ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА ВАРИАНТ 42111 для 11 класса

Рабочий день Харона Эребовича, перевозчика, начинается, когда солнце склоняется к западу. В это время он забирает в лодку всех собравшихся на берегу, садится на весла и перевозит на противоположный берег реки.

Рассмотрим этот процесс более подробно.

Для простоты будем считать русло прямолинейным с постоянной шириной $H = 200$ м. Пусть скорость течения u изменяется по мере приближения к середине реки и составляет $u(d) = 0,02 \cdot d \cdot (H - d)$ м/мин на расстоянии d м от берега. Предположим также, что пункт назначения B расположен ровно напротив пункта отправления A. Пусть частота гребли составляет 10 взмахов в минуту, а в стоячей воде лодка развивала бы скорость $w = 120$ м/мин.

Во время переправы лодку сносит течением. Чтобы попасть в нужное место, гребец, каждый раз опуская весла в воду, поворачивает лодку носом к пункту назначения. Размерами лодки пренебрежем. Движение лодки между гребками будем считать равномерным. Изменением скорости течения на расстоянии, проходимом лодкой между гребками, пренебрежем.

1. Определите положение лодки (по отношению к пункту A) через одну минуту после отчаливания.

2. Определите время, которое будет затрачено на достижение противоположного берега.

3. Определите, сможет ли лодка причалить в указанной точке B.
Если нет, то определите, на каком расстоянии от т. B она достигнет берега.

4. Определите максимальный снос лодки (относительно пункта отправления A) во время переправы.

УКАЗАНИЕ. Считайте любое «пересечение» линии противоположного берега причаливанием. Если после причаливания расстояние от лодки до пункта B составляет менее 5 м, считайте такую ситуацию попаданием в точку B (в 3 вопросе).

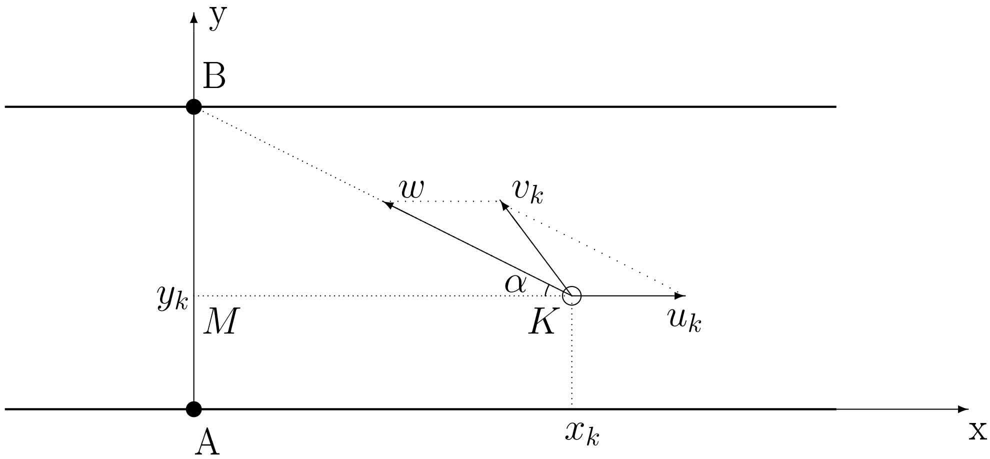
Московский энергетический институт (НИУ «МЭИ»)
Кафедра Математического моделирования, кафедра Прикладной математики
www.mathmod.ru www.appmat.ru

Решение. 11 класс

1. Введем систему координат, связанную с берегами реки. Пусть ось OX направлена по течению (прямолинейной) реки, ось OY – перпендикулярно берегу. Начало координат совместим с пунктом отправления A. Тогда пункт назначения B будет иметь координаты $(0, H)$.

Обозначим скорость реки через u, скорость лодки (относительно берегов) $v(t)$. Согласно условию, $u = u(y) = 0.02 \cdot y \cdot (H - y)$. Обозначим угол между направлением на пункт назначения и линией берега через α (см. рис).

Ясно, что все изменения в процессе движения лодки происходят в момент гребков, которые происходят с интервалом $\Delta t = 60/10 = 6$ секунд, поэтому достаточно рассматривать только моменты времени $t_k = k \cdot \Delta t$. Индексом k будем помечать величины, относящиеся к моменту времени t_k.



2. Рассмотрим сначала движение лодки между двумя гребками. Пусть в момент времени t_k лодка находилась в точке K с координатами (x_k, y_k).

Составляющая вектора перемещения, связанная только со сносом течением, равна $L_u = (u_k \Delta t, 0)$.

Составляющая вектора перемещения, связанная только с действиями гребца, равна $L_w = (-w \cos \alpha \Delta t, w \sin \alpha \Delta t)$.

