Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА ВАРИАНТ 41111 для 10 и 11 класса

Примерно за десятилетие до создания теории относительности Х.А. Лоренц установил, что в движущихся системах отсчета промежутки времени и длины объектов изменяются с изменением скорости движения системы. Формулы, описывающие эти изменения, имеют вид

$$\Delta t_0 = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad \Delta l = \Delta l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Здесь Δt – время, проходящее между двумя событиями с точки зрения неподвижного (стороннего) наблюдателя; Δt_0 – время, проходящее между теми же событиями с точки зрения движущегося (участвующего в событиях) наблюдателя; Δl и Δl_0 – длина объекта (вдоль направления движения), измеренная в движущейся и в неподвижной системах отсчета соответственно, c – скорость света (300 000 км/с).

Давайте попробуем подсчитать, сколько времени пройдет для космонавтов, решивших отправиться к какой-нибудь не очень далекой звезде.

Пусть свет от этой звезды доходит до нас за 5 лет (для простоты будем считать, что каждый год имеет продолжительность 365,25 суток). Предположим, что космолет стартует с нулевой скоростью, затем разгоняется с ускорением $a = 2\frac{\text{м}}{\text{c}^2}$ до скорости $u = 0.9c$ и летит часть пути с этой скоростью. Затем он начинает тормозить с тем же ускорением, так чтобы оказаться в окрестности звезды с нулевой скоростью.

Для поиска ответа на поставленный вопрос перейдем к дискретному времени. Это означает, что вместо непрерывного времени нужно использовать время, изменяющееся скачкообразно с некоторым шагом Δt, т.е. рассматривать только моменты времени, отстоящие от начального момента на $k \cdot \Delta t$ (k – произвольное натуральное число). Далее следует допустить, что между указанными моментами скорость космолета не изменяется, а все изменения происходят мгновенно в отмеченные моменты времени. Таким образом, весь процесс можно приближенно рассмотреть как последовательность равномерных движений. Понятно, что чем меньше будет значение шага дискретизации Δt, тем точнее будет расчет, т.е. тем меньше будет разница между «решением», полученным в ходе расчетов и точным решением исходной задачи. Для определения того, насколько подходящий шаг Δt выбран, можно поступить следующим образом. Проведем расчет с выбранным значением Δt, а затем с шагом $\dfrac{\Delta t}{2}$. Если результаты будут отличаться незначительно, то результат признаем удовлетворительным, в противном случае уменьшим величину Δt и повторим проверку. В нашей задаче будем считать подходящим различие не более, чем на 1%.

Итак, сколько же будет длиться полет (в одну сторону) для наблюдателя, оставшегося дома, и для космонавта, его совершившего?

Схема решения

1. Для начала найдем продолжительность трех этапов полета: разгона, движения с постоянной скоростью и торможения. Поскольку как начальная, так и конечная скорости равны нулю, первый и третий этапы будут иметь равную продолжительность. Эта продолжительность равна

$$T_0 = \frac{u}{a}.$$

За такое время будет пройдено расстояние

$$S_0 = \frac{u^2}{2a}.$$

За время торможения будет пройдено расстояние $S_3 = S_0$

Полное расстояние составит $L = c \cdot T_L$, где T_L – время, за которое свет от звезды доходит до земного наблюдателя. Оно равно 5 годам, выраженным в секундах.

Заметим, что возможны два варианта развития событий.

В первом случае $2S_0 < L$. Тогда на втором этапе будет пройдено расстояние

$$S_2 = L - 2S_0$$

и на это будет затрачено времени

$$T_2 = \frac{S_2}{u}.$$

Полное время полета в этом случае (для наблюдателя с Земли) составит

$$2\,T_0 + T_2.$$

Во втором случае $2S_0 > L$. Это означает, что космолет должен начать тормозить еще не достигнув крейсерской скорости u. За время разгона (и аналогично за время торможения) будет пройдено расстояние $\frac{L}{2}$, а на прохождение этого расстояния будет затрачено времени

$$T_0' = \sqrt{\frac{L}{a}}.$$

Соответственно, полное время полета в этом случае (для наблюдателя с Земли) будет равно $2\,T_0'$.

2. Теперь рассмотрим полет с точки зрения космонавта.

Пусть в некоторый момент времени t_k скорость космолета равна v_k. Тогда за время Δt будет пройден путь

$$S_k = v_k \cdot \Delta t + \frac{a_k \cdot (\Delta t)^2}{2},$$

где ускорение a_k равно a или $-a$ на этапах разгона и торможения, а на среднем этапе равно нулю.

