Материалы заданий Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2016/2017 учебном году

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к усвоению образовательных программ технических ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления, умеющих математически "смоделировать" реальные ситуации из различных предметных областей и применить к ним наиболее подходящие математические методы.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на полное и безупречное решение. Они охватывают все разделы школьной программы, но носят, в большинстве, комплексный характер, позволяющий варьировать оценки в зависимости от проявленных в решении творческих подходов и продемонстрированных технических навыков. Участники должны самостоятельно определить разделы и теоретические факты программы, применимые в каждой задаче, разбить задачу на подзадачи, грамотно выполнить решение каждой подзадачи, синтезировать решение всей задачи из решений отдельных подзадач.

Успешное выполнение олимпиадной работы не требует знаний, выходящих за пределы школьной программы, но, как видно из результатов олимпиады, доступно не каждому школьнику, поскольку требует творческого подхода, логического мышления, умения увидеть и составить правильный и оптимальный план решения, четкого и технически грамотного выполнения каждой части решения, отбора допустимых решений из возможного их множества.

Умение справляться с такими заданиями приходит к участникам с опытом, который вырабатывается на тренировочном и отборочном этапах Олимпиады.

Решения вариантов заключительного этапа Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2016/2017 учебном году

Вариант 17111 для 11 класса

Задача 1

Финансовый аналитик энергетической компании после сложных расчетов с применением математических методов вычислил, что прибыль компании за 2016 год составила S миллионов рублей, где

$$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \cdots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ).$$

Совет директоров не удовлетворился этими сведениями и попросил аналитика указать не формулу вычисления S, а результат, т. е. конкретное число. Через 11 минут число S было получено. Каково оно?

Решение.

Заметим, что $2017^\circ = 11 \cdot 180^\circ + 37^\circ$ и выполним преобразования:

$$\lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \cdots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ) =$$
$$= \lg\left(10^{4+5+\ldots+20} \cdot \operatorname{tg} 37^\circ \cdot \operatorname{tg} 38^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 53^\circ\right) =$$
$$= \lg\left(10^{(4+20)\cdot\frac{17}{2}} \cdot (\operatorname{tg} 37^\circ \cdot \operatorname{tg} 53^\circ) \cdot (\operatorname{tg} 38^\circ \cdot \operatorname{tg} 52^\circ) \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 45^\circ\right) =$$
$$= \lg\left(10^{12\cdot 17} \cdot (1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1)\right) = 204.$$

Ответ: $S = 204$.

Задача 2

На тепловой электростанции запас газа ежемесячно меняется следующим образом. Если в текущем месяце запас равен x м^3, то в следующем месяце он будет равен $c - 2x$ м^3. Может ли запас газа оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца? Если это возможно, то какое значение имеет запас, одинаковый для двух разных месяцев?

Решение.

Пусть $f_n(x)$ — запас спустя n месяцев после некоторого фиксированного. Рассмотрим произвольную линейную функцию

$$f(x) = f_1(x) = a - bx, \quad b \neq -1$$

При этом

$$f_n(x) = (-b)^n x + a(1 - b + b^2 - b^3 + \cdots + (-b)^{n-1}).$$

Уравнение $f_n(x) = f_m(x)$, $m > n$, принимает вид

$$((-b)^n - (-b)^m)x = a((-b)^n + (-b)^{n+1} + \dots + (-b)^{m-1}).$$

Находим

$$x = \frac{a((-b)^m - (-b)^n)}{(-b-1)((-b)^n - (-b)^m)} = \frac{a}{b+1}.$$

Подставляя $a = c$ и $b = 2$, получаем $x = c/3$.

Ответ: для любых двух различных месяцев возможен одинаковый запас газа, он равен $x = c/3$ м^3.

Задача 3

Окружность S_1, которая касается параболы $y = x^2$ в ее вершине, имеет диаметр 1. Каждая из последующих окружностей $S_2, S_3, S_4, \dots$ касается внешним образом предыдущей окружности и ветвей параболы. Найдите радиус окружности S_{2017}.

Решение.

Пусть r_n – радиус n – ой окружности, $Q_n = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$.

Тогда центр $(n+1)$ – ой окружности находится в точке с координатами $(0, 2Q_n + r_{n+1})$, а ее уравнение имеет вид $x^2 + (y - (2Q_n + r_{n+1}))^2 = r_{n+1}^2$.

Условие касания этой окружностью ветвей параболы $y = x^2$ означает единственность решения уравнения $y + (y - (2Q_n + r_{n+1}))^2 = r_{n+1}^2$. После раскрытия скобок и приведения подобных уравнение приводится к виду

$$y^2 - (4Q_n + 2r_{n+1} - 1) + 4Q_n^2 + 4Q_n r_{n+1} = 0.$$

Его дискриминант должен быть равен нулю. Получаем

$$D = (4Q_n + 2r_{n+1} - 1)^2 - 4(4Q_n^2 + 4Q_n r_{n+1}) = (2r_{n+1} - 1)^2 - 8Q_n = 0,$$

откуда $r_{n+1} = \sqrt{2Q_n} + 1/2$. Так как $r_1 = 1/2$, то $r_2 = 3/2$, $r_3 = 5/2$ и т.д. по индукции получаем

$$r_{n+1} = (n+1) - \frac{1}{2}.$$

Поэтому $r_{2017} = 2016.5$.

