37, 30, ... 32, 33

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

03111 МК

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Казаков

ИМЯ Александр

ОТЧЕСТВО Дмитриевич

Дата рождения 26.04.1999

Класс: 11

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Казаков

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$\lg(10^x \cdot tg(y)) = x + \lg(tg(y))$

$tg(y) =$ ~~$tg(360-y)$~~ $=$ ~~$tg(360 \cdot n$~~ $tg(y - 360 \cdot n)$ $n \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow t(2017) = tg(2017° - 1800°) = tg(217)$ и т.д.

$Tg(y) = tg(y - 180°) \Rightarrow tg(217) = tg(37°)$ и т.д.

~~Tg(y) = теперь у нас все углы~~ $tg(y) = ctg(90° - y)$ } ⇒

т.к. $\sin(y) = \cos(90° - y)$ и $\cos(y) = \sin(90° - y)$

$\Rightarrow tg(y) = \frac{1}{tg(90 - y)}$

После преобразований углов, мы получим:

37°, 38°, ... 52°, 53°

$\lg(x) + \lg(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow \lg(tg(y)) + \lg(tg(90 - y)) = 0$ ~

$37° + 53° = 90°$, $38° + 52° = 90°$ ⇒ у нас останется

только $tg(45°) = 1$ ⇒ ⊕

⇒ ~~ответ~~ $S = \frac{(4+20) \cdot 17}{2} + 0 = 204$ т.к. $\lg(1) = 0$.

№2.

пусть ~~т~~ $x_1 = x_2$ $x_2 = c - 2x_1 \Rightarrow c = 3x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}c$

Ответ: да, возможно, $x = \frac{1}{3}c$ ⊕

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 0311 11 МК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$\sin(nx) = x \Rightarrow$ либо $nx - 360 \cdot k = x$

где k - целое > -1,

либо $180 + 360 \cdot k - nx = x$

кол-во возможных k, где одно из уравнений истина и есть $S(n)$

1) $nx - 360 \cdot 0 = x \Rightarrow nx = x \quad x = 0$

$nx - 360 \cdot 1 = x \Rightarrow x = \frac{360}{n-1}$

$nx - 360 \cdot k = x \Rightarrow x = 360 \cdot \frac{k}{n-1}$

т.к. $x \leq 180 \Rightarrow \frac{k}{n-1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow k \leq \frac{n-1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во возможных $x = \left[\frac{n-1}{2}\right] + 1$, т.к. $x = 0 \Rightarrow$ корень.

$\Rightarrow$ кол-во решений $= \left[\frac{n+1}{2}\right] = (n+1)$ div 2 (целочисл деление)

2) $180 + 360 \cdot k - nx = x$

$x = \frac{180 \cdot (2k+1)}{n+1} \Rightarrow \frac{2k+1}{n+1} \leq 1$ т.к. $x \leq 180$.

$2k + 1 \leq n + 1 \qquad 2k \leq n \Rightarrow$ кол-во возм. $k = n$ div 2

, но если $\frac{2k+1}{n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 90^0$ и $180 + 360k - nx = 90$, а это 1 случай $\Rightarrow$ когда n mod $4 = 1 \Rightarrow$

n div $2 - 1$. и еще $+1$ т.к. $k = 0$ - корень $\Rightarrow$

if n mod $4 == 1$ else

n div 2 $\qquad n$ div $2 + 1$.

Теперь рассмотрим все N и $S(N)$, где N по модулю 4

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5

$n \bmod 4$ $\quad S(n) \quad S(n)$

0 $\quad (n+1) \text{ div } 2 + n(\text{div } 2) + 1 = n+1$

1 $\quad (n+1) \text{ div } 2 + n \text{ div } 2 = n$

2 $\quad n+1 \text{ div } 2 + n \text{ div } 2 + 1 = n+1$

3 $\quad n+1 \text{ div } 2 + n \text{ div } 2 + 1 = n+1$

+

$S(n) = 2017$ – $\quad 2017 \bmod 4 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = 2016, 2017$

рис 1

№ 3

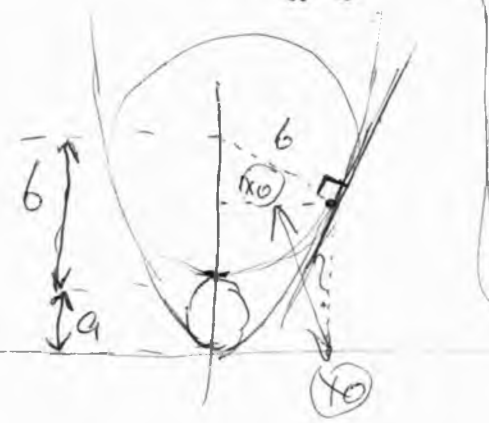
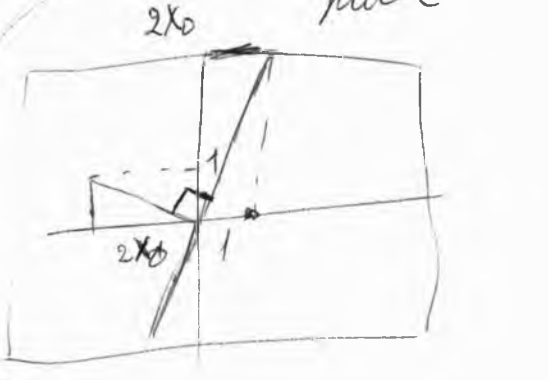


рис 2



~~Так~~ = чтобы S_i касалась $y = x^2$, то в точке x_0 касания их касательные должны совпадать ⇒

$\Rightarrow y_к = \cancel{2x - x^2} \; 2x_0x - x_0^2$?

b = радиус S_i; a – сумма диаметров остальных окружн.

по рис 2 видно? что $b = \frac{\sqrt{1+4x_0^2}}{2} = x_0^2 - a + 0{,}5$?

$2x_0^2 - 2a + 1 = \sqrt{1+4x_0^2} \qquad \boxed{x_0^2 > a}$

$4x_0^4 - 8x_0^2a + \cancel{4x_0^2} + 4a^2 - 4a \cancel{+1} = \cancel{1+4x_0^2}$

$4x_0^4 - 8x_0^2a + 4a^2 - 4a \Rightarrow x_0^4 - 2x_0^2a + a^2 - a.$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 0 31 11 МК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$x_0^4 - 2x_0^2 a + a^2 - a$

$\sqrt{D} = \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4a} = 2\sqrt{a}$

$x_0^2 = \frac{2a \pm 2\sqrt{a}}{2} = a \pm \sqrt{a}$, но $x_0^2 > a \Rightarrow x_0^2 = a + \sqrt{a}$.

$b = \sqrt{1 + 4x_0^2} \Rightarrow b = \sqrt{1 + 4a + 4\sqrt{a}}$

~~$b_1 = 0{,}5$~~

$b_2 = 3$

$b_3 = 5$

$b_4 =$

~~c_1~~ $a_1 = 1$ $\quad a_1 = c_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b_2 = \sqrt{1 + 4a_1 + 4\sqrt{a_1}} =$

$= \sqrt{1 + 4c_1^2 + 4c_1} = 2c_1 + 1$

$a_2 = c_1^2 + 2c_1 + 1 = (c_1 + 1)^2 \quad \underline{c_2 = c_1 + 1.}$

(индуктивно)

$b_i = 2c_{i-1} + 1 \quad \left.\begin{matrix} c_1 = 1 \\ c_i = c_{i-1} + 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$b_2 =$~~ $c_i = i$; $b_{2017} = 2 \cdot 2016 + 1 =$

$= \boxed{4033}$

Задача не решена

⊖

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

03411 МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17(11)

ФАМИЛИЯ Козаковцев

ИМЯ Владимир

ОТЧЕСТВО Львович

Дата рождения 25.03.1999

Класс: 11

Предмет Математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Каз

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. $\lg(10^{4}\,tg2017^\circ)+\lg(10^{5}\,tg2018^\circ)+\ldots+\lg(10^{20}\,tg2033^\circ)=$

$=\lg(10^{4+5+\ldots+20}\cdot tg2017^\circ\cdot\ldots\cdot tg2033^\circ)$; $tg(2017^\circ)=tg37^\circ$.

$\lg(10^{\frac{4+20}{2}\cdot 17}\,tg37^\circ\cdot tg38^\circ\cdot\ldots\cdot tg53^\circ)=\lg(10^{204})+\lg(tg37^\circ\cdot\ldots\cdot tg(90^\circ-37^\circ))$

$=204+\lg(tg45^\circ)$ (т.к. $tg\alpha\cdot tg(90-\alpha)=1$) $\Rightarrow$ $\bigoplus$

$204+\lg(1)=204$. Ответ: 204.

4.

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ (по н-ву Коши).

тогда

$\underbrace{(a+b+c)^3\geq 27abc=\frac{9}{2}(a^2+b^2+c^2)}$. $\Rightarrow$ чем меньше $(a^2+b^2+c^2)$, тем меньше может быть $a+b+c$.

Покажем, что минимальное значение выражения $a^2+b^2+c^2$ достигается в том случае, когда все переменные равны. Если $a=b=c$, то $a=b=c=\sqrt[3]{abc}=A$ – фиксированное число. Тогда $a^2+b^2+c^2=3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=A$, но по н-ву Коши $a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ $\Rightarrow$ (где $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=A$)

минимум $a^2+b^2+c^2$ достигается, когда $a=b=c$ (метод Штурма)

$\Downarrow$

$a^2+b^2+c^2=3a^2=6abc=6a^3\Rightarrow a^2=2a^3\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

тогда минимум $a+b+c=3a=\frac{3}{2}$. Ответ: $\frac{3}{2}$.

5. $\sin nx=\sin x$; $x\in[0;\pi]$. Тогда $nx=(-1)^k x+\pi k$. ~~$nx=x+2\pi k$~~

$x=\frac{\pi k}{n+(-1)^{k+1}}$; $x\geq 0$, $n+(-1)^{k+1}\geq 0\Rightarrow k\geq 0$.

при $n=1$. $k=2$. при $n>1$ $n+(-1)^{k+1}>0$.

~~[illegible]~~

т.к. $x \leq \pi$, $\frac{\pi k}{n+(-1)^{k+1}} \leq \pi \Rightarrow k \leq n+(-1)^{k+1}$.

$k \in [0; n+(-1)^{k+1}]$. ~~Очевидно, что е~~.

$x = \frac{\pi k}{n+(-1)^{k+1}}$. если $n > 3$, то при различных k корни не могут совпадать и тогда $S(n)$ = мощность множества k: [illegible].

пусть k_{max} – максимально возможное k для определённого n.

если $n \vdots 2$, то $k_{max} = n+1$ $\left(\left(\frac{\pi(n+1)}{n+(-1)^{n+2}}\right) = \pi\right)$ ∓

иначе $k_{max} = n$ $\left(\left(\frac{\pi n}{n+(-1)^{n+2}}\right) = \frac{n\pi}{n+1}\right)$.

$S(n) = k_{max}+1$ (+1 т.к. $k=0$ всегда решение).

$S(n) = \begin{cases} n+2, \text{ если } n \vdots 2 \\ n+1, \text{ если } n \not\vdots 2 \end{cases} \Rightarrow S(n)$ всегда четно $\Rightarrow$

$S(n) \neq 2017$.

при $n=1$ $x \in [0; \pi]$ – несчетное мн-во.

при $n=2$ $x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

при $n=3$ $S(n) \neq 2017$, $S(n) = 3$, $k = \{0; 2; 3\}$.

---

2. Пусть $x = c - 2x$. Тогда $x = \frac{c}{3}$.

В случае, когда запасы газа равны в двух подряд идущих месяцах и равны $\frac{c}{3}$, запасы газа равны во все месяцы

$x_{n+1} = c - 2x_n \Rightarrow x_n = \frac{c - x_{n+1}}{2}$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

в след. месяце запас газа будет ~~$4 - \frac{2C}{6+2\Delta}$~~ = ~~$\frac{4C+2\Delta}{6+2\Delta}$~~ = ~~$\frac{2C+\Delta}{3+\Delta}$. $\Rightarrow$ запас газа будет каждый раз увеличиваться~~

~~$C-2\frac{C}{3+\Delta}$, $\frac{2C}{3+\Delta} < \frac{2}{3}C \Rightarrow C-2\frac{C}{3+\Delta} > \frac{1}{3}C$.~~

$X_n = \frac{C - X_{n+1}}{2}$ $\Rightarrow$ ~~если $X_{n+1} > C$, то~~

~~$X_{n+1} > X_n > C$, иначе $C > X_n > X_{n+1}$. В этом слу-~~

~~чае $X_{n+k} \neq X_n$, т.к. X постоянно убывает или~~

~~возрастает.~~

$X_n = C - 2(C - 2(\ldots - 2X_0)\ldots) = (1-2+4-\ldots+(-2)^n)C + (-2)^n X_0$.

при разных n коэффициенты различны.

±

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЛИЦЕЙ № 18

Место проведения

ХЫ 23-45

шифр

← **Не заполнять**

Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ КАЛИНИНА

ИМЯ МАРГАРИТА

ОТЧЕСТВО ВИТАЛЬЕВНА

Дата рождения 27. 08. 2002.

Класс: 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017

(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Калинина

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

1) Найдём среднюю массу трёх самых лёгких ~~дета~~ при~~лей~~боров: $\frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$ кг

2) Найдём среднюю массу трёх самых тяжёлых приборов: $\frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}$ кг

3) Значит, средняя масса остальных приборов больше $10\frac{1}{3}$ кг и меньше $13\frac{2}{3}$ кг.

4) Найдём массу оставшихся приборов: $120-31-41=48$ кг.

5) Кол-во оставшихся приборов – целое число, причём оно больше 3, т.к масса 3 самых тяжёлых приборов равна 41 кг, это меньше 48.

Пусть кол-во приборов равно 4. Тогда их средняя масса: $\frac{48}{4} = 12$ кг. Это соответствует условию, т.к. $10\frac{1}{3} < 12 < 13\frac{2}{3}$.

Если кол-во приборов будет больше 4, то их средняя масса будет меньше $10\frac{1}{3}$ кг: $\frac{48}{5} = 9\frac{3}{5} < 10\frac{1}{3}$ кг. Значит, кол-во оставшихся приборов могло быть только 4. Соответственно кол-во всех приборов: $3+3+4=10$ шт.

Ответ: 10 приборов.

+

№4.

а) Если катеты прямоугольного треугольника относятся 3 : 4, то его гипотенуза равна $\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$ частей, т.е. стороны этого треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Пусть у братьев получились части одинаковой площади. Каждый из них прошёл $\frac{3+4+5}{2} = 6$ частей, т.е. по гипотенузе один из них прошёл $6-3=3$ части, а другой $6-4=2$ части. Но у этих треугольных частей есть общая высота h (см. рисунок).

Значит, их площади относятся как отно- [illegible] Следовательно, у братьев

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~получились части разной площади.~~

Ответ: части у братьев получились разной площади.

в) Если построенные таким образом части будут равны по площади, то их основания будут равны, т.к. у этих частей есть общая высота. Следовательно, братья должны были одновременно закончить свои пути по катетам. Но так может быть только в том случае, если катеты равны, т.е их отношение равно 1 : 1, т.е треугольник будет прямоугольный равнобедренный.

Ответ: существует бесконечно много прямоугольных равнобедренных треугольников, но соотношение их катетов всегда будет равно 1 : 1.

№ 5.

1) Т.к в 12 ч резервуар был заполнен наполовину, а в 14 ч – на $\frac{2}{3}$, то за 14 − 12 = 2 ч резервуар заполнился на $\frac{1}{2}^{(3} - \frac{2}{3}^{(2} = \frac{1}{6}$.

2) 1-ый насос будет включён как можно раньше при условии, что 2-ой насос не будет работать. Следовательно, за 2 ч 1-ый насос заполняет $\frac{1}{6}$ резервуара, т.е за 1 ч он заполняет $\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{12}$ резервуара. Значит, его включили в $12 - (\frac{1}{2} : \frac{1}{12}) = 12 - 6 = 6$ ч.

Ответ: в 6 ч.

(+)

№ 2.

$A = x + \frac{1}{x}$

а) $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1^2}{x^2} = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 -$

$- 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} =$ ~~$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = A^2 - 2$~~ $= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = A^2 - 2$

$B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1^3}{x^3} = x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right) =$

$= A \cdot (A^2 - 2 + 1) =$

~ 2.

$= A\cdot(A^2-1)=A^3-A=A\cdot(A^2-1^2)=A(A-1)(A+1)$

$B_4=x^4+\frac{1}{x^4}=x^4+\frac{1^4}{x^4}=x^4+\left(\frac{1}{x}\right)^4=x^4+\left(\frac{1}{x}\right)^4+4\cdot\frac{1}{x^3}\cdot x+$

$+6\cdot\frac{1}{x^2}\cdot x^2+4\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3-4x^3\cdot\frac{1}{x}-6\cdot\frac{1}{x^2}\cdot x^2-4x\cdot\frac{1}{x^3}=$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-4x^2-6-\frac{4}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-6-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=$

$=A^4-4(A^2-\overset{2}{A})-6=$ ~~A^4-4A^2+4A-6~~ $A^4-4A^2+8-6=$
$=A^4-4A^2+2$

Ответ: $B_2=A^2-2$, $B_3=A^3-A$, $B_4=A^4-4A^2+2$

в) $B_2=B_4=B_8$

$A^2-2=A^4-4A-6$

$A^4-A^2-4A-4=0$

$(A^2)^2-A^2-4A-4=0$

$A^2(A^2-1^2)-4(A+1)=0$

$A^2(A-1)(A+1)-4(A+1)=0$

$(A+1)(A^2(A-1)-4)=0$

$(A+1)(A^3-A^2-4)=0$

$A=-1$ или $A^3-A^2-4=0$

$A^2(A-1)=4$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$x^2+\frac{1}{x^2}=-1$

$A=2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=2 \Rightarrow x=1$

Такого быть не может, т.к. $x^2\geqslant 0$ и $\frac{1}{x^2}\geqslant 0$

±

Ответ: при $A=2$ и $x=1$

~ 1.

$$\begin{cases}1+x+y=xy\\2+y+z=yz\\5+z+x=zx\end{cases}$$

1) $1+x+y=xy$

$x(y-1)=1+y$

$x=\frac{y+1}{y-1}$ ($y\neq 1$, т.к. если $y=1$, то $2+x=x \Rightarrow \varnothing$)

2) $2+y+z=yz$

$z(y-1)=2+y$

$z=\frac{y+2}{y-1}$ ($y\neq 1$)

3) $5+z+x=zx$

$5+\frac{y+2}{y-1}+\frac{y+1}{y-1}=zx$

$5+\frac{2y+3}{y-1}=\left(\frac{y+2}{y-1}\right)\cdot\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$

$\frac{5}{1}^{\backslash (y-1)^2}+\frac{2y+3}{y-1}^{\backslash (y-1)}-\frac{y^2+2y+y+2}{(y-1)^2}=0$

$\frac{5(y^2-2y+1)+2y^2+3y-2y-3-y^2-3y-2}{(y-1)^2}=0$

$\frac{5y^2-10y+5+y^2-2y-5}{(y-1)^2}=0$

$\frac{6y^2-12y}{(y-1)^2}=0$

Т.к $(y-1)^2\neq 0$, то

$6y^2-12y=0 \quad |:6$

$y^2-2y=0$

$y(y-2)=0$

$y=0$ или $y-2=0$

$y=2$

1. Если $y=0$, то

$\begin{cases}1+x=0\\2+z=0\end{cases}$

$\begin{cases}x=-1\\z=-2\end{cases}$

2. Если $y=2$, то

$\begin{cases}3+x=2x\\4+z=2z\end{cases}$

$\begin{cases}x=3\\z=4\end{cases}$

(+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

ГФ 46-43

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Карпицков

ИМЯ Дмитрий

ОТЧЕСТВО Юрьевич

Дата рождения 03. 11. 2000

Класс: 10

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11. 02. 2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№2.

$$\left.\begin{aligned}&\overline{I}\text{ м.} = x\text{ м}^3\\&\overline{II}\text{ м.} = \frac{1}{1-x}\text{ м}^3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{III}\text{ м.} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = -\frac{1}{x}+1 = 1-\frac{1}{x}\text{ м}^3$$

$$\overline{IV}\text{ м.} = 1-\frac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1-1+x = x\text{ м}^3$$

Цикл повторяется каждые 3 месяца => запасы газа в разные месяцы может быть равными.

Допустим а - номер одного из месяцев, с - номер другого. Тогда если остаток при а:3 равен остатку с:3, то запас газа в месяце а и в месяце с будет равным.

Если это утверждение не верно, тогда $x = \frac{1}{1-x}$;

$x = \frac{1-x}{-x}$; $\frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{-x}$

$x = \frac{1}{1-x}$ $\quad$ $x = \frac{1-x}{-x}$ $\quad$ $\frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{-x}$

$x^2 - x + 1 = 0$ $\quad$ $-x^2 = 1-x$ $\quad$ $1-2x+x^2 = -x$

$\quad$ $x^2 - x + 1 = 0$ $\quad$ $x^2 - x + 1 = 0$

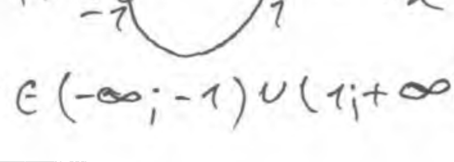
$D < 0$ $\quad$ $D < 0$ это верно $D < 0$ $\quad$ об ?! +

№1.

$$12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35$$

ОДЗ: $x^2 - 1 > 0$ $\quad$ $\sqrt{x^2-1} \neq 0$

$(x-1)(x+1) > 0$



$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Пусть $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=y \Rightarrow y^2=\frac{x^2}{x^2-1}$

$y^2x^2=x^2+y^2$

$12x+12y=35 \quad |:12$

$x+y=\frac{35}{12}$

$(x+y)^2=\left(\frac{35}{12}\right)^2$

$x^2+2xy+y^2=\frac{1225}{144}$

$x^2+y^2+2xy=\frac{1225}{144}$

$y^2x^2+2yx-\frac{1225}{144}=0$

$yx=t, \ t>0$

$t^2+2t-\frac{1225}{144}=0$

$D=4+4\cdot\frac{1225}{144}=\frac{1369}{36}$

$t_1=\frac{\frac{37}{6}-\frac{12}{6}}{2}=\frac{25}{12}$

$t_2=\frac{-\frac{37}{6}-\frac{12}{6}}{2}=-\frac{49}{12}$ – не удв. усл. $t>0$

$\begin{cases} xy=\frac{25}{12} \\ x+y=\frac{35}{12} \end{cases}$ $\quad y=\frac{35}{12}-x \quad x\cdot\left(\frac{35}{12}-x\right)=\frac{25}{12}$

$x^2-\frac{35}{12}x+\frac{25}{12}=0 \quad |\cdot 12$

$12x^2-35x+25=0$

$D=1225-4\cdot25\cdot12=25$

$x_1=\frac{35+5}{24}=\frac{40}{24}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

$x_2=\frac{35-5}{24}=\frac{30}{24}=\frac{5}{4}$

Ответ: верить финансовому аналитику нельзя, так прибыль не определяется однозначно.

+

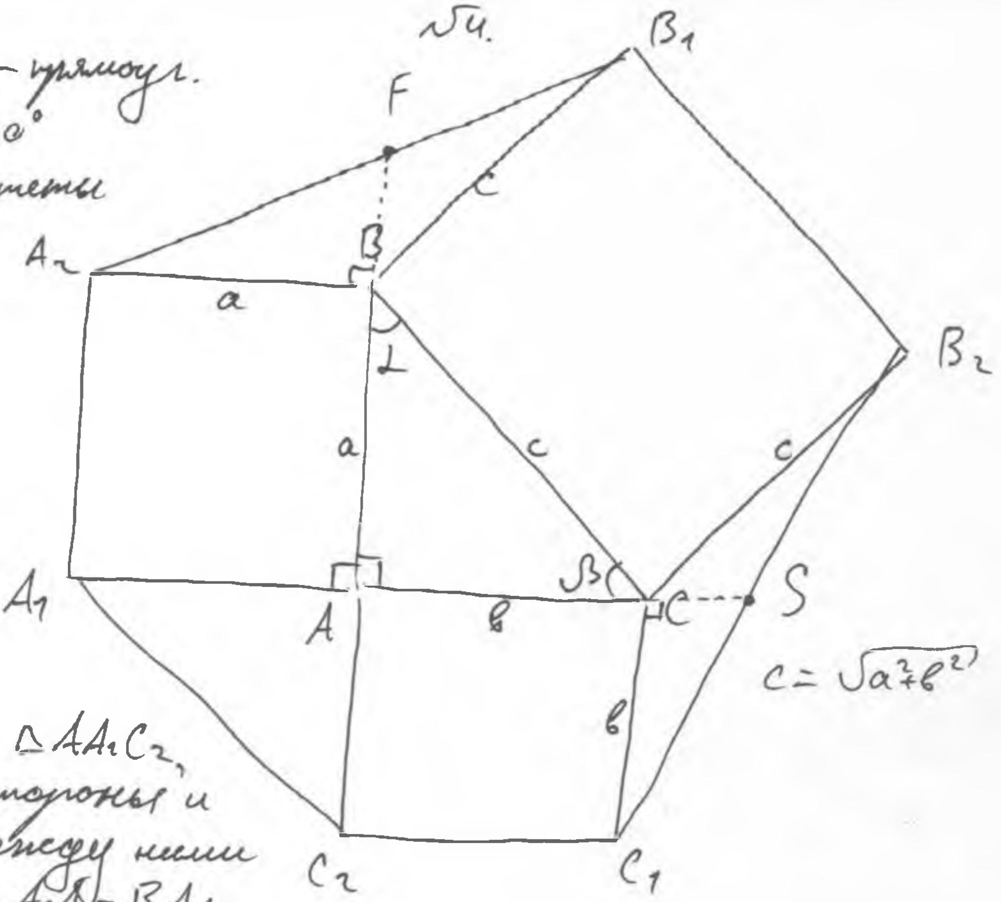
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Δ ABC - прямоуг.

$\angle BAC = 90°$

a; $в$ - катеты



$c = \sqrt{a^2+в^2}$

$\Delta ABC = \Delta AA_1C_2$, т.к. 2 стороны и угол между ними равны. $A_1A = BA$;

$C_2A = AC$; $\angle BAC = \angle A_1AC_2$

Сумма углов Δ-ка $ABC = 90° + \alpha + \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

$\angle FBA$ - развёрнутый угол $\Rightarrow \angle FBA = 180° = \angle FBB_1 + 90° + \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FBB_1 + \alpha = 90° = \alpha + \beta \Rightarrow \angle FBB_1 = \beta \Rightarrow \angle SCB_2 = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\Delta A_2B_1B} = S_{\Delta B_2C_1C} = S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AA_1C_2} = \frac{aв}{2}$

$S_{A_1A_2B_1B_2C_1C_2} = a^2 + в^2 + c^2 + 4\frac{aв}{2} = 2a^2 + 2в^2 + 2aв =$

$= 2(a^2 + aв + в^2)$

$$\frac{2(a^2+aв+в^2)}{\frac{aв}{2}} = \frac{4(a^2+aв+в^2)}{aв}$$

Отношение площадей будет минимальным, когда $\frac{aв}{4(a^2+вa+в^2)}$ стремится к 1. т.е.?

±

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0 \quad (\text{I})$$

Используем бином Ньютона

$$(1+y)^n=1+\frac{ny}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}y^k+$$

$$+\ldots+y^n \quad (\text{II})$$

$$(1-y)^n=1-\frac{ny}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\ldots+(-1)^k\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}y^k+$$

$$+\ldots+(-1)^n y^n \quad (\text{III})$$

В ур-нии I подставим $x=k$ – целое число, меньшее n

$$1-\frac{k}{1!}+\frac{k(k-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^k k(k-1)\ldots 2\cdot 1}{k!}+0$$

так как слагаем. больше k обращаются в 0

Учитывая III и $y=1$, получим

$$1-\frac{k}{1!}+\frac{k(k-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^k k(k-1)\ldots 2\cdot 1}{k!}=(1-1)^k=0$$

И так это будет при всех $k=1,2,\ldots n$

Ответ: решение ур-ния I $x=1,2,3\ldots n$.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ
Место проведения

ЫF 91-73
шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Катунов

ИМЯ Дмитрий

ОТЧЕСТВО Александрович

Дата рождения 20.06.1999

Класс: 11

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 2 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождéния, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ bIF 91-73

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1

Данное выражение можно записать следующим образом: $S=\lg(10^4\cdot10^5\cdot\ldots\cdot10^{20}\cdot\operatorname{tg}2017^\circ\cdot\operatorname{tg}2018^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}2033^\circ)$. Известно, что $\operatorname{tg}2025^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ+1980^\circ)=\operatorname{tg}(45^\circ+11\cdot180^\circ)=\operatorname{tg}45^\circ=1$. Возьмём одну пару тангенсов углов, равноудалённых от 2025° (например, $\operatorname{tg}2017^\circ$ и $\operatorname{tg}2033^\circ$, т. к. $2017^\circ=2025^\circ-8^\circ$, а $2033^\circ=2025^\circ+8^\circ$. Известно, что $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, а $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, где α,β - некоторые углы. В нашем случае $\operatorname{tg}(2025^\circ+8^\circ)=\frac{\operatorname{tg}2025^\circ+\operatorname{tg}8^\circ}{1-\operatorname{tg}2025^\circ\cdot\operatorname{tg}8^\circ}=\frac{1+\operatorname{tg}8^\circ}{1-\operatorname{tg}8^\circ}$, а $\operatorname{tg}(2025^\circ-8^\circ)=\frac{\operatorname{tg}2025^\circ-\operatorname{tg}8^\circ}{1+\operatorname{tg}2025^\circ\cdot\operatorname{tg}8^\circ}=\frac{1-\operatorname{tg}8^\circ}{1+\operatorname{tg}8^\circ}$. Произведение двух этих тангенсов равно $\frac{(1+\operatorname{tg}8^\circ)(1-\operatorname{tg}8^\circ)}{(1-\operatorname{tg}8^\circ)(1+\operatorname{tg}8^\circ)}=1$. Следовательно, произведение всех тангенсов равно 1 ($\operatorname{tg}2025^\circ=1$, остальные 16 можно разбить на пары так, чтобы произведение тангенсов в каждой паре было равно 1). Тогда $S=\lg(10^4\cdot10^5\cdot\ldots\cdot10^{20})=\lg(10^{4+5+\ldots+20})=\lg(10^{\frac{2\cdot4+1\cdot16}{2}\cdot17})=\lg(10^{12\cdot17})=\lg(10^{204})=204$. ⊕

Ответ: $S=204$.

N2

Пусть запас газа в определённом месяце равен x. Допустим, что через некоторое количество месяцев (возможно, что в следующем) также равен x. Тогда запас газа в течение следующих месяцев выражается следующей последовательностью: $C-2x$; $C-2(C-2x)=C-2C+4x=4x-C$; $C-2(4x-C)=C-8x+2C=3C-8x$; $C-2(3C-8x)=C-6C+16x=16x-5C$; ...

Приравняем каждое из первых нескольких значений запаса к x и будем следить за тем, изменяется ли он в зависимости от взятого члена последовательности.

$C-2x=x$ | $4x-C=x$ | $3C-8x=x$ | $16x-5C=x$

$C=3x$ | $C=3x$ | $3C=9x\,/:3$ | $5C=15x\,/:5$

$x=\frac{C}{3}$ | $x=\frac{C}{3}$ | $C=3x$ | $C=3x$

$x=\frac{C}{3}$ | $x=\frac{C}{3}$ ⊕

Получаем, что $x=\frac{C}{3}$ вне зависимости от выбранного месяца ($C-2\cdot\frac{C}{3}=\frac{C}{3}$). Следовательно, при $x=\frac{C}{3}$ запас газа будет одинаковым для любых двух месяцев.

Ответ: да, может (значение запаса - $\frac{C}{3}$).

±

N5

Преобразуем уравнение к виду $\sin nx-\sin x=0$. Зная, что $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, где α,β - произвольные углы, мы можем переписать уравнение следующим образом: $2\sin\frac{(n-1)x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}=0$. Отсюда следует, что один из множителей равен 0:

1) $\sin\frac{(n-1)x}{2}=0$; $\frac{(n-1)x}{2}=\pi k;k\in Z$; $x=\frac{2\pi k}{n-1}$; $k\in Z$ ($n>1$, поэтому дробь всегда имеет смысл);

2) $\cos\frac{(n+1)x}{2}=0$; $\frac{(n+1)x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k;k\in Z$; $(n+1)x=\pi(2k+1)$; $x=\frac{\pi(2k+1)}{n+1}$

Поскольку для формирования $S(n)$ нужно знать только число корней на интервале $[0;\pi]$, получим:

$0\leq\frac{2\pi k}{n-1}\leq\pi$; $0\leq\frac{2k}{n-1}\leq1$; $0\leq2k\leq n-1$; $0\leq k\leq\frac{n-1}{2}$ (для $\sin\frac{(n-1)x}{2}$);

$0\leq\frac{\pi(2k+1)}{n+1}\leq\pi$; $0\leq\frac{2k+1}{n+1}\leq1$; $0\leq2k+1\leq n+1$; $0\leq2k\leq n$; $0\leq k\leq\frac{n}{2}$ (для $\cos\frac{(n+1)x}{2}$).

В первом случае (по синусу) мы получим $[\frac{n-1}{2}]+1=[\frac{n-1+2}{2}]=[\frac{n+1}{2}]$ решений, а во втором (по косинусу) - $[\frac{n}{2}]+1=[\frac{n+2}{2}]$ решений. Тогда $S(n)=[\frac{n+1}{2}]+[\frac{n+2}{2}]$. Рассмотрим поведение $S(n)$ в двух случаях.

Лист 01 из 02

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) $n=2k$ (n-чётное). Тогда $S(n)=\left[\frac{2k+1}{2}\right]+\left[\frac{2k+2}{2}\right]=\left[k+\frac{1}{2}\right]+[k+1]=k+k+1=2k+1=n+1$;

2) $n=2k+1$ (n-нечётное). Тогда $S(n)=\left[\frac{2k+1+1}{2}\right]+\left[\frac{2k+1+2}{2}\right]=[k+1]+\left[k+1+\frac{1}{2}\right]=k+1+k+1=2k+2=n+1$.

Следовательно, выражение для $S(n)$ можно упростить: $S(n)=n+1$. Поскольку функция $y=n+1$ является монотонно возрастающей (принимает любое своё значение только один раз), то и $S(n)$ также является монотонно возрастающей функцией, т.е. $S(n)=2017$ только при одном n ($n+1=2017$; $n=2016$). ⊕

Ответ: $S(n)=n+1$; функция принимает значение 2017 только один раз. не соотв

№4

Известно, что $a^2+b^2\geq 2ab$; $a^2+c^2\geq 2ac$; $b^2+c^2\geq 2bc$ (при любых a, b, c). Тогда $2(a^2+b^2+c^2)\geq 2ab+2ac+2bc$; $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$; $6abc\geq ab+ac+\underset{4+1+1}{bc}$. 6 можно представить в виде суммы трёх натуральных чисел как 3+2+1, или 2+2+2.

В первом случае:	Во втором случае:	Во ~~втором~~ третьем случае:
$3abc\geq ab$ $c\geq\frac{1}{3}$	$4abc\geq ab$ $c\geq\frac{1}{4}$	$2abc\geq ab$ $c\geq\frac{1}{2}$
$2abc\geq ac$ $b\geq\frac{1}{2}$	$abc\geq ac$ $b\geq 1$	$2abc\geq ac$ $b\geq\frac{1}{2}$
$abc\geq bc$ $a\geq 1$	$abc\geq bc$ $a\geq 1$	$2abc\geq bc$ $a\geq\frac{1}{2}$

⊕

Для первого случая существует наименьшее решение ~~Но в случае когда одна из переменных~~ $\left[1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ $\left(1^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=6\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$; для ~~второго~~ третьего $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$. Очевидно, что второй набор даст меньшую сумму. Поэтому наименьшее значение $a+b+c=1{,}5$. Вообще, в том случае, когда 6 не разбивается как 2+2+2, мы сталкиваемся с нарушением условия $a^2+b^2+c^2=6abc$, если брать нижние границы по a, b, c.

Пример: $3{,}5abc\geq ab$ $c\geq\frac{2}{7}$ $\quad 6abc=6\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{10}{21}=\frac{120}{147}$

$1{,}4abc\geq ac$ $b\geq\frac{5}{7}$ $\quad a^2+b^2+c^2=\frac{4}{25}+\frac{25}{49}+\frac{100}{441}\neq\frac{120}{147}$

$2{,}1abc\geq bc$ $a\geq\frac{10}{21}$

Ответ: 1,5.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

RQ 41-75

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Кирий

ИМЯ Семен

ОТЧЕСТВО Алексеевич

Дата рождения 02.11.2001

Класс: 9

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. $A = x + \frac{1}{x}$; $B_k = x^k + \frac{1}{x^k}$; $k = 2, 3, 4, 8$.

а) $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = A^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = A^2 - 2 = B_2$. ✓

$B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{A}\left(\underbrace{x^2 + \frac{1}{x^2}}_{B_2} - 1\right) = A\left(A^2 - 3\right) = \cancel{A}$

$B_4 = x^4 + \frac{1}{x^2}$.

$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (A^2 - 2)^2 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = (A^2 - 2)^2 - 2 = B_4$ ✓

$B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8}$

$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 \Rightarrow x^8 + \frac{1}{x^8} = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2 = B_8$. ✓

б) Если $B_2 = B_4 = B_8$, то

$A^2 - 2 = (A^2 - 2)^2 - 2 = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2$

Условие равенства B_2 и B_4:

$A^2 - 2 = (A^2 - 2)^2 - 2 \Rightarrow A^2 = (A^2 - 2)^2$

$(A^2 - A - 2)(A^2 + A - 2) = 0$. По следствию из теоремы Виета найдем все корни: $\left[\begin{array}{l} A = \pm 1 \\ A = \pm 2 \end{array}\right.$.

Подставим для проверки равенства с B_8 (A^2, значит знак A не важен):

Если $A = \pm 1$, то $B_2 = B_4 = B_8 = -1$;

Если $A = \pm 2$, то $B_2 = B_4 + B_8 = 2$. } то есть всё верно.

Найдем x:

1) Если $A = 1$, то $\frac{x^2 + 1 - x}{x} = 0$ $D < 0$, т.е. $A \neq 1$

2) Если $A = -1$, то $\frac{x^2 - 1 - x}{\cancel{x}} = 0$ $D < 0$, т.е. $A \neq -1$

3) Если $A = 2$, то $\frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 0$. $x = 1$

4) Если $A = -2$, то $\frac{x^2 + 2x + 1}{x} = 0$. $x = -1$

Ответ: а) $B_2 = A^2 - 2$; $B_3 = A(A^2 - 3)$; $B_4 = (A^2 - 2)^2 - 2$; $B_8 = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2$

б) $B_2 = B_4 = B_8$, если $x = \pm 1$, т.е. $A = \pm 2$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RQ 41-75

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

с) При $\begin{cases}x=1\\A=2\end{cases}$ возведение в квадрат и деление бессмысленно, т.е. используется одна операция – сложение.

⊕

$C=\left(\left(1^{2018}+\frac{1}{1^{2017}}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017}=1$

Ответ: с) $\begin{cases}x=1\\A=2\end{cases}$, $C=1$

Б2. Пусть в 1-й месяц x м³, тогда во 2-й $6-x$ м³.
В 3-й $6-(6-x)=x$, т.е. в 4-й снова $6-x$ м³ и так далее.
Значит в нечетные месяцы x м³, в чётные $6-x$ м³.
Если $x=2$, то $6-x=4$. $2^2=6$. Значит условие задачи выполняется каждый 2-й месяц, если в какой-то месяц запас был равен 2 м³

не только

Ответ: может.

∓

Б5. $f(x)=x^2+px+q$. $D=p^2-4q=100$

$q=\frac{p^2-100}{4}$

$f(x)+f(x-10)=0$

$x^2+px+q+(x-10)^2+p(x-10)+q=0.$

$x^2+px+q+x^2-20x+100+px-10p+q=0$

$2x^2+2x(p-10)+2q+100-10p=0.$

$x^2+x(p-10)+(q+50-5p)=0.$

⊕

$D=(p-10)^2-4(q+50-5p)=p^2-20p+100-4q+20p-200=$

$=p^2-4q-100=p^2-\frac{4(p^2-100)}{4}-100=p^2-p^2+100-100=0.$

От-да уравнение $f(x)+f(x-10)=0$ имеет один корень.
$\left(x=\frac{-(p-10)}{2}\right)$

Ответ: 1 корень $\left(\frac{-(p-10)}{2}\right)$

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RQ 41-75

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Б3. $1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0 \quad \times 24$

$x(x-1)(x-2)(x-3)-4x(x-1)(x-2)+12x(x-1)-24x+24=0$

$(x^3-3x^2+2x)(x-3)-4(x^3-3x^2+2x)+12(x^2-x)-24x+24=0$

$x^4-3x^3+2x^2-3x^3+9x^2-6x-4x^3+12x^2-6x+12x^2-12x-24+24=0$

$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0.$

По теореме Безу $R(1)=0$. Поделим на $(x-1)$

$(x-1)(x^3-9x^2+26x-24)=0.$

По теореме Безу для второго множителя $R(2)=0$. Поделим его на $(x-2)$

$(x-1)(x^2-7x+12)(x-2)=0$

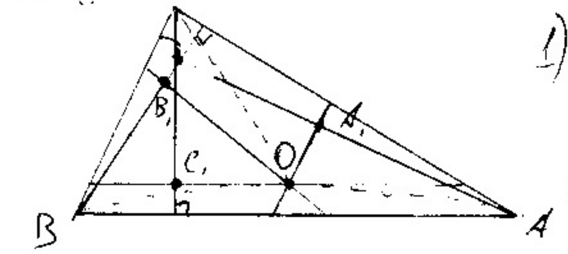
⊕

$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$. Отсюда.

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$, т. е. решения $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\\x=4\end{array}\right.$

Ответ: $x=1$; $x=2$; $x=3$; $x=4$.

Б4.



1) Проведем в △ABC все высоты. AA_1; BB_1; CC_1

⊖

2) ~~Отметим~~ Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на половине, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ от стороны, к которой проведена высота (на какой высоте какая ~~от~~ часть не важно)

3) Проведем через эти точки прямые, параллельные сторонам, к которым проведена высота.

