Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап.

Задание по компьютерному моделированию

ВАРИАНТЫ 41101 и 41111 для 10 и 11 классов

Для того, чтобы и от бабушки уйти, и от дедушки уйти, Колобок совершил великий прыжок с подоконника. Оттолкнувшись, он полностью подчинил свою волю законам физики и двигался по инерции до полной остановки.

Попробуем промоделировать движение Колобка

Будем считать (вслед за специалистами по филологической физиологии), что Колобок имеет массу $m = 0.5\,кг$ кг и стартует с подоконника горизонтально с начальной скоростью $v_0 = 10\,\frac{м}{с}$. Пусть подоконник находится на высоте $H = 2\,м$ от поверхности земли. При каждом ударе о землю в тепло переходит $Q = 2\,Дж$ полной энергии Колобка, причём угол падения равен углу отражения. Если же полная энергия Колобка становится меньше Q, то при очередном ударе он останавливается.

Поверхность земли будем полагать горизонтальной и отсчитывать от нее потенциальную энергию. Возможным вращением Колобка в процессе его движения пренебрежем.

1. Определите длину первого и второго скачков Колобка.

2. Определите время, в течение которого будут происходить скачки, а также общее количество скачков Колобка.

3. Определите с точностью до 1 м, во сколько раз нужно увеличить начальную высоту H_0 подоконника, чтобы полное время движения увеличилось в 2 раза (если такое возможно).

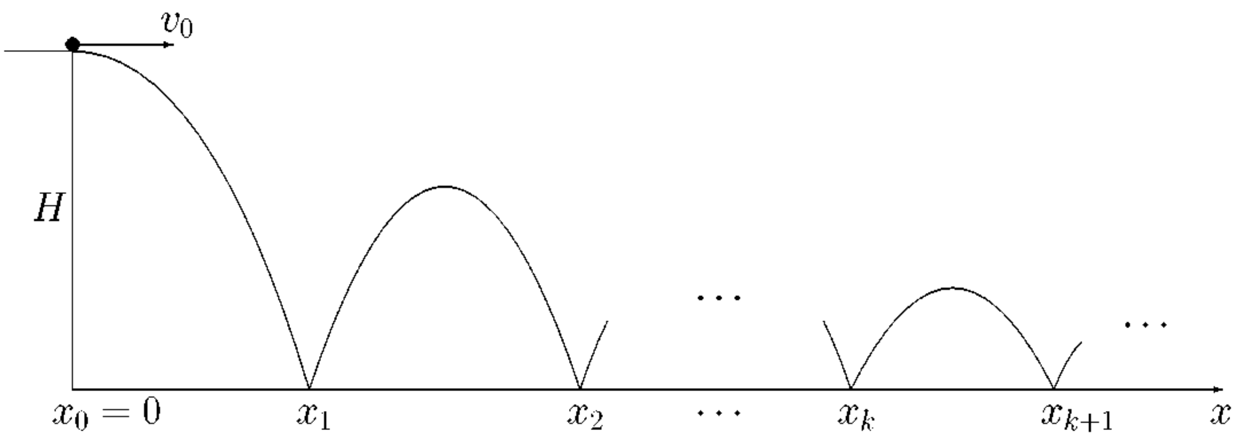
Дополнения

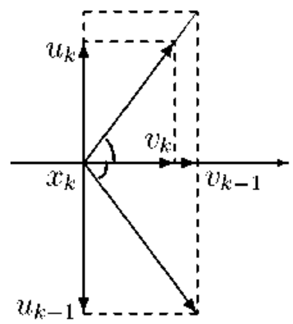
А. Значение ускорения свободного падения при расчетах следует взять равным $g = 9{,}807\,\frac{m}{c^2}$. Потенциальная энергия отсчитывается от поверхности земли.

Б. В приведенном выше описании скачущая голова рассматривается как материальная точка. Справедливости ради, следует заметить, что это достаточно грубое приближение, поскольку размеры головы (которые здесь не учитываются) сравнимы с первоначальной высотой ее падения. Тем не менее, полученные числовые результаты можно рассматривать как грубое, но адекватное приближение к соответствующим реальным показателям.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим координаты точек, в которых происходят последовательные удары о поверхность (отскоки) через x_k. При этом начало движения считаем в точке $x_0 = 0$. Через d_k обозначим расстояния между соседними точками отскоков ($d_k = x_k - x_{k-1}$), а через v_k и u_k – горизонтальную и вертикальную составляющие скорости отскока в точке x_k.