Ответ: 2016,5.

Задача 4

Про положительные числа a, b, c известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$. Найдите наименьшее значение выражения $a + b + c$.

Решение.

Положим $x = 2a, y = 2b, z = 2c$. Тогда

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = 3.$$

Поэтому

$$a + b + c = \frac{1}{2}(x + y + z) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{yz} + y + \frac{y}{xz} + z + \frac{z}{xy} - 3\right).$$

По неравенству Коши для среднего арифметического и среднего геометрического $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$, следовательно,

$$x + \frac{x}{yz} + y + \frac{y}{xz} + z + \frac{z}{xy} \geq 3\left(\sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}\right) \geq 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\frac{xyz}{xyz}}} = 6.$$

Тогда $a + b + c = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{yz} + y + \frac{y}{xz} + z + \frac{z}{xy} - 3\right) \geq \frac{1}{2}(6 - 3) = \frac{3}{2}$.

Неравенства Коши $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ и $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ обращаются в равенства при $x = y = z$. С учётом этого условия неравенство

$$\sqrt[3]{xyz} + \sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \geq 2$$

обращается в равенство при $x = y = z = 1$. Таким образом, наименьшее значение выражения $a + b + c$, равное $\frac{3}{2}$, достигается при $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3}{2}$.

Задача 5

Для каждого натурального $n > 1$ пусть $S(n)$ означает число решений уравнения $\sin nx = \sin x$ на интервале $[0, \pi]$. Найдите явный вид зависимости $S(n)$ от n и определите, сколько раз $S(n)$ принимает значение 2017.

Решение.

По формуле разности синусов $\sin x - \sin nx = 2\cos\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{n-1}{2}x$, что обращается в 0 при $\cos\frac{n+1}{2}x = 0$ или при $\sin\frac{n-1}{2}x = 0$.

Из первого уравнения получаем $\frac{n+1}{2}x = \left(j + \frac{1}{2}\right)\pi$, откуда $x = \dfrac{(2j+1)\pi}{n+1}$ для любых целых j. Поскольку $x \in [0, \pi]$, то $j \in [0, n/2]$. Таким образом, в этом случае есть $1 + [\frac{n}{2}]$ решений, где $[a]$ обозначает целую часть числа a.

Второе уравнение имеет решение $\frac{n-1}{2}x = k\pi$, или $x = \dfrac{2k\pi}{n-1}$ для любых целых k. Поскольку $x \in [0, \pi]$, то $k \in [0, \frac{n-1}{2}]$. В этом случае есть $1 + [\frac{n-1}{2}] = [\frac{n+1}{2}]$ решений.

Однако среди решений первого и второго уравнения могут быть одинаковые, необходимо найти их. Решения будут совпадать, если $\dfrac{2j+1}{n+1} = \dfrac{2k}{n-1}$, откуда $k = \dfrac{(2j+1)(n-1)}{2(n+1)}$, что эквивалентно делимости нацело числителя на знаменатель. При чётных n это невозможно, так как числитель – нечётное число, а знаменатель – чётное.

Если $n = 3(\mod 4)$, тогда знаменатель кратен 8, а числитель кратен только 2, то есть этот случай также невозможен.

Рассмотрим оставшийся случай $n = 1(\mod 4)$. Условие «k – целое число» эквивалентно делимости $(2j+1)(n-1)/4$ на $(n+1)/2$. Докажем, что $(n-1)/4$ и $(n+1)/2$ взаимно просты. Действительно, если предположить, что у них есть общий делитель d, то $(n-1)/4 = ad$ и $(n+1)/2 = bd$. Вычтем из второго выражения удвоенное первое: $(n+1)/2 - 2(n-1)/4 = 1$, то есть $bd - 2ad = d(b-2a) = 1$. Отсюда следует, что $d = 1$. Следовательно, $(2j+1)$ делится на $(n+1)/2$, при этом $j \in [0, n/2]$, и с учётом нечётности n, $j \leq (n-1)/2$. Поэтому $2j+1 \leq n$, но $n < n+1 = 2(n+1)/2$, то есть $2j+1 \leq (n+1)/2$. Значит, единственный случай, когда $(2j+1)$ делится на $(n+1)/2$ – это случай, когда $2j+1 = (n+1)/2$, откуда $j = (n-1)/4$.

Таким образом, для каждого $n = 1(\mod 4)$ совпадает одно решение первого и второго уравнения.

В итоге, формула для $S(n)$ принимает вид:

$$S(n) = \begin{cases} 1 + [\frac{n}{2}] + [\frac{n+1}{2}], & n \neq 1(\mod 4) \\ [\frac{n}{2}] + [\frac{n+1}{2}], & n = 1(\mod 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+1, & n \neq 1(\mod 4) \\ n, & n = 1(\mod 4). \end{cases}$$

Поскольку $2017 = 1(\mod 4)$, то $S(2016) = 2016 + 1 = 2017$ и $S(2017) = 2017$. Значит, значение 2017 принимается 2 раза.