4) Все эти прямые пересекутся в точке O.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

VX 68-77

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ КЛИМОВ

ИМЯ СТЕПАН

ОТЧЕСТВО ВЯЧЕСЛАВОВИЧ

Дата рождения 06.01.1999 **Класс:** 11

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 03 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VX 68-77

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. Да, может. Например, при $x=\frac{c}{3}$ в следующем месяце запас будет равен $c-\frac{2c}{3}=\cancel{c}\frac{c}{3}$, т.е. таким же, как и в предыдущем. (и т.д.: ~~[illegible]~~ запас будет равен $\frac{c}{3}$ в любом месяце) (+)

Ответ: Да; при $x=\frac{c}{3}$

~~3. Пусть r_n - радиус окружности S_n. Напишем уравнение этой окружности: $x^2+(y-(l_{n-1}+r_n))^2=r_n^2$, где l_{n-1} - длина отрезка OA_n, где A_n - точка касания S_n и S_{n-1}. Тогда $l_{n-1}=$ $=2(r_1+r_2+\ldots+r_{n-1})$~~

~~Для $x>0$: т.к. S_n касается параболы, то при $x>0$ они имеют ровно одну общую точку.~~

~~$S_n: (y-(l_{n-1}+r_n))^2=r_n^2-\cancel{8}x^2$~~

4. По неравенству Коши $\underbrace{,}_{}$ для трех чисел, $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$, причем ~~=~~ равенство достигается тогда и только тогда, когда

(+) $a=b=c$. Тогда наименьшее значение выраж. $\frac{a+b+c}{3}$ и $a+b+c$ принимается при $a=b=c$ (?) и равно $3\sqrt[3]{abc}=3\sqrt{a^3}=a$. По условию, $6abc=a^2+b^2+c^2$. При $a=b=c$ это равенство примет вид $6a^3=3a^2$. Тогда $\left[\begin{array}{l}a=0\\2a-1=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

По условию $a>0$, значит, $a=\frac{1}{2}$

Тогда $a+b+c=3a=\frac{3}{2}$

Ответ: $\frac{3}{2}$

1. $S=\lg(10^4\,\mathrm{tg}\,2017^\circ)+\lg(10^5\,\mathrm{tg}\,2018^\circ)+\ldots+\lg(10^{20}\,\mathrm{tg}\,2033^\circ)=$
$=(\lg10^4+\lg10^5+\ldots+\lg10^{20})+(\lg(\mathrm{tg}\,2017^\circ)+\lg(\mathrm{tg}\,2018^\circ)+\ldots+$
$+\lg(\mathrm{tg}\,2033^\circ))=\underbrace{4+5+6+\ldots+20}_{20-4+1=17\text{ слагаемых}}+\lg(\underbrace{\mathrm{tg}\,2017^\circ\,\mathrm{tg}\,2018^\circ\ldots\mathrm{tg}\,2033^\circ}_{17\text{ слагаемых}})=$

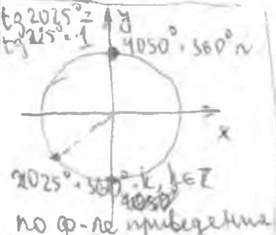
$=\underbrace{(20+4)+(19+5)+\ldots+\cancel{(15+13)+14}(13+11)}_{8\text{ пар}}+12+\lg((\mathrm{tg}\,2017^\circ\,\mathrm{tg}\,2033^\circ)\times$
$\times(\mathrm{tg}\,2018^\circ\,\mathrm{tg}\,2032^\circ)\cdot\ldots\cdot(\mathrm{tg}\,2024^\circ\,\mathrm{tg}\,2026^\circ)\cdot\mathrm{tg}\,2025^\circ=$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$= 24\cdot 8 + 12 + \lg(\operatorname{tg}2017^\circ \operatorname{tg}(4050^\circ - 2017^\circ)) \cdot \operatorname{tg}2018^\circ \operatorname{tg}(4050^\circ - 2018^\circ)) \times$

$\times \ldots \times (\operatorname{tg}2024^\circ \operatorname{tg}(4050 - 2024^\circ)) \times \operatorname{tg}2025^\circ = 192 + 12 +$

$+ \lg(\operatorname{tg}2017^\circ \operatorname{tg}(11\cdot 360^\circ + 90^\circ - 2017^\circ) \times \ldots \times \operatorname{tg}2024^\circ \operatorname{tg}(11\cdot 360^\circ + 90^\circ \overset{-2024^\circ}{}) \times \operatorname{tg}2025^\circ =$



по ф-ле приведения $\operatorname{tg}(4050^\circ - x) = \operatorname{ctg} x$

$= 204 + \lg((\operatorname{tg}2017^\circ \cdot (\operatorname{ctg}2017^\circ) \cdot \operatorname{tg}2018^\circ \cdot (\operatorname{ctg}2018^\circ) \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}2024^\circ \cdot (\operatorname{ctg}2024^\circ) \cdot \operatorname{tg}(11\cdot 180^\circ + 45^\circ)) = 204 +$

$+ \lg(\underbrace{1\cdot 1\cdot 1 \ldots \cdot 1}_{8\ раз} \cdot 1) = 204 + \lg 1 = 204 + 0 = 204$

Ответ: 204 +

5. $\sin nx = \sin x$

⑦

$\sin nx - \sin x = 0$

$2\cos\frac{nx+x}{2}\sin\frac{nx-x}{2} = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{n+1}{2}x = 0\\ \sin\frac{n-1}{2}x = 0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{n+1}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\in\mathbb{Z}\\ \frac{n-1}{2} = \pi l, l\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{ll}x = \frac{\pi(1+2k)}{n+1} & (1)\\ x = \frac{2\pi l}{n-1} & (2)\end{array}\right.$

$0 \le \frac{\pi(1+2k)}{n+1} \le \pi$; $0 \le 1+2k \le n+1$; $-\frac{1}{2} \le k \le \frac{n}{2}$ $\left[\frac{n}{2}\right]$ решений $(k\in\mathbb{Z})$

$0 \le \frac{2\pi l}{n-1} \le \pi$; $0 \le 2l \le n-1$; $0 \le l \le \frac{n-1}{2}$ $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ решений $(l\in\mathbb{Z})$

Найдем такие точки, где (1) и (2) совпадают $\forall n \in \mathbb{N}$:

~~$\frac{\pi(1+2k)}{n+1} = \frac{2\pi l}{n-1}$; $2l(n+1) = (1+2k)(n-1)$; $2l(n+1) = n-1+2(n-1)k$~~

~~$2n(l-k) + 2(l+k) = n-1$: если $l = const$, $k = const$, то $2(l+k) = const$, $2n(l-k) \ne const$, если $l \ne k$, но если $l = k$, то $const = 2n + const \Rightarrow 2n = const$, что неверно т.к. n - любое натур. Тогда $2n(l-k) = n \Leftrightarrow l-k = \frac{1}{2}$, что противоречит тому, что l и k - целые, т.к. вычитая из целого числа целое, всегда получаем целое. Значит, $l \ne const$ или $k \ne const$~~

~~$2n(l-k-\frac{1}{2}) + 2(l+k+\frac{1}{2}) = 0$; $n(l-k-\frac{1}{2}) + l+k+\frac{1}{2} = 0$. Т.к. $\{l,k,n\}\in\mathbb{Z}$, то при четных n решений нет, т.к. мн-во целых чисел замкнуто на сложении, умножении~~

~~если $n = 2t+1$, $t\in\mathbb{Z}$, то $(2t+1)(l-k-\frac{1}{2}) + l+k+\frac{1}{2} = 0$~~

~~$2tl - 2tk - t + l - k - \frac{1}{2} + k + l + \frac{1}{2} = 0$; $2tl - 2tk - t + 2l = 0$; $t(2l-2k-1) = -2l$;~~

~~I $2l - 2k - 1 = 0$, тогда $-2l = 0$, $k = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$~~

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VX 68-~~7~~7

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~$3x\ \frac{\pi}{} \ 2l-2k-1\neq 0$, тогда $t=\frac{2l}{2l-2k-1}$, $t\in\mathbb{Z}$~~

$\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)=\sin\left(\frac{n-1}{2}x\right)$

~~$\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n-1}{2}\right.$~~

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(n+1)x}{2}\right)=\sin\left(\frac{n-1}{2}x\right)$

~~sin~~ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{(n+1)x}{2}\right)-\sin\left(\frac{n-1}{2}x\right)=0$

$2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\left(\frac{n-1}{2}-\frac{n+1}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\left(\frac{n+1}{2}+\frac{n-1}{2}\right)\right)=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-nx\right)=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}~~\cos~~ -\sin x=0\\ \cos nx=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pi t,\ t\in\mathbb{Z}\ (3)\\ nx=\frac{\pi}{2}+\pi f,\ f\in\mathbb{Z}\ (4)\end{array}\right.$

Тогда S_n – это ~~кол-во~~ сумма кол-ва реш. (1) и (2) за вычетом кол-ва реш. (3) и (4) на $[0;\frac{\pi}{2}]$

$0\le\pi t\le\pi$ $\quad 0\le t\le 1$ $\quad \left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\end{array}\right.$; $\quad 0\le\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi f}{n}\le\pi$

2 реш. $\quad 0\le 1+2f\le n$;

$-\frac{1}{2}\le f\le\frac{n-1}{2}$

$\left[\frac{n-1}{2}\right]$ решений ($f\in\mathbb{Z}$)

Тогда всего решений $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]-\left[\frac{n-1}{2}\right]-2=\left[\frac{n}{2}\right]-2$ реш.

$S_n=\left[\frac{n}{2}\right]-2$

$S_{2017}=1006$

Ответ: 1006 реш.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

город Красноярск

Место проведения

02109МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Клюшник

ИМЯ Анастасия

ОТЧЕСТВО Владимировна

Дата рождения 28.05.2001

Класс: 9

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №1 (продолжение):

$$\left\{\begin{array}{l} t=2,\ t=-1 \\ \left[t=2,\ t=-2,\ t=1,\ t=-1 \right. \end{array}\right. \Rightarrow t=2,\ t=-1$$

$A^2-2=2$ $\qquad$ $A^2-2=-1$

$A^2=4$ $\qquad$ $A^2=1$

$A=2$ $\quad$ $A=-2$ $\quad$ $A=1$ $\quad$ $A=-1$

$\frac{x^2+1}{x}=2$ $\quad$ $\frac{x^2+1}{x}=-2$ $\quad$ $\frac{x^2+1}{x}=1$ $\quad$ $\frac{x^2+1}{x}=-1$

$x^2-2x+1=0$ $\quad$ $x^2+2x+1=0$ $\quad$ $x^2-x+1=0$ $\quad$ $x^2+x+1=0$

$D=4-4=0$ $\quad$ $D=4-4=0$ $\quad$ $D=1-4<0$ $\quad$ $D=1-4<0$

$x=\frac{2}{2}=1$ $\quad$ $x=1$ $\quad$ $\varnothing$ $\quad$ $\varnothing$

Ответ: при $A=2$ и $x=1$, $A=-2$ и $x=-1$.

c) $B_2 = A^2-2 = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2-2$

Количество действий будет минимальным, если знаменатель (x) будет равен 1 или -1, так как в этом случае исключается операция деления на x.

id $x=1$ или $x=-1$.

$B_2\ (x^2+1)^2-2$ или $B_2=(-x^2-1)^2-2$

$x=1$ $\qquad$ $x=-1$

$A=\frac{1+1}{1}=2$ $\qquad$ $A=\frac{1+1}{-1}=-2$

$$C=\left(\left(x^{2017}+\frac{1}{x^{2017}}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017}$$

при $x=1$

$$C=\left(\left(1^{2017}+\frac{1}{1^{2017}}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017}=\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017}=1^{2017}=1$$

при $x=-1$

$$C=\left((-1)^{2017}+\frac{1}{1^{2017}}\right)\frac{1}{2}\Big)^{2017}=\left((-2)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017}=(-1)^{2017}=-1$$

Ответ: при $x=1$ $(A=2)$ $C=1$

при $x=-1$ $(A=-2)$ $C=-1$

Задача №2.

Рассмотрим несколько первых членов нашей последовательности:

$1-x$, $2-(6-x)$, $3-(6-(6-x))=x$, $4=6-x$, $5=(6-(6-x))=x$ ...

Заметим, что в этой последовательности у нас будет встречаться только 2 числа, которые будут чередоваться. Это числа x и $6-x$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5.

$f(x) = x^2+px+q \qquad D = p^2-4q = 100$

$f(x) + f(x-10) = 0$

$x^2+px+q + (x-10)^2 + p(x-10) + q = 0$

$x^2+px+q + x^2+100-20x + px - 10p + q = 0$ ⊕

$2x^2 + (2p-20)x + (2q-10p+100) = 0$

$D = (2p-20)^2 - 4\cdot 2\cdot(2q-10p+100) = 4p^2 - \cancel{80}p + 400 - 16q + \cancel{80}p - 800 =$
$= 4p^2 - 16q - 400$

$p^2-4q = 100 \Rightarrow 4q = p^2-100 \Rightarrow 16q = 4(p^2-100)$

$D = 4p^2-16q-400 = 4p^2 - 4(p^2-100) - 400 = 4p^2-4p^2+400-400 = 0$

$D = 0 \Rightarrow$ 1 корень

Ответ: 1 корень

Задача №1.

а) $A = x+\frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

$*\ B_2 = x^2+\frac{1}{x^2} = \frac{x^4+1}{x^2} \qquad A^2 = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 = \frac{x^4+1}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} = B_2+2 \Rightarrow \underline{B_2 = A^2-2}$

$*\ B_3 = x^3+\frac{1}{x^3} = \frac{x^6+1}{x^3} \qquad A^3 = \frac{(x^2+1)^3}{x^3} = \frac{x^6+1}{x^3} + \frac{3x^4+3x^2}{x^3} = B_3 + 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = B_3+3A$

$\Rightarrow \underline{B_3 = A^3-3A}$

$*\ B_4 = x^4+\frac{1}{x^4} = \frac{x^8+1}{x^4} \qquad B_2^2 = \left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)^2 = \frac{x^8+1}{x^4} + \frac{2x^4}{x^3} = B_4+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{B_4} = B_2^2 - 2 = (A^2-2)^2 - 2 = \underline{A^4-4A^2+2}$

$*\ B_8 = x^8+\frac{1}{x^8} = \frac{x^{16}+1}{x^8} \qquad B_4^2 = \left(\frac{x^8+1}{x^4}\right)^2 = \frac{x^{16}+1}{x^8} + \frac{2x^8}{x^8} = B_8+2 \Rightarrow B_8 = B_4^2-2$

$\underline{B_8} = (A^4-4A^2+2)^2 - 2 = \underline{A^8 - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 2}$

б) $B_2 = B_4 = B_8$

$A^2-2 = (A^2-2)^2-2 = ((A^2-2)^2-2)^2-2 \qquad A^2-2 = t$

$t = t^2-2 = (t^2-2)^2-2$

$\begin{cases} t = t^2-2 \\ t^2-2 = (t^2-2)^2-\cancel{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} t^2-t-2 = 0 \\ t^2 = (t^2-2)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t^2-t-2 = 0 \\ t^4-5t^2+4 = 0 \end{cases}$ ⊕

~~$t=-1,\ t=2$~~
~~$t=1,\ t=$~~

① $D = 1+8 = 9 \qquad t = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad t = \frac{1-3}{2} = -1$

② $t^2 = y \Rightarrow y^2-5y+4 = 0 \quad D = 25-16 = 9 \quad y_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \quad y_2 = \frac{5-3}{2} = 1$
$t=2,\ t=-2,\ t=1,\ t=-1$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №2 (продолжение)

Значит, у нас есть 4 варианта:

1) $x = x^2$

$x = 0$ (не подходит по условию)

$\underline{x = 1}$ # начиная с 1, в нечёт. месяцы запас равен 1.

2) $6 - x = (6 - x)^2$

$6 - x = 36 - 12x + x^2$

$x^2 - 11x + 30 = 0$

$D = 121 - 120 = 1$

$x = \frac{11+1}{2} = 6$ $\quad$ $x = \frac{11-1}{2} = 5$

$6 - x = 6 - 6 = 0$ (не подходит) $\quad$ $6 - x = 6 - 5 = \underline{1}$

$6 - 5 = (6 - 5)^2$

начиная со 2, в чётные месяцы запас равен 1.

$\pm$

3) $x = (6 - x)^2$

$x = 36 - 12x + x^2$

$x^2 - 13x + 36 = 0$

$D = 169 - 144 = 25$

$x = \frac{13+5}{2} = 9$ $\quad$ $x = \frac{13-5}{2} = 4$

$6 - x = 6 - 9 = -3$ (не подх.) $\quad$ $6 - x = 2$

$4 = 2^2$

начиная со 2, в четные месяцы запас равен 2.

4) $6 - x = x^2$

$x^2 + x - 6 = 0$

$D = 1 + 24 = 25$

$x = \frac{-1+5}{2} = \underline{2}$ $\quad$ $x = \frac{-1-5}{2} = -3$ (не подх.)

$6 - x = 4$

$4 = 2^2$

начиная с 1, в нечёт. месяцы запас равен 2.

5, 6

Ответ: да, может, если
1) запас в нечёт. месяцы равен 1 $(1 = 1^2)$
2) запас в чётные месяцы равен 1 $(1 = 1^2)$ ✓
3) запас в нечёт. месяцы равен 2 $(2^2 = 4)$
4) запас в чётные месяцы равен 2 $(4 = 2^2)$

в нечет. и чети.

Задача №3

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0$$

$$\frac{24 - 24x + 12x(x-1) - 4x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} = 0$$

$$24 - 24x + 12x^2 - 12x - 4x^3 + 12x^2 - 8x + x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 0$$

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 124 = 0$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №3 (продолжение):

Схема Горнера:

	1	-10	35	-50	24		
1	1	-9	26	-24	0	✓	x-1.

$(x^3-9x^2+26x-24)(x-1)=0$

2	1	-7	12	0 ✓	X-2

$(x^2-7x+12)(x-1)(x-2)=0$

3	1	-4	0	✓	X-3

$(x-4)(x-1)(x-2)(x-3)=0$

4	1	0	✓	x-4

Делители 24:

1	-1
2	-2
3	-3
4	-4
6	-6
8	-8
12	-12
24	-24

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$

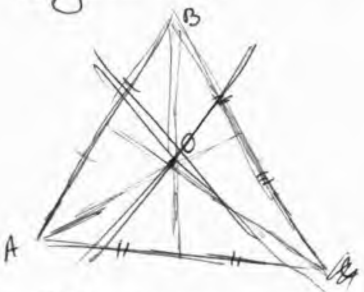
4 - максимальное число корней. (т.к. x^4)

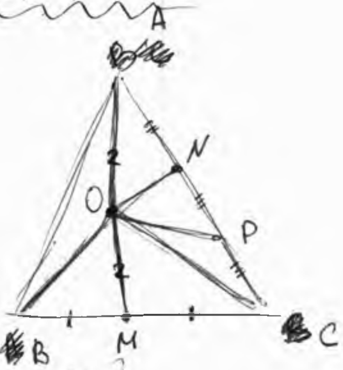
$\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-2=0 \\ x-3=0 \\ x-4=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$

$\bigcirc\!\!\!\!+$

Ответ. $x \in \{1; 2; 3; 4\}$

Задача № 4.





AM - медиана - почему ?

$\mp$

BN = NP = PC

O - середина AM $\Rightarrow S_{BOA} = S_{BOM}$ (AO - медиана)

OM - медиана $\triangle$ COB $\Rightarrow S_{BOM} = S_{MOC} = S_{BOA} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{1}{2}$

O - середина BN $\Rightarrow S_{AOB} = S_{AON}$

$S_{AON} = S_{ONP} = S_{OPC} \Rightarrow \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AOB} : S_{BOC} : S_{AOC} = 1:2:3$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

OF 94-89

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Коновалова

ИМЯ Дарья

ОТЧЕСТВО Александровна

Дата рождения 21.10.2003

Класс: 7

Предмет Математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 2 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

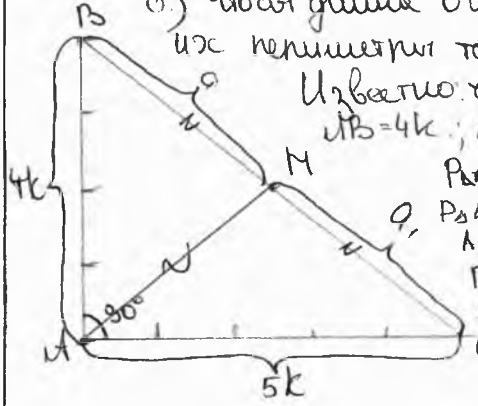
Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ OF 94-89

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(б4)



б) Чтобы длина оград была одинаковой, нужно чтобы их периметры также были одинаковы.

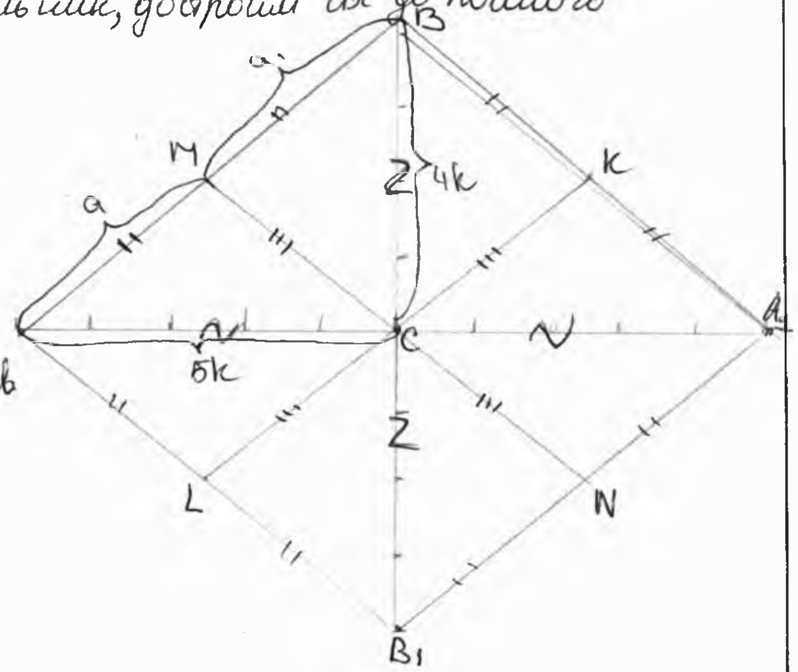
Известно что: $a = a1$; AM - общ. (пусть длина AM - в);
AB = 4k; AC = 5k

$P_\Delta ABM = AB + BM + AM$
$P_\Delta AMC = AM + MC + AC$
AM - общ.
BM = MC (по усл.)
$\underline{\underline{AB = 4k}}$ $\underline{\underline{AC = 5k}}$

$\Rightarrow P_\Delta ABM \neq P_\Delta AMC$; т.к. $AB \neq AC$.

Ответ. Ограда участков не может быть одинаковой длины.

а) Чтобы узнать S треугольник, достроим их до полного квадрата:



Дано:
$\Delta ABC = \Delta A_1BC = \Delta A_1CB_1 = \Delta ACB_1$
AM = MB

1) ~~Найти~~: Д-ть: $S_{AMCL} = S_{MBKC}$

Д-во:
$\Delta ABC = \Delta A_1BC = \Delta A_1CB_1 = \Delta ACB_1$
AM = MB (по усл.)
$\Rightarrow$ поев

$\Rightarrow \begin{cases} AM = MB = BK = AL \\ AC = CA_1 \\ BC = CB_1 \\ MC = CK = \\ = CL = CN \end{cases}$ 4Δ

AM = MB = BK = AL
LC = KC = CM
CM - общ.
$S_{AMCL} = AM \cdot LC$
$S_{MBKC} = MB \cdot CK$

$\Rightarrow S_{AMCL} = S_{MBKC}$

2) Д-ть: $S_\Delta AMC = S_\Delta CMB$

Д-во:

AM = AL (по найд.)
MC = CL (по найд.)
AC - общ.

$\overset{ccc}{\Rightarrow} \Delta AMC = \Delta ALC \Rightarrow S_\Delta AMC = S_\Delta ALC. \Rightarrow S_\Delta AMC = S_{AMCL} : 2.$

MC = CK (по найд.)
MB = BK (по найд.
BC - общ.

$\overset{ccc}{\Rightarrow} \Delta BMC = \Delta BKC \Rightarrow S_\Delta BMC = \Delta BKC \Rightarrow S_\Delta CMB = S_{MBKC} : 2$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$S_\triangle AMC = S_{AMCL} : 2$

$S_\triangle CMB = S_{MBKC} : 2$

$S_{AMCL} = S_{MBKC}$

$\Rightarrow S_\triangle AMC = S_\triangle CMB$

Ответ: братья получили равные участки по S.

б5.

$$\frac{2{,}00000000004}{(1{,}00000000004)^2 + 2{,}00000000004} = \frac{2 + 10^{-11} \cdot 4}{(1 + 10^{-11} \cdot 4)^2 + 2 + 10^{-11} \cdot 4}$$

$$\frac{2{,}0000000002}{(1{,}00000000002)^2 + 2{,}00000000002} = \frac{2 + 10^{-11} \cdot 2}{(1 + 10^{-11} \cdot 2)^2 + 2 + 10^{-11} \cdot 4}$$

$$(1 + 10^{-11} \cdot 4)^2 = 1 + 2(10^{-11} \cdot 4) + 10^{-22} \cdot 16 = 1 + 8 \cdot 10^{-11} + 10^{-22} \cdot 16$$

$$(1 + 10^{-11} \cdot 2)^2 = 1 + 2(10^{-11} \cdot 2) + 10^{-22} \cdot 4 = \underline{1} + 4 \cdot 10^{-11} + 10^{-22} \cdot 4.$$

$$\frac{\cancel{2} + (10^{-11} \cdot 4)}{\cancel{1} + (8 \cdot 10^{-11}) + (10^{-22} \cdot 16)} \vee \frac{\cancel{2} + (10^{-11} \cdot 2)}{\cancel{1} + (4 \cdot 10^{-11}) + (10^{-22} \cdot 4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10^{-11} \cdot 4}{8 \cdot 10^{-11} + 10^{-22} \cdot 16} \vee \frac{10^{-11} \cdot 2}{4 \cdot 10^{-11} + 10^{-22} \cdot 4} \Rightarrow$$

$$\frac{\cancel{8}\ 10^{-11} \cdot 4}{4 \cdot \underline{2} \cdot 10^{-11} + (10^{-11} \cdot 4)\underline{\underline{(10^{-11} \cdot 4)}}} \vee \frac{10^{-11} \cdot 2}{2 \cdot \underline{2} \cdot 10^{-11} + (10^{-11} \cdot 2)\underline{\underline{(10^{-11} \cdot 2)}}}$$

+

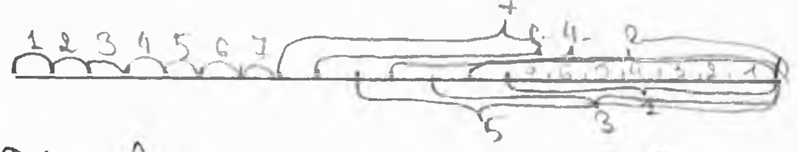
$$\Rightarrow \cancel{2} + 10^{-11} \cdot 4 \vee \cancel{2} + 10^{-11} \cdot 2 \Rightarrow 10^{-11} \cdot \underline{4} > 10^{-11} \cdot 2$$

Ответ:

$$\frac{2{,}00000000004}{(1{,}00000000004)^2 + 2{,}00000000004} > \frac{2{,}00000000002}{(1{,}00000000002)^2 + 2{,}00000000002}$$

б2.

Данная ситуация возможна только если каждый кавалер танцевал с несколькими девушками. Т.е теоретически, каждая следующая девушка танцевала со всеми предыдущими кавалерами и одним новым.



+/

Ответ: всего было 13 кавалеров и 7 девушек

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

FX

Место проведения

UB 20-63

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ КОРОБКОВА

ИМЯ Полина

ОТЧЕСТВО АЛЕКСЕЕВНА

Дата рождения 26.08.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: заключительный

Работа выполнена на ______ **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1.

$S = lg(10^4 \cdot tg 2017°) + lg(10^5 \cdot tg 2018°) + \dots lg(10^{20} \ tg 2033°).$

$\underline{lg(a \cdot b)} = \underline{lg a + lg b}$, тогда

$S = lg10^4 + lg tg 2017° + lg10^5 + lg tg 2018° + \dots lg10^{20} + lg tg 2033°$

$\underline{\log_a b^p = p \log_a b}$, тогда $S = (lg10^4 + lg10^5 + \dots lg10^{20}) +$

$+ (lg(tg 2017°) + lg(tg 2018°) + \dots lg(tg 2033°)) = \underbrace{(4 + 5 + \dots + 20)}_{204} +$

$+ (lg(tg 2017°) + lg(tg 2018°) + \dots + lg(tg 2033°))$

$lg a + \underline{lg b = lg ab}$, тогда $S = 204 + lg(tg 2017° \cdot tg 2018° \cdot \dots tg 2033°)$

$tg\ \underline{tg 2017} = tg\ \underline{(\pi \cdot 10 + 37) = tg 37} \Rightarrow S = 204 + lg(tg 37° \cdot tg 38° \dots tg 55°).$

$\underline{tg \alpha \cdot tg \beta} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))}{\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))} = \underline{\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}}$

$tg 37° \cdot tg 38° = \frac{\cos(-1) - \cos 75°}{\cos 1 + \cos 75}$, $\underline{\cos(-1) = \cos} 1 = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow tg 37 \cdot tg 38° = \frac{0 - \cos 75}{0 + \cos 75} = -1.$

$\Rightarrow \underline{tg 37° \cdot tg 38°} \cdot \underline{tg 39° \cdot tg 40°} \cdot \underline{tg 41° \cdot tg 42°} \cdot \underline{tg 43° \cdot tg 44°} \cdot \boxed{tg 45°}$

$\cdot \underline{tg 46' \cdot tg 47°} \cdot tg 49° \cdot tg 50° \cdot tg 51° \cdot \underline{tg 52° \cdot tg 53°} \cdot tg 48°$

$= (-1)^8 \cdot \underbrace{tg 45°}_{1} = 1 \cdot 1 = 1.$

$\Rightarrow S = 204 + \underbrace{lg 1}_{0} = 204 + 0 = 204.$ (+)

Ответ: $S = 204$ или R. 9

~~Задание 2.~~

~~n-й месяц – x м³~~

~~(n+1)-й месяц – $c - 2x$ м³~~

~~Значит равны $\Rightarrow x = c - 2x$~~

~~$3x = c$~~

~~$x = \frac{c}{3}$~~

~~Получим зависимость $x(c) = \frac{c}{3}$.~~

См. лист 2

Задание 3.

Дана парабола $y = x^2$. Окружность с $D_1 = 1$дм ($r = 0{,}5$дм) касается вершины параболы.

Есть 2 случая касания окружности и параболы:

1) внутренним образом (см. рис. 1)
2) внешним образом (см. рис. 2)

Если касание внешним образом, то D_{2017} = любому числу (где D_{2017} – диаметр 2017й окружности).

Если же касание внутренним образом, то можно заметить, что

$D_1 = 1$дм, $R_1 = 0{,}5$дм

$R_2 = 1{,}5$дм

$R_3 = 2{,}5$дм

$R_4 = 3{,}5$дм и т.д.

Тогда $R_n = (n-1) + 0{,}5$ дм.

т.е. $R_{2017} = (2017-1) + 0{,}5$дм $= 2016{,}5$дм.

тогда $D_{2017} = 2R_{2017} = 4033$дм

Ответ: $D_{2017} = 4033$дм, а $R_{2017} = \frac{D_{2017}}{2} = 2016{,}5$дм.

+

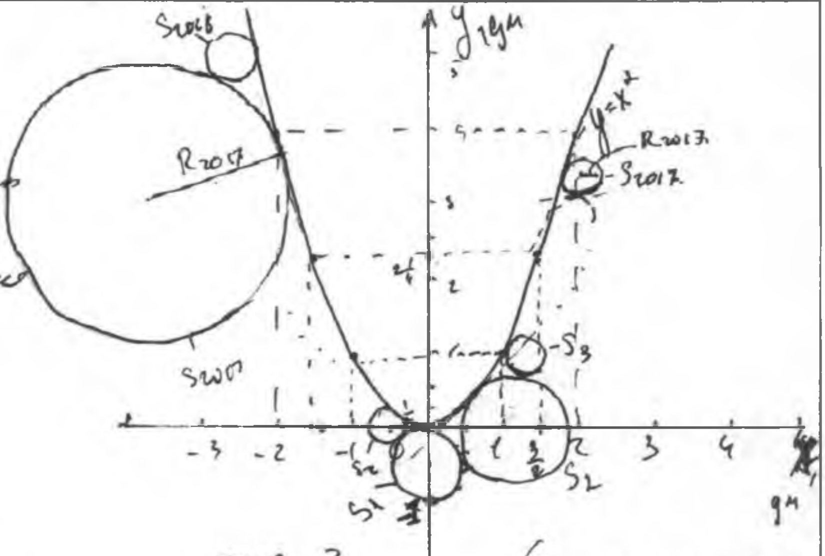


рис. 2.

(1см на рисунке = 1 дм в действительности).

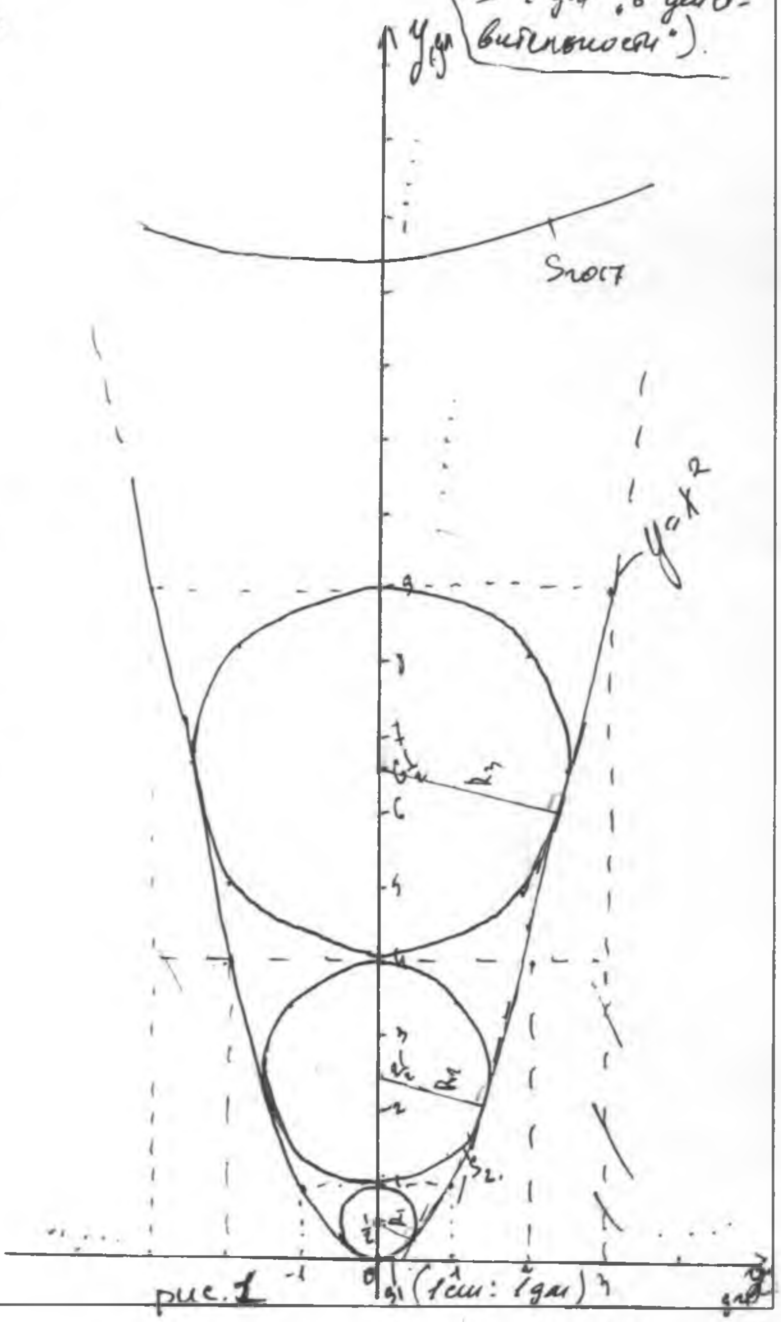


рис. 1 (1см : 1дм)

см. лист 3.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 2.

$n^{й}$ месяц = x м^3

$(n+1)^й$ месяц = $c-2x$ м^3

Пусть $y=x$ (1) и $y=c-2x$ (2)

$y=c-2x$. Т.к. число c неизвестно, то оно по сути может быть любым, но т.к. речь идет про запас газа, то $y>0$. Тогда $x>0$, а $c>2$.

Допустим, $c=3$, тогда

$y=c-2x=3-2x$

x	0	3
y	3	-3

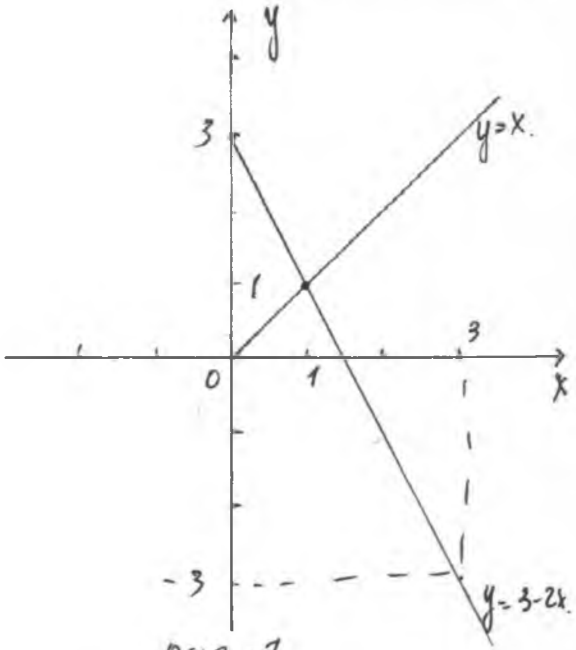


рис. 1

Видим из графика (рис 1), что $y=x$ и $y=3-2x$ пересекаются ⇒ запас газа может оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца.

Найдем, при каком X запасы будут одинаковы. Приравняем правые части графиков (1) и (2):

$X=c-2x$, откуда $X=\frac{c}{3}$

Получили зависимость x от c. То есть при определенных значениях c ($c\neq0$ $\boxed{\text{и } \cancel{c>2}}$), получим определенное значение x. Но т.к. значение c не указано в условии задачи, то считаю правильным указать просто зависимость одной переменной от другой.

Ответ: запас газа может оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца. Это возможно при $x=\frac{c}{3}$, где c - любое число, не равное 0 (нулю) и большее нуля ($c>0$)

Задание 4.

$a^2+b^2+c^2=6abc$. Очевидно, что числа a, b, c не целые и $\neq0$. ($a>0, b>0, c>0$). Тогда предположим, что числа a, b и c (из данных) равны друг и другу и $=\frac{1}{2}$. Тогда $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=6\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ - верно ⇒ $a=b=c=\frac{1}{2}$. Тогда $a+b+c=\frac{3}{2}$ - min значение выражения.

Ответ: методом подбора получили: $(a+b+c)_{min})=\frac{3}{2}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

GЯ 97-36

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ КОТЕЕВ

ИМЯ ЛЕВ

ОТЧЕСТВО ВАЛЕРЬЕВИЧ

Дата рождения 09.05.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Преобразуем S

$S = lg(10^4 tg2017°) + lg(10^5 tg2018°) + ... + lg(10^{20} tg2033°)$

$lg(10^4 tg2017°) = lg10^4 + lg tg2017° = 4 + lg2017°$

$S = 4+5+6+7+8+ ...... + lg2017° + lg2018° + ... + lg2033° =$

$= 204 + lg((tg2017° tg2033°)(tg2018° tg2032)...(tg2024° tg2026°)/ tg2025°$

однако $tg2017° = tg37°$ $tg2033° = tg53°$

$tg37° \times tg53° = 1$

$lg1=0$ $tg2025° = tg45° = 1$

$S = 204 + lg1 = 204$

+

Ответ: заработок компании составил 204 млн.

№2.

Составим таблицу по месяцам.

1мес	X
2мес	C−2X
3мес	4X−C
4мес	C−8X
5мес	16X−C
6мес	C−32X

заметим что в 3 месяц

$C - 2(C - 2X) = -C + 4X$

в 4 месяц: $C - 2(-C + 4X) = C - 8X$ и т.д.

Заметим, что в нечетные месяцы число гаража растет как и в четные. Совпасть может только чет мес = нечет месяц

Например $X = C - 2X$ $C = 3X$, или $C - 8X = X$

$C = 9X$

Все зависит от C, но ~~все~~ при определенных C

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

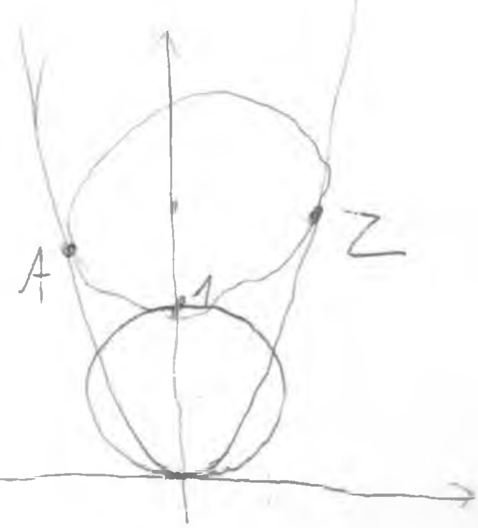
такая ситуация, где запас газа будет одинаков возможна. И во всех случаях запас газа будет ограниченным. Может быть x, может быть 9x. Значит

Ответ: Возможно, значение может быть разным.

№3.

Возьмем радиус второй окружности a−1

тогда уравнение окружности будет: $x^2+(y-a)^2=(a-1)^2$



Она должна пройти через точки (0,1) и касаться $y=x^2$. По построению центр лежит на оси y т.к. иначе не выполнится условие. Теперь рассмотрим точку Z. Она удовлетворяет $y=x^2$ и

$x^2+(y-a)^2=(a-1)^2$. Откуда

$$y+(y-a)^2=(a-1)^2$$

$$y^2+y(1-2a)+a^2-a^2-1+2a=0$$

$$y^2+y(1-2a)+2a-1=0$$

$$D=(1-2a)^2-4(2a-1)=4a^2-4a+1-8a+4=4a^2-12a+5$$

$$y=\frac{1-2a\pm\sqrt{4a^2-12a+5}}{2}$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~[illegible]~~ Заметим что мы ~~[illegible]~~ должны получить одно решение, раз происходит касание. Тогда

$4a^2-12a+5=0$

$D=144-80=64$

$a=\frac{12\pm 8}{8}$ a должно быть больше 2 т.к. касание с окружностью внешнее.

$a=2,5$. Тогда радиус S_2 $r=1,5$; Аналогично радиус $S_3=$ 2,5. Заметим что при первых членах радиус увеличивается на 1. А если рассматривать как мат индукцию то $a=r+n^2$.

$x^2+(y-r-n^2)^2=r^2$ удовлетворяет условию и $r=n-0,5$, тогда

~~$y+y^2+r^2+n^4$~~ –

$x^2+(y-r-(n+1)^2)=r^2$ Если привести то тоже получится что $r=n-0,5$ Отсюда $r_{2012}=2016,5$

Ответ: 2016,5.

(+)

№4.

~~[illegible]~~ Приведу пример с $a+b+c=1,5$ (∓)

$a=0,5$ $b=0,5$ $c=0,5$

$0,25+0,25+0,25=0,25\times0,5\times6$ удовлетворяет. Докажем что меньше сумма быть не может.

Пусть $a+b+c=z$ причем z фиксировано. Нам нужно найти пример где $z<1,5$. Известно что при фиксированной сумме произведение будет наибольшим когда множители равны. (например площадь прямоугольника с заданным периметром будет наибольшим при квадрате) поэтому чтобы $6abc$ было наибольшим $a=b=c$. Раз мы ищем $z<1,5$ то $a=b=c<0,5$ Отсюда $6abc<0,75$. Также заметим что при $z<1,5$ правая часть убывает быстрее левой. Т.к. при равных $a=b=c$ есть только корень $0,5$. Тогда $a \neq b \neq c$. Пусть a будет наибольшим числом из этой тройки. Тогда справа число увеличится менее чем в $1,5$ раза или уменьшится, а слева число будет в любом случае больше. Оптимальный вариант при $a=b=c$, будет $3a^2=6a^3$

$$3a^2(2a-1)=0 \quad a\neq 0$$ поэтому $a=b=c=0,5$

$s=1,5$

Заметим что при сумме $1,5$, условие достигается при $a=b=c$ т.к. справа будет наибольшее из возможных, а слева наименьшее из возможных т.к. при фиксирован. z сумма квадратов a и b будет наименьшей при $a=b$. А если при $z=1,5$ такое достигается только при $a=b=c$, то если $z<1,5$ тогда это невозможно

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Лицей №18

Место проведения

ХЫ 23-12

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ КОХАНОВ

ИМЯ АЛЕКСЕЙ

ОТЧЕСТВО ВАЛЕРЬЕВИЧ

Дата рождения 15.04.2002 **Класс:** 8

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

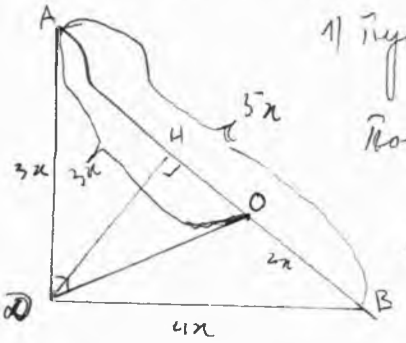
ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-12

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

а)

Начертим прямоугольный треугольник ABD, в котором отношение катетов равно $\frac{3}{4}$



1) Пусть x - 1 часть; c - гипотенуза

Тогда $AD = 3x$

$BD = 4x$

~~А~~ по теореме Пифагора:

$AD^2 + BD^2 \pm AB^2$

$AB^2 = \sqrt{AD^2 + BD^2}$

$AB = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2}$

$AB = \sqrt{25x^2}$

$AB = 5x$

2) Теперь найдём периметр участка:

$P = AB + BD + AD$

$P = 3x + 4x + 5x = 12x$

Значит каждый из братьев прошел $\frac{12x}{2} = 6x$

то есть точка их встречи (O) будет находится на расстоянии $6x - 3x = 3x$ от т. A и на расстоянии $6x - 4x = 2x$ от т. B.

Получили 2 треугольника ~~AOD~~ $\triangle AOD$ и $\triangle OBD$.

Эти треугольники имеют общую высоту DH => их площади относятся друг к другу как основания, то есть $\frac{S_{OBD}}{S_{AOD}} = \frac{BO}{AO}$

$\frac{S_{OBD}}{S_{AOD}} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{OBD} \neq S_{AOD} \Rightarrow$

=> у братьев получились участки разной площади.

в) чтобы у данных треугольников была одинаковая площадь, нужно чтобы они имели одинаковые основания, а так как братья проходят одинаковое расстояние, то и катеты AD и BD должны быть равны => чтобы площади ~~в~~ получившихся участков были равны, нужно чтобы поле имел форму равнобедренного прямоугольного треугольника (катеты относятся как $\frac{1}{1}$), такой треугольник можно получить только 1.