1. Рассмотрим сначала, что происходит при очередном ударе о поверхность. Если бы удар был абсолютно упругим, то (в силу равенства углов падения и отражения) сразу после удара составляющие скорости сохранили бы свои величины и, дополнительно, вертикальная сменила бы направление (см. рис). При неупругом ударе энергия уменьшится, следовательно скорость также уменьшится. Но поскольку направление отскока будет таким же, как и при абсолютно упругом ударе, то составляющие скорости должны измениться пропорционально, т.е. в одно и то же количество раз c_k :

$$u_{k+1} = c_k u_k , \qquad v_{k+1} = c_k v_k .$$

Если скорость изменяется в c_k раз, то кинетическая энергия изменяется как

$$E_{k+1} = m \cdot \frac{(c_k v_k)^2 + (c_k u_k)^2}{2} = m \cdot c_k^2 \cdot \frac{v_k^2 + u_k^2}{2} = c_k^2 E_k .$$

Найдем отношение энергии после и до удара. Если до удара энергия была равна E_{k-1}, то после, согласно условию, она составит $E_k = E_{k-1} - Q$. Значит, коэффициент уменьшения энергии равен

$$\alpha_k = \frac{E_k}{E_{k-1}} = 1 - \frac{Q}{E_{k-1}},$$

если $E_{k-1} \geq Q$. Если же $E_{k-1} < Q$, то вся энергия уйдет в тепло и движение прекратится. Это условие будет ниже условием прекращения расчетов.

Так как при ударе полная энергия равна кинетической, то коэффициент уменьшения скорости будет равен $c_k = \sqrt{\alpha_k} = \sqrt{1 - \frac{Q}{E_{k-1}}}$,

2. Теперь рассмотрим движение между двумя последовательными ударами о поверхность в точках x_k и x_{k+1}. Анализируя сначала движение только по вертикали, несложно найти время t_k подъема на максимальную высоту. Из уравнения $0 = u_k - g\tau_k$ получаем

$$\tau_k = \frac{u_k}{g}.$$

Это время равно половине полного времени движения между отскоками. Поэтому расстояние, пройденное по горизонтали, равно

$$d_k = 2v_k\tau_k = \frac{2v_k u_k}{g}.$$

Заметим, что следующий скачок (т.е. движение между точками x_{k+1} и x_{k+2}) будет описываться аналогичными формулами, а именно время подъема и длина скачка будут равны

$$\tau_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{g}, \quad d_{k+1} = \frac{2v_{k+1}u_{k+1}}{g}.$$

Пользуясь пропорциональностью составляющих скорости до и после удара, получаем отсюда

$$\tau_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{g} = \frac{c_k u_k}{g} = c_k\tau_k, \quad d_{k+1} = \frac{2v_{k+1}u_{k+1}}{g} = \frac{2c_k v_k c_k u_k}{g} = c_k^2 d_k.$$

Таким образом, нет необходимости рассчитывать время и длину каждый раз заново, а достаточно умножать предыдущую на коэффициент.

Поскольку время скачка $t_k = 2\tau_k$, то для него также справедлива полученная выше формула $t_{k+1} = c_k t_k$.

3. Перейдем к началу движения и найдем вертикальную составляющую скорости v_0, с которой объект первый раз ударился о поверхность. Ее несложно найти, например из закона сохранения полной энергии $mgH + \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m u_0^2}{2} + \frac{m v_0^2}{2}$. Получаем

$$u_0 = \sqrt{2gH}\ .$$

Время начального скачка t_0 найдем из уравнения вертикального движения

$$H = \frac{g\,t_0^2}{2}\ .$$

Получаем

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}\ .$$

Теперь можно найти длину первого скачка. Она будет равна

$$d_0 = v_0 t = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}\ .$$

Важно отметить, что первый скачок представляет собой только снижение, в то время как все остальные – сначала подъем, а затем снижение (т.е. первый скачок есть в некотором смысле «половина» полного скачка). Поэтому при расчете величин t_1 и d_1 по рекуррентным формулам, выведенным выше, их необходимо удвоить:

$$t_1 = 2c_0 t_0\,, \quad d_1 = 2c_0^2 d_0\,.$$

4. Осталось прояснить вопрос с условием остановки расчета, имеющим вид $E_{k-1} < Q$. Для этого достаточно найти входящую в него энергию. Она, очевидно, равна $E_{k-1} = m\cdot\frac{v_{k-1}^2 + u_{k-1}^2}{2}$.