Ответ: а) $S(n) = \begin{cases} n+1, & n \neq 1(\mod 4) \\ n, & n = 1(\mod 4) \end{cases}$, б) 2 раза.

Вариант 17101 для 10 класса

Задача 1

Финансовый аналитик энергетической компании после сложных расчетов с применением математических методов вычислил, что прибыль компании за 2016 год, выраженная в миллионах рублей, удовлетворяет уравнению

$$12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35.$$

Должен ли совет директоров компании поверить этому?

Решение.

Найдем решения уравнения из условия задачи.

Положим $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, тогда $x^2y^2 = x^2+y^2$ и $xy > 0$. По условию, $x+y = \frac{35}{12}$, следовательно, $x^2+y^2+2xy = \left(\frac{35}{12}\right)^2$, т.е.

$$x^2y^2 + 2xy - \left(\frac{35}{12}\right)^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно xy и, учитывая, что $xy > 0$, получаем $xy = \frac{25}{12}$. Теперь x и y легко найти из системы уравнений

$$\begin{cases} xy = \frac{25}{12}, \\ x+y = \frac{35}{12}. \end{cases}$$

Таким образом, уравнение имеет два решения $x_1 = \frac{5}{4}$; $x_2 = \frac{5}{3}$. Но прибыль не может одновременно принимать два разных значения.

Ответ: нет, нельзя верить двусмысленным финансовым решениям.

Задача 2

На тепловой электростанции запас газа всегда остается положительным и ежемесячно меняется следующим образом. Если в текущем месяце запас равен x м^3, то в следующем месяце он будет равен $1/(1-x)$ м^3. Может ли запас газа оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца? Если это возможно, то какое значение имеет запас, одинаковый для двух разных месяцев?

Решение.

Пусть $f_n(x)$ — запас спустя n месяцев после некоторого фиксированного. Тогда

$$f_0(x) = x,\ f_1(x) = \frac{1}{1-x},\ f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = 1 - \frac{1}{x},$$
$$f_3(x) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - (1-x) = x.$$

Далее функции в последовательности f_n будут циклически повторяться, последовательность f_n периодическая с периодом 3, имеется всего три вида функций:

$$f_{3k}(x) = x,\ f_{3k+1}(x) = \frac{1}{1-x},\ f_{3k+2}(x) = 1 - \frac{1}{1-x}.$$

Если номера m и n имеют одинаковый остаток при делении на 3, то запасы $f_m(x)$ и $f_n(x)$ через m и n месяцев одинаковы при любых допустимых x (x может быть отрицательным, это значит, что запаса нет, а есть недостаток величины $(-x)$ м^3. Покажем, что при любых других парах m и n запасы через m и n месяцев не могут быть равны ни при каких x. Для этого рассмотрим три уравнения:

$$x = \frac{1}{1-x},\ x = 1 - \frac{1}{x},\ \frac{1}{1-x} = 1 - \frac{1}{x}.$$

Каждое из них преобразуется к квадратному уравнению $x^2 - x + 1 = 0$ с отрицательным дискриминантом.

Теперь рассмотрим условие положительности запаса. Из неравенств

$$x > 0, \quad \frac{1}{1-x} > 0$$

получаем, что $x \in (0, 1)$. Однако в указанном диапазоне $1 - \dfrac{1}{1-x} < 0$.

Поэтому условие положительности может быть выполнено только если месяцев не более двух. Но для двух соседних месяцев равенство запасов невозможно.

Ответ: нет.

Задача 3

Найдите все решения уравнения

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = 0.$$

Решение.

Уравнение имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x(x-1)\cdots(x-j+1)}{j!} = 0. \tag{1}$$

Пусть k — натуральное число, $k \le n$. Подставим $x = k$ в левую часть уравнения, получим

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!} = 0$$

(остальные слагаемые в левой части (1) обращаются в 0). Введем обозначение

$$C_k^j = \frac{k!}{j!(k-j)!}, \quad j = 0, \ldots, k.$$

Тогда

$$C_k^j = C_k^{k-j} = \frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{j!}, \quad C_k^0 = C_k^k = 1.$$

Докажем, что

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j = 0. \tag{2}$$

Отметим содержательный смысл чисел C_k^j — это количество j-элементных неупорядоченных подмножеств (j-сочетаний) k-элементного множества.

Рассмотрим **два способа** доказательства формулы (2).

Первый — вывести формулу бинома

$$(1+t)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j t^j \tag{3}$$

и из нее получить (2), полагая $t = -1$.

Рассмотрим выражение

$$(1+t)^k = \underbrace{(1+t)(1+t)\cdots(1+t)}_{k}.$$

Преобразуем это произведение скобок (сумм $(1+t)$) в сумму произведений. Каждое произведение в такой сумме содержит ровно k множителей, из которых ровно j множителей равны t, а остальные $k-j$ множителей равны 1, при этом $j = 0, \ldots, k$. Количество слагаемых вида $1^{k-j}t^j$ есть ровно C_k^j, это количество выбрать ровно j скобок $(1+t)$, из которых в произведение берется в качестве множителя слагаемое t. Таким образом, формула (3) доказана.