⊕

Ответ: а) не получились

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-12

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Начнём с того, что ни один из 3 самых лёгких приборов не будет являться одним из самых тяжёлых, т.к. тогда общая масса будет меньше 120 кг.

Масса самого тяжёлого из самых лёгких приборов будет больше $\frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$ кг; масса самого лёгкого из самых тяжёлых - меньше $\frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}$ кг

масса оставшихся приборов (не самых лёгких и тяжёлых) будет равна $120 - (31 + 41) = 48$ (кг)

их кол-во будет равно 4, т.к. если взять больше таких приборов (5), масса самого лёгкого из них ~~равна~~ меньше $\frac{48}{5} = 9,6$ (кг), данный прибор будет легче уже подобранных 3 самых лёгких приборов — противоречие

Если приборов взять меньше (3), то масса самого тяжёлого больше $\frac{48}{3} = 16$ (кг) - тяжелее подобранных самых тяжёлых - противоречие

То есть всего получим; 3 самых лёгких прибора
3 самых тяжёлых прибора
4 оставшихся прибора

всего приборов: $3+3+4 = 10$

+

Ответ: 10 приборов.

№5

Т.к. с 10 до 12 и с 12 до 14 часов одновременно работают оба насоса и за эти два отрезка времени прошло по 2 часа ($12 - 10 = 14 - 12 = 2$), то за первый промежуток времени резервуар наполнился на столько же что и за 2 отрезок.

То есть получим $\frac{1}{2} - x = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$, где x - часть резервуара, заполненная к 10ч.

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

То есть к 10ч резервуар был заполнен на $\frac{1}{3}$

Т.к. 2 насос откачивал горячее, то чтобы получить самое раннее время включения I-ого насоса нужно, чтобы 2 насос работал как можно медленнее.

Предположим что II насос был выключен,
Тогда за 12 - 10 = 2 часа I насос закачивает $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ резервуара
То есть чтобы наполнить резервуар до $\frac{1}{3}$ ему понадобится:
$2 \cdot \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 4$ часа, то есть он начнёт работать в 10-4=6 часов утра.

(+)

Но т.к. II насос совершил хотя бы какую-то работу I насос должен включиться немного позже 6 ч утра. Округляя до минут получим самое раннее время 6:01, округляя до часов - 7:00
Ответ: позже 6 часов утра (6:01)/(7:00)

N 2

а) Для k-нечётного.

- $B_k = A^k - k \cdot A^{k-2}$

Если k - чётное число, то формула будет такой.

- $B_k = A^k - k \cdot A^{k-2} - 2 \cdot (k-1)$

в) Подставляя в эти формулы разные значения x, получим, что при x = 1, значение B_k всегда одинаково, но т.к. даны $B_2 = B_4 = B_8$, то есть показатель степени k всегда чётный, то значение x может быть равным -1 ⊖
Ответ: ±1.

N 1

Чтобы выполнялась система $\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+x+z=xz \end{cases}$ нужно чтобы x, y или z был равен 0.

Если x=0, то $1+0+y=0$ $(1+x+y=xy)$

$y=-1$

$\Downarrow$

$2-1+z=-z$ $(2+y+z=yz)$

$1+z=-z$

$-2z=1 \quad |:2$

$z=-0,5$

$5-0,5+0=0$ - не верное $\Rightarrow x \neq 0$

$\uparrow (5+z+x=zx)$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-12

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если $z=0$, то $5+0+x=0$ $(5+z+x=zx)$

$x=-5$

$\Downarrow$

$1-5+y=-5y$ $(1+x+y=xy)$

$6y=4$ $|:6$

$y=1,5$

$2+1,5+0=0$ $(2+y+z=yz)$

$3,5=0$ – не верное $\Rightarrow z\neq 0$

Если $y=0$, то $1+x+0=0$

$x=-1$

$\Downarrow$

$5+z-1=-z$

$2z=-4$ $|:2$

$z=-2$

$2-2+0=0$ –

$0=0$ – верное $\Rightarrow$ $y=0$

$x=-1$

$z=-2$

Ответ: $x=-1$
$y=0$
$z=-2$. } одно из реш.

$\pm$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ-В-308

Место проведения

ЫW 18-91

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ КОЧЕТКОВ

ИМЯ АНДРЕЙ

ОТЧЕСТВО ЮРЬЕВИЧ

Дата рождения 14.03.2002

Класс: 8

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 7 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЫW 18-91

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases} \quad \begin{cases} 1=xy-x-y \\ 2=zy-z-y \\ 5=zx-z-x \end{cases} \quad \begin{cases} 1=x(y-1)-y-1+1 \\ 2=z(y-1)-y-1+1 \\ 5=z(x-1)-x-1+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1=(x-1)(y-1)-1 \\ z=(z-1)(y-1)-1 \\ 5=(z-1)(x-1)-1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(y-1)=2 \\ (z-1)(y-1)=3 \\ (z-1)(x-1)=6 \end{cases}$$

теперь запишем первое и третье уравнения

$$\begin{cases} (x-1)(y-1)=2 \,\big|\cdot 3 \\ (z-1)(x-1)=6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3(x-1)(y-1)=6 \\ (z-1)(x-1)=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y-3=z-1$$

$$3y-2=z$$

Подставим это в уравнение второе.

$$2+y+3y-2=y(3y-2)$$

$$4y=3y^2-2y$$

$$3y^2-6y=0$$

$$y(3y-6)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 3y-6=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$$

~~'y' не может быть равен нулю из первого уравнения. $1+x+y=xy$. Если $y=0$, то $x+1=0$~~

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ 1+x=0 \\ 2+z=0 \\ 5+z+x=zx \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ 3+x=2x \\ 4+z=2z \\ 5+x+z=xz \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \\ z=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=3 \\ z=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=-1$; $y=0$; $z=-2$; либо $x=3$, $y=2$, $z=4$.

⊕

2.

$A = x + \frac{1}{x}$

а) • $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Заметим, что $A^2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, тогда $B_2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2$, то есть $B_2 = A^2 - 2$.

• $B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Заметим, что $A^3 = x^3 + 3\frac{x^2}{x} + 3\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^3}$, тогда $B_3 = A^3 - 3\left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x^2}\right) = A^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = A^3 - 3A$.

$B_3 = A^3 - 3A$.

• $B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4}$

Заметим, что $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + 4\frac{x^3}{x} + 6\frac{x^2}{x^2} + 4\frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^4}$, тогда $B_4 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^4 - 4x^2 - 4\frac{1}{x^2} - 6 =$

$B_4 = A^4 - 4(A^2-2) - 6$

$B_4 = A^4 - 4A^2 + 8 - 6$

$B_4 = \boxed{A^4 - 4A^2 + 2}$

$B_8 = X^8 + \frac{1}{X^8}$

~~по треугольнику паскаля найдём~~

Заметим, что $\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 = x^8 + 2 + \frac{1}{x^8}$; значит

$B_8 = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = B_4 = A^4 - 4A^2 + 2$

$B_8 = (A^4 - 4A^2 + 2)^2 - 2$

$B_8 = ((A^2-2)^2 - 2)^2 - 2$

$B_8 = (A^2-2)^4 - 4(A^2-2)^2 + 4 - 2$

~~$B_8 = A^4 - 4A^2 + 4 - 4A^4$~~

$B_8 = A^8 - 8A^6 + 24A^4 - 32A^2 + 16 - 4A^4 + 16A^2 - 16 + 2$

$B_8 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 2$

Ответ: $B_2 = A^2 - 2$

$B_3 = A^3 - 3A$

$B_4 = A^4 - 4A^2 + 2$

$B_8 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 2.$

Пометка: B_4 также можно было найти по формуле:

$B_{2n} = (B_n)^2 - 2$, то есть

$B_4 = (B_2)^2 - 2.$

$$\left[\begin{array}{l} A = A^2 - 2 \\ A = 2 - A^2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} A^2 - A - 2 = 0 \\ A^2 + A - 2 = 0 \end{array}\right.$$

по теореме Виетта:

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} A = 2 \\ A = -1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} A = -2 \\ A = 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} A = \pm 1 \\ A = \pm 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = 1 \\ x + \frac{1}{x} = -1 \\ x + \frac{1}{x} = 2 \\ x + \frac{1}{x} = -2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 + 1 = x \\ x^2 + 1 = -x \\ x^2 + 1 = 2x \\ x^2 + 1 = -2x \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = 0 \\ x^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{array}\right.$$

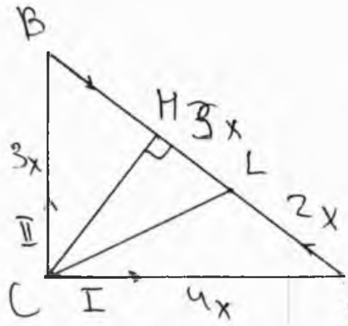
$$\left[\begin{array}{l} \text{нет решений} \\ \text{нет решений} \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \quad x = \pm 1.$$

±

~~Реш~~:

Ответ: равенства выполняются при $A = \pm 1$; $A = \pm 2$, и при $x = \pm 1$, однако A не может быть равно ± 1. $A \neq \pm 1$.

4.



Поскольку два катета этого треугольника относятся как 3 к 4, то гипотенуза относится к катетам как 5 к 3 и 5 к 4 соответственно, тогда можем сказать, что катеты равны 3x и 4x, а гипотенуза 5x. Тогда поскольку они двигались с одной скоростью, то когда I брат прошёл свой катет второй брат уже прошёл $\frac{1}{5}$ гипотенузы. Дальше они встретились посередине оставшихся $\frac{4}{5}$ гипотенузы, значит они поделили гипотенузу в отношении 3 к 2 от катета II

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ bIW 18-91

ВНИМАНИЕ! Проверяется только **ТО**, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Проведём высоту к гипотенузе треугольника, и тогда получится:

$$S_{BCL} = \frac{1}{2} CH \cdot BL$$

$$S_{ACL} = \frac{1}{2} CH \cdot AL$$

Чтобы их площади были равны их отношение должно быть равно 1

Получим:

$$\frac{S_{BCL}}{S_{ACL}} = \frac{\frac{1}{2} CH \cdot BL}{\frac{1}{2} CH \cdot AL} = \frac{BL}{AL}$$

По доказанному:

$$\frac{BL}{AL} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{S_{BCL}}{S_{ACL}} \neq 1 \Rightarrow$$ треугольники неравновелики.

Ответ: нет, не получились.

б) Чтобы два треугольника были равновелики, то отрезок, соединяющий точку их встречи и вершину прямого угла должен быть медианой. Значит они должны начать движение у вершин гипотенузы одновременно значит катеты должны быть равны. Значит все прямоугольные треугольники с равными катетами подходят под условие.

Ответ: таких треугольников бесконечное множество, но соотношения катетов у всех них будет равно 1 к 1.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5.

В промежуток от 12 ч до 14 ч резервуар наполнился на $\frac{1}{6}$ часть, значит т.к. с 12 ч до 14 ч прошло столько же времени, сколько с 10 ч до 12 ч, когда работали оба насоса, то в 10 ч было заполнено $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ резервуара.

Обозначим произв. насоса, заполняющего резервуар за x, а выкачивающего за y получим:

$x - y = \frac{1}{12}\left(\frac{\text{литров}}{\text{час}}\right)$. $x>0$ $y>0$ =>

=> $x > \frac{1}{12}$.

Чтобы найти минимальное время (на часах) нужно брать минимальную производительность тогда возьмём x за $\frac{1}{12}$ и после скажем, что в этот момент насос не могли включить, но минимальное время есть момент после данного.

Тогда получим:

$\tau < \frac{1}{3} : \frac{1}{12}$

$\tau < 4$

$10 - 4 = 6$ (ч).

⊕

Ответ: насос могли включить сразу после 6 часов утра, но ни в коем случае не в 6 ч, (тогда у откачивающего насоса производительность будет равна 0).

Пометка: я понял условие задачи так: каждый из насосов имеет хоть какую-то производительность больше 0 и отличную

.*

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081.

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 61W 18-91

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3.

В сумме вес всех приборов даёт 120 кг, а сумма трёх самых лёгких плюс сумма трёх наибольших равна 72; 72 < 120, значит ни один из приборов не должен относится и к трём наименьшим и к трём наибольшим. Однако если попробовать записать 31 в виде трёх различных целых чисел, то там обязательно будет прибор с весом 12 кг. то же самое мы получаем и для трёх наибольших. Значит веса приборов дробные (не обязательно все).

Поскольку ни один из приборов не относится к трём наибольшим и наименьшим

Получим:

120 − 72 = 48. ~~x~~ - сумма весов оставшихся приборов

Однако хотя бы один из 3 наименьших приборов больше ~~[illegible]~~ либо равен $10\frac{1}{3}$ кг, а из трёх наибольших хотя бы один меньше либо равен $13\frac{2}{3}$. кг.

$48 : 10\frac{1}{3} = 48 : \frac{31}{3} = \frac{48 \cdot 3}{31} = 4\frac{20}{31}$

$48 : 13\frac{2}{3} = 48 : \frac{41}{3} = \frac{144}{41} = 3\frac{20}{31}$

Это предельные количества ~~насосов~~ приборов. Их не может быть дробное число, значит делаем вывод, что их ~~либо 3 либо~~ 4. (~~насосы~~ приборы не входящие ни в самые лёгкие ни в самые тяжёлые). Самых тяжёлых и самых лёгких) по 3 прибора

Получим:

4 + 3 + 3 = 10 (пр.) - всего.

Ответ: 10 приборов. (+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

ЫF 91-94

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ КРАМЕР

ИМЯ КОНСТАНТИН

ОТЧЕСТВО АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 18.09.1999 **Класс:** 11

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ bIF 91-94

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$S = \lg(10^4 \cdot tg 2017°) + \lg(10^5 tg 2018°) + \ldots + \lg(10^{20} \cdot tg 2033°) =$

$= \lg(10^4 \cdot tg(11\pi + 37)) + \lg(10^5 tg(11\pi + 38)) + \ldots +$

$+ \lg(10^{20} \cdot tg(11\pi + 53))$

$\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b$

Из этого следует!

$S = \lg 10^4 + \lg(tg(11\pi + 37)) + \lg 10^5 + \lg(tg(11\pi + 38)) + \ldots +$

$+ \lg 10^{20} + \lg(tg(11\pi + 53)) = (4 + 5 + 6 + \ldots + 20) +$

$+ (\lg(tg 37) + \lg(tg 38) + \ldots + \lg(tg 53)) =$

$= 204 + \lg(tg 37 \cdot tg 38 \cdot \ldots \cdot tg 53)$

$$tg 37 \cdot tg 38 \cdot \ldots \cdot tg 53 = \frac{\sin 37 \cdot \sin 38 \cdot \ldots \cdot \sin 45 \cdot \sin(90-44) \cdot}{\cos 37 \cdot \cos 38 \cdot \ldots \cdot \cos 45 \cdot \cos(90-44) \cdot}$$

$$\frac{\cdot \sin(90-43) \cdot \ldots \cdot \sin(90-37)}{\cdot \cos(90-43) \cdot \ldots \cdot \cos(90-37)} = \frac{\sin 37 \cdot \sin 38 \cdot \ldots \cdot \sin 45 \cdot}{\cos 37 \cdot \overset{\cos 38}{\cancel{\sin 3}} \cdot \ldots \cdot \cos 45 \cdot}$$

$$\frac{\cdot \cos 44 \cdot \cos 43 \cdot \ldots \cdot \cos 37}{\cdot \sin 44 \cdot \sin 43 \cdot \ldots \cdot \sin 37} = \frac{\sin 45}{\cos 45} = 1$$

⊕

$\lg 1 = 0$

$S = 204 + 0 = 204$

Ответ: 204

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть в первом месяце запас был x, тогда построим таблицу запасов на каждый месяц:

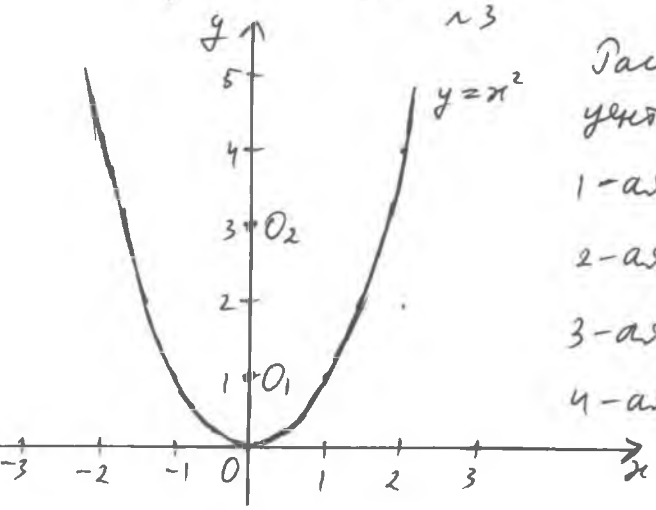
Месяц	Запас (м³)
1	x
2	$c-2x$
3	$c-2(c-2x)=4x-c$
4	$c-2(4x-c)=3c-8x$
5	$c-2(3c-8x)=16x-5c$
6	$c-2(16x-5c)=11c-32x$
7	$c-2(11c-32x)=64x-21c$
8	$c-2(64x-21c)=43c-128x$
9	$c-2(43c-128x)=256x-85c$
10	$c-2(256x-85c)=171c-512x$
11	$c-2(171c-512x)=1024x-341c$
12	$c-2(1024x-341c)=683c-2048x$

Если приравнять любые два месяца, то мы получим всегда, что $x=\frac{1}{3}c$. Из этого мы получаем, что запас газа в каждом месяце равен $\frac{1}{3}c$.

⊕

Ответ: запас газа во всех месяцах равен ~~и ра~~ $\frac{1}{3}c$

№3



Рассмотрим координаты центров окружностей:

1-ая: $y_1=R_1$

2-ая: $y_2=2R_1+R_2$

3-ая: $y_3=2(R_1+R_2)+R_3$

4-ая: $y_4=2(R_1+R_2+R_3)+R_4$

и т.д.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

А координаты точек касания для каждой окружности:

1-ая: $y_1 = R_1$ 2-ая: $y_2 = 2R_1 + R_2$ 3-ая: $y_3 = 2(R_1+R_2)+R_3$

$x_1 = R_1$ $x_2 = R_2$ $x_3 = R_3$

ошибка

и т.д.

Т.к это точки касания с параболой $y = x^2$, то

1) $y_1 = x_1^2$

$R_1 = R_1^2$

$R_1 = 0$ или $R_1 = 1$
не подходит

$R_1 = 1$

2) $y_2 = x_2^2$

$2R_1 + R_2 = R_2^2$

$R_2^2 - R_2 - 2 = 0$

$R_2 = \left[\begin{array}{l}2\\ -1 \text{ - не подходит}\end{array}\right.$

$R_2 = 2$

3) $y_3 = x_3^2$

$2(R_1+R_2)+R_3 = R_3^2$

$R_3^2 - R_3 - 6 = 0$

$R_3 = \left[\begin{array}{l}3\\ -2 \text{ - не подходит}\end{array}\right.$

$R_3 = 3$

и т.д.

2017) $y_{2017} = x_{2017}^2$

$2(R_1 + R_2 + \ldots + R_{2016}) + R_{2017} = R_{2017}^2$

$R_{2017}^2 - R_{2017} - 2(R_1 + R_2 + \ldots + R_{2016}) = 0$

$R_{2017} = \left[\begin{array}{l}2017\\ -2016 \text{ - не подходит}\end{array}\right.$

$R_{2017} = 2017$

∓

Ответ: 2017

№4

∓

$a^2+b^2+c^2 = 6abc$

Сумма $a+b+c$ будет минимальной, когда $a=b=c$, а значит

$3a^2 = 6a^3$

$a^2(3-6a) = 0$

$a = 0$ или $3 - 6a = 0$
не явл. реш, т.к $a > 0$

$6a = 3$

$a = \frac{1}{2} = b = c$

Получаем: $a+b+c = 1{,}5$

Ответ: 1,5

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

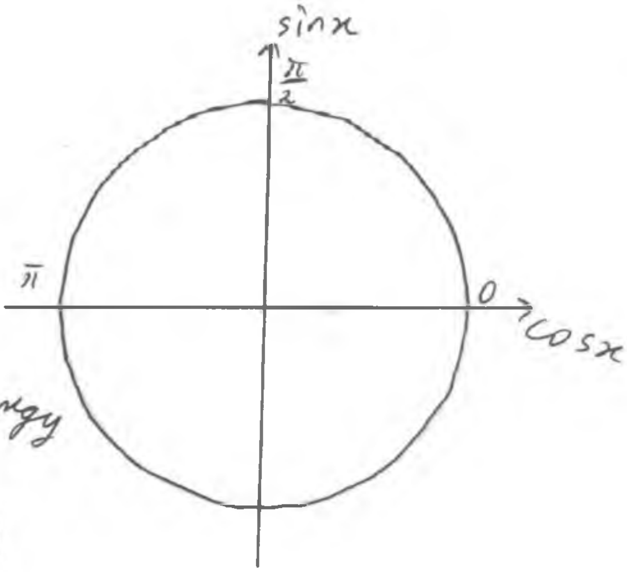
№5

$n > 1$

$\sin nx = \sin x$

$[0;\pi]$

$S(n) = 2017$ это значает, что будет (почти) ~~все~~ весь промежуток $[0;\pi]$, а именно; расстояние между будет $\frac{\pi}{2017}$, т.е.



$\sin \frac{n\pi}{2017} = \sin \frac{\pi}{2017}$

$\sin \frac{2\pi n}{2017} = \sin \frac{2\pi}{2017}$

и т.д

~~Такое количество S(n)=2017 будет только один раз~~

$\sin \frac{n\pi}{2017} = \sin \frac{\pi}{2017}$

$n = 2016$

$\sin \frac{2016\pi}{2017} = \sin \frac{\pi}{2017}$

$S(n) = n+1$

S(n) будет принимать значение 2017, только один раз

Ответ: $S(n) = n+1$

$S(n)=2017$ только один раз

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

OF 94-94

шифр

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ КРАСИЛЬНИКОВ

ИМЯ КОНСТАНТИН

ОТЧЕСТВО АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 03.04.2003

Класс: 7

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017

(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5

1) $\frac{2,00000000004}{(1,00000000004)^2+2,000000000004}$.

Пусть $2,00000000004 = x$, тогда $1,00000000004 = x-1$. Тогда значение первого выражения равно $\frac{x}{(x-1)^2+x} = \frac{x}{(x-1)^2}+1$.

2) ~~Пусть~~) $\frac{2,000000000002}{(1,000000000002)^2+2,0000000000002}$.

Пусть $0,000000000002 = p$. Тогда $2,000000000002 = x-p$. Тогда $1,000000000002 = x-p-1$. Значит значение второго выражения равно

$$\frac{(x-p)}{(x-p-1)^2+(x-p)} = \frac{x-p}{(x-p-1)^2}+1.$$?/ ошибка.

Сравнить $\frac{x}{(x-1)^2}+1$ и $\frac{x-p}{(x-p-1)^2}+1$

$$\frac{x}{(x-1)^2} \text{ и } \frac{x-p}{(x-p-1)^2}$$

$$x(x-p-1)^2 \text{ и } (x-1)^2(x-p)$$

~~(Пусть $x-p-1=y$. Тогда $x-p=y$. Тогда~~

~~($x(y-1)^2$ и $y(x-1)^2$~~

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Пусть $x-p-1=y$. Тогда

xy^2 и $(y+p)^2(y+1)$.

xy^2 и $(y^2+2yp+p^2)(y+1)$.

$y^2(y+p+1)$ и $y^3+y^2+2y^2p+2yp+$
$+p^2y+p^2$

$\cancel{y^3}+y^2p+\cancel{y^2}$ и $\cancel{y^3}+\cancel{y^2}+2y^2p+2yp+p^2y+p^2$

y^2p и $2y^2p+2yp+p^2y+p^2$

0 и $y^2p+2yp+p^2y+p^2$.

Ясно, что $0<y^2p+2yp+p^2y+p^2$.

Значит и

$$\frac{2{,}0000000002}{(1{,}0000000002)^2+2{,}0000000002}>$$

$$>\frac{2{,}00000000004}{(1{,}00000000004)^2+2{,}00000000004}$$

Ответ: $\frac{2{,}0000000002}{(1{,}00000000002)^2+2{,}0000000002}$ больше.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №2

Пусть девушек, пришедших на бал k, тогда кавалеров k+6. А т.к всего пришли в гости 20 человек, то решим уравнение:

$k+k+6=20$

$2k+6=20$

$2k=14$

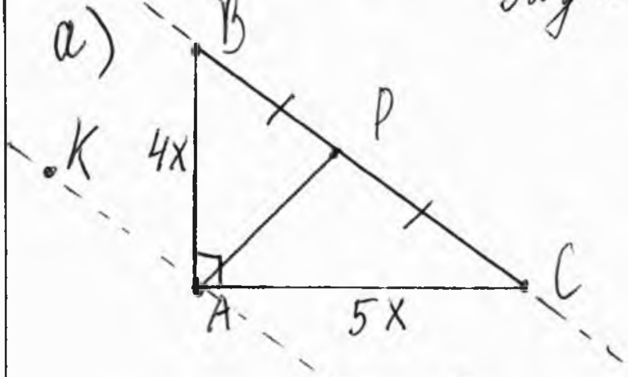
$k=7.$

Значит всего танцоров кавалеров $7+6=13$.

Ответ: 13.

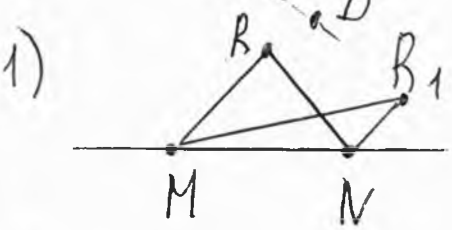
Задача №4

а)



Проведём через точку A прямую параллельную ~~точке~~ прямоу BC. назовём эту прямую KB.

1)



Тассмотрим прямую MN. $S_\Delta MR_1N = S_\Delta MRN$ ~~эти~~.

Т.к. точки B и C лежат на одной прямой BC и $BP=PC$, то $S_\Delta BAP = S_\Delta APC$.

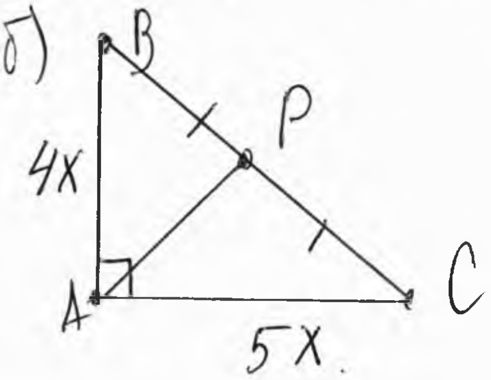
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ OF 94-94

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

б)



$BC=\sqrt{(4x)^2+(5x)^2}=$

$=\sqrt{16x^2+25x^2}=$

$=\sqrt{41x^2}=$

$=\sqrt{41}\,x$

Значит $BP=PC=\frac{\sqrt{41}}{2}+0,5x\neq$

$\neq$ Если это возможно то

$\sqrt{\frac{41}{2}}+0,5x=5x=4x$!!! Значит не может

Ответ. а) да б) нет. (+)

Задача № 1

Пусть топлива было рассчитано на k недель. Тогда всего ~~топ~~ топлива $31ak$. литров. или же $30a+29a+\ldots+a$. Значит

±

$31ak=30a+29a+\ldots+a$

$31ak=31a\cdot15\Rightarrow k=15$ (недель)

Значит было закуплено $31\cdot15a=$ $=465a$ литров топлива.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

задача №3.

z ч $+ y$ мин $= 60z + y$ мин

x ч $+ z$ мин $= 60x + z$ мин

y ч $+ x$ мин $= 60y + x$ мин

Тогда $(60y+x) - (60z+y) = 60x+z$

$$59y = 59x + 61z$$

$$59(y-x) = 61z.$$

$z \vdots 59$. ~~(зн)~~ z max 23ч.

Значит $z \not\vdots 59$. Значит такого не может быть ~~б~~ !!! ?

⊖

зада

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

RQ 41-40

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ КРАСНОВ

ИМЯ АНДРЕЙ

ОТЧЕСТВО НИКОЛАЕВИЧ

Дата рождения 09.10.2001

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. $A = x + \frac{1}{x}$?

а) при $k=2$: $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = A^2 - 2$

при $k=3$: $B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} \overset{!}{=} A^3 - 3A$

при $k=4$: $B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4} = A^4 - 4(A^2-2) - 6 = A^4 - 4A^2 + 8 - 6 = A^4 - 4A^2 + 2$

при $k=8$: $\frac{1}{x^6} + x^6 = A^6 - 6(x^4 + \frac{1}{x^4}) - 14(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 18 =$

$= A^6 - 6(A^4 - 4A^2 + 2) - 14(A^2 - 2) - 18 = A^6 - 6A^4 + 24A^2 - 12 -$

$- 14A^2 + 28 - 18 = A^6 - 6A^4 + 10A^2 - 2$, тогда

$B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8} = A^8 - 8(x^6 + \frac{1}{x^6}) - 27(x^4 + \frac{1}{x^4}) - 52(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 64 =$

$= A^8 - 8(A^6 - 6A^4 + 10A^2 - 2) - 27(A^4 - 4A^2 + 2) - 52(A^2 - 2) - 64 =$

$= A^8 - 8A^6 + 48A^4 - 80A^2 + 16 - 27A^4 + 108A^2 - 54 - 52A^2 + 104 - 64 =$

$= A^8 - 8A^6 + 21A^4 - 24A^2 - 2$

~~б) $B_2 = B_4 = B_8 \Leftrightarrow A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - 8A^6 + 21A^4 - 24A^2 - 2$~~

~~$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + x^2 = \frac{1}{x^4} + x^4 = \frac{1}{x^8} + x^8 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \cdot (1 + x^4) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (1 + x^8) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \times$~~

~~$\times (1 + x^{16}) \Rightarrow x \neq 0$; $x^2 + x^6 = 1 + x^8$; $x^4 + x^{12} = 1 + x^{16}$; $x^6 + x^{10} = 1 + x^{16}$~~

~~$x^{16} = x^{12} + x^4 - 1$~~

~~$x^{16} = x^{10} + x^6 - 1$~~

~~$\Downarrow$~~

~~$x^{12} + x^4 = x^{10} + x^6$~~

~~$\Updownarrow$~~

~~$x^8 + 1 = x^6 + x^2$~~

~~б) $B_2 = B_4 \Leftrightarrow A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow A^4 - 5A^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (A^2 - 4)(A^2 - 1) = 0 \Rightarrow A = \pm 1; \pm 2$~~

~~$B_4 = B_8 \Leftrightarrow A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - 8A^6 + 21A^4 - 24A^2 - 2 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow A^8 - 8A^6 + 20A^4 + 20A^2 - 4 = 0$, проверим для $A = \pm 1; \pm 2$~~

~~если $A = 1$, то: $1 - 8 + 20 + 20 - 4 = 0$ (неверно)~~

~~если $A = -1$, то: $1 - 8 + 20 + 20 - 4 = 0$ (неверно)~~

~~если $A = 2$, то: $256 - 512 + 320 + 80 - 4 = 0$ (неверно)~~

~~если $A = -2$, то: $256 - 512 + 320 + 80 - 4 = 0$ (неверно)~~

Ответ: таких A не сущ. $\Rightarrow$ и x тоже

№1.

с) при $x=1$, мы знаем ~~ж~~, что $1^n=1$, поэтому лишних операций по возведению ~~в~~ x в квадрат не придётся ✓ выполнять, тогда $A=2$

$$C=\left(\left(1^{2017}+\frac{1}{\cancel{20}1^{2017}}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017}=\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017}=1^{2017}=1$$

Ответ: $x=1$, а $A=2$; $C=1$

d) $B_2=B_4 \Rightarrow A^2-2=A^4-4A^2+2 \Rightarrow A^4-5A^2+4=0 \Rightarrow A^2=4$ или 1

$B_2=B_8 \Rightarrow$ ~~A^4-4A^2+2~~ $A^2-2=A^8-8A^6+21A^4-24A^2-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A^8-8A^6+21A^4-25A^2=0$

+

при $A^2=1$: $1-8+21-25=0$ (неверно)

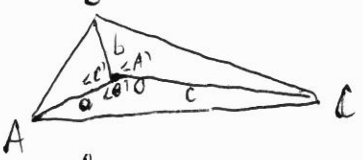
при $A^2=4$: $256-512+336-100$ (верно), тогда

$A^2=4 \Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=4 \Leftrightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=4 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=2$, известно из неравенства Коши, что сумма обр. чисел больше равна 2 и равна лишь тогда, когда числа равны $\Rightarrow x^2=\frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4=1 \Rightarrow x=\pm1$, а т.к. $A^2=4$, то $A=$ ~~[illegible]~~ ±2

Ответ: $A=\pm2$; $x=\pm1$

№4.



−

по условию: $a\cdot b\cdot\cos C'=\cancel{2}S_{AOB}=x$

$a\cdot c\cdot\cos B'=S_{AOC}=3x$

$b\cdot c\cdot\cos A'=S_{BOC}=2x$

~~$\Rightarrow a^2\cdot b^2\cdot c^2\cdot\cos C'\cdot\cos B'\times\cos A'=6x^3$~~

$\Rightarrow S_{ABC}=6x$, ~~ит~~ т.к. ~~∠AB~~ от расстояний пунктов A, B и C находим S_{ABC} по формуле Герона ($S=\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}$) и делим на 6 это x. И через деление S маленьких Δ на a, b и c (а также x соотв. для них, т.е $S_{AOB}:a:b$), получаем cos угла, отсюда угол и точку?

0

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Пусть в самом первом месяце x м³ газа, тогда во втором будет $6-x$, тогда в третьем он будет $6-(6-x)=x$, и т.д., т.е. в нечётных месяцах x, а в чётных $6-x$ $(x; 6-x>0)$

1) если оба месяца нечётные: $x = x^2 \Rightarrow x=0$ или $x=1$, но $x=0$ не удовл. условию $x>0$, тогда $x=1$

2) если оба месяца чётные: $6-x=(6-x)^2 \Rightarrow x=6$ или $x=5$, но $x=6$ не удовл. условию $6-x>0$, тогда $x=5$

3) если месяц чётный и нечётный:

1. $x^2=6-x \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 6}}{2}=-3; 2$, но -3 не удовл. условию $x>0$, тогда $x=2$

2. $(6-x)^2=x \Leftrightarrow x^2-13x+36=0 \Rightarrow x=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\cdot 36}}{2}=4; 6$, но 8 не удовл. условию $6-x>0$, тогда $x=4$

Ответ: если это два нечётных месяца, то $1 = 1^2$; если это два чётных месяца, то $1=1^2$; если это чётный и нечётный месяцы, то $2^2=4$ (т.е. если два месяца идущие через нечётное число месяцев, то в обоих был запас 1 м³, если идущие через чётное число месяцев, то в одном месяце 2 м³, а в другом 4 м³)

Не только

7

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RQ 41-40

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~№3 Пусть $a=x-1$, тогда:~~

~~$1-\frac{a+1}{1}+\frac{(a+1)\cdot a}{2}-\frac{(a+1)(a-1)\cdot a}{6}+$~~

№3.

~~умножим обе части уравнения на 24, тогда:~~

~~$24-24x+12x^2-12x-4x^3+12x^2-8x+x^4-6x^3+11x^2-6x=0$~~

~~$x^4-10x^3+25x^2-50x+24=0$~~

№5.

по условию: $p^2-4Q=100$

⊕

$f(x)+f(x-10)=x^2+px+Q+(x-10)^2+p(x-10)+Q=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+2(p-10)x+2(50-5p+Q)=0\Leftrightarrow x^2+(p-10)x+(50-5p+Q)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow D=(p-10)^2-4\cdot(50-5p+Q)=p^2\cancel{-20p}+100-200\cancel{+20p}-4Q=$

$=p^2-4Q)-100$, по условию $p^2-4Q=100\Rightarrow D=0$, тогда

это уравнение имеет 1 корень

Ответ: 1

№3. $1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=$

$=\left(\cancel{\frac{x-1}{1}}\right)+\frac{x}{2}\cdot\cancel{\frac{x-1}{1}}-\frac{x}{2}\cdot\cancel{\frac{x-1}{1}}\cdot\frac{x-2}{3}+\frac{x}{2}\cdot\cancel{\frac{x-1}{1}}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{4}=-1+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\cdot\frac{x-2}{3}+$

$+\frac{x}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{4}=0$ или $x=1$; $-1+\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\cdot\frac{x-2}{3}+\frac{x}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{4}=$

$=\frac{x-2}{2}-\frac{x\cdot(x-2)}{6}+\frac{x(x-2)(x-3)}{2\cdot4}=0$ $\mid\cdot2$ и $:(x-2)$ или $x=2$

⊕

$1-\frac{x}{3}+\frac{x(x-3)}{12}=0$ $\mid\cdot12$

$12-4x+x^2-3x=0\Leftrightarrow x^2-7x+12=0\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot12}}{2}=3;4$

Ответ: $x=1;2;3;4$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССТ

Место проведения

GE 78-52

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Кузнецов

ИМЯ Андрей

ОТЧЕСТВО Петрович

Дата рождения 27.02.2003

Класс: 7

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Что больше: $\frac{2{,}00000000004}{(1{,}00000000004)^2+2{,}00000000004}$ или $\frac{2{,}00000000002}{(1{,}00000000002)^2+2{,}00000000002}$

Решение

Пусть 1,00000000002 = x, ~~тогда~~ 0,00000000002 = y, тогда 2,00000000002 = x+1, а 2,00000000004 = x+y+1.

Сравним дроби.

$\cancel{\frac{x+y+1}{(x+y)^2+x+y+1}}$

$$\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x+y+1}{(x+y)^2+x+y+1}=\frac{(x+1)((x+y)^2+x+y+1)-(x+y+1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)((x+y)^2+x+y+1)}=$$

$$=\frac{(x+1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)-(x^2+x+1)(x+y+1)}{(x^2+x+1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)}=$$

$$=\frac{(x^3+2x^2y+xy^2+x^2+xy+x+x^2+2xy+y^2+x+y+1)-(x^3+x^2y+x^2+x^2+xy+x+x+y+x)}{(x^2+x+1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)}=$$

$$=\frac{2x^2y+xy^2+2xy+y^2-x^2y}{(x^2+x+1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)}=\frac{y^2+2xy+xy^2+x^2y}{(x^2+x+1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)}$$

т.к. $x>0$, $y>0$, значит $\frac{y^2+2xy+xy^2+x^2y}{(x^2+x+1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)}>0$, и получается, что уменьшаемое больше вычитаемого, значит $\frac{2{,}00000000002}{(1{,}00000000002)^2+2{,}00000000002}>\frac{2{,}00000000004}{(1{,}00000000004)^2+2{,}00000000004}$

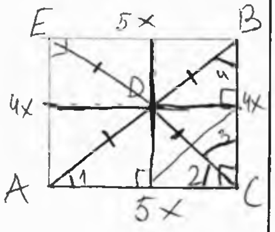
Ответ: $\frac{2{,}00000000002}{(1{,}00000000002)^2+2{,}00000000002}$ больше.

⊕

№4

Дано:
AD=DB
AC:BC=5:4
∠C=90°

Сравнить: S△ADC и S△BDC; P△ADC и P△BDC



Решение

1. Сравним P△ADC и P△BDC.

P△ADC = AD+DC+AC

P△BDC = BD+DC+BC

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GE 78-52

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$P_{\triangle ADC} - P_{\triangle BDC} = AD + DC + AC - BD - DC - BC$

$P_{\triangle ADC} - P_{\triangle BDC} = AD - AD + AC - BC$

$P_{\triangle ADC} - P_{\triangle BDC} = 5x - 4x = x \Rightarrow P_{\triangle ADC} > P_{\triangle BDC}$.

2. Сравним $S_{\triangle ADC}$ и $S_{\triangle BDC}$.

$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AE \cdot AC - S_{\triangle BDC} = 2x \cdot 5x - S_{\triangle BDC} = 10x^2 - S_{\triangle BDC}$

$S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} EB \cdot BC - S_{\triangle ADC} = 2{,}5x \cdot 4x - S_{ADC} = 10x^2 - S_{\triangle ADC}$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4x \cdot 5x = 10x^2$

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle BDC}$

$EC = AB \Rightarrow AD = DC = BD \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \angle 3 = \angle 4$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\triangle ADC} = \frac{1}{4} \cdot S_{\square AEBC} \\ S_{\triangle DBC} = \frac{1}{4} \cdot S_{\square AEBC} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\triangle ADC} = S_{\triangle DBC}$$

Ответ: $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle DBC}$, $P_{\triangle ADC} > P_{\triangle BDC}$. ⊕

№3

z ч y мин + x ч z мин = y ч x мин

$60z + y$ мин $+ 60x + z$ мин $= 60y + x$ мин

$60z + y + 60x + z - 60y - x = 0$

$61z = -59(x - y)$

$(x - y) = \frac{61z}{-59}$

$x - y = -\frac{61z}{59}$, ~~если z = 59, то x−y = 61.~~ таких значений нет.

⊖

Ответ: ~~x−y = 61~~ таких значений нет.

№2.

Кол-во гостей – 20 человек.

+1(1 девушка танцует с 7 кавалерами)+1

2-ая девушка танцует с 8 кавалерами.

+1(3-я двушка танцует с 9 кавалерами!)+1

Получается каждая новая девушка берет еще одного кавалера

~~Пусть x кавалеров~~ Пусть девушек было x, тогда кавалеров было $x + (7 - 1)$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GE 78-52

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Всего людей было $x+x+(7+1)$, или 20 человек.

Составим и решим уравнение.

$x+x+7+1=20$

~~$2x=$~~ $2x=14$

~~$x=6$~~ $x=7$

+

Значит 7 девушек было в гостях.

$20-7=13$ - кавалеров было в гостях.

Ответ: 13 кавалеров.

№ 1.

Кол-во машин -31.

Кол-во топлива $-x$.

Кол-во топлива в неделю $-a$.

Кол-во топлива на одну машину в неделю по планированию $-\frac{a}{31}$.

Кол-во машин ломавшихся каждую неделю -1.

Кол-во машин сломанох за всё время $\frac{x}{a}$.

Планированное время расхода топлива $-\frac{x}{a}$.

Засходовали топливо $-\frac{2x}{a}$ недель.

Решение.

~~$\frac{a}{31}\cdot 31\cdot x\cdot 2=\frac{a}{31}\cdot((31-\frac{x}{a})\cdot 2)$~~

$(31-\frac{x}{a})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{31}=\frac{2x}{a}$

$\frac{1}{2}a-\frac{x}{62}=\frac{2x}{a}$

$\frac{1}{2}a-\frac{2x}{a}=\frac{x}{62}$

$a-\frac{4x}{a}=\frac{x}{31}$

$\frac{a}{a}-\frac{4x}{a}=\frac{x}{31}$

$\frac{a-4x}{a}=\frac{x}{31}$

−

+

$31a-124x=ax$

~~$31(a-4x)=ax$~~

$a-4x=$

$31(a-4x)=ax$

$\frac{31(a-4x)}{a}=x$

$31($

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

ZP 69-74

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Лившиц

ИМЯ Юлия

ОТЧЕСТВО Борисовна

Дата рождения 22.02.2000

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 2 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

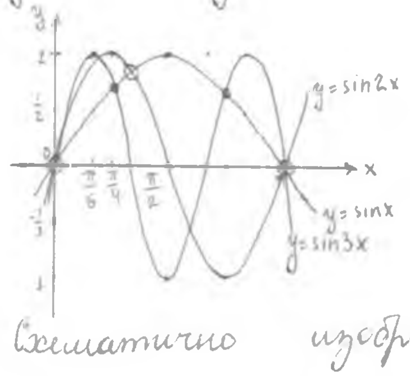
№1. $S = \lg(10^4 tg 2017°) + \lg(10^5 tg 2018°) + \ldots + \lg(10^{20} tg 2033°) =$
$= \lg 10^4 + \lg(tg 2017°) + \lg 10^5 + \lg(tg 2018°) + \ldots + \lg 10^{20} + \lg(tg 2033°) =$
$= 4 + \lg(tg 2017°) + 5 + \lg(tg 2018°) + \ldots + 20 + \lg(tg 2033°) =$
$= \frac{4+20}{2} \cdot (20-4+1) + \lg(tg 2017°) + \lg(tg 2018°) + \ldots + \lg(tg 2033°) =$
$= 12 \cdot 17 + \lg(tg 2017°) + \lg(tg 2018°) + \ldots + \lg(tg 2033°) =$
$= 204 + \lg(tg 2017°) + \lg(tg 2018°) + \ldots + \lg(tg 2033°)$

$\lg(tg 2017°) + \lg(tg 2018°) + \ldots + \lg(tg 2033°) = \lg(tg(1980° + 37°)) + \lg(tg(1980° + 38°)) +$
$+ \lg(tg(1980° + 39°)) + \ldots + \lg(tg(1980° + 53°)) = \lg(tg(11\pi + 37°)) + \lg(tg(11\pi + 38°)) +$
$+ \ldots + \lg(tg(11\pi + 53°)) = \lg(tg 37°) + \lg(tg 38°) + \ldots + \lg(tg 53°) =$
$= \lg(tg 37° tg 53°) + \lg(tg 38° tg 52°) + \ldots + \lg(tg 44° tg 46°) + \lg(tg 45°) =$
$= \lg(tg 37° tg(90° - 37°)) + \lg(tg 38° tg(90° - 38°)) + \ldots + \lg(tg 44° tg(90° - 44°)) +$
$+ \overset{0}{\cancel{\lg 1}} = \lg(\overset{1}{\cancel{tg 37° ctg 37°}}) + \lg(tg 38° ctg 38°) + \ldots + \lg(tg 44° ctg 44°) =$
$= \overset{0}{\cancel{\lg 1}} + \overset{0}{\cancel{\lg 1}} + \ldots + \overset{0}{\cancel{\lg 1}} = 0$

$\Rightarrow S = 204 + 0 = 204$

Ответ: 204.   +

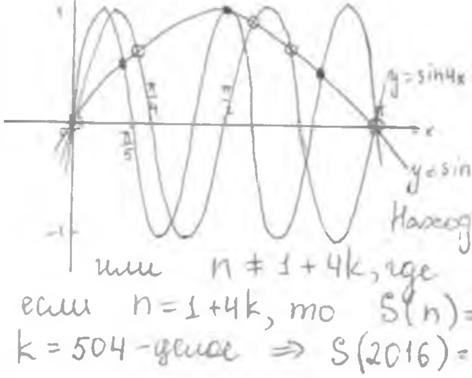
№5. Схематично изобразим графики функций $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin 3x$ на координатной плоскости XOY.