Теперь можно писать

алгоритм

5. Сначала сформулируем алгоритм на естественном языке.

ДАНО: высота H, начальная скорость v_0, ускорение свободного падения g.
НАЙТИ: время движения T, пройденный путь S.
НАЧАЛО__АЛГОРИТМА

Найти время и длину начального скачка $t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, $d_0 = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Присвоить эти значения переменным T и S,

в которых будут накапливаться суммарное время и расстояние.

Найти вертикальную составляющую скорости перед первым ударом $u_0 = \sqrt{2gH}$.

Найти энергию перед первым ударом $E_0 = m \cdot \frac{v_0^2 + u_0^2}{2}$.

Инициализировать счетчик $k = 0$.

ПОКА ($E_k > 2$)

Увеличить счетчик $k = k + 1$.

Найти коэффициент уменьшения скорости $c = \sqrt{1 - \frac{Q}{E_{k-1}}}$.

Пересчитать скорость, время и расстояние следующего скачка:

$$v_k = c \cdot v_{k-1},\ u_k = c \cdot u_{k-1},\ t_k = c \cdot t_{k-1},\ d_k = c^2 \cdot d_{k-1}.$$

ЕСЛИ ($k = 1$) ТО удвоить величины $t_k = 2 \cdot t_k$, $d_k = 2 \cdot d_k$.

Пересчитать кинетическую энергию перед следующим ударом $E_k = c^2 \cdot E_{k-1}$

Увеличить время движения $T = T + t_k$.

Увеличить пройденное расстояние $S = S + d_k$.

КОНЕЦ_ПОКА

КОНЕЦ__АЛГОРИТМА

6. Теперь приведем алгоритм на псевдокоде, приближенном к некоторым современным алгоритмическим языкам.

Предварительно заметим, что индекс k (номер удара) можно не использовать у скоростей, времен и т.д. С точки зрения реализации алгоритма это означает, что можно обойтись простыми переменными для хранения только текущего значения данных параметров, а не массивами. (Фактически мы уже убрали индекс в коэффициенте c).

```
INPUT   H, V0, g
OUTPUT   T, S
BEGIN
        u := √(2gH) ,    v := V0
        t := √(2H/g) ,       d = v√(2H/g)
        T := t ,     S := d ,       E := m·(v² + u²)/2
        k := 0
        WHILE E > 2
        BEGIN
                k := k + 1.
                c := √(1 − Q/E) .
                v = c·v ,    u = c·u ,     t = c·t ,    d = c²·d .
                IF  k = 1  THEN
                BEGIN     t = 2·t ,  d = 2·d     END
                E = c²·E
                T = T + t
                S = S + d
        END
        RETURN   T,  S
END
```

7. Приведем еще один вариант алгоритма (на том же псевдокоде) с другой организацией расчетов. В нем характеристики каждого скачка вычисляются не по рекуррентным соотношениям, а по непосредственным формулам.

```
INPUT   H, g, V0
OUTPUT   T, S
BEGIN
```

$u := \sqrt{2gH}\,, \quad v := V_0$

$t := \sqrt{\dfrac{2H}{g}}\,, \qquad d = v\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$

$T := t\,, \qquad S := d$

$E := m \cdot \dfrac{v^2 + u^2}{2}$

$k := 0$

WHILE $E > 2$

BEGIN

$k := k + 1$.

$c := \sqrt{1 - \dfrac{Q}{E}}$.

$v = c \cdot v\,, \quad u = c \cdot u\,,$

IF $k = 1$ THEN BEGIN $t = 2 \cdot t\,,\ d = 2 \cdot d$ END

$T = T + \dfrac{2u}{g}$

$S = S + \dfrac{2vu}{g}$

$E := m \cdot \dfrac{v^2 + u^2}{2}$

END

RETURN T, S

END

В таком варианте алгоритма нет необходимости выводить рекуррентные соотношения (описанные в п. 2), что упрощает подготовительную часть. Однако общий объем вычислительной работы при выполнении алгоритма получается больше.

8. Напоследок заметим, что если вынести первый проход (при $k = 1$) из цикла и описать его отдельно перед началом цикла, то можно не вводить счетчик $k = 1$, т.к. более

он нигде не используется. Кроме того, экономится одна операция сравнения на каждом повторе цикла.