Замечание. Во многих школах формулу бинома проходя в 10-м и даже 9-ом классе. Если участник знает ее и использует, вывод не требуется; тот, кто не знает, может быстро ее вывести, как показано здесь, а может быть, другим способом (например, матем. индукцией по параметру k).

Второй способ. При нечетных k в (1) получаем

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor}(-1)^j (C_k^j - C_k^{k-j}) = (\lfloor k/2 \rfloor + 1)0 = 0,$$

что доказывает (2) при нечетных k.

Остается обосновать (2) при четных k. Для этого докажем тождество

$$C_k^j = C_{k-1}^{j-1} + C_{k-1}^j, \quad j = 1, \ldots, k-1 \tag{4}$$

(с его помощью строится треугольник Паскаля).

Рассмотрим $(k-1)$-элементное множество $U_1 = \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, k-элементное множество $U = U_1 \cup \{e_k\}$ и все j-сочетания для U. Число таких сочетаний равно, как отмечалось, C_k^j. Разобьем их на две непересекающиеся группы:
1) содержащие e_k,
2) не содержащие e_k.
Сочетания вида 1) — это $(j-1)$-сочетания элементов множества U_1, их количество равно C_{k-1}^{j-1}. Сочетания вида 2) есть j-сочетания м-ва U_1, их число равно C_{k-1}^j. Количества сочетаний вида 1) и вида 2) в силу непересечения групп дают в сумме C_k^j. Тождество (4) доказано.

Теперь рассмотрим четное k и сумму из левой части (2). Ее представим в виде

$$1 - (C_{k-1}^0 + C_{k-1}^1) + (C_{k-1}^1 + C_{k-1}^2) - \cdots - (C_{k-1}^{k-2} + C_{k-1}) + 1.$$

После элементарных преобразований останется

$$1 - C_{k-1}^0 - C_{k-1}^{k-1} + 1 = 0 + 0,$$

т. е. (2) верно и при четных k.

Можно даже при втором способе не разделять случаи четного и нечетного k, а вывести (2) индукцией по k.

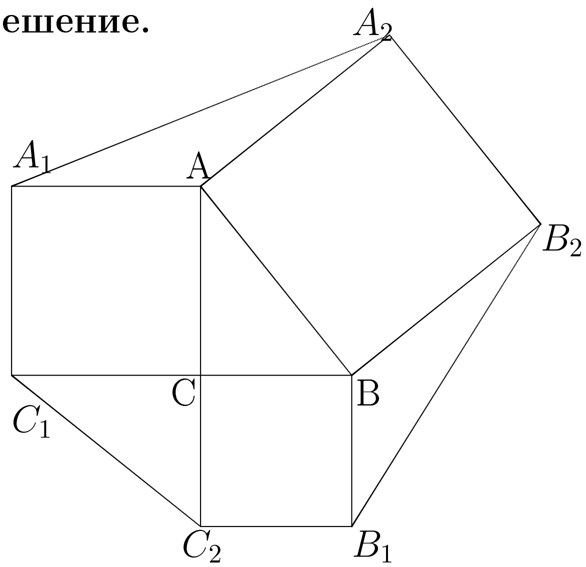
Таким образом, $x = k = 1, \ldots, n$ — корни уравнения. В левой части (1) многочлен степени n, уравнение не может иметь более n корней, значит $1, \ldots, n$ — все его корни.

Ответ: $x = 1, \ldots, n$.

Задача 4

Господин Бур Жуй, большой поклонник фэн-шуй, получил в наследство дом, представляющий собой в плане прямоугольный треугольник с катетами a и b. К каждой стороне треугольника он пристроил квадратные веранды. Те 6 вершин этих трех квадратов, которые не совпадают с вершинами треугольника, образуют шестиугольник. В этот шестиугольник и был в итоге превращен дом, который построил господин Бур Жуй. Найдите его площадь. При каком соотношении катетов a и b отношение площади нового дома к площади исходного будет минимальным.

Решение.



Если обозначить $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle CBA$, то
$\angle A_1AA_2 = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$, $\angle B_1BB_2 = \dfrac{\pi}{2} + \beta$. Поэтому площади треугольников A_1AA_2 и B_1BB_2 будут равны площади исходного трегольника ABC.

Треугольники C_1CC_2 и ABC равны (по двум катетам). Следовательно, равны их площади.

Итого, площадь всего шестиугольника равна

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} = 2\left(a^2 + b^2 + ab\right).$$

Б) Осталось найти $\min \dfrac{a^2 + b^2 + ab}{ab} = \min \dfrac{a^2 + b^2}{ab} + 1.$

Пусть $b = ka$. Будем искать k. Получаем новую задачу поиска

$$\min \frac{1 + k^2}{k} = \min \left(\frac{1}{k} + k\right).$$

Решение этой задачи известно. Сумма двух взаимно обратных величин всегда больше либо равна двум. Минимум (равный 2) достигается при $k = 1$.

Ответ. А) $S = 2\left(a^2 + b^2 + ab\right)$; Б) при $a = b$.