$\sin 2x = \sin x$: $S(2) = 3$ на $[0; \pi]$
$\sin 3x = \sin x$: $S(3) = 4$ на $[0; \pi]$

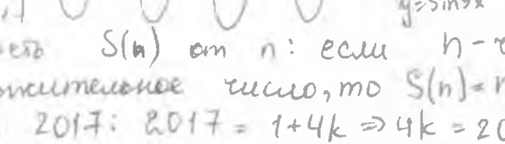
+

Схематично изобразим графики функций $y = \sin x$, $y = \sin 4x$, $y = \sin 5x$



$\sin 4x = \sin x$: $S(4) = 5$ на $[0, \pi]$
$\sin 5x = \sin x$: $S(5) = 5$ на $[0, \pi]$

$y = \sin 9x$:
$S(9) = 9$



Находим зависимость $S(n)$ от n: если n - чётное или $n \neq 1 + 4k$, где k - целое положительное число, то $S(n) = n + 1$; если $n = 1 + 4k$, то $S(n) = n$. Проверяем 2017: $2017 = 1 + 4k \Rightarrow 4k = 2016$
$k = 504$ - целое $\Rightarrow S(2016) = 2017$, $S(2017) = 2017$. $2015 \neq 1 + 4k \Rightarrow S(2015) = 2016$.

Ответ: $S(n) = 2017$ 2 раза.

№2. Если составить функцию, определяющую запас газа в n-ном месяце, то она будет рекурсивной. То есть в 1-ом месяце будет x_1 м³ газа, во втором $x_2 = c - 2x_1$, в третьем $x_3 = c - 2x_2 = c - 2(c - 2x_1) = -c + 4x_1$ м³ и т.д.
Пусть $x_1 = x_2$. Тогда $x_1 = c - 2x_1$, $x_1 = \frac{c}{3}$, $x_2 = c - \frac{2c}{3} = \frac{c}{3}$, $x_3 = -c + \frac{4c}{3} = \frac{c}{3}$ и т.д, т.е. $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = \frac{c}{3} \Rightarrow$ запас газа одинаков в любые 2 различные месяца. Заметим, что запас газа – неотрицательное число, $\Rightarrow x_1 \le \frac{c}{2}$ $(x_2 \geq 0)$, $x_1 \geq 0$, $x_1 \geq \frac{c}{4}$ $(x_3 \geq 0)$, $x_4 = c - 2(-c + 4x_1) = 3c - 8x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \le \frac{3}{8}c \Rightarrow$ $x_1 \to \frac{c}{2}$. Если $x_1 \approx \frac{c}{2}$, то $x_2 = 0$, $x_3 = c$, $x_4 = -c$ и т.д. $-c \geq 0 \Rightarrow$
$\begin{cases} c \le 0 \\ c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, тогда $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = c = 0 \Rightarrow$ запаса газа нет вообще, т.е. в любые 2 месяца запас газа одинаков. Если взять равные запасы $x_2 = x_4$, то $c - 2x_1 = 3c - 8x_1$, $6x_1 = 2c$, $x_1 = \frac{c}{3}$, т.е. если в любые 2 месяца запас газа одинаков, то он такой же и во все остальные месяца.

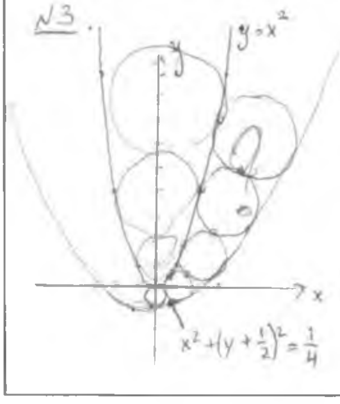
Ответ: $X = 0$; $X = \frac{c}{3}$. ⊕

№4. $a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$ ⊕

Пусть $a = b = c$, тогда $3a^2 = 6a^3$, $6a^3 - 3a^2 = 0$, $2a^3 - a^2 = 0$, $a^2(2a - 1) = 0$
Т.к. a, b, c – положительные числа, то $a \neq 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.
Проверим $a = \frac{1}{2}$: $3 \cdot \frac{1}{4} = 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$ – тождество верно.
$a + b + c = 3a = \frac{3}{2} = 1,5$ – наименьшее значение выражения $a + b + c$, т.к. если взять $a < \frac{1}{2}$, $b, c > \frac{1}{2}$ ($a, b, c > \frac{1}{2}$ или $a, b < \frac{1}{2}$, $c > \frac{1}{2}$), то значение $6abc$ будет меняться в большую сторону $\Rightarrow a + b + c$ будет расти.

Ответ: 1,5 – наименьшее значение выражения $a + b + c$.

№3.



$d_1 = 1$

$d_2 = 2$?

ошибка

$d_{2017} = 2017 \Rightarrow R = \frac{2017}{2} = 1008,5$

Все окружности можно заключить между параболой $y = x^2$ и еще одной, вершина которой в точке $(0; -1)$ и которая расширяется быстрее, чем $y = x^2$.

Ответ: 1008,5 – радиус окружности S_{2017}. ⊖

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

NУ 61-14

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ ЛУЗАНИН

ИМЯ МАТВЕЙ

ОТЧЕСТВО АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 21.03.2003

Класс: 7 Б

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: [illegible] 11.2.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NY 61-14

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

пусть ~~было~~ рассчитывалось на x недель.

тогда всего топлива - 31ax

но т.к. машины ломались, то хватило на 2x недель

№2.

пусть было a девочек и x кавалеров.

тогда a+x=20 и т.к. ~~#~~ последняя ~~д~~девочка танцевала со всеми кавалерами, ~~то~~ а первая ~~[illegible]~~ с семью, то кавалеров было ~~[illegible]~~ 7+a-1 т.к. у ~~[illegible]~~ следующей девочки было на 1 кавалера больше, чем у предыдущей.

Ответ: 13 кавалеров.

$a+x=20$

$a+6+a=20$

$2a+6=20$

$2a=14$

$a=7$

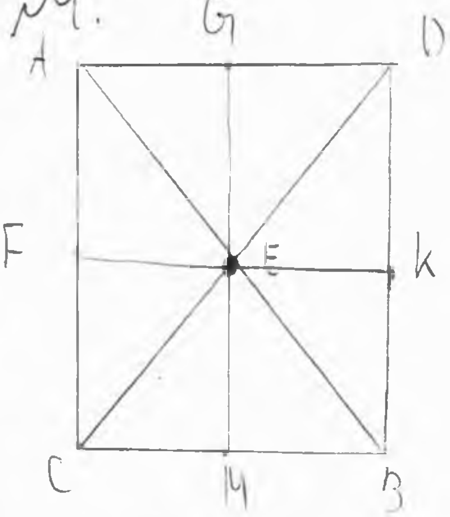
$x=20-7$

$x=13$

Лист 01 из 04

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



~~пустьбыл~~

пусть $AC : CB = 5 : 4$

A) ~~предположим~~ дорисуем к стороне AB треугольник ADB, что бы $ADBC$ был прямоугольником. тогда $AB \cap CD = E$

и $AE = BE = CE = DE$ по ~~признаку~~ свойству прямоугольника.

и CEB и AEC - ~~красная~~ части, которые достались братьям.

отметим середины отрезков AC, AD, DB, CB

и $\triangle AEC = \triangle DEB$ по III пр. 1 $AE = ED$ 2 $CE = BE$ 3 $AC = DB$

$\triangle$ ~~$\triangle$~~ ~~$\triangle$~~ $AED = \triangle CEB$ по III пр. $AE = BE$ $DE = CE$ $AD = CB$

$\triangle AEF = \triangle CEF = \triangle DEK = \triangle BEK$ по ~~II~~ I пр. ~~AE~~ 1) $AF = CF = DK = BK$

2) $AE = CE = DE = BE$

3) $\angle AFE = \angle CFE = \angle DKE = \angle BKE = 90°$

т.к. $\triangle AEC$ и $\triangle DEB$ - равнобедр и EF и EK - мед и высоты

аналогично с △-ми ~~[illegible]~~ $\triangle AEG = \triangle DEG = \triangle BEM = \triangle CEM$

$\triangle AFE = \triangle EGA$ ~~по I пр~~ т.к. $AGEF$-прям. ~~$AG = FE$~~

и ~~$\triangle AEF$~~ $\triangle AFE = \triangle EGA$ по III пр. $AF = GE = FE = AG$ AE - общ.

и $\triangle AEF = \triangle DEM$ $\triangle BEC = \triangle CEF$ и ~~$\triangle$~~ $S_{\triangle AEC} = S_{\triangle BEC}$

Ответ: да

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 (~~0~~ Б)

~~с~~ = $AC > CB$ т.к. $AC = 5x$ $CB = 4x$

$P_{\triangle AEC} = AE + CE + AC$

$P_{\triangle}$ ~~EE~~ $CEB = CE + BE + CB$

$AE = EB$ и $P_{\triangle AEC} > P_{\triangle CEB}$ т.к. $AE = BE$ CE - общ, а $AC > CB$.

Ответ: нет.

+

№1.

~~пусть хватило бы на x недель~~

не

пусть рассчитывалось на x недель тогда хватило на $2x$ недель.

и всего бензина ~~2ax~~ $31ax$

$31ax = (31-1)a + (31-2)a + \ldots + (31-2x)a$

~~$31a - a + 31a\,2a +$~~

$31a - a + 31a - 2a + \ldots + 31a - 2xa = 31ax$

~~x~~ $2 \cdot 31ax =$ ~~x~~ $31ax + a + 2a + \ldots + 2xa$ $(:a)$

$62x = 31x + 1 + 2 + \ldots + 2x$ $(-31x)$

$31x = 1 + 2 + \ldots + 2x$ $(\times 2)$

$62x =$ ~~$1 + 2x + 2 + 2x$~~ $1 + 2x + 2 + (2x-1) + 3 + (2x-2) + \ldots +$ ~~$1 + 2x$~~ $2x + 1$

$62x = (2x+1) \cdot 2x$

~~62x~~

$31x = 2x^2 + x$

$31 = 2x + 1$

$2x = 30$

$x = 15$

всего топлива - $31 \cdot 15 \cdot a = 465a$

Ответ. всего топлива - $465a$
рассчитано - на 15 недель

±

№3

~~z~~ было $z \cdot y$

Стало $z+x \cdot z+y = y \cdot x$

$z+x=y$ $z+y=x$

$x=y-z$ $z+y=x$

$z=0$ тогда $x=y$, $x-y=0$

и $z \leq 23$ $y \leq 23$ т.к. часов всего 23.

и $z+y \leq 46$ и не может быть перехода из минут в часы, т.к. переход идёт ~~при~~ при $z+y \geq 60$.

Ответ: 0. _ один из ответов

$\boxed{+}$

№5.

$$\frac{2,00000000004}{(1,00000000004)^2+2,00000000004} < \frac{2,00000000002}{(1,00000000002)^2+2,00000000002}$$

почему?

Ответ: второе.

0

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МБОУ „Лицей №18"

Место проведения

ЙМ 48-85

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Лысков

ИМЯ Леонид

ОТЧЕСТВО Сергеевич

Дата рождения 18.10.1999 **Класс:** 11 Б

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Лысков

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.

$S = lg(10^4 tg 2017^\circ) + lg(10^8 tg 0017^\circ) + \ldots + lg(10^{20} tg 2033^\circ) =$

$= lg(10^4 10^{20} tg 2017^\circ \cdot tg 2033^\circ) + \ldots + lg(10^{12} tg 2025^\circ)$

$tg 2017^\circ = tg 217^\circ = tg(\frac{\pi}{4} - 2^\circ)$ $\quad tg 2033^\circ = tg(\frac{\pi}{4} + 2^\circ)$

$tg(\frac{\pi}{4} - 2) tg(\frac{\pi}{4} + 2) = tg(\beta) tg(\frac{\pi}{2} - \beta) = tg\beta\, ctg\beta = 1$

$tg \frac{\pi}{4} = 1$

$\frac{2033 - 2017}{2} = 8$

$lg(10^{24} \cdot 1) = 24 \quad lg(10^{12} tg 2025^\circ) = 12$

$S = 24 \cdot 8 + 12 = 12 \cdot 17 = 170 + 34 = 204$

Ответ: $S = 204$. +

2.

$x = c - 2x$ ~~$x > c - 2x \Rightarrow x - c - 2c + 4x = -c + 4x \Rightarrow c - 3x$ противоречие~~

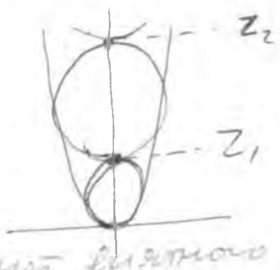
$3x = c$ $\quad c - 2(c - 2x) = -c + 4x$ $\quad c - 2x < x$ $\quad x > \frac{c}{3}$ (+)

$x = \frac{1}{3}c$ $\quad c - 2(-c + 4x) = 3c - 8x$ $\quad c - 2(c - 2x) > x$ Никогда не будет $= x$,

$c - 2(c - 2(c - 2x)) < x$ аналогично с $x < \frac{c}{3}$

Ответ: $x = \frac{1}{3}c$, нотет.

3.



нет внятного пояснения

? ?

$y^2 \ (y - \frac{Z_n + Z_{n-1}}{2})^2 + x^2 = (\frac{Z_n - Z_{n-1}}{2})^2$ откуда это и почему?

$y = x^2$ касательные $\Rightarrow D = 0$

$y^2 - y(Z_n + Z_{n-1} - 1) + Z_n Z_{n-1} = 0$

$D: Z_n^2 - Z_n 2(Z_{n-1} + 1) + (Z_{n-1} - 1)^2 = 0$

при удвоении -"- не получ.

$Z_n = Z_{n-1} \pm 2\sqrt{Z_{n-1}} + 1$

$Z_n = (\sqrt{Z_{n-1}} + 1)^2 \qquad Z_{n-1} = a^2 \Rightarrow Z_n = (a+1)^2$ ∓

$Z_1 = 1 = d \quad Z_n = n^2 \quad r_n = \frac{Z_n - Z_{n-1}}{2} = \frac{n^2 - (n-1)^2}{2} = n - 0,5 = 2017 - 0,5 = 2016,5$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЙМ 48-85

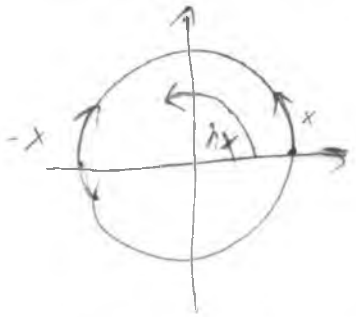
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Ответ: $r_{2017} = 2016,5$

№ 5

~~$S(n) =$ кол-во пересечений x и nx на $[0;\pi]$ $\times 2 - 1$, если есть пересечение в $\frac{\pi}{2}$.~~

~~кол-во пересеч x и nx на $[0;2\pi]$ = —"— = k~~



$\frac{\pi}{x}(n-1)x = \pi(n-1) \quad 1 + \frac{n-1}{2}$ (целочисл.)

$\frac{\pi}{x}(n+1)x = \pi(n+1) \quad 1 + \frac{n+1}{2}$ целочисл.

} ?

$n+1$ возможна одна совпадающая точка $(\frac{\pi}{2})$ при $n = 1+4k, k \in Z$

⊕

$n \neq 1+4k$ ~~$n+1$~~ $S(n) = n+1$
$n = 1+4k \quad S(n) = n$

$2017 - 1 = 2016 \vdots 4 \quad S(n_{2017}) = 2017$

$(2016-1) \not\vdots 4 \quad S(n) = n+1 \quad S(n_{2016}) = 2017$

одно и то же значение возможно принять лишь 2 раза $(n, n+1)$

например 2017

Ответ: 2 раза.

№ 4

$a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$

$a+b+c$ - наименьшее

$a, b, c > 0$

⊕

$a = b = c = x$

$3x^2 = 2x^3$

$x \neq 0 \quad 1 = 2x$

$x = \frac{1}{2}$

Ответ: $x = \frac{3}{2} = 1,5$

Лист 02 из 02

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССТ

Место проведения

GE 78-24

шифр

← **Не заполнять**

Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ ЛЬГОВ

ИМЯ АЛЕКСЕЙ

ОТЧЕСТВО ВЯЧЕСЛАВОВИЧ

Дата рождения 03.04.2003

Класс: 7

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17

(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Я составил уравнение $31ax = 31a + 30a + 29a + 28a \ldots + 1a + 0a$, где x — кол-во ~~дней~~ недель, a — ~~кол-во л~~ л топлива в неделю, а $31a + 30a \ldots + 2a + 0a$ — это всё кол-во ~~дней недель~~ топлива, при котором ~~утрата будет в два раза до~~ оно будет тратиться в два раза дольше (31a компенсируется 0a, ~~30a~~ компенсируется 1a и т.д.), и у меня получилось $31ax = 496a$, а сокращаем, и узнаем ~~x~~ x

$31x = 496$~~a~~; $x = 16$; 16 — кол-во недель, на которое было закуплено топливо

+

2.

Всего было приглашено 20 человек — много кавалеров, и несколько девушек, чтобы узнать сколько кавалеров было у Алёны я составил небольшую таблицу

Имя	кол-во кавалеров
Екатерина	7
Олеся	8
Ирина	9
???	10
???	11
???	12
Алёна	13

+

Я написал, что у Алёны было 13 кавалеров т.к. до неё, ~~считая её~~ включительно было 7 девушек, вместе с кавалерами 20 человек.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

Было z часов y минут
Продолжалось x часов z минут
Перестал в y часов x минут.

Получается так, что сумма z и x не должна быть больше y, x и не должна быть меньше y, т.к. $y+z=x$; $z+x=y$, что значит, что $x=y$, а если $x=y$, значит z равен 0 тогда всё сходиться, но я нашёл случай, если z и $x=12$, и $y=0$, то получается, что

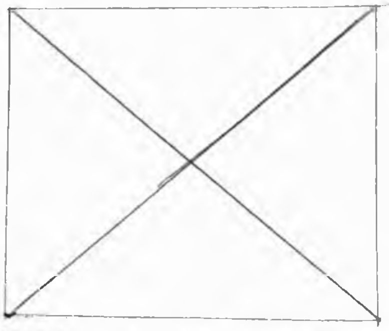
Было 12 часов 0 минут
Продолжалось 12 часов 12 минут
Перестал в 0 часов 12 минут,

Это так же сходиться, по этому $x-y=12$ (12-0), или $x-y=0$

±

№4.

Я нарисовал прямоугольник 5:4 и провел диагональ, одна из половин это и есть поле, которые они хотят поделить, если провести от прямого угла до середины противоположной стороны, и далее, что мы проведём так вторую диагональ, что значит, то что оба участка равны по площади, а по периметру они неравны, т.к. одна сторона будет смежной, вторая будет ~~середина~~ половина диагонали, а третья будет у кого-то 5x, у кого-то 4x в этом и будет разница



+

№5.

Я, для удобства убрал несколько нулей, чтобы было нагляднее.

$$\frac{2,004}{(1,004)^2+2,004}=\frac{2,004}{1,000016+2,004}=\frac{2,004}{3,004016}$$

$$\frac{2,002}{(1,002)^2+2,002}=\frac{2,002}{1,000004+2,002}=\frac{2,002}{3,002004}$$

число сверху меньше, т.к. дробная часть больше в 2, и ещё чуть-чуть раза,

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~а~~ ~~нижняя~~, при условии, что дробная часть ~~дробная часть~~ ~~десятичная~~ числителя больше в ровно 2 раза, то есть верхняя дроб ~~часть~~ меньше.

⊖

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

05910мк

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Людвиковская

ИМЯ Анастасия

ОТЧЕСТВО Владиславовна

Дата рождения 14.03.2000

Класс: 10

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

③ $$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)(x-2)\ldots(x-(n-1))}{n!}=0 \quad |\times n!$$

$$-\frac{n!}{1!}(x-1)+\frac{n!x(x-1)}{2!}+\ldots+(-1)^n x(x-1)\ldots(x-(n-1))=0. \quad |:(x-1)$$

$$\boxed{x=1}$$

$$-\frac{n!\cdot 2}{1!\cdot 2}+\frac{n!x}{2!}+\frac{n!x(x-2)}{3!}+\ldots+(-1)^n x(x-2)(x-3)\ldots(x-(n-1))=0$$

$$-\frac{n!}{2!}(x-2)-\frac{n!x(x-2)}{3!}+\ldots+(-1)^n x(x-2)\ldots(x-(n-1))=0$$

$$\boxed{x=2}$$

$$-\frac{n!\cdot 3}{2!\cdot 3}-\frac{n!x}{3!}+\frac{n!x(x-3)}{4!}-\ldots+(-1)^n x(x-3)\ldots(x-(n-1))=0$$

$$-\frac{n!}{3!}(3+x)$$

$$\boxed{x=3}$$

и так далее до (n-1)

=> корнями уравнения является последовательность натуральных чисел от 1 и до n

$$-\frac{n!}{(n-2)!}(x-(n-2))+\frac{(-1)^n x(x-(n-2))}{(n-1)^2}+\frac{(-1)^n x(x\ldots)(x-(n-1))}{n!}=0$$

$$x=(n-2)$$

$$-\frac{n!\cdot n}{(n-1)!\cdot n}+\frac{n!(-1)^n x\cancel{(x-(n-1))}}{(n+1)!}+\frac{(-1)^n x(x-(n-1)}{}=0$$

$$-\frac{n!\,n}{n!}+\frac{(-1)^n x}{}=0.$$

$$-n+(-1)^n x=0.$$

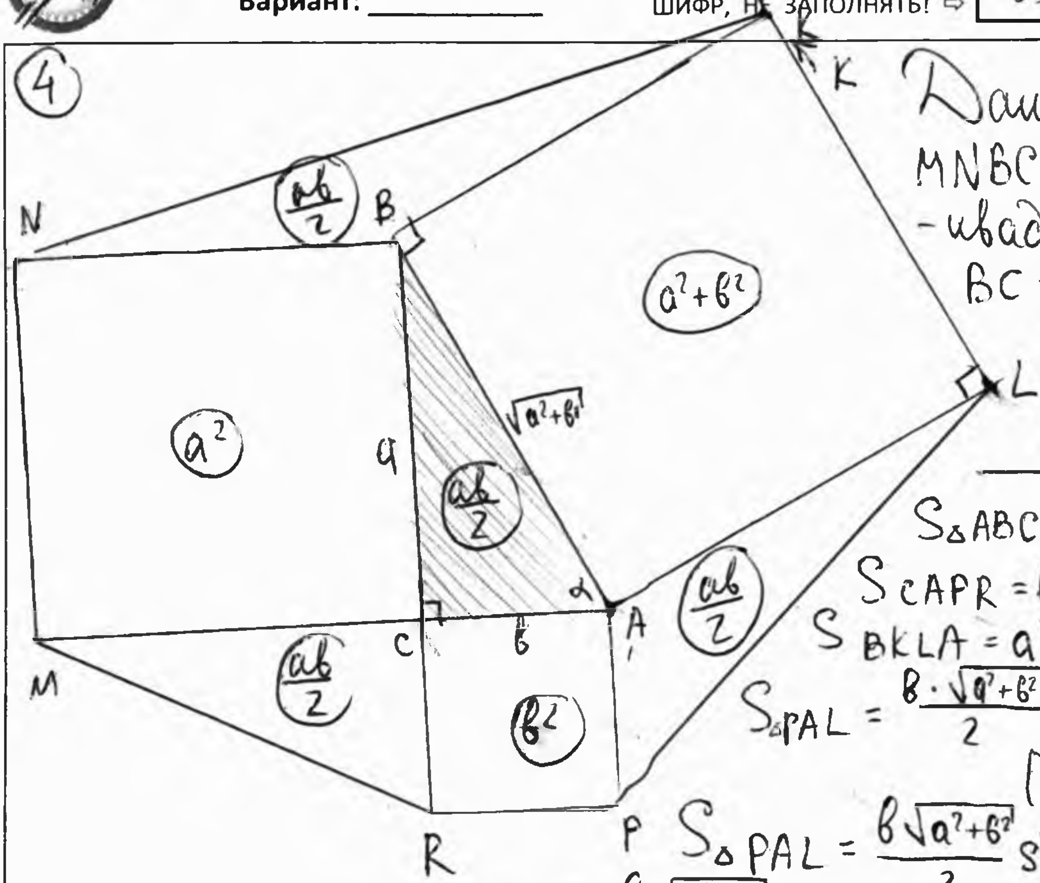
$$x=n$$

$$\boxed{\text{Ответ: } 1,2,3\ldots(n-1),\ n.}$$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

④



Дано: $\triangle ABC$ прям.
MNBC, BKLA, CRPA - квадраты.
$BC = a$; $CA = b$

Найти:
S_{MNKLPR} - ?

$S_{\triangle ABC} = \frac{ab}{2} = S_{\triangle MCR}$

$S_{CAPR} = b^2$; $S_{MNBC} = a^2$

$S_{BKLA} = a^2 + b^2$

$S_{\triangle PAL} = \frac{b \cdot \sqrt{a^2+b^2}}{2} \cdot \sin(180 - \alpha)$

$(\alpha = \angle CAB)$

$S_{\triangle PAL} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2} \sin\alpha =$

$= \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{2}$

$S_{\triangle MBK} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2} \sin(180 - (90 - \alpha)) = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2} \sin(90 - \alpha) = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2} \cos\alpha =$

$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{2}$

$S_{MNKLPR} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle MBK} + S_{\triangle PAL} \overset{+S_{\triangle MCR}}{} + S_{MNBC} + S_{BKLA} + S_{RCAP} =$

$= \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + a^2 + a^2 + b^2 + b^2 = \boxed{2ab + 2(a^2 + b^2)}$

~~$2a^2 + 1{,}5ab + 2b^2 - \min$~~

~~$2m^2b^2 + 1{,}5mb^2 + 2b^2 = \min$~~

~~$b^2(2m^2 + 1{,}5m + 2) - \min.$~~

~~$\Rightarrow 2m^2 + 1{,}5m + 2 - \min$~~

~~$\min(m) = -\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}5}{4} < 0$~~

~~$4m^2 + 3m + 4 = 0.$~~

пусть $a = mb$, где m - отношение катетов.

$m > 0$

$\frac{2ab + 2(a^2+b^2)}{ab} - \min$

$2ab + 2(a^2+b^2)$ – S нового дома

ab – S исходного дома

$4 + 4\frac{2a^2+b^2}{ab} - \min.$

$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab} - \min$

$\frac{m^2b^2 + b^2}{mb^2} = b^2\left(\frac{m^2+1}{m}\right) \Rightarrow \frac{m^2+1}{m}$ - мин. $(m \neq 0)$; $m + \frac{1}{m}$ - мин.

m = 1; min = 2
m = 2; min = 2,5
m = 0,5 min = 2,5
$\Rightarrow$ m = 1 - наименьш

$\Rightarrow m = 1.$

Ответ: $2ab + 2(a^2 + b^2)$; $\frac{a}{b} = 1.$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

② Пусть в 1ый ~~день~~ месяц - $\textcircled{x}$ м³

Тогда в следующий (2ой) - $\frac{1}{1-x}$ м³

в 3ий: $\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$ м³

в 4ый - $\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1\cdot x}{x-x+1} = \frac{x}{1} = \textcircled{x}$ м³

в 1ый и 4ый месяц запасы одинаковые, если $|x|<1$

• пусть запас может быть отрицательным. ($|x|>1$),

тогда в 1ый месяц - положительный, 2ой - отриц., и т.д.

т.е каждый нечетный месяц положительный, а каждый четный - отрицательный. но запас всегда положителен (если он отриц., то $1-a$ (где $a<0$) >0)

~~[illegible]~~ цикл может повторятся:

цикл. $|x|$ всегда < 1. и ≥ 0

a(запас) $\in [0; 1)$ в любой месяц. ~~кроме $a=x$~~ ~~$x\in[0;1)$~~.

если запас больше 1, то в следующем месяце он <0, что недопустимо. (отрицательным не может быть)

1ый - x м³ $x\in[0;1)$

2ой - $\frac{1}{1-x}$ м³ $[1;+\infty)$

3ий - $\frac{x-1}{x}$ - м³

4ый - x м³

5ый - $\frac{1}{1-x}$ м³

6ой - $\frac{x-1}{x}$ м³

7ой - x м³

т.к запас всегда меньше единицы, то $x=0$ $\frac{1}{1-x}=1$

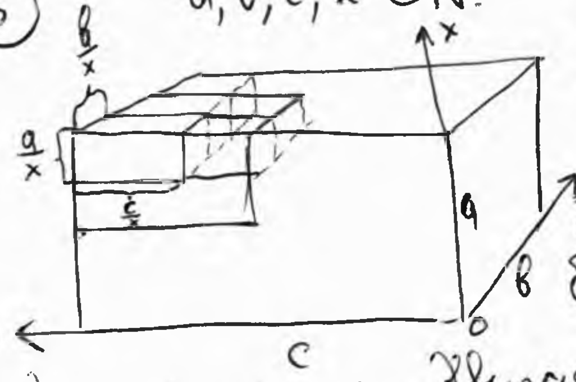
⇒ Запас не мог оказаться одинаковым.

Ответ: т.к запас каждого месяца $\in[0;1)$, то запас ~~по~~следующего - $[1;+\infty)$ и ~~по~~следующий месяц переходит в текущий ⇒ запас $\in[0;1)\cap[1;+\infty)$.

⇒ это невозможно.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

⑤ $a, b, c, x \in N$.



пусть у a, b и c есть какой, то общий делитель x
тогда x - коэф. подобия (>1)
и меньший параллелепипед будет со сторонами $\frac{a}{x}$, $\frac{b}{x}$ и $\frac{c}{x}$.

тогда мы сможем двигать этот параллелепипед по исходному на 1.(сторона кубика). по всем осям

• 3 оси (x, y, z) совп. со сторонами исх. фигуры.

по оси z ~~...~~: $(b - \frac{a}{x})$ клеток ⇒ $b(1-\frac{1}{x})+1$ вариант

по оси y: $(\cancel{a}\ c - \frac{c}{x})$ клеток ⇒ $c(1-\frac{1}{x})+1$ вариант

по оси x: $(a - \frac{a}{x})$ клеток. ⇒ $a(1-\frac{1}{x})+1$ вариан.

⇒ всего кол-во вариантов: $(b-\frac{b}{x}+1)(a-\frac{a}{x}+1)(c-\frac{c}{x}+1)$ для одного общего делителя.($x>1$ иначе фигуры совпадают)

⇒ пусть n - кол-во общих различных делителей. $(x_1; x_2 \dots x_n)$

Ответ:

Тогда можно выделить $(b-\frac{b}{x_1}+1)(a-\frac{a}{x_1}+1)(c-\frac{c}{x_1}+1) *$

$* (b-\frac{b}{x_2}+1)(a-\frac{a}{x_2}+1)(c-\frac{c}{x_2}+1) * \dots *$

$* (b-\frac{b}{x_n}+1)(a-\frac{a}{x_n}+1)(c-\frac{c}{x_n}+1)$ фигур. делителей.

---

① $\overset{\text{действ.}>0}{12x} + \overset{\cancel{\text{тоже}}>0}{\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}} = \overset{\text{целое}}{35}$; $\sqrt{x^2-1} > 0$; $x^2 > 1$

⇒ т.к x - прибыль, то $x>0 \Rightarrow x>1$

• сумма остатков от деления на 35 = 1.

если $x=2$, то: $24+\frac{24}{\sqrt{3}} > 35$

• либо $\sqrt{x^2-1}$ является квадратом, где x - действ. >1

• прибыль не может быть иррациональной, $k, m \in N$

~~...~~ 35 - целое ⇒ $\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}$ - действительное. пусть $x=\frac{k}{m}$

т.к x - действительное, то 12x - тоже, а x^2-1 - полный квадрат. ↓ (k^2+m^2)-квадрат

$x^2-1=y^2$, где y - действ.

$x^2-y^2=1$

$(x-y)(x+y)=1$.

$\frac{12k}{m}+\frac{\frac{12k}{m}}{\sqrt{\frac{k^2+m^2}{m^2}}}=35$

$12\frac{k}{m}(1+\frac{m}{\sqrt{k^2+m^2}})=35$; $\frac{\cancel{12}k(\sqrt{k^2+m^2}+m)}{m\sqrt{k^2+m}}=\frac{35}{12}$

Ответ: нет, не должен.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

город Красноярск

Место проведения

03609 МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ ЛЮДВИКОВСКИЙ

ИМЯ ЕВГЕНИЙ

ОТЧЕСТВО ВЛАДИСЛАВОВИЧ

Дата рождения 08.06.2001

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.01.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 3

$1+1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=0$

$24-24x+12(x^2-x)-4(x^3-3x^2+2x)+x^4-6x^3+11x^2-6x=0$

$x^4-10x^3+35x^2-5x+24=0$

$(x-1)(x^3-9x^2+26x-24)=0$

$(x-1)(x-2)(x^2-7x+12)=0$

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$

$x=1;\ x=2,\ x=3;\ x=4$ - корни

Ответ: 1; 2; 3; 4.

⊕

N 5.

1) $f(x)=x^2+px+q$

$x^2+px+q=0$

$D=100$ (по усл.) значит $p^2-4q=100$

2) $f(x)+f(x-10)=0$

$x^2+px+q+x^2-10x+100+px-10p+q=0$

$2x^2+x(2p-20)+100-10p+2q=0$

$x^2+x(p-10)+50-5p+q=0$

$D=p^2-20p+100-200+20p-4q=p^2-4q-100$

Т.к. $p^2-4q=100$ (из 1)), то $p^2-4q-100=0$, значит $D=0$

Т.к. $D=0$, то уравнение имеет один корень

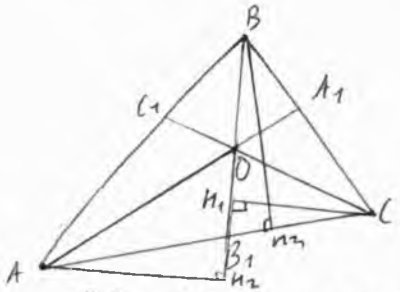
Ответ: 1.

⊕

N 4

Дано: $\triangle ABC$, $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} = 1:2:3$

⊕



$BO\cap AC=B_1$, $AO\cap BC=A_1$; $CO\cap AB=C_1$; $BH_3\perp AC$; $CH_1\perp BO$; $AH_2\perp BO$.

1) $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}BO\cdot AH_2}{\frac{1}{2}\cdot BO\cdot CH_1}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AH_2}{CH_1}=\frac{1}{2}$

$\frac{S_{\triangle AB_1B}}{S_{\triangle BCB_1}}=\frac{\frac{1}{2}BB_1\cdot AH_2}{\frac{1}{2}\cdot BB_1\ CH_3}=\frac{AH_2}{CH_3}=\frac{1}{2}$

С другой стороны $S_{\triangle AB_1B}=\frac{1}{2}\cdot AB_1\cdot BH_3$; $S_{\triangle BCB_1}=\frac{1}{2}\cdot B_1C\cdot BH_3\Rightarrow$

$\frac{S_{\triangle AB_1B}}{S_{\triangle BCB_1}}=\frac{\frac{1}{2}AB_1\cdot BH_3}{\frac{1}{2}\cdot B_1C\cdot BH_3}=\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{1}{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) Аналогично (1)) доказывается что ~~Sобо~~ $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOC}}=1 : \cancel{\frac{BA_1}{A_1C} \cdot S_{\triangle AOB}}=\frac{2}{3}$;

$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}=\frac{1}{3}$

3) Чтобы построить точку O надо: 1) поделить сторону AB точкой C_1 в отношении $\frac{2}{3}$ считая от B, 2) провести отрезок ~~A~~ CC_1

3) поделить сторону BC точкой A_1 в отношении $\frac{1}{3}$ считая от B

4) провести отрезок AA_1

$CC_1 \cap AA_1 = O$

N 2.

1) Если запас газа в 1-ый месяц: 1, то во 2-ой месяц: $6-1=5$,

значит в 3-ий месяц запас будет: $6-5=1$

$1^2=1$

Это будет повторяться каждые ~~второй месяц~~ 2 месяца

Также если запас будет в 1-ой месяц будет 5, то во 2-ой: 1,

в 3-ий: 5; в 4-ой: 1

$1^2=1$

не все случаи!

∓

2) Если запас газа в 1-ый месяц: 2, то во 2-ой месяц: $6-2=4$

$2^2=4$

Также если запас в 1-ой месяц будет 4, то во 2-ой: 2

$2^2=4$

~~Ответ:~~ Это будет повторяться каждый месяц

Ответ: да, при значениях 1 и 5 каждые 2 месяца, при значениях 2 и 4 каждый месяц.

неверный вывод!

N 1

$A=x+\frac{1}{x}$

а) 1) $B_2=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=A^2-2$

2) $B_3=x^3+\frac{1}{x^3}=x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}-3x-\frac{3}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=A^3-3A$.

3) $B_4=x^4+\frac{1}{x^4}=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}-4x^2-\frac{4}{x^2}-6=\left(x+\frac{1}{x}\right)^4-4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6=A^4-4B_2-6=$

$=A^4-4A^2+2$

4) $B_8=x^8+\frac{1}{x^8}=x^8+8x^6+28x^4+56x^2+70+\frac{56}{x^2}+\frac{28}{x^4}+\frac{8}{x^6}+\frac{1}{x^8}-8x^6-\frac{8}{x^6}-28x^4-\frac{28}{x^4}-56x^2-\frac{56}{x^2}-70$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^8-8B_6-28B_4-56B_2-70=A^8-8B_6-28A^4+112A^2-56-56A^2+112-70=$

$=A^8-28A^4+56A^2-14-8B_6$

$B_6=x^6+\frac{1}{x^6}=x^6+6x^4+15x^2+20+\frac{15}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}-6x^4-\frac{6}{x^4}-15x^2-\frac{15}{x^2}-20=\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-6B_4-15B_2-20$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$B_6 = A^6 - 6B_4 - 15B_2 - 20 = A^6 - 6A^4 + 24A^2 - 12 - 15A^2 + 30 - 20 =$

$= A^6 - 6A^4 + 9A^2 - 2$

$B_8 = A^8 - 28A^4 + 56A^2 - 14 - 8B_6 = A^8 - 28A^4 + 56A^2 - 14 - \cancel{8} - 8A^6 + 48A^4 - 72A^2 + 16 =$

$= A^8 + \cancel{20A} - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 2$

b) $B_2 = B_4 = B_8$

1) $B_2 = B_4$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + \frac{1}{x^4}$

$x^6 + x^2 = x^8 + 4$

$x^8 - x^6 - x^2 + 1 = 0$

$(x^6 - 1)(x^2 - 1) = 0$

$(x^3 + 1)(x^3 - 1)(x - 1)(x + 1) = 0$

$(x+1)^2(x^2 - x + 1)(x - 1)^2(x^2 + x + 1) = 0$

$x = \pm 1$ - корни

2) $B_4 = B_8$; $x^4 + \frac{1}{x^4} = x^8 + \frac{1}{x^8}$; при $x = \pm 1$ - верно;

3) $B_2 = B_8$; $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^8 + \frac{1}{x^8}$; при $x = \pm 1$ - верно

При $x = 1$, $A = x + \frac{1}{x} = 1 + 1 = 2$

При $x = -1$, $A = x + \frac{1}{x} = -1 - 1 = -2$

+

c) $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = A^2 - 2$

Количество арифметических операций для вычислени B_2 минимально при $x = 1$, $x = -1$, $A = 2$, $A = -2$

почему?

$C = \left(\left(x^{2017} + \frac{1}{x^{2017}}\right) \cdot \frac{1}{2}\right)^{2017}$

При $x = 1$, $C = \left((1 + 1) \cdot \frac{1}{2}\right)^{2017} = 1^{2017} = 1$

При $x = -1$, $C = \left((-1 + (-1)) \cdot \frac{1}{2}\right)^{2017} = (-1)^{2017} = -1$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

ЫF 91-57

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ МАЛАХОВ

ИМЯ АЛЕКСАНДР

ОТЧЕСТВО ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата рождения 15.12.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: АМалахов

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$S = \lg(10^4 tg 2017^\circ) + \lg(10^5 \cdot tg 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} tg 2033^\circ)$.

Сумма логарифмов - логарифм произведения.

1) $10^4 \cdot 10^5 \cdot \ldots \cdot 10^{20} = 10^{(4+5+6+\ldots+20)} = 10^{204}$

$a_1 = 4$; $a_n = 20$; $d = 1$ - арифм. прогр.

$a_n = a_1 + d(n-1)$; $20 = 4 + 1(n-1)$, $n = 17$.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{20+4}{2} \cdot 17 = 17 \cdot 12 = 204$

2) $tg 2017^\circ = tg 37^\circ$ (Период $tg = \pi = 180^\circ$)

$2017^\circ = 37^\circ + 180 \cdot 11$, аналогично представим другие tg; $tg 2033^\circ = tg 53^\circ$

Тогда $S = \lg\left(10^{204} \cdot \frac{\sin 37^\circ \cdot \sin 38^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 53^\circ}{\cos 37^\circ \cdot \cos 38^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 53^\circ}\right)$

Заметим, что $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ$, $\sin 38^\circ = \cos 52^\circ$, $\ldots$, $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$, $\ldots$, $\sin 53^\circ = \cos 37^\circ$.

Тогда все sin и cos сокращаются.

$S = \lg(10^{204}) = 204$ Ответ: 204

N4

⊕

$a, b, c > 0$, следовательно можно применять неравенство о средних (между средним арифметическим и геометр.)

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, обе ч. полож, можно возвести в куб

$(a+b+c)^3 \geq 3^3 \cdot abc$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$abc = \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \geq 3^3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$$

$$(6abc)^3 \geq 3^3 \cdot (abc)^2 \quad (abc>0)$$

$$3^3 \cdot 2^3 \cdot abc \geq 3^3$$

$$abc \geq \frac{1}{8}$$

$$(a+b+c)^3 \geq 3^3 \cdot \frac{1}{8}$$

$a+b+c \geq 3/2 = 1,5$ Причем равенство только тогда, когда $a=b=c=\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$ (1,5) − min(a+b+c)

№3

Обозначим диаметр окружности S_i: d_i

Тогда

$x^2 + \left(y - d_1 - d_2 - \dots - d_{i-1} - \frac{d_i}{2}\right)^2 = \frac{d_i^2}{4}$ — уравнение окружности S_i

$x^2 = y$ — парабола.

$d_1 + d_2 + \dots + d_{i-1} = t$ — сумма диаметров всех окружностей до S_i

$$y + \left(y - t - \frac{d_i}{2}\right)^2 = \frac{d_i^2}{4}$$

$$y + y^2 + t^2 + \cancel{\frac{d_i^2}{4}} - 2y\frac{d_i}{2} - 2yt + 2td_i = \cancel{\frac{d_i^2}{4}}$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$y^2+y-yd_i-2yt+td_i+t^2=0$

$y^2+y(1-d_i-2t)+td_i+t^2=0$ – квадратное уравнение относительно y.

