

ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ
ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА

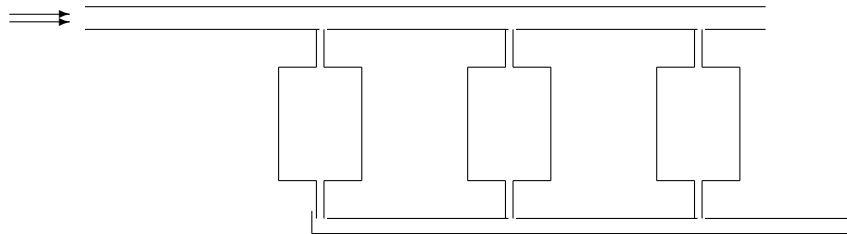
ВАРИАНТ 42091 для 9 класса

К 100-летию юбилею плана ГОЭЛРО ветераны завода «Электрогамбургер» соорудили в заводском парке надпись

СОВЕТЫ И ЭЛЕКТРОФИКАЦИЯ ЕСТЬ ОСНОВА НОВОГО МИРА

Каждая из 41 букв надписи была оформлена в виде маленького бассейна с цветным дном, так что рабочие, и управляющие, и окрестные жители могли из своих окон любоваться лозунгом прежних лет.

Для наполнения водой был проведен водопровод, схема которого (для конструкции из трех бассейнов) показана на рисунке ниже.



На каждом разветвлении (включая посленую букву) часть потока воды уходит дальше по магистральному водопроводу, а остальное идет к бассейну.

Каждый бассейн устроен таким образом, что пока он не заполнен, в него отбирается $1/3$ дошедшего до него потока воды, и вся эта вода остается в нем. Как только бассейн заполняется, в него начинает отбираться $1/10$ часть дошедшего до него потока воды, и вся эта вода свободно протекает через него (при этом объем воды в бассейне не изменяется).

Предположим, что в начальный момент времени (момент пуска воды) все бассейны пусты, интенсивность подачи воды на вход магистрали 50 л/мин, объем каждого бассейна 200 л.

1. Найдите время, за которое заполнились бы все бассейны, если бы их было только три.

2. Найдите время T , за которое заполнятся все буквы-бассейны надписи, приведенной выше. Ответ запишите в часах, минутах и секундах, округлив его до целого числа секунд.

3. Определите, какое количество букв-бассейнов будет заполнено в момент времени $T/2$.

РЕШЕНИЕ

1. Начнем со случая трех бассейнов. Процесс их заполнения состоит из трех этапов. Первый этап продолжается до заполнения первого бассейна, второй – до заполнения второго бассейна. Этапы отличаются друг от друга объемами воды, подаваемыми в каждый бассейн.

Обозначим интенсивность подачи воды в k -й бассейн через u_k , объем каждого бассейна через V ($V = 200$ л), интенсивность подачи воды в магистраль через u_0 ($u_0 = 50$ л/мин).

1.1. Согласно условию, до заполнения первого бассейна интенсивности заполнения каждого из них равны

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0, \quad u_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}u_0 \right) = \frac{2}{9}u_0, \quad u_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}u_0 \right) = \frac{4}{27}u_0.$$

Поскольку скорость заполнения и объем первого бассейна известны, можно найти время T_1 , за которое он будет заполнен без остатка.

$$T_1 = \frac{V}{u_1} = \frac{3V}{u_0}.$$

За это время во второй и третий бассейны поступит воды соответственно

$$W_2 = T_1 \cdot u_2 = \frac{3V}{u_0} \cdot \frac{2}{9}u_0 = \frac{2}{3}V,$$

$$W_3 = T_1 \cdot u_3 = \frac{3V}{u_0} \cdot \frac{4}{27}u_0 = \frac{4}{9}V.$$

1.2. Начиная с момента времени T_1 распределение воды и ее интенсивность станут другими, а именно (сохраним для них те же обозначения)

$$u_1 = \frac{1}{10}u_0, \quad u_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{10}u_0 \right) = \frac{3}{10}u_0, \quad u_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{2}{3}u_0 \right) = \frac{1}{5}u_0.$$

Теперь можно найти время, за которое дозаполнится второй бассейн.

$$T_2 = \frac{V - W_2}{u_2} = \frac{V \cdot 10}{3 \cdot 3u_0} = \frac{10}{9} \frac{V}{u_0}.$$