Задача 5

Прямоугольный параллелепипед $a \times b \times c$ составлен их кубиков со стороной 1. Сколько в нем можно выделить различных меньших параллелепипедов из таких кубиков?

Решение.

Параллелепипед однозначно определяется 3 ребрами, выходящими из одной вершины. Ребро фиксированного направления однозначно определяется 2 точками — началом и концом. Если есть $n + 1$ точка, то упорядоченную (одно значение всегда меньше другого) пару различных точек из них можно выбрать $n(n+1)/2$ способами. Выбор ребра каждого из 3 направлений не зависит от выбора ребер других направлений, поэтому все такие количества перемножаются. Один из такого числа параллелепипедов совпадает с исходным, поэтому результат надо уменьшить на 1.

Ответ: $\dfrac{abc(a+1)(b+1)(c+1)}{8} - 1.$

Вариант 17091 для 9 класса

Задача 1

Число x неизвестно, но известно число $A = x + \dfrac{1}{x}$.

a) Выразите через A числа $B_k = x^k + \dfrac{1}{x^k}$ для $k = 2, 3, 4, 8$.

b) Выясните, при каких A и x выполняются равенства

$$B_2 = B_4 = B_8.$$

c) При каких значениях x (и, соответственно, A) количество арифметических операций для вычисления B_2 минимально? Вычислите при найденных значениях x величину

$$C = \left(\left(x^{2017} + \frac{1}{x^{2017}}\right) \cdot \frac{1}{2}\right)^{2017}.$$

Решение. 1. Возводя A в степени 2,3, ..., несложно убедиться в справедливости формул

$$B_2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = A^2 - 2,$$

$$B_4 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = B_2^2 - 2 = (A^2 - 2)^2 - 2,$$

$$B_8 = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2 = B_4^2 - 2 = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2,$$

$$B_3 = B_2 \cdot A - B_1 = (A^2 - 2)A - A = A(A^2 - 3).$$

2. Пусть $B_2 = B_4$, тогда $B_2 = B_2^2 - 2$, откуда

$$B_2^2 - B_2 - 2 = (B_2 + 1)(B_2 - 2) = 0.$$

Если $B_2 = A^2 - 2 = -1$ то $A = \pm 1$. Покажем, что условия $A = x + 1/x = 1$ невозможны. Если $x > 0$, то $x + 1/x \geq 2$. Если же $x < 0$, то $x + 1/x < 0$.

Если $B_2 = A^2 - 2 = 2$, то $A = \pm 2$. Этим значениям A соответствуют $x = \pm 1$.

3. Минимальное число операций равно 1, оно соответствует значению $x = 1$. В этом случае нет необходимости вычислять степени и вычисления сводятся к одному сложению. Соответствующее значение $A = 2$,

$$C = ((1 + 1)/2)^{2017} = 1.$$

Ответ. 1. $B_2 = A^2 - 2$, $B_3 = A(A^2 - 3)$, $B_4 = (A^2 - 2)^2 - 2$, $B_8 = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2$.

2. $A = 2, x = 1$ или $A = -2, x = -1$.
3. $A = 2, x = C = 1$.

Задача 2

На тепловой электростанции запас газа всегда остается положительным и ежемесячно меняется следующим образом. Если в текущем месяце запас равен x м^3, то в следующем месяце он будет равен $6 - x$ м^3. Может ли запас газа в какой-то месяц составить точный квадрат запаса в другом месяце? Если это возможно, то при каком значении запаса и в какие месяцы?

Решение.
Пусть $f_n(x)$ — запас спустя n месяцев после некоторого фиксированного.
По условию
$$f_0(x) = x, \quad f_1(x) = 6 - x.$$
Простой проверкой (попробовав явно первые месяцы) получаем что
$$f_n(x) = x \text{ для четных } n,$$
$$f_n(x) = 6 - x \text{ для нечетных } n$$
Осталось рассмотреть четыре квадратных уравнения
$$\begin{aligned}
&x^2 = 6 - x,\\
&(6 - x)^2 = x,\\
&x^2 = x,\\
&(6 - x)^2 = 6 - x.
\end{aligned}$$
Их решения, соответственно, равны
$$\begin{aligned}
&x_1 = 2 \quad \text{(решение } x = -3 \text{ отбрасываем)}\\
&x_2 = 4, \quad \text{(решение } x = 9 \text{ отбрасываем, т.к. } 6 - 9 < 0)\\
&x_3 = 1, \quad \text{(решение } x = 0 \text{ отбрасываем)}\\
&x_4 = 5, \quad \text{(решение } x = 6 \text{ отбрасываем, т.к. } 6 - 6 = 0)
\end{aligned}$$

Ответ:
в любые два четных месяца $x_1 = 1$;
в любые два нечетных месяца $x_2 = 5$;
в любой четный и любой нечетный месяц $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.

Задача 3

Решите уравнение

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0.$$

Решение.