Если его дискриминант равен 0, это означает касание окружности и параболы

$D=0=(1-d_i-2t)^2-4(td_i+t^2)=$

$1+d_i^2+\cancel{4t^2}-2d_i-4t+4td_i-\cancel{4}td_i-\cancel{4t^2}=0$

$d_i^2+1-2d_i-4t=0$

$d_i-2d_i-4t+1=0$

Диск $=4-4(1-4t)=16t$ -

$d_i=\frac{2\pm\sqrt{16t}}{2}=1\pm\sqrt{4t}$ $d_i>0\Rightarrow$ выбираем корень с + дискр.

$d_i=1+\sqrt{4t}$, где t – сумма всех диаметров окружностей до S_i

$d_2=1+\sqrt{4}=3$; $d_3=1+\sqrt{4(3+1)}=5$;

$d_4=1+\sqrt{4(1+3+5)}=1+\sqrt{36}=7$.

$d_1=1$; $t_1=0$; $d_2=3$; $t_2=1$; $d_3=5$, $t_3=4$.

Тогда по индукции t – это сумма нечетных чисел, т.е точные квадраты. тогда

$t_i=(i-1)^2$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$t_{2017}=2016^2$

$d_{2017} = 1+\sqrt{4\cdot 2016^2} = 1+2\cdot 2016 = 4032+1=4033$

~~[illegible]~~

Тогда радиус $S_{2017} = \frac{d_{2017}}{2} = \frac{4033}{2} = 2016,5$

Ответ: радиус окружности $S_{2017} = 2016,5$.

+

№2

±

Может, например $x = \frac{c}{3}$. Тогда $c-2\cdot\frac{c}{3} = \frac{c}{3}$. В каждый месяц будет одинаковый запас газа $\frac{c}{3}$. Ответ: $\frac{c}{3}$.

№5

$\sin nx=\sin x$; $\sin nx-\sin x=0$; $2\sin\frac{(n-1)x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}=0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{(n-1)x}{2}=\pi k_1 \\ \frac{(n+1)x}{2}=\pi k_2+\frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (n-1)x=2\pi k_1 \\ (n+1)x=\pi+2\pi k_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

(k_1 и k_2 – произв. цел. числа.

±

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi k_1}{n-1} \\ x=\frac{2\pi k_2+\pi}{n+1} \end{array}\right.$

$S(n)$ – сумма количеств k_1 и k_2, при которых $x\in[0;\pi]$. 1) $\pi\left(\frac{2k_1}{n-1}\right)\in[0,\pi] \Leftrightarrow \frac{2k_1}{n-1}\in[0,1]$

$k_1\in\left[0,\frac{n-1}{2}\right]$. 2) $\pi\frac{(2k_2+1)}{n+1}\in[0,\pi] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{2k_2+1}{n+1}\in[0;1] \Leftrightarrow k_2\in\left[0;\frac{n}{2}\right]$.

$S(n)=1+\frac{n-1}{2}+1+\frac{n}{2}=\boxed{2+\frac{2n-1}{2}}$ ← округляется в меньш. сторону т.к. k – целые

$2017=2+\frac{2n-1}{2}$; $\frac{2n-1}{2}=2015$. $n=4031$ или $n=4032$

Ответ: 2 раза; $n=4031$ и $n=4032$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

2Р 62-73

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ МАКАРОВ

ИМЯ АЛЕКСАНДР

ОТЧЕСТВО ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 15.04.99

Класс: 11 (Г-200) ауд.

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: заключительный

Работа выполнена на 06 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$a, b, c > 0$ (по усл.)

$a^2+b^2+c^2=6abc$

$\min(a+b+c)$ - ?

т.к. среднее арифметическое меньше или равно среднему геометрическому, получим.

$$\frac{a+b+c}{3} \le \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c} = \sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{6}}$$

⊕

$$\Rightarrow (a+b+c) \le \frac{3}{\sqrt[3]{6}} \sqrt[3]{a^2+b^2+c^2}$$

всюду меньше или равно $\Rightarrow \min(a+b+c)$ при равенстве

аналогично, средн. геом. $\le$ среднему квадратичному

$$\Rightarrow \sqrt[3]{abc} \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+b^2+c^2}{6}} \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

З.П. $a^2+b^2+c^2=t$, $t>0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{6}} t^{1/3} \le t^{1/2}$$

все положит. $\Rightarrow$ прологарифмируем

$$\frac{1}{3} \cdot \log_t \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} \log_t 6^{-1/3} \le \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{9} \log_t 6 \le \frac{1}{2}$$

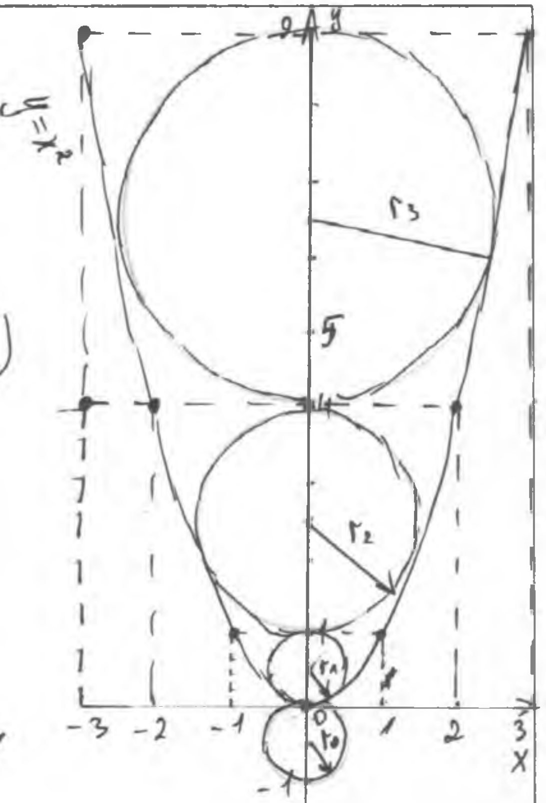
$$\log_t 6 \ge -\frac{9}{2}$$

м. рац. $\overset{\text{м. рац.}}{\underset{\text{понализ.}}{\Leftrightarrow}} (t-1)\left(6-t^{+\frac{9}{2}}\right) \ge 0$

$$(a+b+c)_{min} \Leftrightarrow \underset{\text{const}}{\frac{3}{\sqrt[3]{6}}} \sqrt[3]{\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{min}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} t \ge 1 \\ t^{\frac{9}{2}} \le 6 \end{cases} \\ \begin{cases} t \le 1 \\ t^{\frac{9}{2}} \ge 6 \end{cases} \varnothing\right. \Rightarrow 0 < a^2+b^2+c^2 \le 1$$

$\Rightarrow$ Ответ: $(a+b+c)_{min} = \frac{3}{\sqrt[3]{6}} \sqrt[3]{a^2+b^2+c^2} \underset{\underline{\underline{a^2+b^2+c^2=1}}}{\overset{\text{если}}{=}} \frac{3}{\sqrt[3]{6}}$.



№3

из усл. 1ая окр-ть кас-я параболы $y=x^2$ в ее вершине (0;0)

Таких окр-тей может быть две: центр. одной $(0;\frac{1}{2})$, другой $(0;-\frac{1}{2})$

т.к. все последующие окр-ти касаются пред.(внешне) и ветвей параболы => разобьем решение на 2 случая:

1ый) когда 1ая окр-ть с центром и радиусом r_1 $(0;\frac{1}{2})$, из усл $2r_1 = 1 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2}$

заметим, чтобы вып. след усл (кас. ветвей) $\Leftrightarrow r_2 = 1 + r_1 \Rightarrow r_n = r_{n-1}+1$ или $r_n = n + r_1$

плохо обосновано

т.е. центр окружности всегда лежит на прямой $x=0$

$\Rightarrow r_{2017} = 2016 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{4033}{2}}$.

(арифм. прогрессия, $d=1$ (разность), $a_1 = \frac{1}{2}$ (первый член) $\Rightarrow a_n = a_1 + d(n-1)$ для ар.прог n-ый член.)

2ой) 2ой случай аналогичен, только 1ая окружность будет иметь порядковый номер r_0 => 2017ая окр-ть имеет номер 2016 $\Rightarrow r_{2016} = 2015 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{4031}{2}}$

Ответ: 1) если 1ая окр-ть кас-ся вершины параболы и ее центр $(0;\frac{1}{2}) \Rightarrow r_{2017} = \frac{4033}{2}$; $=2016{,}5$

2) если -//-//- $(0;-\frac{1}{2})$, $r_{2017} = \frac{4031}{2}$.

(+)

№5

$n>1,\ n\in\mathbb{N}$ (усл)

$S(n)$ - кол-во реш. ур-ия $\begin{cases}\sin nx=\sin x\\ x\in[0;\pi].\end{cases}$

∓

1) Рассм. ур-ие:

$\sin nx-\sin x=0$

$2\cdot\sin\frac{nx-x}{2}\cdot\cos\frac{nx+x}{2}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{(n-1)x}{2}=0\\ \cos\frac{(n+1)x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{(n-1)x}{2}=\pi k\quad,k\in\mathbb{Z}\\ \frac{(n+1)x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

или $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi k}{n-1},\ (n\neq1 \text{ по усл})\\ x=\frac{\pi+2\pi l}{n+1}\end{array}\right.$

2) По усл-ю: $x\in[0;\pi]$

$\Rightarrow 0\le\frac{2\pi k}{n-1}\le\pi$

$0\le\frac{k}{n-1}\le\frac{1}{2}\quad|\cdot(n-1),>0$

$\begin{cases}0\le k\le\frac{n-1}{2}\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow$ k пробегает все целые знач от $[0;\ldots\frac{n-1}{2}]$

$\Rightarrow\begin{cases}k=0,\ldots.\left[\frac{n-1}{2}\right].\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

3) аналог.

$0\le\frac{\pi+2\pi l}{n+1}\le\pi$

$0\le\frac{1+2l}{n+1}\le1\quad|\cdot(n+1),>0$

$0\le1+2l\le n+1$

$-1\le2l\le n$

$-\frac{1}{2}\le l\le\frac{n}{2},\ l\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ l пробегает все цел. знач от $[0;\ldots\frac{n}{2}]$

4) $S(n) =$ кол-во $(k) +$ кол-во (l)

при $n=2$ кол-во (k): $\left(k = 0\right) \Rightarrow 1$

кол-во (l): $l = 0; 1 \Rightarrow 2$

$n = 3$

$k = 0; 1 \Rightarrow ②$

$l = 0; 1 \Rightarrow ②$

$n = 4$

$k = 0; 1 \Rightarrow ②$

$l = 0; 1; 2 \Rightarrow ③$

$\Rightarrow S(2) = 3$

$S(3) = 4$

$S(4) = 5$

$\Rightarrow$ арифм. прогр.

$$\boxed{S(n) = n+1}$$

$n = 20$

$k = \underbrace{0; 1 \ldots 9}_{⑩\text{ штук}} \Rightarrow S(20) = 21$

$l = \underbrace{0; 1 \ldots 10}_{⑪\text{ штук}}$

5) т.к. $S(n)$ – арифм. прогрессия $\Rightarrow S(n) = 2017$ принимается $\exists!$ (единств.) раз (монотонность ар. прогр.)

$\Rightarrow S(n) = 2017 = n+1 \Rightarrow n = 2016$

$\Rightarrow S(2016) = 2017$ (достигается)

Ответ: $S(n) = n+1$; $S(n) = 2017$ принимает 1 раз при $n = 2016$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ZP 62-73

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$S = \lg(10^4 \cdot tg2017°) + \lg(10^5 \cdot tg\,2018°) + \ldots + \lg(10^{20} \cdot tg\,2033°)$

по св-ву логарифма

$(\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b)$

$S = \lg 10^4 + \lg tg 2017° + \ldots + \lg 10^{20} + \lg tg\,2033°$

$S = \underbrace{4 + 5 + \ldots + 20}_{\text{арифм. прогр.}} + \lg tg\,2017° + \ldots + \lg tg\,2033°$

$a_1 = 4$

$d = 1$

$n = 17$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{4+20}{2} \cdot 17 = 12 \cdot 17 = 204$

$\Rightarrow S = 204 + \lg tg 2017° + \ldots + \lg tg 2033°$

$2016° = 5 \cdot 2\pi + 36° + \pi = 11\pi + 36°$

$tg(k\pi + x) = tg\,x$ $k \in N$ (периодичность $y = tg x$, $T = \pi$)

$\Rightarrow tg\,2017° = tg\,37°$ и т.д.

$\Rightarrow S = 204 + \lg tg\,37° + \ldots + \lg tg\,53° = 204 + \lg(\underbrace{tg37° \cdot tg38° \cdot tg39° \ldots tg53°}_{17})$

Причем

$37° = 90° - 53°$

$38° = 90° - 52°$

и т.д.

$\Rightarrow tg\,37° = tg(\frac{\pi}{2} - 53°) = ctg\,53°$

37 38 .... 45 ... 52 53 => крайние дают единичку и ост $tg45° = 1$

$\Rightarrow S = 204 + \lg(\underbrace{ctg\,53° \cdot tg53°}_{1} \cdot \overset{tg45°}{\;} \underbrace{tg52° \cdot ctg52°}_{1} \ldots)$

$\Rightarrow S = 204 + \lg(1 \cdot tg45° \cdot 1 ..) = \boxed{204}$

$\lg(1) = 0$

Ответ: $S = 204$.

⊕

Лист 05 из 06

Вариант: 14111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ZP 62-43

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Составим таблицу, где ~~столбцы~~ строки будут соответствовать запасам газа в соотв. месяц, с ~~строки~~ порядковый номер месяца. ~~[illegible]~~ столбца соотв.

1	2	3	4	5	6
X	$c-2x$	$c-(c-2x)2$	$c-(c-(c-2x)2)2$	$c-(3c-8x)2$	$c-(16x-5c)_2$
X	$c-2x$	$4x-c$	$3c-8x$	$c-6c+16x$ $16x-5c$	$c-32x+10c$ $11c-32x$

! $\boxed{a_n = c-2(a_{n-1})}$, где a_n - запас газа в n-ом месяц

Заметим, что если $c=\frac{3X}{[illegible]}$, то количество газа (запасов) не меняется, если же меняется, то

в перв. мес: X

2ой $c-2x \Rightarrow \boxed{c>2x}$

3ий $c-2(c-2x)=c-2c+4x=4x-c \Rightarrow \boxed{c<4x}$

4ый $c-2(4x-c)=c-8x+2c=3c-8x \quad \boxed{c>\frac{8}{3}x}$

5ый $c-2(3c-8x)=$

Пусть в месяц l (пор. номер) запас газа стал равен. запасу в месяце $m \Rightarrow l, m \in N$

$a_l = c-2(a_{l-1}) = a_m = c-2(a_{m-1})$

из равенства $\Rightarrow a_{l-1}=a_{m-1} \Rightarrow a_{l-1}=c-2(a_{l-2})=c-2(a_{m-2})$

+.

аналог $\Rightarrow a_{l-2}=a_{m-2}$ и так далее

$\Rightarrow$ противоречие т.к. кол-во газа меняется по условию. <u>Ответ:</u> невозможно, т.к. кол-во газа меняется ежемесячно, либо если <u>не</u> меняется $\Rightarrow x=\frac{c}{3}$ в любой месяц.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

ЫF 91-23

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Маньшин

ИМЯ Александр

ОТЧЕСТВО Алексеевич

Дата рождения 26. 02. 1999

Класс: 11

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11. 02. 17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Ман

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.

$S = \lg(10^4 tg 2017°) + \lg(10^5 tg 2011°) + \ldots + \lg(10^{20} tg 2033°)$

$S - ?$ Необходимо найти сумму $20-4+1=17$ различных чис

$\lg(10^4 \cdot tg 2017°) = \log_{10} 10^4 + \log_{10}(tg 2017°)$.

$tg 2017° = tg(1800°+217°) = tg 217° = tg(180°+37°) = tg 37°$.

Аналогично, раскладываем другие log на сумму log.

Получаем: $\log_{10} 10^4 + \log_{10} 10^5 + \ldots \log_{10} 10^{20} + \log_{10} tg 37° +$
$+ \log_{10} tg 38° + \ldots + \log_{10} tg 53°$.

⊕

$\log_{10} 10^4 + \ldots + \log_{10} 10^{20} = 4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+$
$+15+16+17+18+19+20 = \underline{204 \text{ млн руб.}}$

Сумму логарифмов от тангенса компануем как

$(\log_{10} tg 37° + \log_{10} tg 53°) + (\log_{10} tg 38° + \log_{10} tg 52°) + \ldots + \log_{10} tg 45°$

$tg 53° = tg(90°-37°) = ctg 37°$; аналогично с другими значениями tg.

Получаем: $\log_{10} tg 37° + \log_{10} ctg 37° = \log_{10}(tg 37° \cdot ctg 37°) =$
$= \log_{10} 1 = 0$ (т.к. $tg x \cdot ctg x = 1$); $\log_{10} tg 45° = \log_{10} 1 = 0$.

Значит, сумма логарифмов от tg равна нулю.

$204 + 0 = 204$ млн. руб.

Ответ: $S = 204$ млн. рублей.

4.

$a^2+b^2+c^2 = 6abc$ $a, b, c > 0$ ⊕

$a+b+c$ − мин − ?

$a^2+b^2+c^2$ — квадрат диагонали параллепипеда
$6abc = 6V$ параллепипеда.
} т.к. a, b, c — положительные числа

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

т.к. $a+b+c$ – наименьшее значение, то необходимо рассматривать куб.

$a=b=c=x$

$x^2+x^2+x^2=6x^3$

$3x^2=6x^3$

$x^2=2x^3$, т.к. $x>0$, то делим обе части на x^2

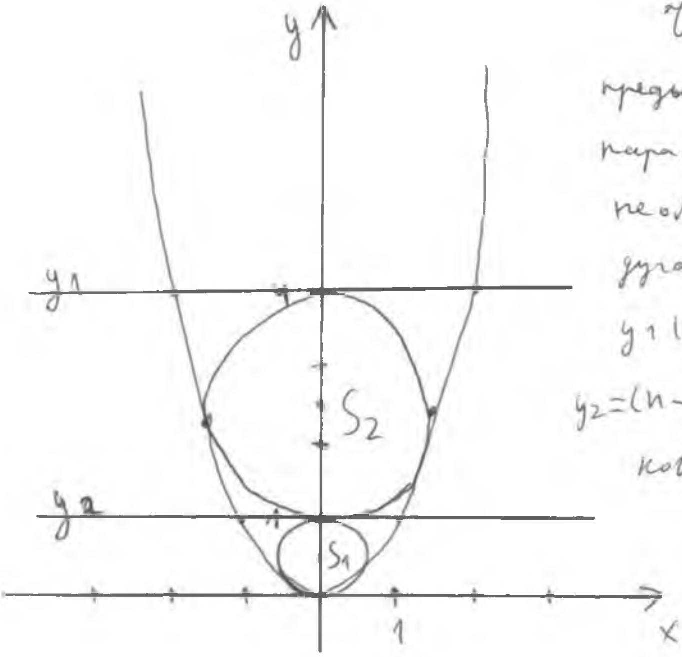
$1=2x$

$x=\frac{1}{2}$.

$a+b+c=3x=3\cdot\frac{1}{2}=1,5$.

Ответ: $a+b+c=1,5$.

3.



Чтобы окружность касалась предыдущей окружности и ветвей параболы внешним образом, необходимо, чтобы ее верхняя дуга касалась прямой $y1=n^2$, $y1 \parallel Ox$, а нижняя прямой $y_2=(n-1)^2$, $y2 \parallel Ox$, где n – порядковый номер окружности.

Тогда радиус такой окружности вычисляется по формуле:

$$\frac{n^2-(n-1)^2}{2}.$$ почему?

$RS_2=\frac{2^2-(2-1)^2}{2}=\frac{4-1}{2}=1,5$. Теперь найдем RS_{2017}.

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЫF 91-23

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$R_{S2017} = \frac{2017^2 - 2016^2}{2} = \frac{(2017+2016)\cdot 1}{2} =$$

$$= 1008,5 + 1008 = 2016,5.$$

Ответ: R = 2016,5.

(±)

2.

I x м³

II $(C - 2x)$ м³

Чтобы запас оказался равным, то должно выполняться равенство $x = C - 2x$

где C − весь запас газа

$C = 3x$ − из этого уравнения

В некоторой месяц $C = \cancel{x}$, а в следующий $3x$.

(∓)

Значит $x = 3x$, значит $x = 0$. Т.к. запас газа число строго положительное, то запас газа не может оказаться одинаковым для 2-х разных месяцев.

Ответ: не может. ?

5.

S(n) − число решений уравнения $\sin nx = \sin x$. $n \in N, n > 1$

$S_2 = 3$; $S_3 = 4$; $S_4 = 7$ − найдено по единичной окружности, т.к. S(n) − зависимость возрастающая, то $S(n) = 2017$ может принять не более 1 раза.

Для n − четного $S(n) = n^2 - (n-1)^2$

(∓)

Для n − нечетного $S(n) = n^2 - (n-1)^2 - 1$

$S(n) = 2017$. Проверим для n − четного

$n^2 - n^2 + 2n - 1 = 2n - 1 = 2017$; $2n = 2018$; $n = 1009$ − нечетное (не подходит)

Для n − нечетного:

~~S(n)=2017~~ $n^2 - n^2 + 2n + 1 - 1 = 2n = 2017$; $n = 1008,5$ − ненатуральное (не подходит)

Ответ: ни одного раза $S(n) = 2017$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

ЭН 64-34

шифр

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ МАРКЕЛОВА

ИМЯ АНАСТАСИЯ

ОТЧЕСТВО ЮРЬЕВНА

Дата рождения 28.08.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. $S = \lg(10^4 \cdot tg2017^\circ) + \lg(10^5 tg2018^\circ) + \ldots$

$\ldots + \lg(10^{20} tg2033)$. Найти S - ?

$\lg(10^4 \cdot tg2017) + \lg(10^5 tg2018) + \ldots + \lg(10^{20} 2033) =$

$= \lg 10^{204} \cdot tg2017 \cdot tg2018 \cdot tg2019 \cdot \ldots \cdot tg2033) =$

$= 204 \cdot \lg 10 \cdot tg2017 \cdot tg2018 \cdot \ldots \cdot tg2033)$ (1)

Рассмотр.

$tg2017 \cdot tg2018 \cdot \ldots \cdot tg2033 =$

$$= \frac{\sin 2017 \cdot \sin 2018 \cdot \ldots \cdot \sin 2033}{\cos 2017 \cdot \cos 2018 \cdot \ldots \cdot \cos 2033} \quad (2)$$

Т.к ~~cos~~ функц tgx - имеет период π, то

$tg2017 = tg(11 \cdot \pi + 37) = tg37$ => то

выражение (2) можно заменить

на $\dfrac{\sin 37 \cdot \sin 38 \cdot \ldots \cdot \sin 53}{\cos 37 \cdot \cos 38 \cdot \ldots \cdot \cos 53}$ (2').

Тогда $\dfrac{(\sin 37 \cdot \sin 53) \cdot (\sin 38 \cdot \sin 52) \cdot \ldots \cdot \sin 45}{(\cos 37 \cdot \cos 53) \cdot (\cos 38 \cdot \cos 52) \cdot \ldots \cdot \cos 45} =$

→

Вариант: 17/11

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭН 64 - 34

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} \sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) \\ \cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(\cos16-\overset{0}{\cos90})\cdot\frac{1}{2}(\cos17-\overset{=0}{\cos90})\cdots\sin45}{\frac{1}{2}(\cos16+\overset{=0}{\cos90})\frac{1}{2}(\cos17-\overset{=0}{\cos90})\cdots\cos45}=$$

$$=\frac{\sin45}{\cos45}=\operatorname{tg}45=1\quad(2'')$$

⊕

$(2'')\rightarrow(1)$.

$\lg(10^4\cdot\operatorname{tg}2017)+\lg(10^5\cdot\operatorname{tg}2018)+\ldots\lg(10^{20}$ [illegible]$)=$

$=204\cdot\underbrace{\lg10\cdot1}_{=1}=204$.

Ответ. ~~204 млн~~ 204 млн

~~№4. $a^2+b^2+c^2=6abc$. $a+b+c$?~~

~~из Нерав. Коши:~~

~~$a^2+b^2+c^2\geq3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\Rightarrow$~~

~~при рав.~~

~~$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=6abc$.~~

~~$a^2b^2c^2=8a^3b^3c^3$~~

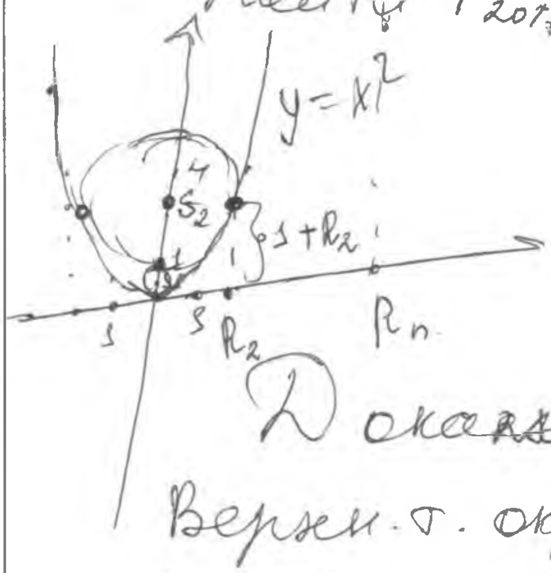
~~$\Rightarrow abc=8a^2b$, $1=8abc$~~

~~$\Rightarrow abc=\frac{1}{8}$ и $a^2+b^2+c^2=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ и~~ →

№3. $y=x^2$. S_1 – окр. $D=1$

S_2, S_3 S_4 касается внеш. обр. пред. окр и вет. параб

Найти r_{2017} окр S_{2017}



Тогда $R_n = n-\frac{1}{2}$,

а центр S_n $(0; n^2-n+\frac{1}{2})$

Докажем предпол. индукцией

Верхн. т. окруж. имеет ордин

$n^2-n+\frac{1}{2}+n-\frac{1}{2}=n^2 \Rightarrow$ цент окр

S_{n+1} (рад $n+\frac{1}{2}$) касается

S_n в верхн. точке $(0; n^2+n+\frac{1}{2}) \Rightarrow$

Ур. окр. $S_{(n+1)}$ им. вид. $x^2+(y-n^2-n-\frac{1}{2})^2=$
$=(n+\frac{1}{2})^2$, подставим вместо x^2 – y.

$\Rightarrow y-n^2+(y-n^2)^2-2(y-n^2)(n+\frac{1}{2})+$
$+n^2=0 \Rightarrow (y-n^2-n)^2=0$.

Ур имеет решен, если $y=n^2+n \Rightarrow$
S_{n+1} имеет с пар. S_n две общ точки – кас ее. Тогда $S_{2017}=2017-\frac{1}{2}=2016{,}5$.

Ответ 2016,5

+

№4. $a^2+b^2+c^2=6abc$.

$a+b+c$ - ?

Из неравенства Коши.

$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2+b^2+c^2}$ (+)

Тогда. $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 6abc$

$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 8a^3b^3c^3$

$abc = 8a^2b$.

$1 = 8 - abc$.

$\Rightarrow abc = \frac{1}{8}$.

$a^2+b^2+c^2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Тогда $a^2+b+c = \frac{3}{2}$

Ответ. $\frac{3}{2}$.

№2. I. 1 машин. $- x$.

2 машин $c - 2x$.

если два машины подр.

$x = c - 2x$, $3x = c$

$\Rightarrow x = \frac{c}{3}$ (1)

II 1 машин x

n-машин.

$c - n \cdot x$. (+)

$x = c - n \cdot x$

$x = \frac{c}{n+1}$. (2)

~~Ответ $\frac{c}{3}$ или $\frac{c}{n+1}$ n машин.~~

(1)→(2). $\frac{c}{3} = \frac{c}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{n+1}$, $n=2$; $x=1$ = Ответ! Совп на 2-ом маш $x = 1 м^3$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭН 64-34

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. $n > 1$. $S(n)$ - число решен

ур. $\sin nx = \sin x$.

$[0; \pi]$.

$S(n) - ?$

$S(n) = 2017$ (ск. раз)

ⓣ

$\sin nx = \sin x$

$\Rightarrow S(n) \begin{cases} \operatorname{div}\frac{n}{2}, & n \in (1; 5] \\ \operatorname{div}\frac{n}{2} - \operatorname{div}(\frac{1}{2}\operatorname{div}\frac{n}{2}) & \text{при } x > 5. \end{cases}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{1+n}}; n \in Z \quad x \in [0; \pi]$

$S(n) \begin{cases} \operatorname{div}\frac{n}{2}; & 1 < n \leq 5 \\ \operatorname{div}\frac{n}{2} - \operatorname{div}(\frac{1}{2}\operatorname{div}\frac{n}{2}), & n > 5. \end{cases}$

Ответ.

$x = \frac{\pi}{1+n}$; $S_n \begin{cases} \operatorname{div}\frac{n}{2}; & 1 < n \leq 5 \\ \operatorname{din}\frac{n}{2} - \operatorname{din}(\frac{1}{2}\operatorname{din}\frac{n}{2}) & n > 5. \end{cases}$

Тогда $S(n) = 2017 \, {}^{n\geq 1}_{2}$ будет 2 раза

Лист 05 из 05

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССТ

Место проведения

GE 78-72

шифр

← **Не заполнять**

Заполняется ответственным работником

Вариант № 170 71

ФАМИЛИЯ МЕДНИКОВ

ИМЯ МАКСИМ

ОТЧЕСТВО АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 13.04.2003.

Класс: 7

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017

(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Вариант: 14071.

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GE 78-72

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2. В гости были приглашены 20 человек. Екатерина танцевала с семью кавалерами, Ольга – с восемью, Ирина – с девятью и так далее до Алёны, которая танцевала со всеми кавалерами. Сколько танцоров-кавалеров было приглашено в гости?

Екатерина – 7 кавалеров.

Ольга – 8 кавалеров

Ирина – 9 кавалеров.

. . .

Алёна – все кавалеры

Если девушки танцевали по ~~о~~очереди и были только Екатерина, Ольга, Ирина, Алёна, то 20 − 4 = 16 – кавалеров должно было, но кавалеров только 10, т.к. если у Ирины 9, то Алёна с 10 ~~[illegible]~~ (то есть со всеми), значит возможно девушек было 5, тогда и кавалеров 11, 11+5<20, значит девушек может быть 6, тогда кавалеров 12, 12+6<20, значит девушек может быть 7, значит кавалеров 13, 13+7=20, значит 13 кавалеров.

Ответ: 13 кавалеров-танцоров.

№3. Снег пошёл, когда часы на башне показывали z часов y минут (часы показывают время в формате от 00.00 до 23.59), и продолжал идти в течение x часов z минут. Когда снег перестал, на часах было y часов x минут. Найдите все возможные значения разности x−y.

Если снег пошёл в z часов y минут, ~~[illegible]~~ и шёл x часов z минут, то z часов y минут + x часов z минут = y часов x минут.

$$+\begin{array}{ll} z\text{ часов} & y\text{ минут}\\ x\text{ часов} & z\text{ минут}\\ \hline y\text{ часов} & x\text{ минут}\end{array}$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 11711

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GE 78-72

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

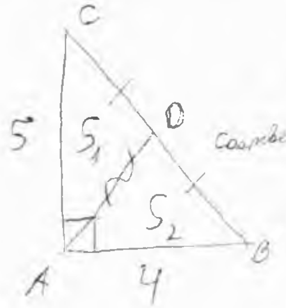
т.к. $z=z$, а значит и $x=y$, то может получиться только $x-y=0$, т.к. x и y одно и тоже число, значит $z=0$.

Ответ: $x-y=0$. $\Rightarrow \ldots ?$ (+)

№4. Два брата получили в наследство поле в форме прямоугольного треугольника, катеты которого соотносятся как 4:5, разделили его по прямой линии, соединяющей вершину прямого угла с серединой противоположной стороны.

А) Получили ли братья части равной площади?

Б) Могут ли ограды, поставленные вокруг каждой части иметь равную длину?



S_1 − треугольника ACD.

S_2 − треугольника ABD.

т.к. чтобы были равны треугольники с двумя соответственно равными сторонами, третья сторона должна быть равна третьей стороне ~~тр~~ то есть AB должна быть равна AC, но AB : AC как 4 : 5, а значит $AB \neq AC$, а значит $\triangle ABD \neq \triangle ACD$, а значит ограды поставленные вокруг не будут иметь одинаковую длину, и площади тоже не будут равны.

Ответ: А) $S_1 \neq S_2$ ошибка Б) длина одной ограды не равна длине другой ограды.

(−)

№5 Что больше;

$$\frac{2{,}0000000000004}{(1{,}0000000000004)^2+2{,}0000000000004} > \frac{2{,}00000000002}{(1{,}00000000002)^2+2{,}00000000002}$$

Ответ: первое число больше второго. почему?

(−)

Лист 2 из 3

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. На автобазе 31 машина. Закуплено некоторое количество топлива из расчёта a литров в неделю на каждую машину. Но получилось так, что каждую неделю одна из машин полностью выходила из строя и в дальнейшем больше не работала, поэтому закупленного топлива хватило на двойной срок. Какое количество топлива было закуплено и на какой период времени это было рассчитано?

31a+30a+29a+28a+27a+26a+25a+24a+23a+22a+21a+20a+
+19a+18a+17a+16a+15a+14a+13a+12a+11a+10a+9a+8a+7a
+6a+5a+4a+3a+2a+a = 496a (топливо)

16 недель.

Ответ: 496a топлива; 16 дней.

⊕

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССТ Мытищи

Место проведения

ДЦ 54-19

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Мельник

ИМЯ Всеволод

ОТЧЕСТВО Константинович

Дата рождения 03.06.2002

Класс: 8

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases}$$

$1+x+y=xy$

$x=xy-y-1$

$xy-x=y+1$

$x(y-1)=y+1$

$x=\frac{y+1}{y-1}$

$5+z+x=zx$

$5+z+\frac{y+1}{y-1}=z\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$

$z\left(\frac{y+1}{y-1}\right)-z=\frac{y+1}{y-1}+5$

$z\left(\frac{y+1}{y-1}-1\right)=\frac{y+1}{y-1}+5$

$z\left(\frac{y+1-(y-1)}{y-1}\right)=\frac{y+1}{y-1}+5$

$z\left(\frac{y+1-y+1}{y-1}\right)=\frac{y+1}{y-1}+5$

$z\left(\frac{2}{y-1}\right)=\frac{y+1}{y-1}+5$

$z=\left(\frac{y+1}{y-1}+5\right)\left(\frac{y-1}{2}\right)$

$z=\left(\frac{y+1+5y-5}{y-1}\right)\left(\frac{y-1}{2}\right)$

$z=\frac{6y-4}{2}$

$z=3y-2$

$2+y+z=yz$

$2+3y-2+y=y(3y-2)$

$4y=y(3y-2)$

$4y=3y^2-2y$

$3y^2-6y=0$

$y^2-2y=0$

$y(y-2)=0$

$y=0$ или $y-2=0$

$y=2$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 (продолжение)

Если $y=0$, то

$x=\frac{0+1}{0-1}=-1$

$z=3\cdot 0-2$

$z=-2$

Если $y=2$, то

$x=\frac{2+1}{2-1}=3$

$z=3\cdot 2-2=4$

⊕

Ответ: $x=-1; y=0; z=-2$ или $x=3; y=2; z=4$.

№5.

Найдём, сколько горючего закачали в резервуар между 12ч и 14ч.

В 12ч. резервуар был полон на $\frac{1}{2}$, а в 14ч. - на $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$ резервуара.

Возьмём скорость первого насоса за v_1, а скорость второго за v_2. Тогда их общая скорость - v_1-v_2, т.к. первый насос закачивает горючее, а второй - откачивает.

$14ч-12ч=2ч$., значит $(v_1-v_2)\cdot 2=\frac{1}{6}$

$v_1-v_2=\frac{1}{12}\Rightarrow$ общая скорость насосов $=\frac{1}{12}$ резервуара в час.

Возьмём время, за которое первый насос качал горючее один за t. Тогда $v_1t+(v_1-v_2)2=\frac{1}{2}$, т.к. от 10ч до 12ч первый и второй насос качали вместе 2 часа.

$v_1t+\frac{1}{12}\cdot 2=\frac{1}{2}$

$v_1t+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

$v_1t=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow$ первый насос заполнил $\frac{1}{3}$ резервуара до 10ч.

№5 (продолжение)

$v_1 t = \frac{1}{3}$

$v_1 = \frac{1}{3t}$

Подставим v_1 в уравнение $v_1 - v_2 = \frac{1}{12}$

$\frac{1}{3t} - v_2 = \frac{1}{12}$

$v_2 = \frac{1}{3t} - \frac{1}{12}$

Поскольку второй насос откачивает горючее, то его скорость должна быть ≥ 0, иначе он начнёт закачивать горючее в резервуар. Значит его минимальная скорость $=0$.

$0 = \frac{1}{3t} - \frac{1}{12}$

$t = 4$

Тогда первый насос включим в 10ч − t = 10ч − 4ч = 6ч утра. Если его включат раньше, то t станет >4 и v_2 станет <0, второй насос будет закачивать горючее, что противоречит условию. Значит самое раннее время включения первого насоса − 6ч утра.

Ответ: 6ч утра.

(+)

№2.

$A = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

а) $k=2$

$B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4+1}{x^2} = \frac{x^4+2x^2-2x^2+1}{x^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{x^2} - 2 = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 2 =$

$= A^2 - 2$

$k=3$

$B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = \frac{x^6+1}{x^3} = \frac{x^6+3x^4+3x^2+1-3x^4-3x^2}{x^3} =$

$= \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3} - 3\left(\frac{x^4-x^2}{x^3}\right) = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{x^4-x^2}{x^3}\right) =$

$= A^3 - 3\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = A^3 - 3A$

№2 (продолжение)

$B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4} = \frac{x^8+1}{x^4} = \frac{x^8+4x^6+4x^4+4x^2+1}{x^4} - \frac{4x^6+4x^4+4x^2}{x^4} =$

$= \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^4 - 4\left(\frac{x^4+x^2+1}{x^2}\right) = A^4 - 4\left(\frac{x^4+2x^2+1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}\right) =$

$= A^4 - 4\left(\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 1\right) = A^4 - 4(A^2-1) = A^4 - 4A^2 + 4 = (A^2-2)^2$

$B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8} = \frac{x^{16}+1}{x^8} = \frac{x^{16}+8x^{14}+8x^{12}+8x^{10}+8x^8+8x^6+8x^4+8x^2+1}{x^8} -$

$- 8\left(\frac{x^{14}+x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2}{x^8}\right) = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^8 -$

$- 8\left(\frac{x^{12}+x^{10}+x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^6}\right) = A^8 - 8\left(\frac{x^{12}+6x^{10}+6x^8+6x^4+6x^2+1}{x^6}\right) +$

$+ 8\left(\frac{5x^{10}+5x^8+5x^6+5x^4+5x^2}{x^6}\right) = A^8 - 8A^6 + 8\cdot 5\left(\frac{x^8+x^6+x^4+x^2+1}{x^4}\right) =$

$= A^8 - 8A^6 + 40\left(\frac{x^8+4x^6+4x^4+4x^2+1}{x^4}\right) - 40\cdot 3\left(\frac{x^6+x^4+x^2}{x^4}\right) =$

$= A^8 - 8A^6 + 40A^4 - 120\left(\frac{x^4+x^2+1}{x^2}\right) = A^8 - 8A^6 + 40A^4 - 120\left(\frac{x^4+2x^2+1}{x^2}\right) +$

$+ 120\frac{x^2}{x^2} = A^8 - 8A^6 + 40A^4 - 120A^2 + 120$

Ответ: $B_2 = A^2 - 2$; $B_3 = A^3 - 3A$; $B_4 = (A^2-2)^2$; $B_8 = A^8 - 8A^6 + 40A^4 -$
$- 120A^2 + 120$.

b) $B_2 = B_4 = B_8$

$B_2 = B_4$; $A^2 - 2 = (A^2-2)^2$

$A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 4$

$A^4 - 5A^2 + 6 = 0$

$D = 25 - 24 = 1$

$A^2 = \frac{5 \pm 1}{2} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array}\right.$

$A = \left[\begin{array}{l} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \end{array}\right.$

Если $A = \sqrt{3}$

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$

$x^2 + 1 - \sqrt{3}x = 0$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

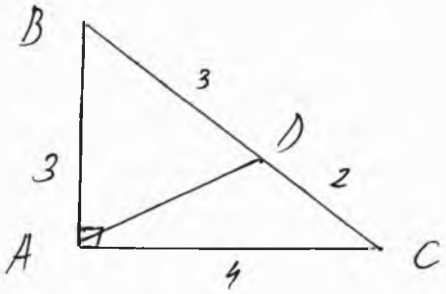
№2 (продолжение)

$x^2+1-\sqrt{3}x=0$

$D=3-4=-1 \Rightarrow$ нет решений.

Ответ: $B_2 \neq B_4 \neq B_8$

№4



$BC^2=AB^2+AC^2$

$BC^2=9+16=25$

$BC=5$

$BC=BD+CD$

Братья шли с одной скоростью равное время ⇒ прошли одинаковое расстояние, значит

$$\begin{cases} AB+BD=AC+CD; \; 3+BD=4+CD \\ BC=BD+CD; \; 5=BD+CD \end{cases}$$

$CD=5-BD$

$3+BD=4+5-BD$

$3+BD=9-BD$

$2BD=6$

$BD=3$

$CD=5-3=2$

а) Площади этих треугольников не равны

б) 1:~~1, т.к. тогда выс~~

Ответ: 1:1.

⊕

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МБОУ „Лицей № 18"

Место проведения

ХЫ 23-47

шифр

← **Не заполнять**

Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Михайлова

ИМЯ Ольга

ОТЧЕСТВО Олеговна

Дата рождения 24.04.2002

Класс: 8Б

Предмет математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Мих

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 14081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-47

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

а) $A = x + \frac{1}{x}$ 1) $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$B_k = x^k + \frac{1}{x^k}$ $\frac{B_2}{A} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x(x^4+1)}{x^2(x^2+1)} = \frac{x^4+1}{x(x^2+1)}$

$B_2 = \frac{A(x^4+1)}{x(x^2+1)}$

2) $B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$\frac{B_3}{A} = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x(x^6+1)}{x^3(x^2+1)} = \frac{x^6+1}{x^2(x^2+1)}$

$B_3 = \frac{A(x^6+1)}{x^2(x^2+1)}$

3) $B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4}$

$\frac{B_4}{A} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x(x^8+1)}{x^4(x^2+1)} = \frac{x^8+1}{x^3(x^2+1)}$

$B_4 = \frac{A(x^8+1)}{x^3(x^2+1)}$

4) $B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8}$

$\frac{B_8}{A} = \left(x^8 + \frac{1}{x^8}\right) : \left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{x(x^{16}+1)}{x^8(x^2+1)} = \frac{x^{16}+1}{x^7(x^2+1)}$

$B_8 = \frac{A(x^{16}+1)}{x^7(x^2+1)}$

∓

б) 1) $B_2 = B_4 = B_8$

$$\frac{A(x^4+1)}{x^1(x^2+1)}^{\backslash x^6} = \frac{A(x^8+1)}{x^3(x^2+1)}^{\backslash x^4} = \frac{A(x^{16}+1)}{x^7(x^2+1)} \quad \Big| : A$$

$$\frac{x^6(x^4+1)}{x^7(x^2+1)} = \frac{x^4(x^8+1)}{x^7(x^2+1)} = \frac{x^{16}+1}{x^7(x^2+1)} \quad \Big| \cdot x^7(x^2+1)$$

10 2 12. 4 - 16. .

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ________

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-47

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x^{10}+x^{6}=x^{12}+x^{4}$

$x^{10}+x^{6}-x^{12}-x^{4}=0$

$x^{4}(x^{6}-1)+x^{6}(1-x^{6})=0$

$(x^{6}-1)(x^{4}-x^{6})=0$

$\left[\begin{array}{l} x^{6}-1=0 \\ x^{4}-x^{6}=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1;\ x=0 \text{- не подходит} \end{array}\right.$

$x^{12}+x^{4}=x^{16}+1$

$x^{12}+x^{4}-x^{16}-1=0$

$x^{12}(1-x^{4})+(x^{4}-1)=0$

$(1-x^{4})(x^{12}-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} 1-x^{4}=0 \\ x^{12}-1=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1 \end{array}\right.$

ОДЗ:

$x\neq 0$

Значит, при $B_2=B_4=B_8$ $x=1$

2) $x=1$ $A=x+\frac{1}{x}$

$A=1+\frac{1}{1}=2$

Ответ: а) $B_2=\frac{A(x^{4}+1)}{x(x^{2}+1)}$; $B_3=\frac{A(x^{6}+1)}{x^{2}(x^{2}+1)}$; $B_4=\frac{A(x^{8}+1)}{x^{3}(x^{2}+1)}$; $B_8=\frac{A(x^{16}+1)}{x^{7}(x^{2}+1)}$; б) $x=1$; $A=2$.