Ответ.

1. 12,04 м; 11,3 м.
2. 15,49 с; 111,24 м; 17 скачков.
3. 4,34 м.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап.

Задание по компьютерному моделированию

ВАРИАНТ 41991 для 9 классов

В канун дня всех святых каждая тыква города Альфавиль стремится очеловечиться и стать хотя бы пустой головой. Для этого ей достаточно удариться о землю, спрыгнув с высоты. Но даже если голова пуста, жизнь ее совсем не проста: она подчинена законам физики.

Попробуем промоделировать потрясающий процесс поразительного превращения. Для простоты будем считать голову (бывшую тыкву) материальной точкой.

Пусть голова имеет массу $m = 0.5\ кг$ и падает без начальной скорости с высоты $H = 2\ м$ от поверхности земли. При каждом ударе о пол в тепло переходит $Q = 2\ Дж$ ее полной энергии. Когда же полная энергия головы становится меньше Q, то при очередном ударе она останавливается.

1. Определите высоту первого и второго подскоков головы.

2. Определите время, в течение которого будут происходить прыжки, а также общее количество прыжков головы.

3. Определите (с точностью до 1 м), во сколько раз нужно увеличить начальную высоту H_0 головы, чтобы полное время ее движения увеличилось в 2 раза.

Дополнения

А. Значение ускорения свободного падения при расчетах следует взять равным $g = 9{,}807\ \frac{m}{c^2}$. Потенциальная энергия отсчитывается от поверхности земли.

Б. В приведенном выше описании скачущая голова рассматривается как материальная точка. Справедливости ради, следует заметить, что это достаточно грубое приближение, поскольку размеры головы (которые здесь не учитываются) сравнимы с первоначальной высотой ее падения. Тем не менее, полученные числовые результаты можно рассматривать как грубое, но адекватное приближение к соответствующим реальным показателям.

РЕШЕНИЕ.

Обозначим через v_k скорость после k-го отскока.

1. Рассмотрим сначала, что происходит при очередном ударе о поверхность. Если бы удар был абсолютно упругим, то при ударе скорость сменила бы направление на противоположное и сохранила бы свою величину. При неупругом ударе энергия уменьшится, следовательно скорость также уменьшится.

Пусть $v_{k+1} = c_k v_k$. Если скорость изменяется в c_k раз, то кинетическая энергия изменяется как

$$E_{k+1} = \frac{m v_{k+1}^2}{2} = \frac{m\,(c_k v_k)^2}{2} = c_k^2 E_k .$$

Найдем отношение энергии после и до удара. Если до удара энергия была равна E_{k-1}, то после, согласно условию, она составит $E_k = E_{k-1} - Q$. Значит, коэффициент уменьшения энергии равен

$$\alpha_k = \frac{E_k}{E_{k-1}} = 1 - \frac{Q}{E_{k-1}},$$

если $E_{k-1} \geq Q$. Если же $E_{k-1} < Q$, то вся энергия уйдет в тепло и движение прекратится. Это условие будет ниже условием прекращения расчетов.

Так как при ударе полная энергия равна кинетической, то коэффициент уменьшения скорости будет равен $c_k = \sqrt{\alpha_k} = \sqrt{1 - \frac{Q}{E_{k-1}}}$,

2. Теперь рассмотрим движение между двумя последовательными ударами о поверхность. Из уравнения $0 = v_k - g\,\tau_k$ найдем время t_k подъема на максимальную высоту

$$\tau_k = \frac{v_k}{g}.$$

Это время равно половине полного времени движения между отскоками.

Заметим, что следующий скачок будет описываться аналогичными формулами, а именно, время подъема будет равно

$$\tau_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{g}.$$

Пользуясь пропорциональностью скорости до и после удара, получаем отсюда

$$\tau_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{g} = \frac{c_k v_k}{g} = c_k \tau_k .$$

Таким образом, нет необходимости рассчитывать время каждый раз заново, а достаточно умножать предыдущее на коэффициент. Поскольку время скачка $t_k = 2\tau_k$, то для него также справедлива полученная выше формула $t_{k+1} = c_k t_k$.