Таким образом, координаты точки, в которой лодка окажется в момент следующего гребка, будут равны $K + L_u + L_w$:

$$x_{k+1} = x_k + u_k \Delta t - w \cos \alpha \Delta t,$$
$$y_{k+1} = y_k + w \sin \alpha \Delta t.$$

Остается найти угол α. Это несложно сделать, рассматривая прямоугольный $\triangle BKM$. Катет MK равен координате x_k, катет MB равен $H - y_k$, откуда $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{H - y_k}{x_k}$. Для уменьшения количества расчетных формул можно выразить синус и косинус угла α и подставить их в формулы.

$$\sin \alpha = \frac{H - y_k}{\sqrt{(H - y_k)^2 + x_k^2}}, \qquad \cos \alpha = \frac{x_k}{\sqrt{(H - y_k)^2 + x_k^2}}$$

Поэтому

$$x_{k+1} = x_k + u_k \Delta t - \frac{x_k\, w\, \Delta t}{\sqrt{(H-y_k)^2 + x_k^2}},$$
$$y_{k+1} = y_k + \frac{(H-y_k)\, w\, \Delta t}{\sqrt{(H-y_k)^2 + x_k^2}}. \qquad (*)$$

3. Теперь можно сформулировать базовый алгоритм расчета.

Алгоритм "Базовый"
Задать H, Δt; положить $x_0 := 0$, $y_0 := 0$;
ДЛЯ $k = 0, 1, 2, \ldots$
    Вычислить x_{k+1}, y_{k+1} по формулам $(*)$;
конец алгоритма

Этот основной алгоритм мы будем дополнять действиями, необходимыми для поиска ответов на вопросы задачи.

4. Для ответа на 1-й вопрос нужно найти x_{10}, y_{10}, поскольку за одну минуту происходит 10 взмахов веслами. Для этого достаточно выполнить 10 повторений цикла алгоритма (k от 0 до 9).

5. Для ответа на 2-й вопрос задачи нужно производить расчет до тех пор, пока y_{k+1} не окажется больше H. Это означает, что нужно использовать цикл ПОКА с условием продолжения $y_k < H$. Номер последнего шага k_H будет совпадать с количеством проделанных шагов. Тогда общее время переправы $T = k_H \cdot \Delta t$.

Соответствующий алгоритм примет вид

Алгоритм "Время переправы"
Задать H, Δt; положить $x_0 := 0$, $y_0 := 0$, $k := 0$;
ПОКА $y_k < H$
    Вычислить скорость течения $u_k := y_k \cdot (H - y_k)$;
    Вычислить x_{k+1}, y_{k+1} по формулам $(*)$;
    Увеличить счетчик $k := k + 1$;
КОНЕЦ_ПОКА
Вычислить общее время $T := k \cdot \Delta t$;
Вывести T;
конец алгоритма

6. Теперь, когда мы умеем определять номер шага, на котором лодка достигает берега, мы можем определить координату x_H точки причаливания. Сравнивая ее с координатой т. B (т.е. с нулем), получаем ответ на 3-й вопрос.

Расстояние от точки причаливания до нужной точки B равно $D = x_{k_H}$. Если $D \le \varepsilon$ (см. указания), то можно считать, что лодка причалила напротив места старта. Если же $D > \varepsilon$, то сама величина D будет ответом на дополнительный вопрос о расстоянии.

7. Наконец, для ответа на 4-й вопрос придется искать максимум. Положительное напраавление оси OX совпадает с направлением сноса. Ясно, что величина сноса (вдоль реки) в любой момент времени t_k равна координате x_k. Поэтому в основной цикл алгоритма нужно добавить поиск максимального значения среди величин x_k. Будем использовать для этого вспомогательную переменную $MaxX$, в ней же будет сохранено искомое максимальное значение.

Алгоритм теперь примет вид (значок % означает комментарий)

Алгоритм "Время переправы и снос"

Задать H, Δt; положить $x_0 := 0$, $y_0 := 0$, $k := 0$, $MaxX := 0$;

ПОКА $y_k < H$

    Вычислить скорость течения $u_k := y_k \cdot (H - y_k)$;

    Вычислить x_{k+1}, y_{k+1} по формулам $(*)$;

    Увеличить счетчик $k := k + 1$;

    ЕСЛИ $(x_k > MaxX)$ ТО $MaxX := x_k$;

КОНЕЦ_ПОКА

% теперь переменная k содержит количество повторний цикла

Вычислить общее время $T := k \cdot \Delta t$;

Вывести T;

ЕСЛИ $(|x_k| \le \varepsilon)$ ТО Вывести 'Попали'

ИНАЧЕ Вывести 'Промахнулись на ' + x_k

КОНЕЦ_ЕСЛИ

Вывести 'Максимальный снос = ' + $MaxX$;

конец алгоритма

8. Числовые данные, которые должны были бы быть получены в результате выполнения описанных алгоритмов не приводятся. Их отсутствие следует рассматривать как стимул для повторной самостоятельной проработки задачи.