№3.

1) 120 - 31 - 41 = 48 (кг) - вес средних приборов

2) $31:3=10\frac{1}{3}$ (кг) - средний вес самых легких приборов

3) $41:3=13\frac{2}{3}$ (кг) - средний вес самых тяжелых приборов

4) ~~$10\frac{1}{3}<$~~ Пусть x приборов среднего веса (не самые легкие, не самые тяжелые)

$\begin{cases} 10\frac{1}{3}<\frac{48}{x} \ \Big|\cdot x \\ 13\frac{2}{3}>\frac{48}{x} \ \Big|\cdot x \end{cases}$ $\begin{cases} 10\frac{1}{3}x<48 \Big/ :10\frac{1}{3} \\ 13\frac{2}{3}x>48 \Big/ :13\frac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} x<4\frac{20}{31} \\ x>3\frac{21}{41} \end{cases}$ $x=4$

Значит, 4 прибора среднего веса привезли на завод.

Ответ: 4 прибора

⑦

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ___________

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-47

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

1) $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):(14-12)=\frac{1}{12}$ (р./ч) – v наполнения резервуара после включения II насоса.

2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\cdot(12-10)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (резервуара) – было заполнено в 10ч.

3) $\cancel{\frac{1}{3}}:\ 10-\frac{1}{3}:\frac{1}{12}=6$ (ч) – включили бы I насос, если бы он работал со $v=\frac{1}{12}$ р./ч.

(+)

Ответ: (6, 10).

№1.

$$\begin{cases}1+x+y=xy\\2+y+z=yz\\5+z+x=zx\end{cases}$$

$x=3$; $y=2$; $z=4$

Эти решения угаданы.

$$\begin{cases}1+3+2=6\\2+2+4=8\\5+4+3=12\end{cases}$$

Нет остальных реш.

Ответ: $x=3$; $y=2$; $z=4$.

($\mp$)

№4.

а) $p=0{,}5x+1+2=0{,}5x+3$

$$\left.\begin{aligned}S_1&=\sqrt{p(p-2)(p-4)(p-x)}\\S_2&=\sqrt{p(p-3)^2(p-x)}\end{aligned}\right\|\Rightarrow\quad S_1\neq S_2$$

(+)

Ответ: не равны.

б) Ответ: 1:1

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

4РИО

Место проведения

GЯ 94-77

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ МОНОВА

ИМЯ Юлия

ОТЧЕСТВО АНДРЕЕВНА

Дата рождения 12.03.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 04 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GЯ 97-77

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2

1) Пусть текущий месяц, это первый, следующий месяц -2ой и т.д.

Обозначим запас газа в том месяце, как a_n

2) Тогда $a_1 = x$ Заметим, что

$a_2 = c - 2x$

$a_3 = 4x - c$

$a_4 = 3c - 8x$

$a_5 = 16x - 5c$

$a_6 = 11c - 32x$

. . . . .

$a_2 - a_1 = c - 2x - x = 1\cdot(c - 3x)$

$a_3 - a_2 = 4x - c - c + 2x = -2(c - 3x)$

$a_4 - a_3 = 3c - 8x - 4x + c = 4(c - 3x)$

$a_5 - a_4 = 16x - 5c - 3c + 8x = -8(c - 3x)$

$a_6 - a_5 = 11c - 32x - 16x + 5c = 16(c - 3x)$

3) С помощью мат индукции можно доказать, что $\boxed{a_{n+1} - a_n = (-2)^{n-1}(c - 3x)}$ (1)

База доказана.

Пусть $a_n - a_{n-1} = (-2)^{n-2}(c - 3x) = c - 2a_{n-1} - a_{n-1} =$

$= c - 3a_{n-1}$, т.к $a_n = c - 2a_{n-1}$ по условию.

Тогда $a_{n+1} - a_n = c - 2a_n - a_n = c - 3a_n =$

$= c - 3\cdot(c - 2a_{n-1}) = c - 3c + 6a_{n-1} = (-2)\cdot(c - 3a_{n-1})$

т.к. $a_{n+1} = c - 2a_n$ по условию

Тогда $a_{n+1} - a_n = (-2)\cdot(-2)^{n-2}(c - 3x) = (-2)^{n-1}(c - 3x)$

ЧТД.

4) Теперь докажем по индукции, что какие бы 2 месяца k и i мы ни взяли, то $a_k = a_i$ при $\boxed{x = \frac{1}{3}c}$

База для первых 4х месяцев:

$x = c - 2x \Rightarrow x = \frac{c}{3}$

$x = 4x - c \Rightarrow x = \frac{c}{3}$

$x = 3c - 8x \Rightarrow x = \frac{c}{3}$

$c - 2x = 4x - c \Rightarrow x = \frac{c}{3}$

$c - 2x = 3c - 8x \Rightarrow x = \frac{c}{3}$

$4x - c = 3c - 8x \Rightarrow x = \frac{c}{3}$

База доказана.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Пусть пусть до n+1 члена включительно условие выполняется, т.е. из первых n значений любые 2 равны друг другу только при $x = \frac{c}{3}$, т.е.

$a_n - a_k = K(c-3x)$, где $K \neq 0$.

Тогда при $a_n = a_k$. $c = 3x$ $x = \frac{c}{3}$,

где $0 < k < n$

Тогда для перехода достаточно доказать, что $a_{n+1} - a_k = K'(c-3x)$, где $k' \neq 0$

из (1) $a_{n+1} = (-2)^{n-1}(c-3x) + a_n$

Тогда $a_{n+1} - a_k = (-2)^{n-1}(c-3x) + K(c-3x) =$

$= (c-3x) \cdot (K + (-2)^{n-1}) = K'(c-3x)$

ЧТД.

Получим, что если запас газа оказался одинаковым в каких-то 2 месяца, то запас в текущем месяце x равен $\frac{c}{3}$ и наоборот, если $x = \frac{c}{3}$, то запас газа в любые 2 различных месяца одинаков и равен $\frac{c}{3}$

⊕

<u>Ответ</u>: да, может, запас равен $\frac{c}{3}$.

<u>N1</u> $S = \overbrace{\lg(10^4 \cdot \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \cdot \operatorname{tg} 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \cdot \operatorname{tg} 2031^\circ)}^{17 \text{ множителей}}$

$S = 17 \cdot \lg(10^{12} \cdot \operatorname{tg} 2025^\circ) = 17 \cdot \lg(10^{12} \cdot \operatorname{tg} 225^\circ) =$

$= 17 \cdot \lg(10^{12} \operatorname{tg} 45^\circ) = 17 \lg 10^{12} = 17 \cdot 12 = 204$

Ответ: 204

\+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17 111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GЯ 97-77

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №4

Из неравенства о средних знаем, что для положительных чисел

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

, т.е. ср. арифметическое 3х чисел не меньше их среднего геометрич.

Тогда $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ ±

=> Наименьшее значение выражения

$(a+b+c)_{min} = 3\sqrt[3]{abc}$, при том равенство достигается лишь в том случае, когда $a=b=c$. Получим, что минимальное значение выражения $a+b+c = 3a$, где a яв-ся решением ур-ния:

$$a^2+a^2+a^2 = 6a^3$$

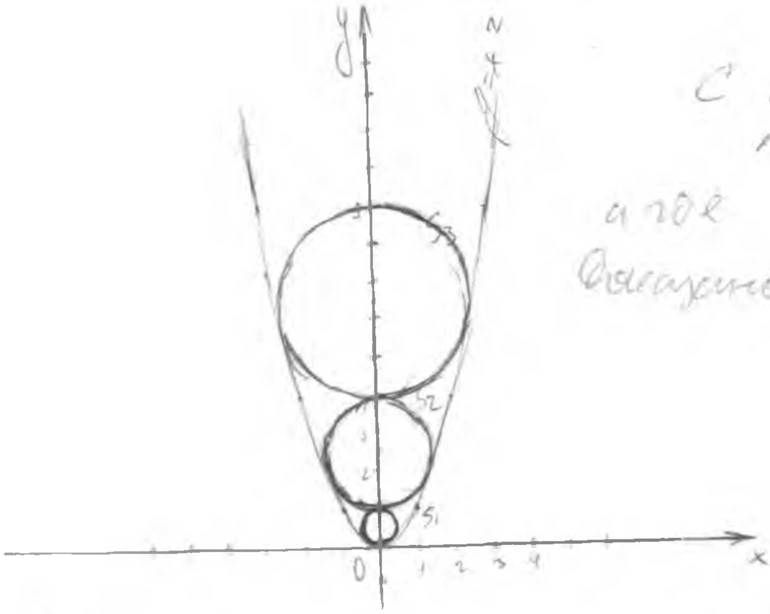
$$3a^2 = 6a^3, \quad a>0$$

$$\Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

Т.е. Тогда $a=b=c=\frac{1}{2}$ яв-ся решением данного ур-ния

$a+b+c = 3\cdot\frac{1}{2} = 1,5$ — наименьшее возможное решение.

Ответ: 1,5



С помощью мат. индукции а где можно доказать Оказывается, что диаметр S_n окружности D равен:

$D = n^2-(n-1)^2$

Тогда $R_{2017} = \frac{2017^2-2016^2}{2} = 2016,5$

Док-во:

База S_1: $D_1 = 1^2-0^2 = 1$

Рассмотрим окружность S_2:

точка (1;1) прикосновения окружности. центр лежит на оси OY. и окружность имеет ровно 2 общие точки с параболой $y = x^2$

Тогда она имеет ур-ие:

$x^2+(y-2,5)^2 = 1,5^2$ т.е. $D_2 = 2^2-1^2 = 3$

Пусть $D_n = n^2-(n-1)^2 = n^2-n^2-1+2n = 2n-1$

Докажем, что $D_{n+1} = (n-1)^2-n^2 = n^2+1+2n-n^2 = 1+2n$

что и тр-во — — —

∓

Ответ: 2016,5 откуда [illegible]!

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

№ группы	Место проведения
	КГЭУ

XY 50-57

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Мухаттарова

ИМЯ Нелли

ОТЧЕСТВО Мажитовна

Дата рождения 02.07.2003

Класс: 7

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Пусть x - кол-во девушек

Тогда (20-x) - кол-во танцоров-кавалеров.

№ девушки	1	2	3	...	x
кол-во кавалеров	7	8	9	...	20-x

~~Все~~ Разница между номером девушки и кол-вом её кавалеров $(7-1)=6$

Исходя из таблицы видно, что номер последней девушки ~~и~~ и кол-во её кавалеров в сумме должны давать $20-x+x=20$.

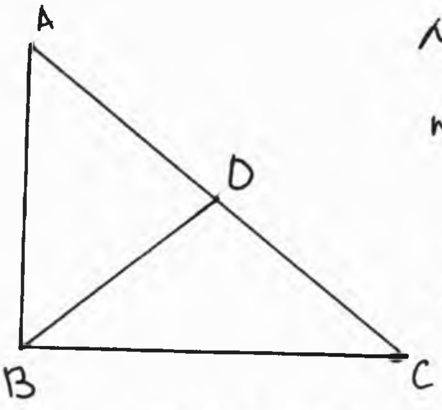
Если из 20 отнять разницу между номером девушки и ~~её~~ кол-вом её кавалеров то можно получить удвоенное кол-во всех девушек.

$\frac{\overset{14}{20-6}}{2} = 7$ девушек всего.

$20-7=13$ танцоров-кавалеров всего.

Ответ: 13 танцоров-кавалеров было приглашено в гости.

№4.



Дано:
прямоугольный ΔABC
$AB : BC = 4 : 5$
медиана BD
$AD = CD$

А) Предположим, что братья получили части равной площади. Тогда $\Delta ABD = \Delta CBD$. Соответственные стороны: BD общая; $AD=CD$; $AB=BC$. Противоречие, т.к. $AB : BC = 4:5$. $AB<BC$. Значит, братья получили части

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

неравной площади.

ошибка

Ответ: нет, они получили части разной площади.

Б) Предположим, что ограды могли иметь равную длину. Тогда ~~BD~~ + AB ~~+ AD~~ = ~~CD~~ ~~+ BD~~ + BC

$$AB = BC.$$

±

Противоречие, т.к. $AB < BC$. Значит, ограды не могли иметь равную длину.

Ответ: нет, ограды, поставленные вокруг каждой части, не могут иметь равную длину.

№3.

$x, y, z \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 23\}$, т.к. они все обозначают кол-во часов.

Переведём всё время в минуты.

$$60z + y + 60x + z = 60y + x$$

$$60(x+z-y) = x - y - z$$

$60x + 60z - 60y =$ ~~$x - y - z$~~

~~$59x + 59$~~ $59x - 59y + 61z = 0$

$$-59y + 59x = -61z \quad |:-1$$

$59y - 59x = 61z$ - в минутах

$$(x-y) \in \{0; 1; 2; \dots; 23\}$$

$$\frac{59}{60}y - \frac{59}{60}x = 1\frac{1}{60}z$$

$$\frac{59}{60}(y-x) = 1\frac{1}{60}z$$

y и z не могут быть больше 12, т.к. их сумма (x) не должна быть больше 23.

−

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Примеры из условия можно записать так:

$$\frac{2+10^{-11}\cdot 4}{(1+10^{-11}\cdot 4)^2+2+10^{-11}\cdot 4} \quad и \quad \frac{2+10^{-11}\cdot 2}{(1+10^{-11}\cdot 2)^2+2+10^{-11}\cdot 2}$$

$$\frac{2+10^{-11}\cdot 4}{19+10^{-11}\cdot 12} \quad и \quad \frac{2+10^{-11}\cdot 2}{7+10^{-11}\cdot 6}$$

Предположим, что они равны. Тогда верно следущее:

$$(2+10^{-11}\cdot 4)(7+10^{-11}\cdot 6)=(2+10^{-11}\cdot 2)(19+10^{-11}\cdot 12)$$

$$14+10^{-11}\cdot 12+10^{-11}\cdot 28+\underline{10^{-22}\cdot 24}=38+10^{-11}\cdot 24+10^{-11}\cdot 38+\underline{10^{-22}\cdot 24}$$

$$14+10^{-11}\cdot 40=38+10^{-11}\cdot 62 \quad \Big|:2$$

$$7+10^{-11}\cdot 20=\cancel{38}\ 19+10^{-11}\cdot 31$$

$$\underline{10^{-11}\cdot 11=-12}$$ неверно.

Значит, эти выражение не равны. но какое больше?

$\bigcirc\!\!-$

№1.

Пусть кол-во недель – x.

Тогда всего закуплено $31ax$ литров.

В 1ую $a(32-1)$

Во 2ую $a(32-2)$

В 3ю $a(32-3)$

В ~~xую~~ x $a(32-x)$

В ~~2x~~ $2x$ $a(32-2x)$

литров было потрачено.

$$(a(32-1)+a(32-2x))\cdot\frac{a(32-2x)}{2}=31ax$$

$$a(32-1+32-2x)\cdot a(16-x)=31ax$$

$$\cancel{a}(63-2x+16-x)=31\cancel{a}x$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~6~~. $79-3x=31x$

$79=34x$

$x=\frac{79}{34}$

$x=2\frac{11}{34}$

$a=\frac{79-3x}{31x-1}$

$a=\frac{79-6\frac{33}{34}}{\frac{79\cdot31-34}{34}}$

$a=\frac{\left(79-6\frac{33}{34}\right)\cdot34}{79\cdot31-34}$

$a=\frac{79\cdot34-(204+33)}{2415}$

$a=\frac{2686-237}{2415}$

$a=\frac{2449}{2415}$

$a=1\frac{34}{2415}$

+

~~Ответ~~: $31ax=31\cdot\frac{79}{34}\cdot\frac{2449}{2415}=$

$=31\cdot2\frac{11}{\cancel{34}}\cdot1\frac{\cancel{34}}{2415}=2\frac{11}{2415}\cdot31=62\frac{341}{2415}$ м.

Ответ: было закуплено $62\frac{341}{2415}$ м. Оно было расчитано на $2\frac{11}{34}$ недели.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г Уфа

Место проведения

ЭН 64-97

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Мусина

ИМЯ Айша

ОТЧЕСТВО Камилевна

Дата рождения 02.01.1999 **Класс:** 11

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 1

$S = lg(10^4 \cdot tg2017) + lg(10^5 \cdot tg2018) + \ldots + lg(10^{20} \cdot tg\,2033)$

1) $tg\,2017° = tg\,(360 \cdot 5 + 217°) = tg\,217° = tg(180 + 37)° =$

$= tg\,37°$

2) $lg(10^4 \cdot tg37) + lg(10^5 \cdot tg38) + \ldots + lg(10^{20} \cdot tg53) =$

$= (lg10^4 + lg10^5 + \ldots + lg10^{20}) + (lg\,tg37° + lg\,tg38° + \ldots\, lg\,tg53°) =$

$= (4+5+6+\ldots+20) + lg(tg37° \cdot tg38° \cdot tg39° \ldots \cdot tg53°) =$

дополнение: $4+5+6+\ldots+20 = 1+\ldots+20-6 = \frac{20 \cdot 21}{2} \cdot 6 = 204$

⊕

$= 204 + lg\frac{\sin37° \cdot \sin38° \cdot \ldots \cdot \sin53°}{\cos37° \cdot \cos38° \cdot \ldots \cdot \cos53°} = 204 + lg\frac{\sin37 \cdot \sin53) \cdot (\sin38 \cdot \sin52) \cdot \ldots}{(\cos37 \cdot \cos53)(\cos38 \cdot \cos52) \cdot \ldots}$

$= 204 + lg\frac{(\cos16 - \cos90°)(\cos14 - \cos90°)}{(\cos16 - \cos90°)(\cos14 + \cos90°)} = 204 + lg\frac{\cos16° \cdot \cos14° \cdot \ldots}{\cos16° \cdot \cos14°} =$

$= 204 + lg1 = 204 + 0 = 204$

Ответ: 204.

N 2.

Уважаемые организаторы олимпиады! Условие этой задачи мне было не до конца понятно, но т.к. по условиям вопросы нельзя было задавать, то прилагаю решения в разных вариантах в зависимости от понимания текста

① Если в текущем месяце запас равен x м³, то в следующем месяце он будет равен $(c - 2x)$ м³ (где c, в моем понимании, некоторая константа)

⊕

В таком случае запас газа ~~может~~ оказаться одинаковым в различные месяцы

$x = c - 2x$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

И запас, одинаковый для двух разных месяцев, будет равен

$$x = \frac{c}{3}$$

② „Если в текущем месяце запас равен x м³, то в следующем месяце он будет равен – $2x$ м³"

В этом случае запас газа будет увеличиваться в геометрической прогрессии, причем $q = 2$, то есть в первый месяц – x м³, во второй – $2x$ м³, в третий – $4x$ м³ и т. д. И здесь уже запас газа не может быть одинаковым для двух различных месяцев.

№4.

$$a^2+b^2+c^2=6abc$$

Применим неравенство Коши для $(a+b+c)$:

$$a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{a\cdot bc}$$ (±)

Наименьшее значение достигается, если $a+b+c = 3\sqrt[3]{abc}$, но, с другой стороны, равенство достигается, если $a=b=c$. Тогда получим

$$3a^2 = 6a^3$$

$$2a = 1$$

$$a = \frac{1}{2} = b = c$$

$$a+b+c = \frac{3}{2}$$

Ответ. 1,5

N5.

$$\sin nx = \sin x \quad (n \in N)$$ (±)

$$\sin nx - \sin x = 0$$

$$2\cdot\cos\frac{nx+x}{2}\cdot\sin\frac{nx-x}{2} = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{nx+x}{2}=0\\ \sin\frac{nx-x}{2}=0\end{array}\right.$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\left[\begin{array}{l} \frac{nx+x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \frac{nx-x}{2}=\pi m,\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi+2\pi k}{n+1},\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{2\pi m}{n-1},\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0\le\frac{\pi+2\pi k}{n+1}\le\pi \\ 0\le\frac{2\pi m}{n-1}\le\pi \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0\le\frac{2k+1}{n+1}\le 1 \\ 0\le\frac{2m}{n-1}\le 1 \end{array}\right.$$

Рассмотрим число решений $S(n)$ для разных n и найдем зависимость:

- $n=2$

$$\left[\begin{array}{l} 0\le\frac{2k+1}{3}\le 1,\ k\in\mathbb{Z} \\ 0\le 2m\le 1,\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\le k\le 1,\ k\in\mathbb{Z} \\ 0\le m\le\frac{1}{2},\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \longrightarrow \begin{array}{l} k=0, k=1 \\ m=0 \end{array}$$

3 решения

- $n=3$

$$\left[\begin{array}{l} 0\le\frac{2k+1}{4}\le 1,\ k\in\mathbb{Z} \\ 0\le\frac{2m}{2}\le 1,\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\le k\le\frac{3}{2},\ k\in\mathbb{Z} \rightarrow k=0, k=1 \\ 0\le m\le 1,\ m\in\mathbb{Z} \rightarrow m=0, m=1 \end{array}\right.$$

4 решения

- $n=5$

$$\left[\begin{array}{l} 0\le\frac{2k+1}{6}\le 1,\ k\in\mathbb{Z} \\ 0\le\frac{2m}{4}\le 1,\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\le k\le\frac{5}{2} \overset{k\in\mathbb{Z}}{\rightarrow} k=0, k=1, k=2 \\ 0\le m\le 2 \overset{m\in\mathbb{Z}}{,} m=0, m=1, m=2 \end{array}\right.$$

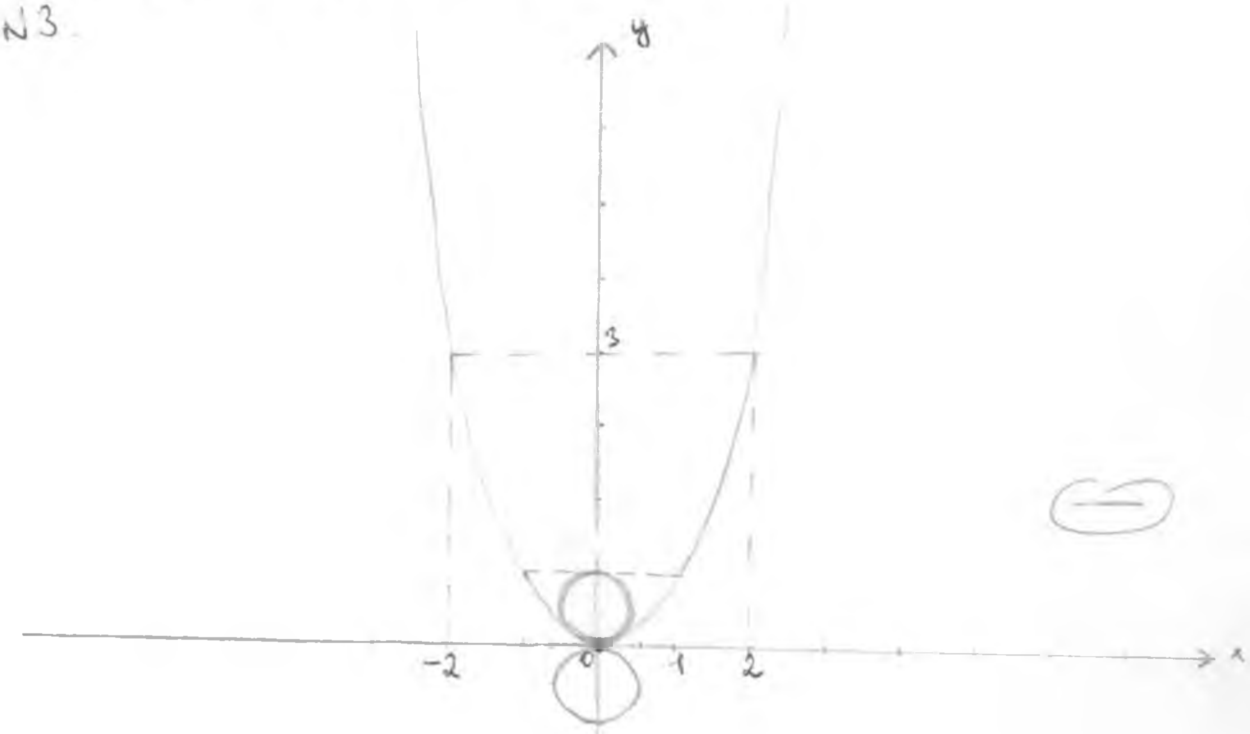
Заметим явную?/ зависимость $S(n)$ от n

$S(n) = n + 1$ Это не так.

$S(n)$ может принимать значение 2017 единственной раз при $n = 2016$ (т.к. n строго больше 1)

$S(2016) = 2016 + 1 = 2017$.

N3.



⊖

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

ГФ 46-80

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ МУХИН

ИМЯ ДМИТРИЙ

ОТЧЕСТВО ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 08.11.2000

Класс: 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ГФ 46-80

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~1

$$12x+\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}=35 \qquad x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$$

новая переменная

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} => y^2=\frac{x^2}{x^2-1}, \text{ тогда } y^2(x^2-1)=x^2$$

$$x^2-1>0$$
$$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=x^2y^2 \\ x+y=\frac{35}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=x^2y^2 \\ x^2+y^2=\left(\frac{35}{12}\right)^2-2xy \end{cases}$$

$$\cancel{x^2y^2}\ (xy)^2+2xy-\left(\frac{35}{12}\right)^2=0$$

$$xy=t$$

$$t^2+2t-\left(\frac{35}{12}\right)^2=0$$

$$D=4+4\cdot\frac{35^2}{144}=\frac{144+1225}{36}=$$

$$=\frac{1369}{36}=\left(\frac{37}{6}\right)^2$$

$$t_{1,2}=\frac{-2\pm\frac{37}{6}}{2}=\frac{25}{12};-\frac{49}{12} \text{ - не уд.}$$

$$xy=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}>0 \qquad \begin{cases} xy=\frac{25}{12} \\ x+y=\frac{35}{12} \end{cases} <=> \begin{cases} 12xy=25 \\ 12x+12y=35 \end{cases}$$

$$12x+\frac{25}{x}-35=0$$

$$12x^2-35x+25=0$$

$$D=1225-1200=25$$

$$x_{1,2}=\frac{35\pm5}{24}=\frac{5}{4};\frac{5}{3} =>$$ нельзя однозначно определить прибыль компании => совет директоров не должен этому поверить

+

№2

примем за $O(x)$ остаток от деления x на 3, ~~Что~~ а m — за ~~[illegible]~~ запас газа в данном месяце, а за k — общее кол-во месяцев

~~$O($~~ 1) $O(k)=1$ $m=x$ 2) $O(k)=2$ $m=\frac{1}{1-x}$ 3) $O(k)=0$ $m=\frac{x-1}{x}$

Здесь можно выбрать 3 разных 2 подряд идущих месяца

Ⓘ ~~Q~~ $x=\frac{1}{1-x}$

$x^2-x+1=0$

$D<0$

Ⓘⓘ $\frac{1}{1-x}=\frac{x-1}{x}$

$-x=(x-1)^2$

$x^2-x+1=0$

$D<0$

Ⓘⓘⓘ $\frac{x-1}{x}=x$

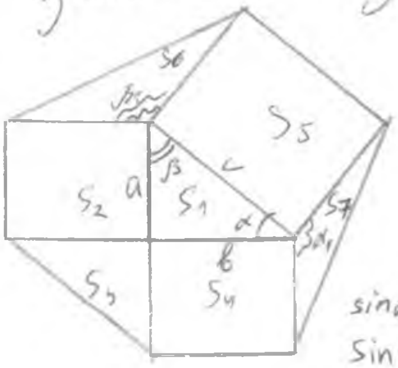
$x^2-x+1=0$

$D<0$

Ответ: нет таких двух месяцев, где запасы газа равны

НО будет ли полож-ным

№4



$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5+S_6+S_7$

$S_1=S_3=\frac{ab}{2}$ $\alpha_1=180-\alpha$ $\beta_1=170-\beta$ =>

$S_5=c^2$ $S_2=a^2$ $S_4=b^2$

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\sin\beta=\frac{b}{c}$ $\Rightarrow \sin\alpha=\sin\alpha_1$, $\sin\beta=\sin\beta_1$

$S_6=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{ab}{2}$

$S_7=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{ab}{2}$

$S=4\cdot\frac{ab}{2}+a^2+b^2+c^2=2(a^2+b^2+ab)$

$\frac{S}{S_1}=4\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)$

$\min\left(\frac{S}{S_1}\right)=\min\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4$

$a=kb$ $\min\left(\frac{S}{S_1}\right)=\min\left(k+\frac{1}{k}\right)$

$k>0$ $k+\frac{1}{k}\geq 2$ — неравенство Коши

$\Rightarrow \min\left(k+\frac{1}{k}\right)=2 \Rightarrow k+\frac{1}{k}=2$

$k^2-2k+1=0$

$\boxed{k=1}$

Ответ: $\frac{a}{b}=\frac{1}{1}$ $(a=b)$

+

№5

При выборе любой вершины есть 3 варианта выбрать ребро. При выборе ~~вд~~ любой вершины мал. параллепипедов (далее точки) есть $\frac{n(n-1)}{2}$ способов выбрать неупорядоченную пару точек ~~Перемножив~~ ~~Д~~ Чтобы получить кол-во способов по всем 3 направлениям нужно их перемножить для каждой из сторон ($\frac{a(a-1)}{2} \cdot \frac{b(b-1)}{2} \cdot \frac{c(c-1)}{2}$). Но 1 из способов будет равен исходному параллепипеду. (значит, надо вычесть 1)

а сколько точек?

Ответ: $\frac{abc(a-1)(b-1)(c-1)}{8}-1$ ±

№3

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0$$

Легко заметить, что данное ур-ние схоже с формулой Бинома Ньютона

$$(a\pm b)^n = a^n \pm n a^{n-1} b \mp \ldots \mp \frac{(-1)^n \cdot a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}$$

$\cdot b^k \pm b^n$

Тогда ур-ние примет вид

$(1-1)^n=0$ при $x \in Z$ и ~~$x \leq N$~~ $x<n$

Ответ: $x=1, 2, 3 \ldots n$ +

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

СЯ 97-12

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Никифоров

ИМЯ Алексей

ОТЧЕСТВО Владимирович

Дата рождения 19.11.1998

Класс: 11

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$S = \lg 10^4 + \lg(\text{tg } 2017°) + \lg 10^5 + \lg(\text{tg } 2018°) + \dots + \lg 10^{20} + \lg(\text{tg } 2033°) =$

$= 4 + 5 + \dots + 20 + \lg(\text{tg } \cancel{20}217°) + \lg(\text{tg } 218°) + \dots + \lg(\cancel{\text{tg}}\,\text{tg } 233°) = \cancel{200}$

$= 204 + \lg(\text{tg } 37°) + \lg(\text{tg } 38°) + \dots + \lg(\text{tg } 44°) + \lg(\text{tg } 45°) + \lg(\text{ctg } 44°) +$

$+ \lg(\text{ctg } 43°) + \dots + \lg(\text{ctg } 37°) = 204 + \lg(\text{tg } 37° \cdot \text{tg } 38° \cdot \dots \cdot \text{tg } 44° \cdot \text{tg } 45° \cdot \text{ctg } 44° \cdot \text{ctg } 43° \cdot$

$\cdot \dots \cdot \text{ctg } 37°) = 204 + \lg(\text{tg } 45°) = 204 + \lg 1 = 204 + 0 = 204$

Ответ: 204. +

№2

$x_0 = \frac{1}{3}c + d \quad (d \in R)$

x_n – запас газа в n-ном месяце

$x_1 = c - 2(\frac{1}{3}c + d) = \frac{1}{3}c - 2d$

$x_2 = c - 2(\frac{1}{3}c - 2d) = \frac{1}{3}c + 4d$

$x_3 = c - 2(\frac{1}{3}c + 4d) = \frac{1}{3}c - 8d$

$\vdots$

$x_n = \frac{1}{3}c + (-2)^n \cdot d$

⊕

(Докажем по индукции: база доказана выше. ~~Пер~~ Переход: $x_n = \frac{1}{3}c + (-2)^n \cdot d$

$x_{n+1} = c - 2(\frac{1}{3}c + (-2)^n d) = \frac{1}{3}c + (-2)^n d \cdot (-2) = \frac{1}{3}c + (-2)^{n+1} \cdot d$)

⇓

если $d \neq 0$, двух месяцев с одинаковым кол-вом газа не будет

Если $d = 0$, то $x_n = \frac{1}{3}c$

Ответ: $\frac{1}{3}c$

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GЯ 97-12

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$\sin nx - \sin x = 0 \qquad 2\sin\frac{nx-x}{2}\cos\frac{nx+x}{2} = 2\sin\left(\frac{n-1}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{n-1}{2}x\right)=0\\ \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)=0\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\frac{n-1}{2}x=\pi k\\ \frac{n+1}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}(n-1)x=2\pi k\\ (n+1)x=\pi+2\pi k\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi k}{n-1}\\ x=\frac{\pi+2\pi k}{n+1}\end{array}\right.$

$x \geq 0 \Rightarrow k \geq 0 \qquad x \leq \pi$

$\frac{2\pi k}{n-1} \leq \pi \qquad k \leq \frac{n-1}{2} \qquad (k \in Z;\ k \geq 0)$

⊕

$\frac{\pi+2\pi k}{n+1} \leq \pi \qquad k \leq \frac{n}{2} \qquad (k \in Z;\ k \geq 0)$

Но некоторые корни могут получаться из обоих уравнений

$\frac{2\pi k}{n-1} = \frac{\pi+2\pi k}{n+1}$

$2kn + 2k = n - 1 + 2nk - 2k$

$4k = n-1$

$k = \frac{n-1}{4} \qquad (k \in Z)$ уравнения имеют общий корень, только если $n-1 \equiv_4 0$, т. е. если $n \equiv_4 1$.

$S(n) = \begin{cases}\left[\frac{n}{2}\right]+1+\left[\frac{n-1}{2}\right]+1-1, & \text{если } n \equiv_4 1\\ \left[\frac{n}{2}\right]+1+\left[\frac{n-1}{2}\right]+1, & \text{если } n \not\equiv_4 1\end{cases}$ ($[x]$ - целая часть числа x)

$\left[\frac{n}{2}\right]+1+\left[\frac{n-1}{2}\right] = n$

$S(n) = \cancel{n+1}\begin{cases}n, & \text{если } n \equiv_4 1\\ n+1, & \text{если } n \not\equiv_4 1\end{cases}$

$S(n) = 2017$, если $\left[\begin{array}{l}n = 2016\\ n = 2017\end{array}\right.$, т. е. $S(n)$ принимает значение 2017 два раза.

Ответ: $S(n) = \begin{cases}n, & \text{если } n \equiv_4 1\\ n+1, & \text{если } n \not\equiv_4 1\end{cases}$; 2 раза.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GЯ 97-12

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$a^2+b^2+c^2=\frac{2a^2+2b^2+2c^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2}+\sqrt{b^2c^2}+\sqrt{c^2a^2}=ab+bc+ca$

$a^2+b^2+c^2=6abc$

~~$6abc\geq\sqrt{a^2b^2}+\sqrt{b^2c^2}+\sqrt{c^2a^2}$~~

$6abc\geq ab+bc+ca \quad | :abc$ ⊕

$6\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

$S=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ $\qquad S_0=a+b+c$

При фиксированных b и c ~~чем~~ чем больше S, тем больше $\frac{1}{a}$, чем больше $\frac{1}{a}$, тем меньше a, чем меньше a, тем меньше S_0.

$\Downarrow$

Берём максимальное S = 6.

~~$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=6$, $\frac{1}{a}=x$, $\frac{1}{b}=y$, $\frac{1}{c}=z$ $\quad S=x+y+z$~~

При фиксированном c, докажем что минимальная сумма a+b достигается при $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$.

; $\frac{1}{a}=x+y$; $\frac{1}{b}=x-y$.

$a+b=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}=\frac{2x}{x^2-y^2}\geq\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$ равенство достигается при $y=0$, т. е. при $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

$\Downarrow$

Аналогично можно доказать и про то, что $\frac{1}{a}=\frac{1}{c}$ и $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

$\Downarrow$

$a=b=c=\frac{1}{\frac{6}{3}}=0{,}5$

$S_0=0{,}5+0{,}5+0{,}5=1{,}5$

Ответ: 1,5

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

ЭФ 19-76

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ НИКИФОРОВА

ИМЯ ВАЛЕРИЯ

ОТЧЕСТВО ВИКТОРОВНА

Дата рождения 23.04.2002

Класс: 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ВНик

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭФ 19 - 76

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

всего – 120кг   найти кол-во приборов

3 самых лёгких – 31кг

3 самых тяжёлых – 41кг

Решение:

1) если было бы всего 6 приборов, то их общая масса равнялась бы 72 кг. Но у нас общая масса = 120кг. Не хватает 48кг.

2) Найдём: а) среднюю массу одного из самых лёгких приборов: $\frac{31}{3}=10\frac{1}{3}$ кг

б) среднюю массу одного из самых тяжёлых приборов: $\frac{41}{3}=13\frac{2}{3}$ кг

3) получим неравенство: $\frac{31}{3}<\frac{48}{x}<\frac{41}{3}$, где x – кол-во недостающих приборов. $10\frac{1}{3}<\frac{48}{x}<13\frac{2}{3}$

Отсюда $x\in N$

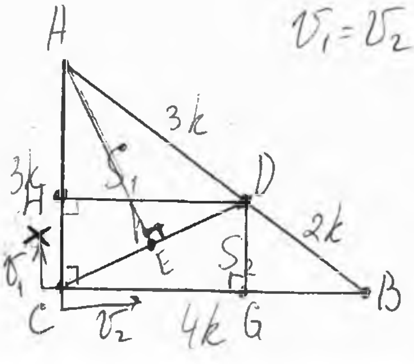
$$5>x>3.$$

$$x=4.$$

4) всего 3+4+3=10 приборов

Ответ: всего 10 приборов ⊕

№4



$v_1=v_2$ $AC=3k$; $BC=4k$; $t_1=t_2$

Решение:

1) Т.к. скорости братьев и их время одинаково, то они прошли одно и тоже расстояние y.

2) По т. Пифагора $AB^2=AC^2+BC^2$

сторонами 4k, 2k и h

5) Найдём $S_{\Delta ACD}$. $S_{\Delta ACD} = \frac{CD \cdot AE}{2}$ $S_{\Delta ACD} = \frac{h \cdot \sqrt{9k^2 - \frac{h^2}{4}}}{2}$

$$S_{\Delta CBD} = \frac{CB \cdot DG}{2} \quad S_{\Delta CBD} = \frac{4k \cdot \frac{6k}{5}}{2} = \frac{24k^2}{10} = 2,4k^2$$

4a) $DG = CH = \frac{6k}{5}$ (по т. Фалеса)

$\frac{3k}{3k-x} = \frac{2k}{x}$

$3kx = 6k^2 - 2kx$

$6k^2 = 5kx$

$6k = 5x$

$x = \frac{6k}{5}$

6) $S_{\Delta ACD} \vee S_{\Delta CBD}$ (сравнение)

$0,5h\sqrt{9k^2 - \frac{h^2}{4}} \vee 2,4k^2$

$0,25h^2(9k^2 - \frac{h^2}{4}) \vee 5,76k^4$

$2,25k^2h^2 - \frac{h^4}{16} \vee 5,76k^4$

b) Сущест[illegible]вует 1 прямоуг. треуг., у которого построенные данным образом треуг. равны (по S). Это прямоуг. треуг. с углами 45°, 45° и 90°.

⊕

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭФ 19-76

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

x – самое раннее время включения I насоса

10ч – время включ. II насоса

12ч – заполнен на $\frac{1}{2}$

14ч – заполнен на $\frac{2}{3}$

$v_{II} < v_{I}$, т.к. резервуар заполняется

Решение:

1) 14ч – 12ч = 2ч – заполнился на $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$ часть

2) тогда в 10ч был заполнен на $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$ часть

3) $(v_{I}-v_{II})\cdot 2ч=\frac{1}{6}$

$v_{I}-v_{II}=\frac{1}{12}$

$v_{I}=\frac{1}{12}+v_{II}$

4) Если бы $v_{II}=0$, то $v_{I}=\frac{1}{12}$. Тогда

$\frac{1}{3}-\frac{x}{12}=0$

x = 4ч – работал только I насос

10ч – 4ч = 6ч – был включён I насос

Ответ: в 6ч включили I насос

(+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭФ 19-76

№2

$A = x + \frac{1}{x} \qquad B_k = x^k + \frac{1}{x^k}$; $k = 2; 3; 4; 8$

а) 1) $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$B_2 = A^2 - 2$

2) $B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$A^3 = (x + \frac{1}{x})^3$

$A^3 - 3A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$B_3 = A^3 - 3A$

3) $B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4}$ $\qquad A^4 = x^4 + 2x^2 + 1 + 2x^2 + 4 + \frac{2}{x^2} + 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

$A^4 = (x + \frac{1}{x})^4$

$A^4 - 4A^2 - 8 - 6 = x^4 + \frac{1}{x^4}$

$A^4 - 4A^2 - 14 = B_4$

4) Найдём B_6, т.е. найдём $x^6 + \frac{1}{x^6}$ через A (это понадобится для B_8)

$B_6 = x^6 + \frac{1}{x^6}$ $\qquad A^6 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 + 3x^4 + 9x^2 + 9 + \frac{3}{x^2} +$

$A^6 = (x + \frac{1}{x})^6$ $\qquad + 3x^2 + 9 + \frac{9}{x^2} + \frac{3}{x^4} + 1 + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^6}.$

$B_6 = A^6 - 6A^4 + 9A^2 + 34$

5) $B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8}$

(+)

$A^8 = (x + \frac{1}{x})^8$

$A^8 = x^8 + 4x^6 + 4x^2 + 1 + 6x^4 + 4x^6 + 16x^4 + 16 + \frac{4}{x^2} + 24x^2 + 4x^2 + 16 +$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

ЭФ 19-89

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ ОВДЕНКО

ИМЯ АННА

ОТЧЕСТВО МАКСИМОВНА

Дата рождения 04. 01. 2002

Класс: 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11. 02. 2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases} 1+x+y=xy & ① \\ 2+y+z=yz & ② \\ 5+z+x=zx & ③ \end{cases}$$

Решение. Вычтем ③ - ②. Получим: $5+z+x-2-y-z=zx-yz \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3+x-y=z(x-y) \Rightarrow z=\frac{3+x-y}{x-y}$. Подставим в ②, получим

$$\begin{cases} 2+y+\frac{3+x-y}{x-y}=\frac{y(3+x-y)}{x-y} \\ x-y\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2x-2y+xy-y^2+3+x-y}{x-y}=\frac{3y+yx-y^2}{x-y} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3x-3y+3+xy-y^2=3y+xy-y^2 \Rightarrow 3x+3=6y \Leftrightarrow x+1=2y.$

Подставим в ①, получим: $2y+y=xy \Leftrightarrow 3y=xy \Leftrightarrow 3y-xy=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(3-x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=0 \quad ④ \\ 3-x=0 \Rightarrow x=3 \quad ⑤ \end{array}\right.$

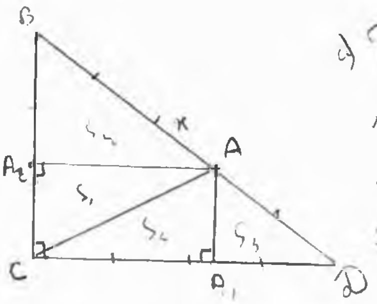
④ $1+x+0=0 \Rightarrow x_1=-1$; $2+0+z=0 \Rightarrow z_1=-2$.

⑤ $4+y=3y \Leftrightarrow 4=2y \Rightarrow y_2=2$; $4+z=2z \Rightarrow 4=z_2$.

Ответ: $(-1;0,-2);(3;2;4)$.

+

№4



a) Пусть гипотенуза прямоуг. треугольника - x. По теореме Пифагора $x^2=3^2+4^2 \Leftrightarrow x^2=25 \Rightarrow x=5$ (длина не может быть отрицательным числом). Т.е. x состоит из 5 частей. Оба брата проходят каждую часть за одинаковое время, тогда они встретятся в точке A. Получаются треугольники, как на рисунке. Проведем высоты AA_1 и AA_2 к катетам CD и BC соответственно. Получится четырехугольник AA_1CA_2, который является прямоугольником, т.к. 3 угла прямые. Тогда AC - диагональ, которая делит AA_1CA_2 пополам, т.е. $\triangle CA_2A=\triangle AA_1C$. Следовательно,

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

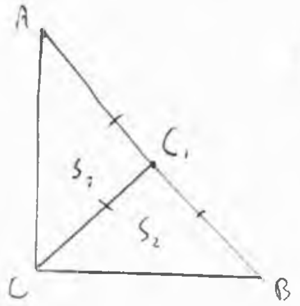
Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭФ 19-89

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Рассмотрим △ A_2AB и △ A_1AD. Очевидно, что они не равны, тогда $S_4 \neq S_3$ и у братьев не получились одинаковые части.