3. Перейдем к началу движения. Найдем скорость v_0, с которой голова первый раз ударится о поверхность. Ее несложно найти, например из закона сохранения полной энергии $mgH = \frac{mv_0^2}{2}$. Получаем

$$v_0 = \sqrt{2gH}.$$

Время падения перед первым скачком t_0 найдем из уравнения вертикального движения $H = \frac{gt_0^2}{2}$. Получаем

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Важно отметить, что первый скачок представляет собой только снижение, в то время как все остальные – сначала подъем, а затем снижение (т.е. первый скачок есть в некотором смысле «половина» полного скачка). Поэтому при расчете времени t_1 по рекуррентным формулам, выведенным выше, его необходимо удвоить:

$$t_1 = 2c_0 t_0.$$

Теперь можно писать

алгоритм

5. Сначала сформулируем алгоритм на естественном языке.

ДАНО: высота H, ускорение свободного падения g.
НАЙТИ: время движения T.
НАЧАЛО__АЛГОРИТМА

Найти время первого падения $t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.

Присвоить эти значения переменным T и S,

в которых будут накапливаться суммарное время и расстояние.

Найти скорость перед первым ударом $v_0 = \sqrt{2gH}$.

Найти энергию перед первым ударом $E_0 = \frac{mv_0^2}{2}$.

Инициализировать счетчик $k = 0$.

ПОКА ($E_k > 2$)

Увеличить счетчик $k = k + 1$.

Найти коэффициент уменьшения скорости $c = \sqrt{1 - \dfrac{Q}{E_{k-1}}}$.

Пересчитать скорость и время следующего скачка: $v_k = c \cdot v_{k-1}$, $t_k = c \cdot t_{k-1}$,

ЕСЛИ ($k = 1$) ТО удвоить величины: $t_k = 2 \cdot t_k$, $d_k = 2 \cdot d_k$.

Пересчитать энергию перед следующим ударом $E_k = c^2 \cdot E_{k-1}$

Увеличить время движения $T = T + t_k$.

КОНЕЦ_ПОКА

КОНЕЦ__АЛГОРИТМА

6. Теперь приведем алгоритм на псевдокоде, приближенном к некоторым современным алгоритмическим языкам.

Предварительно заметим, что индекс k (номер удара) можно не использовать у скоростей, времен и т.д. С точки зрения реализации алгоритма это означает, что можно обойтись простыми переменными для хранения только текущего значения данных параметров, а не массивами. (Фактически мы уже убрали индекс в коэффициенте c).

INPUT *H, g*

OUTPUT *T, S*

BEGIN

$v := \sqrt{2gH}$, $t := \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$, $T := t$, $E := \dfrac{mv^2}{2}$ $k := 0$

WHILE $E > 2$

BEGIN

$k := k + 1$, $c := \sqrt{1 - \dfrac{Q}{E}}$, $v = c \cdot v$, $t = c \cdot t$,

IF $k = 1$ THEN $t = 2 \cdot t$ ENDIF

$E = c^2 \cdot E$, $T = T + t$

END

RETURN T

END

7. Приведем еще один вариант алгоритма (на том же псевдокоде) с другой организацией расчетов. В нем характеристики каждого скачка вычисляются не по рекуррентным соотношениям, а по непосредственным формулам.

INPUT $H, g,$

OUTPUT T

BEGIN

$$v := \sqrt{2gH}\,, \quad t := \sqrt{\frac{2H}{g}}\,, \quad T := t\,, \quad E := \frac{mv^2}{2}\,, \quad k := 0$$

WHILE $E > 2$

BEGIN

$$k := k + 1\,, \quad c := \sqrt{1 - \frac{Q}{E}}\,, \quad v = c \cdot v\,,$$

IF $k = 1$ THEN $t = 2 \cdot t$ ENDIF

$$T = T + \frac{2u}{g}\,, \quad E := \frac{mv^2}{2}$$

END

RETURN T

END

В таком варианте алгоритма нет необходимости выводить рекуррентные соотношения (описанные в п. 2), что упрощает подготовительную часть. Однако общий объем вычислительной работы при выполнении алгоритма получается больше.

8. Напоследок заметим, что если вынести первый проход (при $k = 1$) из цикла и описать его отдельно перед началом цикла, то можно не вводить счетчик $k = 1$, т.к. более он нигде не используется. Кроме того, экономится одна операция сравнения на каждом повторе цикла.

Ответ.

1. 3,7 м; 1,79 м.
2. 8,96 с; 9 скачков.
3. 3,25 м.