Материалы заданий Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2015/2016 учебном году

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к усвоению образовательных программ технических ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления, умеющих математически "смоделировать" реальные ситуации из различных предметных областей и применить к ним наиболее подходящие математические методы.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на полное и безупречное решение. Они охватывают все разделы школьной программы, но носят, в большинстве, комплексный характер, позволяющий варьировать оценки в зависимости от проявленных в решении творческих подходов и продемонстрированных технических навыков. Участники должны самостоятельно определить разделы и теоретические факты программы, применимые в каждой задаче, разбить задачу на подзадачи, грамотно выполнить решение каждой подзадачи, синтезировать решение всей задачи из решений отдельных подзадач.

Успешное выполнение олимпиадной работы не требует знаний, выходящих за пределы школьной программы, но, как видно из результатов олимпиады, доступно не каждому школьнику, поскольку требует творческого подхода, логического мышления, умения увидеть и составить правильный и оптимальный план решения, четкого и технически грамотного выполнения каждой части решения, отбора допустимых решений из возможного их множества.

Умение справляться с такими заданиями приходит к участникам с опытом, который вырабатывается на тренировочном и отборочном этапах Олимпиады.

Решения вариантов заключительного этапа Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2015/2016 учебном году

11 класс. 7111

Задача 1. В стране «Энергетика» 150 заводов и некоторые из них соединены автобусными маршрутами, которые не останавливаются нигде, кроме этих заводов. Оказалось, что любые четыре завода можно разбить на две пары так, что между заводами каждой пары ходит автобус. Найдите наименьшее число пар заводов, которые могут быть соединены автобусными маршрутами.

Решение. Предположим, что какой-то завод X соединен автобусными маршрутами не более чем с 146 заводами. Тогда четверка заводов, состоящая из X и каких-то трех, с которыми он не соединен, не удовлетворяет условию задачи, поскольку X не может быть в паре ни с одним из трех оставшихся заводов. Поэтому каждый завод соединен хотя бы с 147 заводами. Следовательно, всего пар заводов, соединенных автобусными маршрутами, не меньше, чем $\frac{147\cdot150}{2} = 11025$.

Покажем теперь, что может быть ровно 11025 пар заводов. Занумеруем заводы числами от 1 до 150 и соединим автобусными маршрутами все заводы, кроме первого и 150-го, а также заводов, номера которых отличаются на единицу. Проверим, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Поскольку каждый завод соединен автобусными маршрутами с 147 заводами, общее количество пар соединенных заводов в точности равно $\frac{147\cdot150}{2} = 11025$.

Возьмем теперь любую четверку заводов. Возможны два случая.

1) Есть завод, не соединенный с двумя из трех остальных заводов. Пусть завод A не соединен с заводами B и C, но соединен с заводом D. Тогда заводы B и C должны быть соединены между собой, так как остатки от деления их номеров на 150 различаются на 2. Поэтому пары (A,D) и (B,C) нам подходят.

2) Все заводы соединены с не менее чем двумя из трех остальных заводов. Пусть завод A соединен с заводами B и C. По предположению завод D должен быть соединен с B или C. Если он соединен с B, то нам подойдут пары (A,C) и (B,D), а если с C, то пары (A,B) и (C,D).

Ответ: 11025.

Задача 2. Для числовой последовательности $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ выполняются соотношения $2x_n = x_0+x_1+\dots+x_{n-1}-x_n$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ Найдите каждый член x_n такой последовательности и значения сумм $S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$.

Решение. Имеем

$$x_n = (1/3)(x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}).$$

Тогда x_0 — любое, и по индукции

$$x_n = x_0 4^{n-1}/3^n \text{ при } n \geq 1,$$

$$S_n = x_0(4/3)^n.$$

Ответ: $x_n = x_0 4^{n-1}/3^n$ при $n \geq 1$, $S_n = x_0(4/3)^n$, x_0 — любое.

Задача 3. Шесть чисел записаны в ряд. Известно, что среди них есть единица и любые три соседних числа имеют одинаковое среднее арифметическое. Найдите максимальное значение среднего геометрического любых трех соседних в этом ряду чисел, если среднее арифметическое всех 6 чисел равно A.