Заметим, что при расчетах с малым значением Δt второе слагаемое можно не учитывать. Наличие ускорения будет учтено в изменении скорости:

$$v_{k+1} = v_k \pm a\Delta t.$$

На первом этапе движения (при разгоне) нужно будет последовательно увеличивать индекс k (начиная с нуля) и складывать пройденные за каждый период пути S_k. Этот процесс следует вести до тех пор, пока не выполнится одно из двух условий: либо пока скорость не станет равна крейсерской скорости u, либо пока не будет пройдена половина всего пути. Эти два условия соответствуют двум вариантам развития событий, описанным выше.

Пусть первый этап закончился и расстояние, вычисленное описанным выше способом, равно S_0. Следующей частью алгоритма должен быть расчет полета с неизменной скоростью u. Условием окончания этой части расчета можно поставить условие достижения расстояния $L-S_0$ от точки старта. При таком условии вторая часть алгоритма не будет исполняться, если $S_0 \geq L/2$, т.е. если от разгона следует переходить сразу к торможению.

Формулы подсчета расстояня на втором этапе приведены выше. Скорость же изменяться не будет.

Наконец, нужно рассчитать этап торможения. Формулы для скорости v_k и отрезков пути S_k не изменяются (с учетом того, что ускорение теперь отрицательное), а условием прекращения расчетов следует поставить достижение конечной точки, т.е. прохождение всего пути L.

Поскольку космонавт движется с изменяющейся до больших величин скоростью, для него каждый интервал времени Δt будет иметь разную длительность. Если обозначить их через T_k, то, согласно преобразованиям Лоренца,

$$T_k = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v_k^2}{c^2}}$$

Сложив все времена T_k, получим продолжительность полета для космонавта.

Оформим все вышесказанное в виде алгоритма (значок % в нем означает комментарий). Величины L, u, a, c считаются известными константами.

Алгоритм Полет

Вход: Δt; % шаг изменения времени

Выход: T; % общее время полета

начало алгоритма

$X := 0$; % пройденный путь

$T := 0$; % суммарное время

$v := 0$; % текущая скорость

ПОКА $(v \leq u)$ И $(X \leq L/2)$ % первый этап (разгон)

$$S := v \cdot \Delta t + \frac{a \cdot (\Delta t)^2}{2};$$

$$X := X + S;$$

$$v := v + a \cdot \Delta t;$$

$$Tk := \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

$$T := T + Tk;$$

конец_ПОКА

$S0 := X$; % расстояние, пройденное на первом этапе

ПОКА $(X \leq L - S0)$ % второй этап (может отсутствовать)

$$S := u \cdot \Delta t;$$

$$X := X + S;$$

$$Tk := \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}};$$

$$T := T + Tk;$$

конец_ПОКА

ПОКА $(X < L)$ % третий этап

$$S := v \cdot \Delta t - \frac{a \cdot (\Delta t)^2}{2};$$

$$X := X + S;$$

$$v := v - a \cdot \Delta t;$$

$$Tk := \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

$$T := T + Tk;$$

конец_ПОКА

конец алгоритма

3. Работу с алгоритмом следует организовать в соответствии с пояснениями в тексте задания.

Производится запуск алгоритма с некоторой величиной Δt на входе (например, $\Delta t = 1$ сутки). На выходе будет получено некоторое значение T_1. Затем на вход подается величина $\Delta t/2$ и на выходе получается другое значение T_2.

Если $\dfrac{|T_1 - T_2|}{T_2} \leq 0.01$ (это означает, что величины отличаются не более, чем на 1%), то значение T_2 (поскольку оно более точное) будет ответом на вопрос о времени (с точки зрения космонавта).

Если же $\dfrac{|T_1 - T_2|}{T_2} > 0.01$, то величина Δt уменьшается (например, делится пополам), и снова производится два запуска алгоритма, как описано выше.

При решении задания этот процесс можно было проводить вручную, а можно было написать еще один цикл двойных запусков.

Заключительные замечания

4. Числовые данные, которые должны были бы быть получены в результате выполнения описанных алгоритмов не приводятся. Их отсутствие следует рассматривать как стимул для повторной самостоятельной проработки задачи.

5. Описанная здесь релятивистская модель является очень упрощенной. Ее ни в коем случае не следует рассматривать как правильное детальное описание межзвездных перелетов.