Перегруппируем слагаемые

$$\begin{aligned}
1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \\
= -(x-1) + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \\
= (x-1)\left(-1 + \frac{x}{2} - \frac{x(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right) = \\
= (x-1)\left(\frac{1}{2}(x-2) - \frac{x(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right) = \\
= \frac{1}{2}(x-1)(x-2)\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x(x-3)}{1\cdot 3\cdot 4}\right) = \\
= \frac{1}{2}(x-1)(x-2)\left(-\frac{1}{3}(x-3) + \frac{x(x-3)}{1\cdot 3\cdot 4}\right) = \\
= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4).
\end{aligned}$$

Отсюда сразу получаем все корни.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Задача 4

Дан произвольный треугольник ABC. Найдите такую точку O внутри треугольника, чтобы площади треугольников AOB, BOC, AOC относились как 1 : 2 : 3.

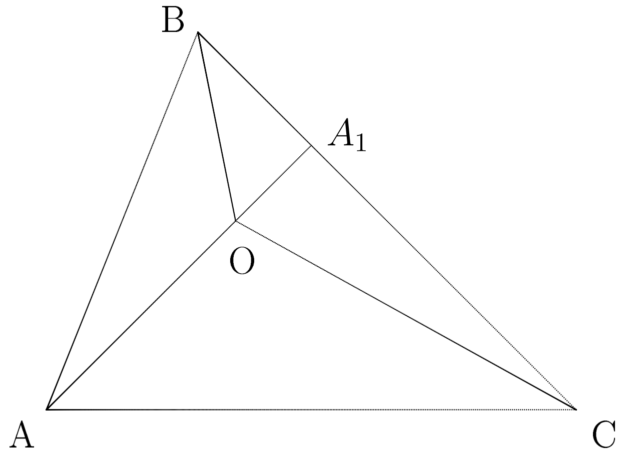
Решение.

Рассмотрим отрезок AA_1, содержащий искомую точку O (см. рис. ниже).

Площади треугольников $\triangle OBA_1$ и $\triangle OCA_1$ относятся друг к другу так же как длины отрезков BA_1 к CA_1 (т.к. имеют общую высоту, опущенную из т. O к прямой, содержащей названные отрезки).

То же самое верно для $\triangle ABA_1$ и $\triangle ACA_1$. Поскольку $\triangle ABA_1$ составлен из $\triangle OBA_1$ и $\triangle OBA$, а $\triangle ACA_1$ составлен из $\triangle OCA_1$ и $\triangle OCA$, то

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{S_{\triangle OBA}}{S_{\triangle OCA}} = \frac{3}{1}.$$



Рассуждая аналогично для отрезка BB_1 содержащего точку O, получаем, что

$$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{S_{\triangle OBA}}{S_{\triangle OCB}} = \frac{2}{1}.$$

Теперь достаточно построить точку A_1, делящую отрезок BC в отношении $1 : 3$ (считая от B) и точку B_1, делящую отрезок AC в отношении $1 : 2$ (считая от A). Пересечение отрезков AA_1 и BB_1 даст искомую точку O.

Несложно проверить, что отношения площадей всех трех указанных в условии треугольников удовлетворяют заданному соотношению.

Ответ: алгоритм поиска (построения) т. O дан в предпоследнем абзаце решения.

Задача 5

Квадратный трёхчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет дискриминант, равный 100. Сколько корней имеет уравнение $f(x) + f(x - 10) = 0$?

Решение.

График функции $f(x - 10)$ получается из графика функции $f(x)$ сдвигом на 10 вправо вдоль оси абсцисс.

Из формулы корней видно, что расстояние между корнями равняется квадратному корню из дискриминанта, то есть 10. Таким образом, оба графика функций $f(x)$ и $f(x - 10)$ пересекают ось абсцисс в одной и той же точке $(x_2; 0)$, где x_2 – больший корень уравнения $f(x) = 0$. Поэтому x_2 является корнем обоих уравнений, и, следовательно, корнем уравнения $g(x) = f(x) + f(x - 10) = 0$.

Графики функций $f(x)$ и $f(x-10)$ симметричны друг другу относительно вертикальной прямой $x = x_2$, и, значит, график функции $g(x)$ также симметричен относительно этой прямой. Поэтому если $g(x)$ имеет ещё какой-нибудь корень $x = a$, то корнем является и $x = -a$, с учётом корня x_2 получаем, что число корней нечётно. Но $g(x)$ – квадратный трёхчлен, и имеет не больше двух корней, следовательно, уравнение $g(x) = f(x) + f(x - 10) = 0$ имеет один корень.

Ответ: 1 корень.

Вариант 17081 для 8 класса

Задача 1
Найдите числа x, y, z из уравнений

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases}$$

Решение.
Раскладывая на множители, получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases} (x-1)(y-1)=2 \\ (y-1)(z-1)=3 \\ (z-1)(x-1)=6 \end{cases}$$

Перемножая все уравнения, имеем

$$(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2=36.$$

Ясно, что тройка чисел $x=1$, $y=1$, $z=1$ не является решением. Поэтому разделим полученное выражение на квадрат первого уравнения и получим

$$(z-1)^2=9,$$

откуда $z=4$ или $z=-2$.

Первому значению соответствуют $x=3$ и $y=2$; второму – $x=-1$ и $y=0$

Ответ. $\{x,y,z\}=\{-1,0,-2\}$ или $\{3,2,4\}$.