Решение. Запишем в ряд $a_1, \ldots, a_6$. Из условий

$$(1/3)(a_1 + a_2 + a_3) = (1/3)(a_2 + a_3 + a_4),$$

$$(1/3)(a_2 + a_3 + a_4) = (1/3)(a_3 + a_4 + a_5),$$

$$(1/3)(a_3 + a_4 + a_5) = (1/3)(a_4 + a_5 + a_6)$$

получаем $a_1 = a_4 = x$, $a_2 = a_5 = y$, $a_3 = a_6 = z$. Запись в ряд имеет вид

$$x, y, z, x, y, z \qquad (1).$$

Среди 6 чисел есть по крайней мере три пары равных. Из (1) следует, что неважно, какое из значений равно 1, без ограничения общности положим $z = 1$ и перепишем (1) в виде $x, y, 1, x, y, 1$. Из условия на их среднее арифметическое имеем $(1/6)(x + y + 1 + x + y + 1) = (1/3)(x + y + 1) = A$, откуда

$$y = 3A - 1 - x.$$

Обозначим $p = 3A - 1$, тогда $y = p - x$ и среднее геометрическое трех соседних чисел выражается как $g(x) = \sqrt[3]{x(p - x)}$. Функция $g(x)$ имеет максимум в той же точке, что и функция

$$f(x) = g^3(x) = x(p - x).$$

Это парабола, ее максимум достигается в вершине с координатами $(p/2,\ p^2/4)$. Таким образом, максимальное значение функции $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ есть

$$\sqrt[3]{p^2/4} = \sqrt[3]{(3A - 1)^2/4}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{(3A - 1)^2/4}$.

Задача 4. Дан квадратный трехчлен $g(x)$, имеющий ровно один корень. Найдите этот корень, если известно, что и многочлен $g(ax+b)+g(cx+d)$ $(a \neq c)$ имеет ровно один корень.

Решение. Пусть x_0 — единственный корень многочлена $g(x)$. Тогда функция $g(x)$ сохраняет знак во всех точках $x \neq x_0$ и только $g(x_0)=0$. Следовательно, корнем многочлена $f(x)=g(ax+b)+g(cx+d)$ является только такая точка x_1, что $ax_1+b=cx_1+d=x_0$. Получаем уравнение с параметрами

$$(a-c)x_1=(d-b).$$

Так как по условию $a \neq c$, то $x_1=(d-b)/(a-c)$,

$$x_0=a(d-b)/(a-c)+b=(ad-bc)/(a-c).$$

Ответ: $x_0=(ad-bc)/(a-c)$.

Задача 5. При благоустройстве городского сада «Пифагор» сначала были проложены три аллеи, образующие прямоугольный треугольник с острым углом α. Следующие аллеи проложили как внешние квадраты на сторонах этого треугольника (получилась фигура, иллюстрирующая теорему Пифагора и называемая пифагоровыми штанами). Наконец, на третьем этапе соединили прямолинейными аллеями центр наибольшего квадрата с вершиной прямого угла, а центры двух меньших квадратов друг с другом. Определите, какая из аллей третьего этапа имеет большую длину? При каком значении угла α их длины различаются сильнее всего?