б)



Теперь рассмотрим другой прямоугольный треугольник ABC. Чтобы $S_1 = S_2$ из точки C проведем медиану CC_1. C_1 ~~которая~~ будет местом встречи. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная из прямого угла равна $\frac{1}{2}AB$, ⇒ △ AC_1C = △ BC_1C, тогда $AC=CB$. Тогда отношения катетов равно $\frac{1}{1}$ и таких прямоугольных треугольников N (при равенстве двух катетов).

№ 5.

Из условия, что в 12 ч резервуар был заполнен наполовину, а в 14 ч. на $\frac{2}{3}$ ⇒ за два часа он заполнился на $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4-3}{6}=\frac{1}{6}$. Тогда ~~от~~ скорость заполнения составила $\frac{1}{6}:2=\frac{1}{12}\frac{р}{ч}$. Значит с 10 ч до 12 ч он заполнился на $\frac{1}{6}$ и до 10 ч. он заполнился на $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{3-1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ резервуара. Скорости заполнения и откачивания отличаются на $\frac{1}{12}$, следовательно, максимальная скорость заполнения больше $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\frac{р}{ч}$. Тогда $\frac{1}{3}$ бака заполнится за $\frac{1}{3}:\frac{1}{6}=2$ часа и первый насос был включен в $10-2=8$ часов утра ?!

Ответ: в 8 часов утра

∓

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭФ 19-89

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что написано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

Т.к. масса легких - 31 кг, а тяжелых 41, то масса „средних ~~грузов~~ приборов" 120 - 41 - 31 = 48 кг. 48 кг - не масса 3 ~~грузов~~ приборов, иначе бы она была самой тяжелой. Масса самого тяжелого из 3 легких ~~грузов~~ приборов не превышает 12 кг. Допустим что „средних приборов" 5, тогда $\frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$ - средняя масса, значит хотя бы один из приборов весит менее 12 кг. Но это невозможно, т.к. легкие приборы весят менее 12 кг. Тогда „средних приборов" меньше 5 но более 3. Значит их 4. Тогда средняя масса равна 12, т.е. масса каждого примерно равна 12, что возможно.

±

Всего приборов: 3 + 3 + 4 = 10

Ответ: 10.

№ 2

а) 1) $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $A^2 = (x + \frac{1}{x})^2 \Leftrightarrow A^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow B_2 = A^2 - 2$

2) $B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3}$; $A^3 = (x + \frac{1}{x})^3 \Leftrightarrow A^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow A^3 = B_3 + 3(x + \frac{1}{x}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A^3 = B_3 + 3A \Rightarrow B_3 = A^3 - 3A$

3) $B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4}$; $A^4 = (x + \frac{1}{x})^4 \Leftrightarrow A^4 = x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B_4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x}$. Заметим, что $(2x + \frac{2}{x})^2 =$

$= 4x^2 + 8 + \frac{4}{x^2}$, но и $(2x + \frac{2}{x})^2 = (2A)^2 = 4A^2$. Подставив, получим

$A^4 = B_4 + 4A^2 - 2 \Rightarrow B_4 = A^4 - 4A^2 + 2$.

$B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8}$. Из предыдущих пунктов ~~[illegible]~~: $B_8 = A^8_{\textcircled{8}} - 16A^4 + 2$.

Это треугольник Паскаля

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

б) Это равенство выполняется при $A = 2, x = 1$: $4 - 2 = 2$, $16 - 16 + 2 = 2$, $256 - 256 + 2 = 2$., также при $A = -2; x = -1$

(+)

Ответ: при $x = 1$, $A = 2$; $x = -1$; $A = -2$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

КУ 13-70

шифр

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Осипов

ИМЯ Антон

ОТЧЕСТВО Андреевич

Дата рождения 14.04.2000

Класс: 10

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 6 **листах**

Дата выполнения работы: 11.2.2017
(число, месяц, год)

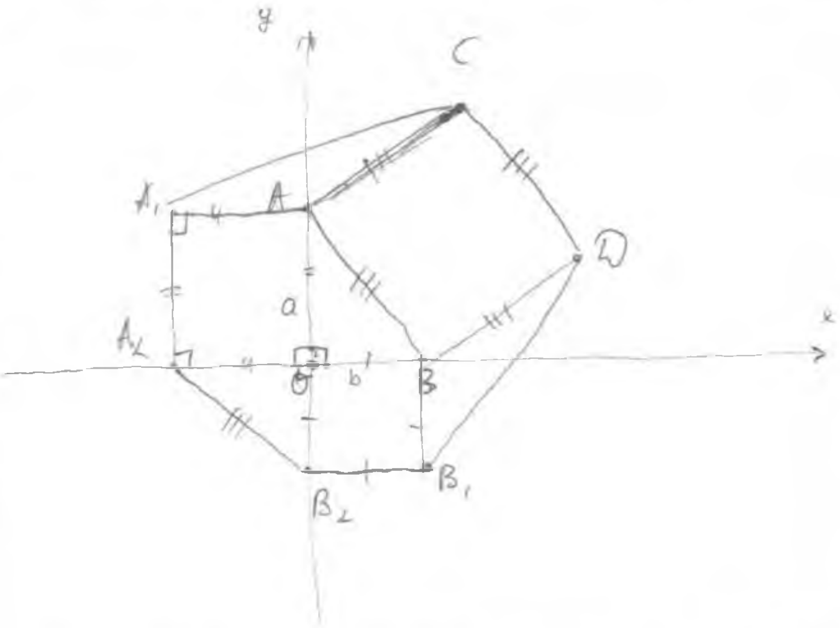
Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4

Решение: Для простоты объяснений назовем вершины и поместим дом в координатную плоскость.



Пусть ΔAOB - ~~[illegible]~~ изначальный план дома и $\angle O$ прямой.

Найдем площадь нового дома $A_1A_2B_2B_1DC$

Складывается из:

(+.)

1) $S_{AOB} = S_{A_2OB_2} = \frac{ab}{2}$

2) $S_{AA_1A_2O} = a^2$

3) $S_{BB_1B_2O} = b^2$

4) $S_{ABDC} = (AB)^2 = a^2+b^2$

5) S_{A_1AC}. Найдем его площадь. $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(b; -a)$

$\overrightarrow{AC}$ перпендикулярен ему и имеет координаты $(a; b)$. Значит высота треугольника A_1AC проведенная из вершины C равна b и $S_{A_1AC} = \frac{ab}{2}$.

6) Аналогично п. 5 $S_{B_1BD} = \frac{ab}{2}$

То есть

$$S_{A_1A_2B_2B_1DC} = S_{AOB} + S_{A_2OB_2} + S_{AA_1A_2O} + S_{BB_1B_2O} + S_{ABDC} + S_{A_1AC} + S_{B_1B_2D} = 2(a^2+b^2+ab)$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Теперь найдем отношение новой площади дома к изначальной

$$\frac{S_{A_1A_2B_2B_1DC}}{S_{AOB}} = \frac{2\cdot 2\,(a^2+b^2+ab)}{ab} = 4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)$$

Пусть $k=\frac{a}{b}$; Известно, что $k+\frac{1}{k}\geqslant 2$ при $k>0$

Тогда $\frac{S_{A_1A_2B_2B_1DC}}{S_{AOB}} = 4\left(k+\frac{1}{k}+1\right)\geqslant 4\cdot(2+1)=12$

Наименьшее значение отношения площади нового дома к площади старого достигается при $k=1$ или $a=b$.

Ответ: площадь нового дома равна $2(a^2+b^2+ab)$; при $a=b$

Задание 2 Решение:

1) Пусть в какой-то месяц запас равен x

2) В следующий месяц запас будет равен $\frac{1}{1-x}$

3) В третий месяц запас будет равен

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$$

4) В четвертый месяц запас будет равен

$$\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = x.$$

То есть каждые 3 месяца значение будет повторяться

$x;\ \frac{1}{1-x};\ \frac{x-1}{x};\ x \ldots$ и т.д.

Однако, по условию, запас всегда положителен то есть

$$\begin{cases} x>0 \\ \frac{1}{1-x}>0 \\ \frac{x-1}{x}>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ \frac{x-1}{x}>0 \end{array}\right\} \to x-1>0 \Rightarrow x>1$$

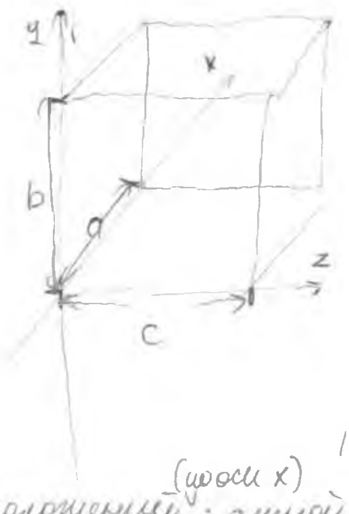
$x>1 \Rightarrow 1-x<0$

$\frac{1}{1-x}>0$ Противоречие.

Значит, запас газа не может оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца.

Задание 5

Решение: ~~по оси x можно выделить групп~~ ~~рассмотрим~~ можно выделить группы параллелепипедов в зависимости от их расположения на осях x, y и Z.



1) По оси X параллелепипеды могут иметь длину от 1 до a. При этом параллелепипеды длиной 1 по оси x могут занимать a различных положений (по оси x); длиной 2 —(a-1) различных положений ... длиной a только одно. То есть ~~всего~~ параллелепипеды можно поделить на $a+a-1+a-2+\ldots+3+2+1=\frac{a(a+1)}{2}$ групп.

2) Аналогично с осями y и z

3) Таким образом получаем следующее:

выделяя параллелепипед мы выбираем одно из $\frac{a(a+1)}{2}$ положений по оси x; одно из $\frac{b(b+1)}{2}$ положений по оси y и одно из $\frac{c(c+1)}{2}$ положений по оси z ⊕

Вычтем один параллелепипед со сторонами a, b и c и получим ответ: $\frac{abc(a+1)(b+1)(c+1)}{8} - 1$

Задание 3: Решение: решим, используя ММИ

~~Пусть $n=1$~~

~~Тогда получаем простейшее уравнение~~

~~$1+x$~~ ~~$1-x=0$~~

~~$x=1$~~

~~Далее пусть $n=2$~~

~~Первый корень ($x=1$) подходит этому уравнению, т.к. $\frac{x(x-1)}{2\cdot 1}=0$ при $x=1$ и мы получаем уравнение, аналогичное первому. Далее, в любом случае $x=1$ — подходящий корень, так как в любом слагаемом, где знаменатель больше 1 в числителе есть $(x-1)$, это слагаемое равно 0 при $x=1$ и снова получаем уравнение $1-x=0$.~~

~~Вторым корнем~~

Пусть

Докажем, что исходное уравнение имеет те же корни, что и

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{n!}=0$$

⑦

1) $n=1$

$1-x=0$ те же корни, что и $\frac{x-1}{1}=0$

2) $n=k+1$

$$-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-k)}{k!}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-k)}{(k+1)!}=\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-k)}{(k+1)!}$$

Пусть $n=2$

$$1-x+\frac{x(x-1)}{2!}=0$$

$$\frac{x(x-1)}{2!}-(x-1)=0$$

$$\frac{x(x-1)-2(x-1)}{2!}=0$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2!}=0$$

Пусть $n=3$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}=$$

$$\frac{3(x-1)(x-2)-x(x-1)(x-2)}{3!}=$$

$$=-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}$$

Пусть $n=4$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}-\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4!}$$

То есть исходное уравнение по модулю равно модулю (?)

$\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}$. Исходное уравнение имеет корни

$$\begin{cases} x \le n \\ x \in N \end{cases}$$

Задание 1: Ответ: нет

$$12x+\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}=35$$

$$12x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=35;\quad 12\cdot x\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

Левая часть имеет число 12, делящееся на 3

35 на 3 не делится, значит $\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{\sqrt{x^2-1}}$ – дробь, со знаменателем, кратным 3 (1), либо x – дробь, со знаменателем, кратным 3. (2)

x – конечное десятичное число (т.к. прибыль не может измеряться ~~нецелым~~ неконечным числом рублей). Значит,

$\frac{x}{3}$ вариант (2) не подходит.

$\sqrt{x^2-1} \vdots 3$, или $x^2-1=9k^2$ $(k\in N)$

$x^2=9k^2+1$, $x=\sqrt{9k^2+1}$. Снова получаем иррациональное неподходящее число.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ Москва

Место проведения

ZP 69-99

шифр

← **Не заполнять** **Заполняется ответственным работником**

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Перчук

ИМЯ Варвара

ОТЧЕСТВО Александровна

Дата рождения 17.12.1999 **Класс:** 11

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017.

(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ZP 69-94

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1 $S = \lg(10^4\,\mathrm{tg}\,2017^\circ) + \lg(10^5\,\mathrm{tg}\,2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20}\,\mathrm{tg}\,2033^\circ) =$

$= \lg 10^4 + \lg(\mathrm{tg}\,2017^\circ) + \lg 10^5 + \lg(2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20}) + \lg(\mathrm{tg}\,2033^\circ) =$

$= 4 + \lg(\mathrm{tg}\,2017^\circ) + 5 + \lg(2018^\circ) + \ldots + 20 + \lg(\mathrm{tg}\,2033^\circ)$

Т.к. $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + 2\pi k)$, то

$= 4 + \lg(\mathrm{tg}\,217^\circ) + 5 + \lg(\mathrm{tg}\,218^\circ) + \ldots + 20 + \lg(\mathrm{tg}\,233^\circ)$

Т.к. $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\pi + \alpha)$, то

$= 4 + \lg(\mathrm{tg}\,37^\circ) + 5 + \lg(38^\circ) + \ldots + 20 + \lg(\overset{\mathrm{tg}}{}53^\circ)$

Заметим, что сумма крайних аргументов у tg $= 90$

$\left(\lg(\mathrm{tg}\,37^\circ) \xleftrightarrow{u} \lg(\mathrm{tg}\,53^\circ)\right)$

$\lg(\mathrm{tg}\,38^\circ) \xleftrightarrow{u} \lg(\mathrm{tg}\,52^\circ)$ /

Посмотрим, чему равно выражение: $\lg(\mathrm{tg}\,\alpha) + \lg(\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)) =$

$= \lg(\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}(90^\circ - \alpha)) = \lg\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \lg(1) = 0.$

$\Rightarrow$ нам осталось посчитать только $4 + 5 + \ldots + 20$ (т.к. остальные выражения (суммы крайних логарифмов) равны нулю)

$4 + 5 + \ldots + 20 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 20) - (1 + 2 + 3) = \frac{21 \cdot 20}{2} - 6 = 204$

Ответ 204.

+

Задача 2 ~~Начнем выписывать цепочку из запасов ежемесячно~~

~~$x \longrightarrow c - 2x \longrightarrow c - 2(c - 2x) \longrightarrow c - 2(c - 2(c - 2x)) \longrightarrow \ldots$~~

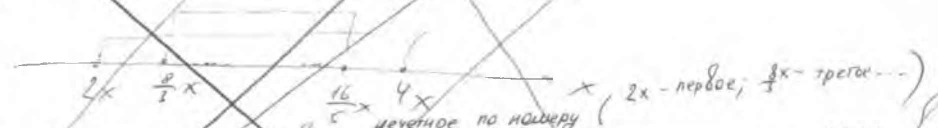
~~$= \; x \to c - 2x \longrightarrow -c + 4x \longrightarrow 3c - 8x \longrightarrow -5c + 16x \ldots$~~

~~А теперь вспомним, что запас всегда неотрицателен. $\Rightarrow$~~

~~$x \geq 0;\; c - 2x \geq 0;\; 4x - c \geq 0;\; 3c - 8x \geq 0;\; -5c + 16x \geq 0 \ldots$~~

~~$\Rightarrow \; c \geq 2x;\; c \leq 4x;\; c \geq \frac{8}{3}x;\; c \leq \frac{16}{5}x \ldots$~~

~~Обозначим это на оси Ox~~



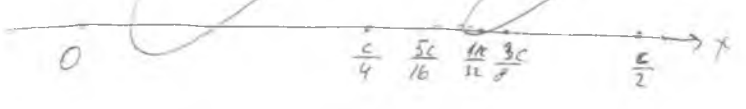
~~(2x - первое; $\frac{8}{3}$x - третье ...)~~

~~Покажем, что каждое ~~второе число~~ нечетное по номеру приближается к точн. верхн. грани посл-ти, а каждое четное (4x - второе, $\frac{16}{5}$x - четвертое) — к точной нижней грани посл-ти возможных c.~~

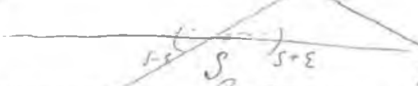
~~У последовательности есть предел, т.е. то c, которое удовлетворяет всем ОДЗ. И это $\frac{2x + 4x}{2} = 3x$.~~

$x \geq 0;\; x \leq \frac{c}{2};\; x \geq \frac{c}{4};\; x \leq \frac{3}{8}c;\; x \geq \frac{5}{16}c;\; x \leq \frac{11}{32}c \ldots$

Обозначим это на оси Ox



~~Видим, что с каждым новым ограничением икса его ОДЗ уменьшается. Так что утверждаю, что запас газа не может быть одинаковым в разные месяцы. Пусть может. Обозначим его за S. Но тогда найдется~~



~~такая ε-окрестность, ~~в которую~~ в которой не попадает под ОДЗ (т.к. посл-ть подходящих иксов имеет предел)~~

~~Ответ: не может.~~

Задача 4 $a^2+b^2+c^2 = 6abc$

По неравенству о среднем ~~ариф~~ арифм и среднем геом

⊗

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{6abc}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^2}$$

$$\cancel{27}\ 8(abc)^3 \geq (abc)^2$$

$$8abc \geq 1$$

$$abc \geq \frac{1}{8}$$

т.к. $a>0$, $b>0$, $c>0$, то мы можем и возв. в куб без потери корней, и делать это

Запишем еще одно нер-во о среднем:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

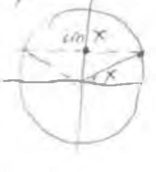
$$a+b+c \geq \frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

Задача 5

Посмотрим на тригонометр окр-ность.

[illegible]



⊗

$\sin nx = \sin x$, если:

$$\left[\begin{array}{ll} nx = x + 2\pi k \quad (1), & k \in \mathbb{Z} \\ nx = \pi - x + 2\pi m, & m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Рассмотрим (1). $nx = x + 2\pi k$; $x(n-1) = 2\pi k$; $x = \frac{2\pi k}{n-1}$.

$0 < \frac{2\pi k}{n-1} < \pi \Rightarrow 0 < k < \frac{n-1}{2}$. ~~Р~~ Посмотрим, что происходит при разных n. $n=2 \to 0$ реш; $n=3 \to 0$ реш; $n=4 \to 1$ реш; $n=5 \to 1$ реш; $n=6 \to 2$ реш; $n=7 \to 2$ реш, $n=8 \to 3$ реш, $n=9 \to 3$ реш.

$\Longrightarrow$ Кол-во решений выражается так: $\frac{n - n \bmod 2}{2} - 1$.

(Это верно, т.к. кол-во сохраняется два числа подряд, $\Rightarrow$ из нечетных n надо вычесть 1, чтоб делилось нацело, а из четных не надо)

А вычитаем 1 в конце, т.к. при $n=2$ 0 решений, а не 1.

Теперь разбираемся с кол-вом решений у $nx = \pi - x + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$

$x(n+1) = \pi + 2\pi m$; $x = \frac{\pi + 2\pi m}{n+1}$

Нам надо найти такое m, при котором мы вернемся к такому же X (ну не к такому же, а к $X + 2\pi \ell$, где $\ell \in \mathbb{Z}$)

$\frac{\pi + 2\pi m}{n+1} = x + 2\pi$ (мин. совпадение достигается при $\ell = 1$)

$\pi + 2\pi m = (x+2\pi)(n+1)$

$\pi + 2\pi m = xn + x + 2\pi n + 2\pi$

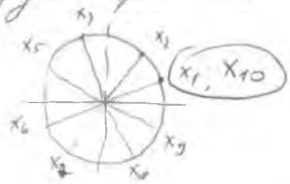
$2\pi m = xn + x + \pi + 2\pi n$

$m = \frac{xn + x + \pi + 2\pi n}{2\pi}$, Причем $x_1 = \frac{\pi}{n+1}$ (он первый, т.к. $m = 0$)

Подставим это.

$$m = \frac{\frac{\pi n}{n+1} + \frac{\pi}{n+1} + \pi + 2\pi n}{2\pi} = n+1.$$

Значит, первое совпадение будет при $m = n+1$. Что такое совпадение? Посмотрим на круг:



Это случай, когда значения синусов x_n и x_k совпадают.

Итак, значит у нас $(n+1)$ разных решений на ~~интер~~ $[0; 2\pi]$

Причем для четных n на отрезке $[0; \pi]$ решений будет $\frac{n+2}{2}$, а на $[\pi; 2\pi]$ $n+1 - \frac{n+2}{2} = \frac{n}{2}$.

А для нечетных n на отрезке $[0; \pi]$ и на отрезке $[\pi; 2\pi]$ решений будет одинаковое кол-во: по $\frac{n+1}{2}$ на каждом.

Поэтому в общем виде кол-во решений на $[0; \pi]$ запишется так: $\frac{n+1}{2} + \frac{(n+1) \bmod 2}{2}$. Еще мы забыли, что $x = \frac{\pi + 2\pi m}{n+1} \neq \pi \Rightarrow m \neq \frac{n}{2}$. (значит, для четных n надо вычесть еще 1)

Значит, всего решений: $\frac{n+1}{2} + \frac{(n+1) \bmod 2}{2} + \frac{n}{2} - \frac{n \bmod 2}{2} - 1^{-(n+1) \bmod 2} =$

$= \frac{2n-1}{2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} - (n+1) \bmod 2$ (т.к. при нечетных n разность $\frac{(n+1) \bmod 2}{2} - \frac{n \bmod 2}{2}$ равна $-\frac{1}{2}$, а при четных $\frac{1}{2}$.)

~~Ответ $\frac{2n-1}{2} + \frac{(-1)^n}{2}$, и ⇒ 2017 принимает значение [illegible] так как если n-четное, то $\frac{2n}{2}$ [illegible] 2017, противоречие. Если n-нечетное то $\frac{2n-2}{2}$ [illegible] $n = 2018$~~

а $(-1)^n \cdot \frac{1}{2} - (n+1) \bmod 2 = -\frac{1}{2}$ (т.к. при четных n и при нечетных это верно)

Ответ: $\frac{2n-1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{n-1}$ и значит $S(n) = 2017$ только при $n = 2018$.

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ZP 69-94

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

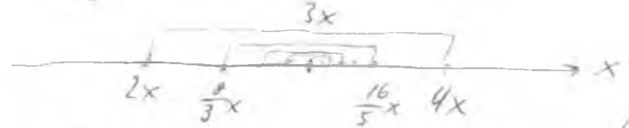
Задача 2 Начнем выписывать цепочку из ежемесячных запасов $x \to c-2x \to c-2(c-2x) \to c-2(c-2(c-2x))$ ...

$x \to c-2x \to -c+4x \to 3c-8x \to -5c+16x$

А теперь вспомним, что запас всегда неотрицателен.

$\Rightarrow \underbrace{c \ge 2x}_{\text{1ое усл д/ ОДЗ}};\ \underbrace{c \le 4x}_{\text{2ое усл д/ ОДЗ}};\ c \ge \frac{8}{3}x;\ c \le \frac{16}{5}x$ ...

Обозначим это на оси Ox



Видим, что наша последовательность вложенных отрезков (где левый конец X_i-ое условие для ОДЗ, а правый конец X_{i+1}-ое условие для ОДЗ) сходится. Т.е. ее длина $\to 0$, а $\Rightarrow$ у нее есть предел. В данном случае $c \to 3x$.

$\Rightarrow$ при $c = 3x$ ОДЗ выполняется всегда!

Тогда $x = \frac{c}{3}$.

И значение запаса одинаково для двух разных месяцев, равно $\frac{c}{3}$. Причем в этом случае ~~каждый~~ месяц запас будет одинаковый. Если такое допустимо (что запас всегда одинаков), то ответ $\frac{c}{3}$, а если недопустимо, то ответ "нет, не может".

Ответ: $\frac{c}{3}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

№ группы	Место проведения
	КГЭУ

шифр: SG 28-21

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Петрова

ИМЯ Анна

ОТЧЕСТВО Алексеевна

Дата рождения 25.03.2001

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

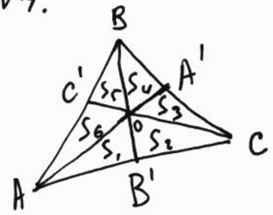
Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Петра

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



+

Допустим мы уже нашли такую точку O, тогда обозначим ~~площади треугольников продолжение отрезков~~ пересечение прямых AO; ~~A~~BO; CO со сторонами треугольника как A'; B'; C' ~~соотв~~ соответственно и ~~пр~~ площади треугольников AB'O; CB'O; COA'; BOA'; BOC'; AOC', как $S_1; S_2; \dots; S_6$ соответственно.

$$\frac{S_{ABB'}}{S_{CBB'}} = \frac{S_{AOB}}{S_{COB}} = \frac{AB'}{CB'}$$ (Высота совп., а осн. AB' и CB')

Допустим $\frac{AB'}{CB'} = k$, тогда $S_5 + S_6 + S_1 = k(S_4 + S_3 + S_2)$ $\left(\frac{S_{ABB'}}{S_{CBB'}} = k\right)$ и

$$S_1 = kS_2 \quad \left(\frac{S_{AOB}}{S_{COB}} = k\right)$$

$$S_5 + S_6 + S_1 = k(S_4 + S_3) + kS_2$$

$$S_5 + S_6 = k(S_4 + S_3)$$

$$k = \frac{S_5 + S_6}{S_4 + S_3} = \frac{S_{ABO}}{S_{BCO}} = \frac{1}{2}$$ (условие)

Значит $CB' = 2AB'$. Аналогично получаем $3BA' = A'C$.

Найдя такие точки в исходном треугольнике и соединив их с соответствующими вершинами, получим на пересечении получившихся отрезков точку O.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=0$$

$24-24x+12x(x-1)-4x(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$

$(x-1)^2(x-2)(x-6)=0$

$x\in\{1;2;6\}$

Ответ: $x\in\{1;2;6\}$.

∓

№2.

([illegible]; $0<x<6$)

1-й месяц – x м³

2-й месяц – $6-x$ м³

3-й месяц – $6-(6-x)$ м³ $= x$ м³

⋮

значит может быть $x^2=6-x$; $(6-x)^2=x$; $(6-x)^2=6-x$; $x^2=x$

1) $x^2=6-x$

$x^2+x-6=0$

$(x-2)(x+3)=0$

$0<x<6$

$x=2$

$6-x=4$

2) $(6-x)^2=x$

$x^2-13x+36=0$

$(x-4)(x-9)=0$

$0<x<6$

$x=4$

$6-x=2$

3) $(6-x)^2=6-x$

$6-x\neq0$

$6-x=1$

$x=5$

4) $x^2=x$

$x\neq0$

$x=1$

$6-x=5$

потеря корня!

±

Если это были месяцы с номерами разной чётности, то будет случай 1 или 2, и запас будет равен 2 м³ (его квадрат – 4 = 6-2). Если это были месяцы с номерами одной чётности, то запас будет равен 1 м³ (и случай 3 или 4).

неверный вывод!

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$f(x) = x^2 + px + q$

$p^2 - 4q = 100$

$f(x-10) = x^2 + (p \overset{-}{+} 20)x + (q \overset{-}{+} 10p + 100)$

±

$f(x) + f(x-10) = 0$

$2x^2 + 2(p \overset{-}{+} 10)x + 2(q \overset{-}{+} 5p + 50) = 0$

$x^2 + (p \overset{-}{+} 10)x + (q \overset{-}{+} 5p + 50) = 0$

$D = (p \overset{-}{+} 10)^2 - 4(q \overset{-}{+} 5p + 50) = p^2 \underline{\overset{-}{+}20p} + 100 - 4q \overset{+}{\cancel{+}}\underline{-20p} - 200 =$

$= (p^2 - 4q) - 100 = 0$

Ответ: 1 корень.

№1.

$A = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

а) $B_2 = A^2 - 2$

$B_3 = A(A^2 - 2)$

$B_4 = A^4 - 4A^2 + 2$

$B_8 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 2$

} ?

б) $B_2 = B_4 \Rightarrow A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2$

$A^4 - 5A^2 + 4 = 0$

$A^2 = y$

±

$y^2 - 5y + 4 = 0$

$(y-1)(y-4) = 0$

$y \in \{1; 4\}$

1) $A^2 = 1$ 2) $A^2 = 4$

$A = \pm 1$ $A = \pm 2$

~~Ответ~~ $x^2 \pm x + 1 = 0$

$D = 1 - 4 = -3$

$x \notin \varnothing$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = -1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

$x = 1$

$\boxed{\text{Ответ: } x = \pm 1}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

с) Хотя бы одно действие у нас будет (иначе было бы такое равенство $(B_2 = X)$, а оно явно не верно), также у нас есть возведение в степень и сложение, их мы убрать так же не можем, но 2 операции мы можем получить, если $x^2 = 1$, то $\frac{1}{x^2}$, то есть $\frac{1}{1}$ - это не операция, значит после первой будет $1+1$, или всего 2 операции.

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$x_1 = 1$ $\qquad$ $x_2 = -1$

$A_1 = 2$ $\qquad$ $A_2 = -2$

$C_1 = ((2) \cdot \frac{1}{2})^{2017} = 1$ $\qquad$ $C_2 = ((-2) \cdot \frac{1}{2})^{2017} = -1$

Ответ: $C = \pm 1$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ГХ

Место проведения

ЦХ 71-93

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Печников

ИМЯ Дмитрий

ОТЧЕСТВО Викторович

Дата рождения 27.03.2003

Класс: 8

Предмет математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

выдан доп. лист №1
Назар

Задача 1

1) Вычтем из первого равенства второе и выразим y

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \end{cases} \Rightarrow 1+x+y-2-y-z=xy-yz \Rightarrow x-z-1=y(x-z) \Rightarrow -1=y(x-z)-(x-z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1=(y-1)(x-z) \Rightarrow y-1=\frac{-1}{x-z} \quad y=1-\frac{1}{x-z} \quad y=\frac{x-z-1}{x-z}$$ Пусть $x-z-1=a$, тогда

2) $1+x+\frac{a}{a+1}=\frac{xa}{a+1}$

$1+x=\frac{xa}{a+1}-\frac{a}{a+1}$

$1+x=\frac{xa-a}{a+1}$

$xa+x+a+1=xa-a$

$2a+x+1=0$

$2(x-z-1)+x+1=0$

$3x-2z-2+1=0$

$3x=2z+1$

$x=\frac{2z+1}{3}$

3) Подставим в третье равенство вместо x $\frac{2z+1}{3}$

$5+z+\frac{2z+1}{3}=\frac{z(2z+1)}{3} \quad |\cdot 3$

$15+3z+2z+1=z(2z+1)$

$16+5z=2z^2+z$

$2z^2-4z-16=0$

$z^2-2z-8=0$ по т Виета.

$$\begin{cases} z_1+z_2=2 \\ z_1\cdot z_2=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=4 \\ z_2=-2 \end{cases}$$

4) $x_1=\frac{2z_1+1}{3}=\frac{4\cdot 2+1}{3}=3$, $x_2=\frac{2z_2+1}{3}=\frac{-2\cdot 2+1}{3}=-1$.

5) $y_1=\frac{x_1-z_1-1}{x_1-z_1}=\frac{3-4-1}{-1}=2$; $y_2=\frac{x_2-z_2-1}{x_2-z_2}=\frac{-1+2-1}{\cancel{+3}2}=\cancel{-2}\ 0$

Ответ: $x_1=3$, $y_1=2$, $z_1=4$ или $x_2=-1$, $y_2=0$, $z_2=-2$

$\boxed{+}$

Задача 2. в

Найдем при каких x $B_2=B_4$

$x^3+\frac{1}{x^3}=x^2+\frac{1}{x^2}$ ОЗ $(x\neq 0)$

$\frac{x^9+1}{x^3}=\frac{x^4+1}{x^2} \quad |\cdot x^3$

$x^9+1=x^5+x$

$x^9-x^5-x+1=0$

$x^5(x^4-1)-(x-1)=0$

$(x-1)(x^5(x+1)(x^2+1)-1)=0$

$x-1=0$ или $x^5(x+1)(x^2+1)-1=0$

$(x^6+x^5)(x^2+1)-1=0$

$x^8+x^7+x^6+x^5-1=0$

Так как $X \neq 0$, то $X<0$ или $X>0$ Если $X>0$, то $X^8+X^7+X^6+X^5 \geq 4$ точно и равенство неверное Если $X<0$, то $X^8 \geq |X^7| \geq 1$ и $X^6 \geq -X^5 \geq 1$ значит $x^8-x^7+x^6-x^5 \geq 2$ тоже неверно. Значит $B_2 = B_4$ только при $x=1$

Значит и равенство $B_2 = B_4 = B_8$ может быть равно только при единице. что удовлетворяет условию $B_x = 1^k + \frac{1}{1^k} = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$B_2 = B_4 = B_6 = 2.$

$A = 1^k + \frac{1}{1^k} = 2.$

При $A = 2$ и $X = 1$ выполняется равенство $B_2 = B_4 = B_8$

Задача 2 а

$A = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$; $B_2 = \frac{x^4+1}{x^2}$, $B_3 = \frac{x^9+1}{x^3}$, $B_4 = \frac{x^{16}+1}{x^4}$, $B_8 = \frac{x^{64}+1}{x^8}$

$$\frac{B_2}{A} = \frac{\frac{x^4+1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}} \Rightarrow B_2 = \frac{(x^4+1)x \cdot A}{(x^2+1)x^2} = B_2 = \frac{(x^4+1)A}{x^3+x}$$

±

$$\frac{B_3}{A} \Rightarrow B_3 = \frac{(x^9+1)A}{x^4+x^2}. \qquad B_4 = \frac{(x^{16}+1)A}{x^5+x^3} \qquad B_8 = \frac{(x^{64}+1)A}{x^9+x^7}$$

Задача 3.

У нас осталось (120кг - 31кг - 41кг) 48кг приборов их точно >3 так как тогда 41 не максимальный вес. Если их 5 то средний вес пятого 9,6кг (48кг : 5) что тоже не удовлетворяет условию так как средний вес самых легких приборов (31 : 3 ≈ 10,33кг) что больше и если мы будем брать минимальные веса и средних приборов то их средний вес ≤ 9,6кг, что меньше. Если мы берем больше приборов то средний вес еще меньше. Поэтому подходит только 4 так как 4 > 3 48 : 4 = 12 12 > 10,33 значит всего приборов 3+3+4 = 10 приборов

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только **ТО**, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1

1) Вычтем из первого равенство второе

$\frac{\cancel{1}+x+y}{2y+y+}$ $\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \end{cases} \Rightarrow 1+x+y-2-y-z=xy-yz \Rightarrow x-z-1=\overset{x}{\cancel{y}}(\cancel{y}-z) \Rightarrow$

$-1=y(x-z)-(x-z) \Rightarrow -1=(y-1)(x-z)$

2) ~~Пусть~~ Выразим y ~~не целое число~~ тогда

$y-1=\frac{-1}{x-z} \Rightarrow y=1-\frac{1}{x-z}$ $y=\frac{x-z-1}{x-z}$ заметим то что y представляет число $\frac{a}{a+1}$ $x-z-1=a$. Подставим в первое уравнение

3)

$1+x+\frac{a}{a+1}=\frac{xa}{a+1}$

$1+x=\frac{xa}{a+1}-\frac{a}{a+1}$

$1+x=\frac{(x-1)a}{a+1}$

$ax+a+x\overset{+1}{=}ax-a$

$2a+x\overset{+1}{}=0.$

$2(x-z-1)+x\overset{+1}{}=0$

$3x-2z\overset{+1}{=}0$

$x=\frac{2z-1}{3}$

4) В третьем уравнении заменим x на 2z-1

$5+z+\frac{2z-1}{3}=z\frac{(2z-1)}{3} \quad |\cdot 3$

$4+3z=2z^2-z$

$2z^2-4z-4=0$

$z^2-2z-2=0$

$z_1+z_2=2$

$z_1\cdot z_2=-2$

$15+3z+2z-1=z(2z-1)$

$14+5z=2z^2-2z$

$2z^2-7z-14=0$

$x^3(x+1)$

~~Входн~~ доп. лист №1

№ Эленор

Задача 4.

1) Поле ABCD. провод С-место встречи 2) проведем

2) CH $H \in AB$ $CH \parallel AD$ и CH_1 где $H \in AD$ $CH_1 \parallel AB$

3) $\triangle ACH = \triangle CAH_1$ по гипотинузе и катету

$\angle H_1 = \angle H = 90°$ $CH_1 = HA$ в пр. к. $AHCH_1$ AC-общая

4) $S(ACH) = S(CAH_1)$ т.к. $\triangle ACH = \triangle CAH_1$

5) $\triangle BCH \sim \triangle CDH_1$ по двум углам $\angle BHC = \angle CH_1D = 90°$

$\angle HCB = \angle H_1DC$ как соответственные.

6) S (BCA) должно быть равна S(ACD) значит

$S(BCA) - S(CHA) = S(ACD) - S(AH_1C) = S(BCH) = S(CDH_1)$

7) значит $BC = CD$ и $BA = AD$ т.к. $BC + BA = CD + AD$

8) Поэтому $BA : AD = 1:1$ что не ~~ра~~ подходит условию значит площади братьев не равны ⊕

Б) Существует только 1 вид треугольника где $\frac{BA}{AD} = \frac{1}{1}$

Задача 5.

Найдем скорость заполнения резервуара с двумя насосами

$$\begin{cases} 14 - 12 = 2 \text{ ч.} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6} \text{ резервуара} \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{6} \text{ резервуара в 2 часа}$$

двумя насосами значит скорость

Так как эта скорость с двумя

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

01911 МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Пожуев

ИМЯ Александр

ОТЧЕСТВО Павлович

Дата рождения 19.04.1999

Класс: 11

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 6 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 01911МК

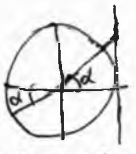
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Сначала рассмотрим угол:

$2017° : 360 = 5\frac{217}{360}$, то есть $217°$, а $tg 217° = tg(217°-180°) = tg 37°$

2017 | 360
1800 | 5
217



$\leftarrow \alpha = 37°$

Эту операцию можно проделать со всеми углами, рассмотрим последний

$2033° : 360 = 5\frac{233}{360}$, $233°$, $tg 233° = tg(233°-180°) = tg 53°$

− 2033° | 360
1800 | 5
233

Видно, что 360° не было пройдено, и тангенсы берутся от углов с 37° до 53°

Теперь ~~прео~~ преобразуем формулу, зная, что $lg\, a\cdot b = lg a + lg b$:

$S = lg(10^4 tg 37° \cdot 10^5 tg 38° \cdot \ldots \cdot 10^{20} tg 53°)$

Заметим, что $37° = 90° - 53°$, значит $tg 53° = ctg 37°$

$tg\, x = ctg(\frac{\pi}{2} - x)$

значит $tg 37° \cdot ctg 37° = 1$;

$tg 38° \cdot tg 52° = 1$;

Так будет продолжаться до $\frac{37° + 53°}{2} = 45°$, а $tg 45° = 1$, значит в формуле останется: $S = lg(10^4 \cdot 10^5 \cdot \ldots \cdot 10^{20})$, где степени 10 слагаемые, используем формулу сложения арифмет. прогрессии:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$; $S_n = \frac{(4+20)(20-4+1)}{2} = \frac{24 \cdot 17}{2} = 12 \cdot 17 = 204$

⊕

$\times\begin{array}{r}12\\17\\\hline 84\\12\\\hline 204\end{array}$

Запишем: $S = lg 10^{204} = 204 lg 10 = 204$

Ответ: 204.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Так как a, b, c - положительные, можем использовать неравенство Коши:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$; т.к. $a,b,c>0$, можем возвести обе части в 3 степень:

$$(a+b+c)^3 \geq 27abc$$

$$(a+b+c)^2\cancel{(a+b+c)} = a^2+b^2+c^2+ab+ab+ac+ac+bc+bc = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a+b+c)^2(a+b+c) = (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)(a+b+c) = a^3+a^2b+a^2c+ab^2+b^3+b^2c+ac^2+bc^2+c^3+$$
$$+2a^2b+2ab^2+2abc+2a^2c+2abc+2ac^2+2abc+2b^2c+2bc^2=$$
$$=a^3+b^3+c^3+3ab^2+3b^2c+3a^2c+3a^2b+3ac^2+3bc^2+6abc=$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a(b^2+c^2)+3b(a^2+c^2)+3c(a^2+b^2)+6abc$$

Знаем, что $a^2+b^2+c^2=6abc$, ~~запишем в~~ сделаем замену в скобках

$$a^3+b^3+c^3+3a(6abc-a^2)+3b(6abc-b^2)+3c(6abc-c^2)+6abc=$$
$$=a^3+b^3+c^3+18a^2bc-3a^3+18ab^2c-3b^3+18abc^2-3c^3+6abc=$$
$$=-2a^3-2b^3-2c^3+18abc(a+b+c)+6abc$$; подставим в неравенство:

$$-2a^3-2b^3-2c^3+18abc(a+b+c)+6abc \geq 27abc$$

$$\cancel{48}\ 18abc(a+b+c) \geq 21abc+2(a^3+b^3+c^3)$$

$$a+b+c \geq \frac{21abc+2(a^3+b^3+c^3)}{18abc} \leftarrow \text{Коши}$$

Используем Коши для скобки:

$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$; так как скобка в числителе, а $(a+b+c)$ должно быть минимальным, то мы берем минимальное значение $a^3+b^3+c^3=3abc$:

$$a+b+c \geq \frac{21abc+2(3abc)}{18abc}$$

$$a+b+c \geq \frac{27abc}{18abc} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Ответ: 1,5

±

почему не меньше? доказана только оценка снизу.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Запас любого месяца мы можем переобозначить за x, значит в след. месяце будет c − 2x, давайте ~~рассмот~~ рассмотрим несколько месяцев, начиная с какого-то первого месяца x:

0: x
1: $c-2x$
2: $c-2(c-2x)=-c+4x$
3: $c-2(-c+4x)=3c-8x$
4: $c-2(3c-8x)=-5c+16x$
5: $c-2(-5c+16x)=11c-32x$

Можно заметить, что каждый месяц x умножается на (−2), то есть коэффициент при x всегда равен $(-2)^n$. Также можно заметить, что коэффициент при c − это сумма (−2) в степенях с 0 по (n−1), это можно объяснить тем, что в первом месяце коэффициент равен 1, а далее он увеличивается каждый раз в (−2) раза и по формуле (c − 2x) добавляется новый элемент суммы, ~~кот~~ равный 1, который далее также будет увеличиваться в (−2). Поэтому запишем формулу для n-ого месяца:

$((-2)^{n-1}+\ldots+(-2)^0)c+(-2)^n x$: запас n-ого месяца, заменим $(-2)=a$, а также домножим ~~коэффициент при c~~ и разделим коэффициент при c на (a−1):

$$\cancel{(-2)^n}\ \frac{(a^{n-1}+\ldots 1)(a-1)}{a-1}c+a^n x=\frac{a^n-1}{a-1}\cdot c+a^n x$$

Допустим в два каких-то месяца запасы совпали, где $n>f$:

$$\frac{a^n-1}{a-1}\cdot c+a^n x=\frac{a^f-1}{a-1}\cdot c+a^f x$$

$$\left(\frac{a^n-1}{a-1}-\frac{a^f-1}{a-1}\right)c+(a^n-a^f)x=0;\quad \frac{(a^n-a^f)c}{a-1}+(a^n-a^f)x=0$$

$(a^n-a^f)\left(\frac{c}{a-1}+x\right)=0$, где $a^n-a^f\neq 0$, т.к. $n>f$, значит:

$\frac{c}{a-1}+x=0$; $\frac{c}{-3}=-x$; $c=3x$; подставим в формулу:

~~$\frac{a^n-1}{a-1}\cdot 3x+a^n x=\frac{3xa^n-3x+a^{n+1}x-a^n x}{a-1}=2a^n x-3x$~~

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{(-2)^n-1}{-2-1}\cdot(3x)+(-2)^n x=\frac{((-2)^n-1)3x-3x(-2)^n}{-3}=\frac{3x((-2)^n-1-(-2)^n)}{-3}=$$

$$=\frac{-3x}{-3}=x$$

Значит, если есть два таких месяца, то кол-во запаса в них равно кол-ву запаса в ~~[illegible]~~ месяц начала отсчёта, то-есть в первый месяц.

$\pm$

Ответ: может, значение первого месяца, x.