Задача 2
Число x неизвестно, но известно число $A=x+\dfrac{1}{x}$.

a) Выразите через A числа $B_k=x^k+\dfrac{1}{x^k}$ для $k=2,3,4,8$.

b) Выясните, при каких A и x выполняются равенства

$$B_2=B_4=B_8.$$

Решение. 1. Возводя A в степени 2, 3, …, несложно убедиться в справедливости формул

$$B_2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=A^2-2,$$

$$B_4=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=B_2^2-2=(A^2-2)^2-2,$$

$$B_8 = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2 = B_4^2 - 2 = ((A^2-2)^2-2)^2 - 2,$$

$$B_3 = B_2 \cdot A - B_1 = (A^2-2)A - A = A(A^2-3).$$

2. Пусть $B_2 = B_4$, тогда $B_2 = B_2^2 - 2$, откуда

$$B_2^2 - B_2 - 2 = (B_2+1)(B_2-2) = 0.$$

Если $B_2 = A^2 - 2 = -1$ то $A = \pm 1$. Покажем, что условия $A = x + 1/x = 1$ невозможны. Если $x > 0$, то $x + 1/x \geq 2$. Если же $x < 0$, то $x + 1/x < 0$.

Если $B_2 = A^2 - 2 = 2$, то $A = \pm 2$. Этим значениям A соответствуют $x = \pm 1$.

Ответ. 1. $B_2 = A^2 - 2$, $B_3 = A(A^2-3)$, $B_4 = (A^2-2)^2 - 2$, $B_8 = ((A^2-2)^2-2)^2 - 2$.
2. $A = 2, x = 1$ или $A = -2, x = -1$.

Задача 3

На завод привезли несколько энергосберегающих приборов суммарным весом 120 кг. Известно, что общий вес трёх самых лёгких приборов составил 31 кг, а трёх самых тяжёлых – 41 кг. Сколько энергосберегающих приборов привезли на завод, если веса любых двух приборов различны?

Решение.

Общий вес всех приборов, за исключением трёх самых лёгких и трёх самых тяжёлых, равен $120 - 31 - 41 = 48$ кг. Пусть этих приборов n штук. Вес каждого из них больше веса самого тяжёлого прибора среди трёх самых лёгких, а он (по принципу Дирихле) больше, чем $31/3$ кг.

Аналогично, вес каждого из n приборов меньше веса самого лёгкого прибора из трёх самых тяжёлых, который, в свою очередь, меньше, чем $41/3$ кг.

Имеем двойное неравенство

$$\frac{31}{3}n < 48 < \frac{41}{3}n,$$

которое равносильно неравенству $\dfrac{144}{41} < n < \dfrac{144}{31}$.

Единственное натуральное число в полученном промежутке – это число 4. Значит, $n = 4$, а всего завезли $3 + 3 + 4 = 10$ приборов.

Пример на 10 приборов легко строится: например, веса приборов в кг (в порядке возрастания) таковы:

$$29/3, 31/3, 33/3, 34/3, 35/3, 36/3, 39/3, 40/3, 41/3, 42/3.$$

Ответ. 10 приборов.

Задача 4

Два брата получили в наследство покос в форме прямоугольного треугольника, катеты которого соотносятся как 3 : 4. Чтобы разделить его, они выходят из вершины прямого угла (каждый по своему катету) и идут по краю покоса (по периметру) с одинаковой скоростью до встречи друг с другом. Точку встречи соединяют с началом их пути и получают две треугольные части.
А) Получились ли у братьев части одинаковой площади?
Б) Сколько существует различных прямоугольных треугольников с другим соотношением катетов, для которых построенные указанным способом части будут равны по площади?

Решение.

Согласно условию, дана точка на гипотенузе, которая делит периметр на две равные части (считая от вершины прямого угла).

Очевидно, что если катеты не равны друг другу, то эта точка делит гипотенузу на две неравные части.

При вычислении площадей двух полученных разбиением треугольников эти неравные части гипотенузы следует умножать на одну и ту же высоту (опущенную из прямого угла на гипотенузу). Поэтому площади не будут равны.

Ответ на вопрос Б) теперь очевиден.

Ответ А) нет. Б) Только один (по форме) – равнобедренный.

Задача 5

Рано утром включили насос и начали заполнять резервуар для горючего. В 10 ч утра включили второй насос, который начал откачивать горючее. В 12 ч в резервуар был заполнен наполовину, а в 14 ч резервуар заполнился на 2/3. Каким может быть время самого раннего включения первого насоса?

Решение.

Пусть до момента включения второго насоса первый проработал x часов. Пусть y – производительность первого насоса, а z – производительность второго насоса. Тогда

$$(x+2)y - 2z = 1/2,$$
$$(x+4)y - 4z = 2/3$$

или

$$xy + 2y - 2z = 1/2,$$
$$xy + 4y - 4z = 2/3.$$

Это линейная система относитально неизвестных (xy) и $(y-z)$. Решая ее, получаем

$$y - z = 1/12 \quad \text{и} \quad xy = 1/3.$$

Минимально возможное $y = 1/12$. Поэтому максимально возможное $x = 4$.

Ответ: 6ч утра.

