, исходящие из одной вершины куба, лежать в одной плоскости? Если это возможно, найдите высоты таких пирамид, выразив их через длину a ребра куба. Если это невозможно, приведите доказательство.

• 4В. Могут ли указанные в п. 4А тройки ребер лежать в плоскостях (каждая тройка — в своей плоскости) одновременно для всех вершин куба?

Решение.

Обозначим произвольную вершину куба A, вершины пирамид, соединенные с ней ребрами, O_1, O_2, O_3.

Введем систему координат, поместив ее начало в точку A и направив оси AX, AY и AZ вдоль сторон куба. Пусть основание пирамиды с вершиной O_1 лежит в плоскости AXY, основание пирамиды с вершиной O_2 – в плоскости AXZ и пирамиды с вершиной O_3 – в плоскости AYZ.

Пусть ребро куба равно $2c$, высота пирамид равна h. Тогда координаты вершин пирамид будут $O_1(c, c, -h)$, $O_2(c, -h, c)$, $O_3(-h, c, c)$.

Обозначим через B вершину куба с координатами $(2c, 0, 2c)$ (т.е. на диагональ AB проецируется вершина O_2). В силу симметрии сумма векторов

$AO_1 + AO_3$ будет лежать в плоскости ABY. В этой же плоскости лежит вектор AO_2. Если вершины O_1, O_1, O_3 лежат в одной плоскости, то пересечением этой плоскости с плоскостью ABY должна быть прямая.

Следовательно, вершины пирамид будут лежать в одной плоскости, если вектора $AO_1 + AO_3 = (c - h, 2c, c - h)$ и $AO_2 = (c, -h, c)$ коллинеарны.

Из условий коллинеарности

$$\frac{c-h}{c} = \frac{2c}{-h} = \frac{c-h}{c}$$

получаем, что должно выполняться $h(h - c) = 2c^2$, откуда либо $h = -c$, либо $h = 2c$. Первый корень не подходит согласно геометрическому смыслу h. Осталось вспомнить, что заданная в условии величиа $a = 2c$.

Ответ на вопрос Б) очевиден в силу симметрии.

Ответ: в А) и в Б) могут, если высоты всех пирамид равны a.

Задача 5.

Решите уравнение с тремя неизвестными

$$X^Y + Y^Z = XYZ$$

в натуральных числах.

Решение.

1) При $Y = 1$ получаем уравнение $X+1 = XZ$, следовательно $X(Z-1) = 1$, т.е. $X = 1$, $Z = 2$.

2) При $Y = 2$ уравнение принимает вид

$$(X - Z)^2 + 2^Z = Z^2.$$

При $Z = 1$ решений оно не имеет, а подставляя $Z = 2, 3, 4$, получим решения $(2; 2; 2)$, $(2; 2; 3)$ и $(4; 2; 3)$, $(4; 2; 4)$ соответственно. При $Z > 4$ решений нет, так как в этом случае $2^Z > Z^2$ (доказательство по индукции).

3) Остается случай $Y \geq 3$.

При $X = 1$, деля обе части данного уравнения на Y, получаем уравнение

$$Y^{Z-1} = Z - 1/Y,$$

которое, очевидно, не имеет натуральных решений.

Пусть далее $X \geq 2$. Докажем, что для этих X, $Y \geq 3$ и $Z \geq 1$ выполняются неравенства $X^Y \geq 2/3X^2Y$ и $Y^Z \geq 2/3YZ^2$.

Первое неравенство:

$$X^Y = X^{Y-2}X^2 \geq 2X^2 \geq 2/3X^2Y.$$

Второе неравенство проверяется непосредственно при $Z \leq 3$, а при $Z \geq 4$ имеем:

$$Y^Z \geq Y \cdot 3^{Z-1} = \frac{Y}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^Z \cdot 2^Z > \frac{2}{3}Y \cdot 2^Z \geq \frac{2}{3}YZ^2.$$

Наконец, применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим убеждаемся, что в рассматриваемом случае левая часть уравнения больше правой, т.е. решений нет:

$$X^Y + Y^Z \geq \frac{2}{3}Y(X^2 + Z^2) \geq \frac{4}{3}YXZ > XYZ.$$

Ответ: (1;1;2), (2;2;2), (2;2;3), (4;2;3), (4;2;4).