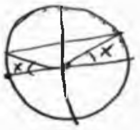
Ответ $x=?$

N5

$\sin x=\sin(nx)$, такое возможно, если

$nx=x+2\pi k$ или $nx=\pi-x+2\pi f$, где

$k\in Z$; $f\in Z$;



$nx-x=2\pi k$;

$x(n-1)=2\pi k$

$nx+x=\pi+2\pi f$

$x(n+1)=\pi(1+2f)$

Знаем, что $x\in[0;\pi]$; значит:

$0\leq x(n-1)\leq\pi(n-1)$;

$2\pi k\leq\pi(n-1)$

$k\leq\frac{n-1}{2}$

$0\leq x(n+1)\leq\pi(n+1)$

$\pi(1+2f)\leq\pi(n+1)$

$f\leq\frac{n}{2}$

Если n - чётное:

$k\leq\frac{n-2}{2}$

$f\leq\frac{n}{2}$

Если n - нечётное:

$k\leq\frac{n-1}{2}$

$f\leq\frac{n-1}{2}$

Кол-во решений для чётных ^нечётных^ это сумма k и f ↙>0, также учтём, что решение есть в точке (0;0), поэтому:

для чётных : $\frac{n-2}{2}+1+\frac{n}{2}+1=n+1$

для нечётных: $\frac{n-1}{2}+1+\frac{n-1}{2}+1=n+1$

Так как k и $f\in Z$, они показывают кол-во обходов в одну и туже точку, поэтому ~~в~~ зависимость кол-ва решений от n для чётных - (n+1); для нечётных: (n+1), то есть совпадает, но

Стоит учесть точку в которой $(x+2\pi k)$ и $(\pi-x+2\pi f)$ совпадают:

$$x+2\pi k=\pi-x+2\pi f$$

$$2x=\pi+2\pi(f-k)$$, т.к. f и $k\in Z$, то $f-k=m$; где $m\in Z$

$$2x=\pi+2\pi m$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi m$$

Подставим x: $nx=x+2\pi k$

$$\frac{n\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$n=1+4k$; тоесть если n имеет остаток один при делении на 4 (т.к. $k\in Z$), то одна точка дублируется и мы должны будем её исключить из зависимости $n+1$, также заметим, что $n+1$ – это линейная зависимость, значит одно решение, но с учётом точки $\frac{\pi}{2}$, может быть ещё одно, поэтому проверим (ещё одно, потому что максимум может отнять 1):

$$S(n)=n+1;$$ – зависимость

+

$$S(n)=2017$$

не учтено здесь

$$2017=n+1$$

$$n=2016$$

$2017 \,|\, 4$, 504; 20, 1, 0, 17, 16, 1 $\quad 2017=504\frac{1}{4}$

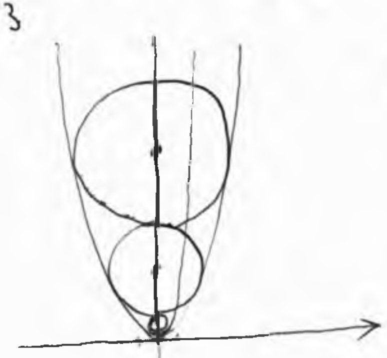
Заметим, что $(2017\equiv 1 \bmod 4)$

Значит $S(2017)=2017+1-1=2017$

Значит $S(2016)=S(2017)=2017$

Ответ: 2 раза.

№3



С предыдущей окружностью касается нижняя полуокружность следующей за ней окружности, а также с ветвями параболы, значит почему?

$$y=-\sqrt{R_n^2-x^2}+R_n+2(R_{n-1}+\ldots+R_1)$$?

получается из уравнения окружности: $y^2+x^2=R^2$

Т.к. касается с верхней полуокружностью и ветвями параболы то:

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} -\sqrt{R_n^2-x^2}+R_n+2(R_{n-1}+\ldots+R_1)=\sqrt{R_{n-1}^2-x^2}+R_{n-1}+2(R_{n-2}+\ldots+R_1)\\ -\sqrt{R_n^2-x_1^2}+R_n+2(R_{n-1}+\ldots+R_1)=x_1^2\end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$R_n+2R_{n-1}-R_{n-1}+2(R_{n-2}+\ldots+R_1)-2(R_{n-2}+\ldots+R_1)=\sqrt{R_{n-1}^2-x^2}+\sqrt{R_n^2-x^2}$$

$R_n+R_{n-1}=\sqrt{R_{n-1}^2-x^2}+\sqrt{R_n^2-x^2}$; возведём во вторую степень

$$\underline{R_n^2}+\underline{\underline{R_{n-1}^2}}+2R_nR_{n-1}=\underline{R_n^2}+\underline{\underline{R_{n-1}^2}}-2x^2+2\sqrt{(R_{n-1}^2-x^2)(R_n^2-x^2)}$$

$2(x^2+R_nR_{n-1})=2\sqrt{(R_{n-1}^2-x^2)(R_n^2-x^2)}$; возведём опять во вторую степень.

$$\underline{\underline{x^4}}+2x^2R_nR_{n-1}+\underline{R_n^2\cdot R_{n-1}^2}=\underline{R_{n-1}^2\cdot R_n^2}-x^2R_{n-1}^2-x^2R_n^2+\underline{x^4}$$

~~$x^2R_{n-1}^2+2xR_nR_{n-1}=0+x^2R_n^2=0$~~

$x^2R_{n-1}^2+x^2R_n^2+2xR_nR_{n-1}=0$; заметим, что можем свернуть в квадрат суммы:

$$(xR_{n-1}+xR_n)^2=0$$

$$xR_{n-1}+xR_n=0$$

$x(R_{n-1}+R_n)=0$; касается в точке 0

Второе уравнение:

$$-\sqrt{R_n^2-x^2}-x^2+R_n+2(R_{n-1}+\ldots+R_1)=0$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ МОСКВА

Место проведения

2Р 10-64

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ПОЛЯЧЕНКО

ИМЯ Юрий

ОТЧЕСТВО АНАТОЛЬЕВИЧ

Дата рождения 25.06.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$S = \sum_{i=0}^{16} \lg\left(10^{i+4} \operatorname{tg}(1980+37+i)\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=4}^{20} i\right) + \sum_{i=0}^{16} \lg\left(\operatorname{tg}(37+i)\right) =$$

$$= \frac{4+20}{2} \cdot 17 + \lg\left(\prod_{i=0}^{16} \operatorname{tg}(37+i)\right)$$

$$i \in [0;16] \Rightarrow 37+i \in [37;53] =$$

$$= [45-8; 45+8]$$

$$\operatorname{tg}(45-\alpha)\operatorname{tg}(45+\alpha) = \operatorname{ctg}(90-(45-\alpha))\operatorname{tg}(45+\alpha) =$$

$$= \operatorname{ctg}(45+\alpha)\operatorname{tg}(45+\alpha) = 1$$

$\prod_0^{16} \operatorname{tg}(37+i)$ можно разбить на пары:

$$\prod_0^{16} \operatorname{tg}(37+i) = \prod_{k=0}^{8} \operatorname{tg}(45-k)\operatorname{tg}(45+k) =$$

$$= \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{8} = 1 \Rightarrow \boxed{\lg\left(\prod_{i=0}^{16} \operatorname{tg}(37+i)\right) = 0} \Rightarrow$$

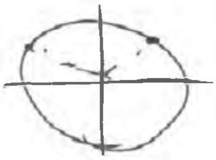
$$\Rightarrow S = \frac{4+20}{2} \cdot 17 + 0 = 12 \cdot 17 = 204$$

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 12 \\ \hline 134 \\ 17 \\ \hline 204 \end{array}$$

Ответ: $S=204$ +

№5

$\sin nx = \sin x$; $x \in [0; \pi]$;



$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} nx = x + 2\pi k \ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ nx = \pi - x + 2\pi p \ ;\ p \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi \dfrac{2k}{n-1} \ ;\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi \dfrac{2p+1}{n+1} \ p \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

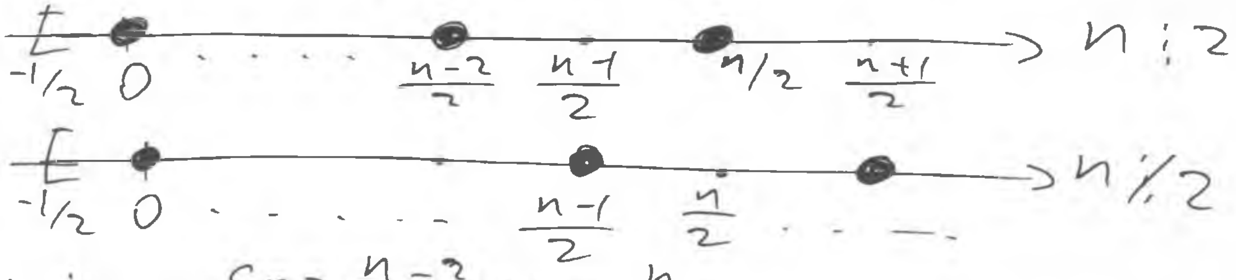
∓

$2k \,\vdots\, 2$; $2p+1 \not\vdots\, 2$

$n \pm 1$ – не влияет на чётность =>

=> k и p решения не пересекаются =>

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2k \in [0; n-1] \\ 2p+1 \in [0; n+1] \end{array}\right. \\ k \in \mathbb{Z} ; p \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} k \in [0; \frac{n-1}{2}] \\ p \in [-1/2 ; \frac{n}{2}] \end{array}\right. \\ k \in \mathbb{Z} ; p \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$



$n \,\vdots\, 2 \Rightarrow S_k = \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$

$S_p = \frac{n}{2} + 1$ | $\Rightarrow S = n+1$

$n \not\vdots\, 2 \Rightarrow S_k = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$

$S_p = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ | $\Rightarrow S = n+1$

$\Rightarrow \boxed{S = n+1}$

Ответ: $S(n) = n+1 \Rightarrow 2017$ бывает 1 раз.

№3

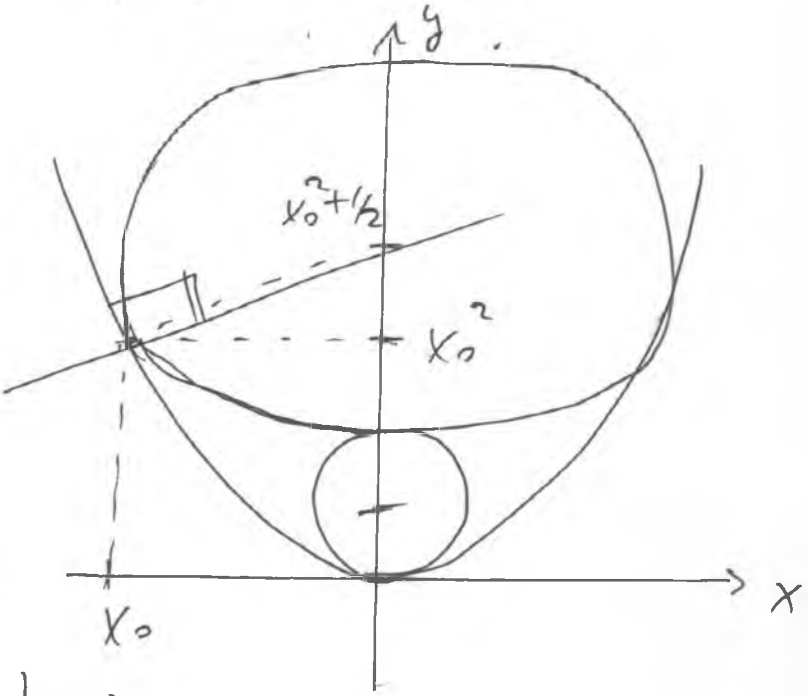
Дано:

$y = x^2$

$S_1 : d_1 = 1.$

S_n кас. S_{n-1} и x^2

S_{2017} ; $r = ?$



Решение:

касат. к $y = x^2$:

$y_к = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нормаль к $y = x^2$: $y_н = x_0^2 - \frac{1}{2x_0}(x - x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow y_н(x=0) = x_0^2 - \frac{-x_0}{2x_0} = x_0^2 + 1/2 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sqrt{(x_0)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{y + 1/4}$

$r_1 = 1/2 \Rightarrow y_1 = 0$

$r_2 = \sqrt{y_2 + 1/4} = y_2 + 1/2 - 2r_1 = y_2 - 1/2$

$y_2 + \cancel{1/4} = y_2^2 - y_2 + \cancel{1/4}$

$y_2(y_2 - 2) = 0 ; y_2 > 0 \Rightarrow \boxed{y_2 = 2} \Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{3}{2}}$

$r_3 = \sqrt{y_3 + 1/4} = y_3 + 1/2 - 2(r_1 + r_2) = y_3 - 7/2$

$y_3 + 1/4 = y_3^2 - 7y_3 + \frac{49}{4}$

$y_3^2 - 8y_3 + 12 = 0 ; y_3 = 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 6 ; 2$

$y_3 > y_2 \Rightarrow \boxed{y_3 = 6 \Rightarrow r_3 = 5/2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$r_4 = \sqrt{y_4 + 1/4} = y_4 + 1/2 - 2(r_1 + r_2 + r_3) = y_4 - \frac{17}{2}$

$y_4 + 1/4 = y_4^2 - 17y_4 + \frac{289}{4}$

$y_4^2 - 18y_4 + 72 = 0$; $y_4 = 9 \pm \sqrt{81 - 72} = 6; 12$

$y_4 > y_3 \Rightarrow \boxed{y_4 = 12 \Rightarrow r_4 = 7/2}$

видно, что $\boxed{r_n = n - 1/2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_{2017} = 2017 - 1/2 = \frac{4000 + 34 - 1}{2} = \frac{4033}{2}$

Ответ: $r_{2017} = \frac{4033}{2}$ $= 2016{,}5$ ⊕

№2

$n = 1$

$X = C - 2x \Rightarrow x = C/3$

$n = 2$

$X = C - 2(C - 2x) = 4x - C \Rightarrow X = C/3$

$n = 3$

$X = C - 2(4X - C) = 3C - 8X \Rightarrow X = C/3$

$n = \ldots$

⊕

видно, что $X = C/3$ всегда $(\forall n) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: ~~[illegible]~~ да, может;

$X = C/3$

№4

$a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$;

⊕

$S = a + b + c = \min$

$S^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 2(3abc + ab + bc + ac)$

если a ↓ в k раз, то $6abc$ ↓ k ⇒ для сохр. нужно ↑ b и c в большее k раз ⇒ $\boxed{a = b = c - \min} \Rightarrow$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\Rightarrow \ 8a^2 = 4a \Rightarrow a = 1/2 \Rightarrow \boxed{S = 3a = 3/2}$ ед

Ответ: $S_{min} = \frac{3}{2}$ при $a = b = c$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

СФ МЭИ

Место проведения

WR84-79

шифр

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ ПОПОВ

ИМЯ АНАТОЛИЙ

ОТЧЕСТВО ЕВГЕНЬЕВИЧ

Дата рождения 20.07.2000 **Класс:** 10

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ WR84-79

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Если x м^3 – запас газа в первом месяце и $x > 0$.

След-но, в следующем месяце $\frac{1}{1-x}$ м^3 и

$\frac{1}{1-x} > 0$

Получается, что $x \in (0; 1)$, но тогда $\frac{1}{1-x} > 1$ – это неверно.

Поэтому запас газа не может оказаться одинаковым.

Ответ: нет, не может.

№1

$$12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35$$

ОДЗ: $x^2-1>0$

$x>0$ и $x>1$

След-но, если $x=2$, то $24(1+\frac{1}{\sqrt{3}})>35$

если $x=3$, то $36(1+\frac{1}{2\sqrt{2}})>35$

След-но, $1<x<2$

$$12+\frac{12}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{x}$$

Допустим, $x=7$

$$12+\frac{12}{\sqrt{48}}=5$$

$$12(1+\frac{1}{4\sqrt{3}})=5$$

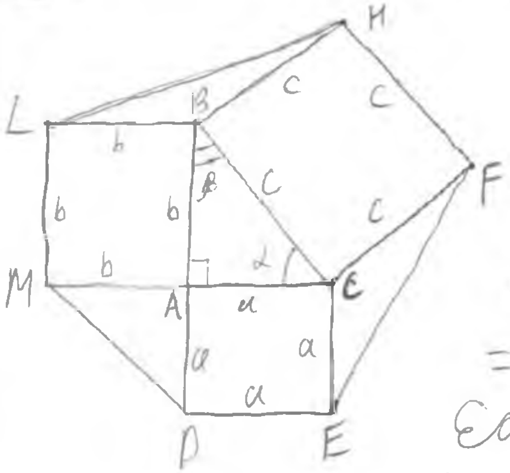
$$1+\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{5}{12}$$

$\frac{1}{4\sqrt{3}}=\frac{7}{12}$. Вообще хорошая фирма нанимает хороших финансовых аналитиков

Ответ: да

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



По т. Пифагора: $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $c=CB$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab$

Пусть $\angle ABC=\beta$, тогда $\angle LBH=180°-\beta$

Поэтому $S_{\Delta LBH}=\frac{1}{2}b\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin(180°-\beta)=$

$=\frac{1}{2}b\sqrt{a^2+b^2}\sin\beta=\frac{1}{2}ab$

Если $\angle BCA=\alpha$, то $\angle FCE=180°-\alpha$

след-но, $S_{\Delta FCE}=\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+b^2}\sin(180°-\alpha)=$

$=\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+b^2}\sin\alpha=\frac{1}{2}ab$

$S_{LBAM}=b^2$; $S_{\Delta MAD}=\frac{1}{2}ab$; $S_{ACED}=a^2$; $S_{BHFC}=a^2+b^2$

$S_{LHFEDM}=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+a^2+b^2+a^2+b^2=$

$=2ab+2a^2+2b^2=2(a^2+b^2+ab)$ (+)

Площадь шестиугольника $-\ 2(a^2+b^2+ab)$

Отношение: $\dfrac{2(a^2+b^2+ab)}{\frac{1}{2}ab}=4\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1\right)$

При $a=b$ отношение площади нового к площади исходного будет минимальным.

Ответ: $2(a^2+b^2+ab)$; $a=b$

№3

Если $n=1$, то $1-\frac{x}{1}=0$ (+)

$x=1$

$n=2$, то $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=0$

$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2-x}{2}=0$

$1-\frac{3x}{2}+\frac{x^2}{2}=0$

$2-3x+x^2=0$

$x=1$; $x=2$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ WR84-79

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если $n=3$, то $1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=0$

$$\frac{6-6x+3(x-1)x-x(x-1)(x-2)}{6}=0$$

$$-6(x-1)+3(x-1)x-x(x-1)(x-2)=0$$

$$(x-1)(-6+3x-x(x-2))=0$$

$$(x-1)(3(x-x)-x(x-2))=0$$

$$(x-1)(x-2)(3-x)=0$$

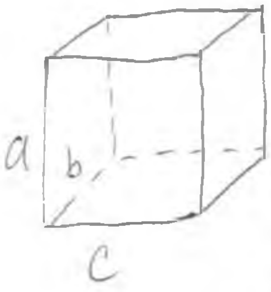
$$x=1,\quad x=2,\quad x=3$$

След-но, все корни уравнения равны: $\{1,2,3,\dots,n\}$

Ответ: $\{1,2,3,\dots,n\}$

(?)

№5



Сторону a можно считать наименьшей, поэтому

Можно записать: $\frac{a+1}{2}\cdot a$

Аналогично для b: $\frac{b+1}{2}\cdot b$

для c: $\frac{c+1}{2}\cdot c$

Тогда получается все три стороны:

$\frac{a+1}{2}\cdot a\cdot\frac{b+1}{2}\cdot b\cdot\frac{c+1}{2}\cdot c-1$

Мы знаем, что $d_{куба}=a\sqrt{3}$

Ответ: 8

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Место проведения

03509 МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Прокушкин

ИМЯ Марк

ОТЧЕСТВО Анатольевич

Дата рождения 01. 06. 2001

Класс: 9

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11. 02. 17.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Прок

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Рассмотрим значения запаса газа за год. Если в 1 месяце запас равен x м^3, то во 2 месяц этот запас будет равен $(6-x)$ м^3, но тогда в 3 месяц запас будет равен $6-(6-x)=x$ м^3. Значит, запас газа принимает значения только x и $6-x$, чередующиеся каждый месяц.

Тогда решим уравнения $x^2=6-x$ (1) и $(6-x)^2=x$ (2) и $x=x^2$ (3)

(1) $x^2=6-x$

$x^2+x-6=0$

по т. Виета $x=2$, $x=-3$,

но $x>0$ по усл. $\Rightarrow$

$\Rightarrow x=2$

(2) $(6-x)^2=x$

$36-12x+x^2=x$

$x^2-13x+36=0$

по т. Виета $x=4$, $x=9$

~~случай с $x=$~~

но при $x=9$ запас газа на след. месяц отрицательный, противоречие.

±

(3) $x=x^2$

$x=0$

$x=1$

ещё случай!

~~при $x=5$ или $x=1$ (где x — нач. запас), то условие выполняется за каждый 2 месяц~~

1. если в текущий месяц значение запаса 1 м^3 или 5 м^3, то условие выполняется для значение 1 м^3 каждый 2 месяц.
2. если в текущий месяц значение запаса 2 м^3 и 4 м^3 то условие выполняется для 2 м^3 каждый следующий месяц.

ещё!

1 (1; 5; 1; 5,) или (5; 1; 5; 1, ...)

2 (2; 4; 2; 4; ...) или (4; 2; 4; 2, ...)

№3

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0$$

$$(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{x-3}{4}\right)=0$$

$$\cancel{\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)(7-x)}{24}=0}$$

$$\frac{(1-x)(2-x)}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)(7-x)}{24}=0 \quad \vdots\ (x-1)(x-2)$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}-\frac{x(7-x)}{24}=0\\ x\neq 1,\ x\neq 2\end{cases} \quad \begin{cases}7x-x^2=12\\ x\neq 1\\ x\neq 2\end{cases} \quad \begin{cases}x^2-7x+12=0\\ x\neq 1\\ x\neq 2\end{cases} \quad \begin{cases}x=3\\ x=4\\ x\neq 1\\ x\neq 2\end{cases}$$

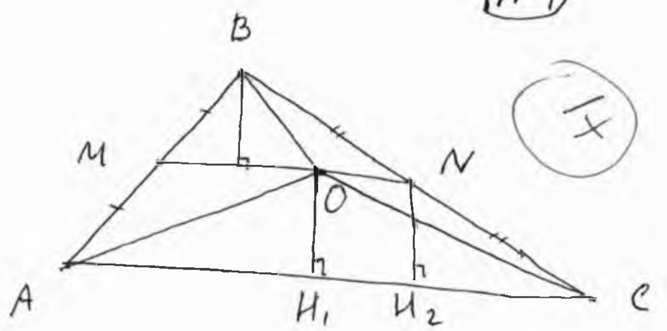
но при $x=1$ и $x=2$ рав-во верно $\Rightarrow$ $x=1$, $x=2$ - корни уравнения.

Ответ: $x=1$
$x=2$
$x=3$
$x=4$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



1+

Решение: для того, чтобы найти точку O, нужно провести среднюю линию в $\triangle ABC$, а затем на средней линии отметить точку O так, чтобы она делила среднюю линию в отношении 1 : 2.

Доказательство:

1) Рассмотрим среднюю линию $MN \parallel AC$ (доказательство для остальных средних линий аналогично). Т.к. AN – медиана, то по св-ву медиан $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$. Проведем $OH_1 \perp AC$ и $NH_2 \perp AC$. $OH_1 = NH_2$ как расстояние между ~~ср. ли~~ парал. прямыми. Но тогда $S_{\triangle AOC} =$
$= S_{\triangle ANC} = \frac{1}{2} OH_1 \cdot AC \Rightarrow S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$.

Для чего?

2) В $\triangle ABO$ ~~$\triangle OMB$~~ $S_{\triangle MOB} = \frac{1}{2} \triangle ABO$ т.к. OM – медиана, а в $\triangle BOC$ $S_{\triangle BON} = \frac{1}{2} \triangle OBC \Rightarrow \frac{S_{\triangle MOB}}{S_{\triangle OBN}} = \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle BOC}} =$
$= \frac{MO}{ON} = 2 \Rightarrow S_{\triangle ABO} = 2 S_{\triangle BOC} \Rightarrow S_{\triangle BOC} : S_{\triangle ABO} : S_{AOC} =$ (т.к. высота общая)
$= 1 : 2 : 3$ т.к.

$S_{\triangle ABO} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

$3 S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{6} \triangle ABC$, $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, $S_{AOC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

случай с $\frac{MO}{ON} = \frac{1}{2}$ аналогичен.

№5

+

$f(x) = x^2 + px + q$

$p^2 - 4q = 100$

$q = \frac{(p-10)(p+10)}{4}$

$f(x) + f(x-10) = x^2 + px + q + (x-10)^2 + p(x-10) + q =$
$= x^2 + px + q + x^2 - 20x + 100 + px - 10p + q = 2x^2 + 2px - 20x + 2q + 100 -$
$- 10p = 0$

$x^2 + px - 10x + q + 50 - 5p = 0$

$x^2 + px - 10x + \frac{(p-10)(p+10)}{4} - \overset{5}{\cancel{10}}(p-10) = 0$

$x^2 + px - 10x + \frac{(p-10)(p+10-20)}{4} = 0$

$x^2 + px - 10x + \frac{(p-10)^2}{4} = 0$

$D = (p-10)^2 - (p-10)^2 = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет 1 корень

Ответ: 1.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

$A = x + \frac{1}{x}$

а) $B_k = x^k + \frac{1}{x^k}$

$k = 2$:

$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow B_2 = A^2 - 2$

$k = 3$:

$(x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(x + \frac{1}{x}) \Rightarrow B_3 = A^3 -$

$- 3A$

$k = 4$:

$(x + \frac{1}{x})^4 = ((x + \frac{1}{x})^2)^2 = (x^2 + 2 + \frac{1}{x^2})^2 = x^4 + 4x^2 + 4 + 2 \cdot \frac{1}{x^2}(x^2 + 2) +$

$+ \frac{1}{x^4} = x^4 + 4x^2 + 4 + 2 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4(x^2 + \frac{1}{x^2}) +$

$+ 6 \Rightarrow B_4 = A^4 - 4B_2 - 6 = A^4 - 4(A^2 - 2) - 6 =$

$= A^4 - 4A^2 + 2$

$k = 8$:

~~$(x + \frac{1}{x})^8 = (x^4 + \frac{1}{x^4} + 4(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 6)^2 =$~~

~~$= x^8 + 2 + \frac{1}{x^8} + 16(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + 48(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 36 +$~~

~~$+ 2(x^4 + \frac{1}{x^4})(4x^2 + \frac{4}{x^2} + 6) = x^8 + 2 + \frac{1}{x^8} + 16x^4 + 32 + \frac{16}{x^4} +$~~

~~$+ 48x^2 + \frac{48}{x^2} + 2(4x^6 + \frac{4}{x^2} + 4x^2 + \frac{4}{x^6} + 6x^4 + \frac{6}{x^4}) =$~~

~~$= x^8 + 2 + \frac{1}{x^8} + 16x^4 + 32 + \frac{16}{x^4} + 48x^2 + \frac{48}{x^2} + 8x^6 + \frac{8}{x^2} +$~~

$(x^4 + \frac{1}{x^4})^2 = x^8 + 2 + \frac{1}{x^8} \Rightarrow B_8 = B_4^2 - 2 = (A^4 - 4A^2 + 2)^2 - 2 =$

$= A^8 - 8A^6 + 16A^4 + 8A^4 - 16A^2 + 4 - 2 =$

$= A^8 - 8A^6 + 24A^4 - 16A^2 + 2$

б) $\begin{cases} B_2 = B_4 \\ B_4 = B_8 \end{cases}$ $\begin{cases} A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 \\ A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - 8A^6 + 24A^4 - 16A^2 + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} A^4 - 5A^2 + 4 = 0 \\ A^8 - 8A^6 + 23A^4 - 12A^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = 1 \\ A = -1 \\ A = 2 \\ A = -2 \end{array} \right. \\ A^8 - 8A^6 + 23A^4 - 12A^2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ таких A нет

?!

∓

с) при $x = 1$ количество арифм. операций для вычисления B_2 минимально $\Rightarrow$ $C = 1$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

NЭ 92-64

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Пот

ИМЯ Владислав

ОТЧЕСТВО Александрович

Дата рождения 28.10.2001

Класс: 9

Предмет математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N5

$f(x)+f(x-10)=x^2+px+q+x^2-20x+100+p(x-10)+q=2x^2+px+p(x-10)-$
$-20x+2q+100=2x^2+2px-10p-20x+20q+100=(x^2+px-10x-5p+q+$
$+50)\cdot 2=0.$

$x^2+(p-10)x-5p+q+50=0$

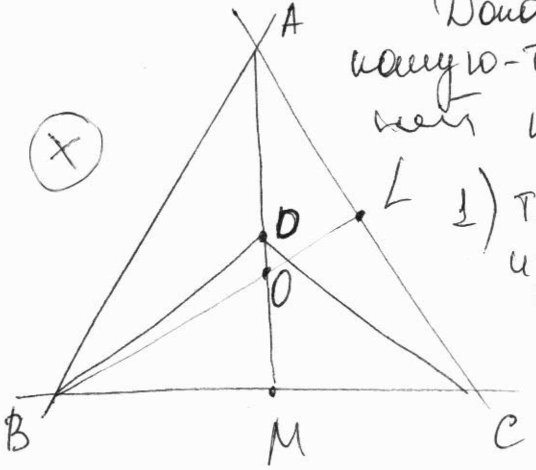
$D_1=p^2-20p+100+20p-4q-200=p^2-4q-100$

$x^2+px+q=0$

$D_2=p^2-4q=100 => p^2-4q-100=0 => D_1=0 =>$ 1 корень.

⊕

N4



Докажем, что если мы проведем какую-то прямую AM и возьмем на ней какую-то точку O, то $\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}}=\frac{BM}{MC}$.

1) т.к. у $\triangle ABM$ и $\triangle ACM$ одна высота из A то учитывая, что $S_{ABM}=\frac{h\cdot BM}{2}$ и $S_{ACM}=\frac{h\cdot MC}{2}$, то площади $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}}=\frac{\frac{h\cdot BM}{2}}{\frac{h\cdot MC}{2}}=\frac{BM}{MC}$. Анало-но если рассмотреть $\triangle BDM$ и $\triangle MDC => \frac{S_{BDM}}{S_{MDC}}=\frac{BM}{MC}$

По свойству пропорций: $\frac{S_{ABM}}{S_{ACM}}-\frac{S_{BDM}}{S_{MDC}}=\frac{BM}{MC}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}$.

По условию $\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}=\frac{1}{3}$ => нам нужна точка M, такая, что $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{3}$. Найдем её и проведем через неё прямую AM (чтобы её найти можно найти середину BC (пусть точка K), а потом середину BK (точка M). Наша точка O будет лежать где-то на ~~[illegible]~~ прямой AM. Теперь найдем на AC точку L, так что $\frac{AL}{LC}=\frac{1}{2}$. (чтобы её найти можно построить

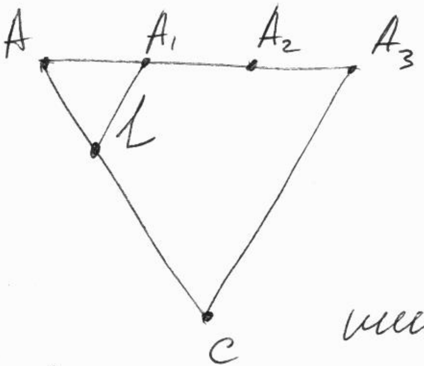
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NЭ 92-64

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

на каком-то луче AD три одинаковых отрезка ($AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$) потом провести A_3C и через точку A_1 прямую $\parallel AC$ по теореме Фалеса наша прямая разделит AC в нужном отношении.)



Имея BL и AM на их пересечении найдем точку O.

№3 Заметим, что числа 1; 2; 3 и 4 являются нашими корнями, действительно:

$1-1+0-0+0=0$; $1-2+1-0+0=0$;

$1-3+3-1+0=0$; ~~-4+6-4+~~ $1-4+6-4+1=0$.

Докажем, что других корней нет.

При раскрытии скобок получим многочлен четвертой степени. Если он имеет 5 и более корней, то его можно представить как $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)\cdot Q(x)$, ~~но тогда~~ ~~старш~~, но тогда степень старшего члена не менее пяти, что противоречит тому, что это многочлен 4-ой степени. Ч.т.д. => Ответ: {1; 2; 3; 4}

⊕

№2

Понятно, что значения объемов газа не более двух. Действительно, ведь:

$a_2 = 6 - a_1$

$a_3 = 6 - a_2 = 6 - 6 + a_1 = a_1 \Rightarrow a_{2i} = a_{2k}$; ~~$a_{2(k+1)} = a_{2(}$~~ $a_{2n+1} = a_{2k+1}$.

Таким образом имеем два числа: x и $6-x$.

Возможных вариантов равенства квадратов всего 4:

Лист 02 из 04

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\left[\begin{array}{l} x=(6-x)^2; \\ x^2=6-x; \\ x^2=x; \\ (6-x)=(6-x)^2; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-13x+36=0; \\ x^2+x-6=0; \\ x^2-x=0; \\ x^2-11x+30=0; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{x=9} \\ x=4; \\ x=2; \\ x=-3; \\ x=0; \\ x=1; \\ x=5; \\ x=6. \end{array}\right.$$

~~Испольду~~ ~~Из~~ Используя условие, что $x>0$ и $6-x>0$

Получаем, что $x\in\{4;2;1;5\}$

+

Ответ: Да, может при значениях запаса $\in\{4;2;1;5\}$ В случаях $x\in\{4;2\}$ соседние два месяца, в случаях $x\in\{1;5\}$ через месяц.

№1

а) $B_2=A^2-2$ $\qquad B_4=B_2^2-2$

$B_3=$ ~~$A(A^2$~~ $A(B_2-1)$ $\qquad B_8=(B_4)^2-2$

почему?

через A?

б) Из первого равенства следует:

∓

$$\frac{1}{x^2}+x^2=x^4+\frac{1}{x^4}$$

Пусть $x^2+\frac{1}{x^2}=t$, тогда!

$$t=t^2-2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} t=2\Rightarrow\frac{1}{x^2}+x^2=2\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=2 \boxed{\Rightarrow} \\ t=-1\Rightarrow x\in\varnothing; \end{array}\right.$$

$$\boxed{\Rightarrow}\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=2, \\ x+\frac{1}{x}=-2; \end{array}\right. \boxed{\Rightarrow}$$

тут домножили на x, ведь $x\neq0$

$$\boxed{\Rightarrow}\left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=0; \\ x^2+2x+1=0 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=1; \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Докажем, что и $x=1$, и $x=-1$ подойдут.

$1^2+\frac{1}{1^2}=1^4+\frac{1}{1^4}=1^8+\frac{1}{1^8}$; $(-1)^2+\frac{1}{(-1)^2}=(-1)^4+\frac{1}{(-1)^4}\neq(-1)^8+\frac{1}{(-1)^8}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $\{1;-1\}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

с) Такие операции, как ~~сл~~ сложение $x+\frac{1}{x}$ и A^2-2 нам точно придется провести, т.к. $x\neq0$ и и $A\neq0$ (это легко проверить, ~~если~~ $x\neq0$ т.к. на 0 делить нельзя, $A\neq0$, т.к. $A=x+\frac{1}{x}$, если $x+\frac{1}{x}=0$, то домножим на x, ведь $x\neq0$ $x^2+1=0$, но это не так). Таким образом арифметических действий не менее двух. Допустим их два, тогда ~~$\frac{1}{x}$ (<=>~~

~~$\frac{1}{x}=\frac{1}{1}$ и $(A)^2=$~~ $\frac{1}{x}=\frac{1}{1}$ или $\frac{1}{x}=\frac{1}{-1}$, и

и $A^2=1^2$ ~~или $A^2=$~~

Из $\frac{1}{x}=\frac{1}{1}\Rightarrow x=1$, тогда $\begin{cases}A\neq1\\A\neq-1\end{cases}$

Из $\frac{1}{x}=\frac{1}{-1}\Rightarrow x=-1$, тогда $\begin{cases}A\neq1\\A\neq-1\end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сократить можно только одну из операций (либо $A\cdot A$, либо $\frac{1}{x}$).

Если $x=1$, то $C=1$; Если $x=-1$, то $C=-1$.

Если $A^2=1$, то ~~$x^2+\frac{1}{x^2}$~~ $(x+\frac{1}{x})=1$; $x\neq0\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+1-x=0$; $D<3\Rightarrow x\in\varnothing$

Ответ: при $x\in\{-1;1\}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

ГФ 25-80

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17401

ФАМИЛИЯ Пятковский

ИМЯ Сергей

ОТЧЕСТВО Алексеевич

Дата рождения 15.07.2001 **Класс:** 10

Предмет Математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 05 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.07.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 1701

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ГФ 25-80

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$35=\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}+12x$$

$$35=12x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

1) если $x<0$, то $12x\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, т.к. $12x<0$; $1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0$ =>

~~если x=0, то 35=0,~~ x ~~на~~ ≥ 0

2) если $x=0$, то $35=0 \Rightarrow x>0$

3) $x>0$:

$12x>0$

$1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>1$ при любом x => если $x>3$, то

выражение $x\geq 3$, то выражение $12\cdot x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ точно больше 35 => $x<3$

Рассмотрим выр-ие:

$$12x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)=35$$

число $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)$ – иррациональное число, т.к. $\sqrt{x^2-1}$ – иррациональное число при $x>0$ и $x<3$, и $x\neq 1$. =>

~~$x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$~~ только при умножении на

$x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)$ может получиться рациональное число.

~~Д~~ Докажем, что ~~это~~ ~~не~~ при произведении $x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)$ не может получиться рациональное число.

~~$\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2-}}$~~ $x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+x=$

$$=\sqrt{\frac{x^2}{x^2\ 1}}+x$$

Если x рациональное, то $\frac{x^2}{x^2-1}$ не сократима $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}}$ – иррациональное число. Если x – иррациональное число $\Rightarrow$ сумма иррационального числа с дробью не будет являться рациональным числом $\Rightarrow$ $x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)$ – – иррациональное число $\Rightarrow$ $12x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+1\right)$ не может равняться 35.

Ответ: не должен.

№2

Рас-м какие запасы будут в первые 4 месяца

① за 1 месяц – x

2 месяц – $\frac{1}{1-x}$

3 месяц – $\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{\cancel{1}-x-\cancel{1}}{1-x}} = \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$

4 месяц – $\cancel{\frac{x}{x-\frac{x-1}{-x}}} = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{\cancel{x}-\cancel{x}+1}{x}} = x$

В результате получается, что в 1 месяце будут равные запасы, но необходимо проверить, чтобы запасы в каждом месяце были больше 0

$$\begin{cases} x>0 \\ \frac{1}{1-x}>0 \\ \frac{x-1}{x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 1-x>0 \\ x(x-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<1 \\ x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty) \end{cases}$$

$\pm$

~~Из~~ составы Система не имеет решений $\Rightarrow$ нет таких x, при которых запас в каждом месяце будет больше нуля.

Ответ: не может

№3

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\dots+\frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}=0$$

$$1-x+\frac{x(x-1)}{2!}+\dots+\frac{(-1)^n x\dots(x-n+1)}{n!}=0$$

Если $x=1$, то:

$0=0 \Rightarrow x=1$ является корнем

Если $x\neq 1$, то:

$$1-x+\frac{x(x-1)}{2!}+\dots+\frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}=0 \quad |:(x-1)$$

$$\frac{x}{2!}+\dots+\frac{(-1)^n x\dots(x-n+1)}{n!}=1 \quad |\times 2$$

$$x+\dots+\frac{(-1)^n 2\cdot x\dots(x-n+1)}{n!}=2$$

Если $x=2$, то:

$0=0 \Rightarrow x=2$ является корнем

Если $x=2$ не является корнем:

$$x-2+\dots+\frac{(-1)^n 2\cdot x(x-2)\dots(x-n+1)}{n!}=0 \quad |:x-2$$

$$1+\dots+\frac{(-1)^n 2\cdot x\dots(x-n+1)}{n!}=0$$

Проделав, так еще $n-2$ раза мы получили, что числа от 1 до $n-1$ являются корнями, и также останется выражение:

$$(-1)^n+\frac{(-1)^n(n-1)!\,x}{n!}=0 \quad |\times(n)$$

$(-1)^n n+(-1)^n x=0 \Rightarrow x=n \Rightarrow$ ~~Из проделанных [illegible]~~

ВАРИАНТ: 1701

ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ГФ 25-80

корнями ур-я $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\dots+\frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}=0$

являются числа от 1 до n => $x=\{1;2;3\dots n\}$

Ответ: $x=\{1;2;3;\dots n\}$

№4

⊕

Дано

$BC=a$

$AC=b$

HLBA; BDEC;

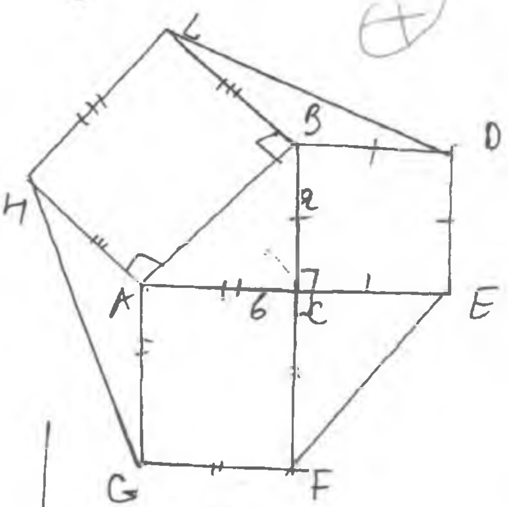
ACFG - квадраты

Найти:

а) S_{HLDEFG} - ?

б) $\frac{S_{HLDEFG}}{S_{ABC}}=\min$

$\frac{a}{b}$ - ?



а) Решение:

0) $\triangle ABC$ - пр-г => $BA=\sqrt{a^2+b^2}$

1) $S_{HLDEFG}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle CEF}+S_{BCDED}+$

$+S_{ACFG}+S_{HLBA}+S_{\triangle LBD}+S_{\triangle HAG}=$

$=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+a^2+b^2+(\sqrt{a^2+b^2})^2+$

$+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,a\cdot\sin(\angle LBD)+\frac{1}{2}b\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\angle HAG)=$

$=2a^2+2b^2+ab+0{,}5\sqrt{a^2+b^2}(a\cdot\sin\angle LBD+b\cdot\sin\angle HAG)$;

2) $\angle HAG+\angle HAB+\angle CAG+\angle BAC=360°$ => $\angle HAG=180°-\angle BAC$;

$tg(\angle BAC)=\frac{a}{b}$ => $arctg\frac{a}{b}=\angle BAC$ => $\angle HAG=180°-arctg\frac{a}{b}$ =>

$\sin\angle HAG=\sin(180°-arctg\frac{a}{b})=\sin(arctg\frac{a}{b})$

3) $\angle ABC+\angle LBA+\angle CBD+\angle LBD=360°$ => $\angle LBD=180°-\angle ABC$

$tg(\angle ABC)=\frac{b}{a}$ => $arctg\frac{b}{a}=\angle ABC$ => $\angle LBD=180°-arctg\frac{b}{a}$ =>

$\sin(\angle LBD)=\sin(180°-arctg\frac{b}{a})=\sin(arctg\frac{b}{a})$

4) 2, 3 → 1) $S_{HLDEFG}=2a^2+2b^2+ab+0{,}5\sqrt{a^2+b^2}(a\cdot\sin(arctg\frac{b}{a})+b$

$\cdot * \sin(arctg\frac{a}{b})$

$$S_{HLEDG} = 2a^2+2b^2+ab+0,5\sqrt{(a^2+b^2)}(a\sin(arctg\frac{b}{a})+b\cdot\sin(arctg\frac{a}{b}))$$

б) $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab$

$$\frac{S_{HLEDG}}{S_{ABC}} = \frac{ab+2a^2+2b^2+0,5\sqrt{(a^2+b^2)}(a\sin(arctg\frac{b}{a})+b\sin(arctg\frac{a}{b}))}{0,5ab}$$

$$=2+4\frac{a}{b}+4\frac{b}{a}+\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}(a\sin(arctg\frac{b}{a})+b\sin(arctg\frac{a}{b}))}{\cancel{0,5}ab}$$

минимальное выражение $4(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})=8$; при $a=b$ $\Rightarrow$

$$2+8+\frac{\sqrt{2a^2}(a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+a\frac{1}{\sqrt{2}})}{a^2} = 10\cancel{+2=12} =$$

$$=10+\frac{2a\cdot 2a}{a^2}=12$$

Ответ: $S_{A} = 2(a^2+b^2)+ab+0,5\cdot\sqrt{a^2+b^2}(a\sin(arctg\frac{b}{a})+\cancel{b}$
$+b\cdot\sin(arctg\frac{a}{b}))$

+.

$a:b=1:1$