Вариант 17071 для 7 класса

Задача 1

На автобазе 31 машина. Закуплено некоторое количество топлива из расчета a литров в неделю на каждую машину. Но получилось так, что каждую неделю одна из машин полностью выходила из строя, поэтому закупленного топлива хватило на двойной срок. Какое количество топлива было закуплено и на сколько времени оно было рассчитано?

Решение.

Пусть топливо было закуплено на y недель. Тогда расчетное количество топлива равно $31ay$ литров. Но в первую неделю было потрачено $31a$ литров, во вторую – $30a$ литров и так далее до $31-(2y-1)a$ литров, что в сумме дает

$$31a + 30a + \ldots + (31-(2y-1))a = \frac{31+31-2y+1}{2} \cdot 2y \cdot a = (63-2y)ay.$$

Остается решить уравнение

$$31ay = (63-2y)ay,$$

из которого получаем, что $y = 16$ (недель), на которые было закуплнено $31 \cdot 16 \cdot a = 496a$ литров топлива.

Ответ: было закуплено $496a$ литров топлва на 16 недель.

Задача 2

В гости были приглашены 20 человек. Екатерина танцевала с семью кавалерами, Ольга-с восемью, Ирина-с девятью и так далее до Алены, которая танцевала со всеми кавалерами. Сколько танцоров-кавалеров было приглашено в гости?

Решение.

Пусть в гостях было x девушек.

Первая (Екатерина) танцевала с $7 = 6+1$ кавалерами,
вторая – с $8 = 6+2$ кавалерами,
третья – с $9 = 6+3$ кавалерами.
Соответственно, x-я (Алена) – с $6+x$ кавалерами.

Таким образом, согласно условию, всего кавалеров было $6+x$, что в сумме с x девушками должно давать 20.

Из уравнения $6+x+x = 20$ находим $x = 7$. Это количество девушек. Значит, кавалеров было $20-7 = 13$.

Ответ: 13 танцоров-кавалеров было приглашено в гости.

Задача 3

Снег пошёл, когда часы на башне показывали z часов y минут (часы показывают время в формате от 00.00 до 23.59), и продолжал идти в течение x часов z минут. Когда снег перестал, на часах было y часов x минут. Найдите все возможные значения разности $x - y$.

Решение.

Число минут времени окончания снегопада $x = y + z + 60k$. Но поскольку $x < 60$, то $k = 0$ и $x = y + z$.

Число часов y времени окончания снегопада отличается от суммы $z + x = 2z + y$ на число, кратное 24 (число часов в сутках), то есть

$$y + 24m = 2z + y.$$

Отсюда $z = 12m$, а так как $z < 24$, то либо $z = 0$, либо $z = 12$.

Из равенства $x = y + z$ находим разность $x - y = z$.

Оба значения возможны: например, при $z = 0$: от момента 00.07 до момента 07.07 проходит ровно 7 часов; при $z = 12$: от момента 12.07 до момента 07.19 проходит 19 часов 12 минут.

Ответ: 0 или 12.

Задача 4

Два брата получили в наследство поле в форме прямоугольного треугольника, катеты которого соотносятся как 4 : 5, и разделили его по прямой линии, соединяющей вершину прямого угла с серединой противоположной стороны.

А) Получили ли братья части равной площади?

Б) Могут ли ограды, поставленные вокруг каждой части, иметь равную длину?

Решение.

Согласно условию, дана точка на гипотенузе, которая делит ее пополам.

При вычислении площадей двух полученных разбиением треугольников эти равные части гипотенузы следует умножать на одну и ту же высоту (опущенную из прямого угла на гипотенузу). Поэтому площади будут равны.

Тот же ответ можно получить без использования формулы площади треугольника. Для этого нужно опустить высоты из середины гипотенузы к катетам и увидеть, что получилось четыре одинаковых треугольника.

Б) Каждая ограда состоит из трех частей (сторон треугольников). Одна сторона у них общая, еще по одной равны (это половины гипотенузы), а третьи стороны – не равны (т.к. не равны катеты).

Ответ. А) да. Б) нет.

Задача 5

Что больше:

$$\frac{2,00000000004}{(1,00000000004)^2 + 2,00000000004}$$

или

$$\frac{2,00000000002}{(1,00000000002)^2 + 2,00000000002}\ ?$$

Решение.

Пусть $a = 1,00000000004$, $b = 1,00000000002$.

Требуется сравнить $\dfrac{1+a}{1+a+a^2}$ и $\dfrac{1+b}{1+b+b^2}$. Рассмотрим разность

$$\frac{1+b}{1+b+b^2} - \frac{1+a}{1+a+a^2} = \frac{a + a^2 + b + a^2b - b - b^2 - ab^2}{(1+b+b^2)(1+a+a^2)} =$$

$$= \frac{(a-b)(a+b+ab)}{(1+b+b^2)(1+a+a^2)}.$$

Каждая скобка в полученном выражении положительна, следовательно, вторая дробь больше первой.

Ответ: $\frac{2,00000000004}{(1,00000000004)^2+2,00000000004} < \frac{2,00000000002}{(1,00000000002)^2+2,00000000002}$.