За это время в третий бассейн добавится объем воды, равный $T_2 \cdot u_3$, после чего в нем станет воды (снова сохраним обозначение W_3)

$$W_3 = \frac{4}{9}V + \frac{10}{9} \frac{V}{u_0} \cdot \frac{1}{5}u_0 = \frac{2}{3}V.$$

1.3. Остается дозаполнить третий бассейн. После момента времени T_2 интенсивность поступления воды в него станет (обозначаем ее по-прежнему)

$$u_3 = \frac{1}{3} \left(\frac{9}{10} \right)^2 u_0 = \frac{27}{100} u_0.$$

Следовательно, время дозаполнения составит

$$T_3 = \frac{V - W_3}{u_3} = \frac{V \cdot 100}{3 \cdot 27u_0} = \frac{100 V}{81 u_0}.$$

Таким образом, полное время наполнения всех трех бассейнов равно

$$T_1 + T_2 + T_3 = \left(3 + \frac{10}{9} + \frac{100}{81}\right) \frac{V}{u_0} = \frac{433 V}{81 u_0}.$$

Подставляя значения, получаем 21,38271... минут или (округляя до целого) 21 минута и 23 секунды.

2. Внимательное рассмотрение ситуации с тремя бассейнами позволяет описать процесс для произвольного их количества.

Пусть имеется n бассейнов. Тогда процесс будет идти в n этапов, каждый из которых будет заканчиваться заполнением очередного бассейна.

Рассмотрим j -й этап. Поскольку уже заполнено $(j - 1)$ бассейнов), то на первых $(j - 1)$ разветвлениях дальше по магистрали проходит по $\frac{9}{10}$ потока воды. На остальных (с j -го по n -й) далее проходит по $\frac{2}{3}$ потока воды. Поэтому интенсивность поступления воды в бассейны составит

$$u_k = \left(\frac{9}{10}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-j} \cdot \frac{1}{3} \cdot u_0.$$

Здесь k (номер бассейна) принимает значения от j до n , так как бассейны с 1-го по $(j - 1)$ -й уже заполнены.

Обозначим (как и раньше) через W_k объем воды, уже имеющийся в k -м бассейне к началу этапа. Тогда продолжительность j -го этапа будет равна

$$T_j = \frac{V - W_j}{u_j}.$$

За это время в каждый последующий бассейн добавится объем воды $T_j \cdot u_k$ (где k (номер бассейна) также принимает значения от j до n). Таким образом, после нахождения величины T_j необходимо пересчитать объемы

$$W_k = W_k + T_j \cdot u_k.$$

Перед началом расчета $W_k = 0$ для всех k от 1 до n .

Оформим описанные действия в виде алгоритма (см. след. стр).

Алгоритм "Лозунг"

начало алгоритма

задать u_0

ДЛЯ k от 1 до n

$W[k] := 0$

КОНЕЦ_ДЛЯ

$T_0 := 0$

ДЛЯ j от 1 до n

ДЛЯ k от j до n

$u[k] := \left(\frac{9}{10}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-j} \cdot \frac{1}{3} \cdot u_0$

КОНЕЦ_ДЛЯ

$T[j] := (V - W[j]) / u[j]$

ДЛЯ k от j до n

$W[k] := W[k] + T[j] \cdot u[k]$

КОНЕЦ_ДЛЯ

$T_0 := T_0 + T[j]$

КОНЕЦ_ДЛЯ

Вывести T_0

конец алгоритма

Запустив построенный алгоритм для $n = 41$, получим ответ на 2-й вопрос задания.

3. Для того, чтобы ответить на 3 вопрос, нужно прекратить вычисления, когда общее время T_0 после прибавления очередного слагаемого станет больше, чем величина $T/2$ (где T – ответ на второй вопрос).

Останов расчетов в такой момент будет означать, что очередной (j -й) бассейн заполнился позже момента времени $T/2$, а предыдущий ($(j - 1)$ -й) был заполнен еще до наступления этого момента.

Добавляя соответствующую строку в алгоритм непосредственно после увеличения T_0 и запуская его, получаем, что за половину всего времени будет заполнено доверху 34 бассейна.

Ответы (9 класс).

1. 21 минута и 23 секунды.
2. 44 часа 38 минут 12 секунд.
3. 34 бассейна.