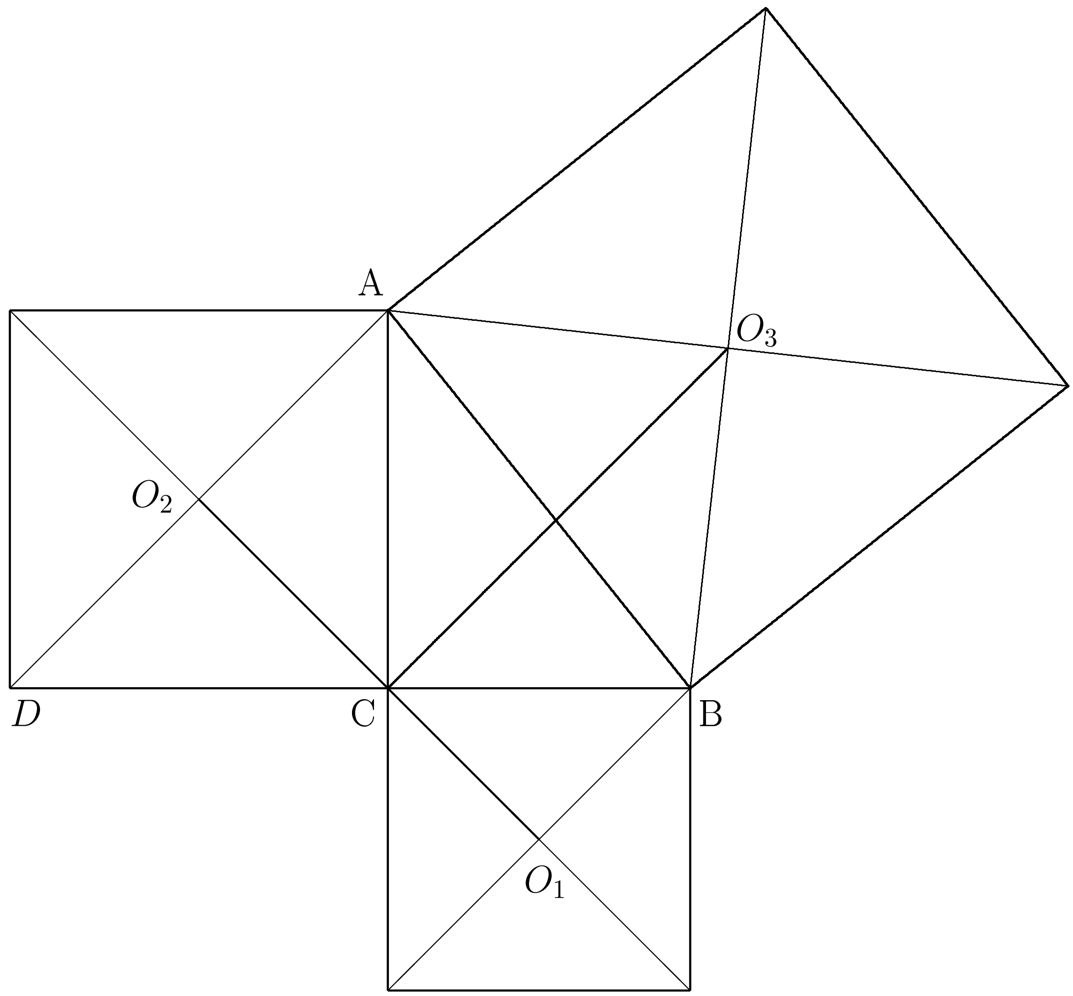
Решение. Обозначим исходный треугольник ABC (угол C – прямой), центры квадратов O_1, O_2, O_3, вершину одного из квадратов D (см. рис). Пусть угол A равен α.

Пусть стороны исходного треугольника, противолежащие вершинам A, B, C, имеют длины a, b, c соответственно.

$\angle O_2CA=\angle O_1CB=\pi/4$ (углы между диагональю и стороной квадрата), следовательно, отрезки O_2C и CO_1 лежат на одной прямой. Каждый из них равен половине диагонали своего квадрата. Значит,

$$O_1O_2=\frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Треугольники ABC и ABO_3 – прямоугольные, следовательно, они вписаны в одну и ту же окружность с диаметром AB. Таким образом, вписанные углы $\angle ACO_3$ и $\angle ABO_3$ опираются на одну и ту же дугу, т.е. они равны. Но $\angle ABO_3=\angle CDA=\pi/4$ (углы между диагональю и стороной квадрата). Следовательно, $\angle ACO_3=\angle CDA$.



$\angle DAB = \angle CAO_3$, т.к. каждый из них равен $\pi/4 + \angle CAB$. Таким образом, треугольники DAB и CAO_3 подобны. Отсюда $\dfrac{DA}{AC} = \dfrac{DB}{CO_3}$. Теперь можно найти

$$CO_3 = \frac{DB \cdot AC}{DA} = \frac{(a+b)\cdot b}{b\sqrt{2}} = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Получается, что $O_1O_2 = CO_3$, каков бы ни был исходный прямоугольный $\triangle ABC$.

Ответ: $O_1O_2 = CO_3$ при любом значении α.

10 класс.

Задача 1. В стране «Энергетика» 150 заводов и некоторые из них соединены автобусными маршрутами, которые не останавливаются нигде, кроме этих заводов. Оказалось, что любые четыре завода можно разбить на две пары так, что между заводами каждой пары ходит автобус. Найдите наименьшее число пар заводов, которые могут быть соединены автобусными маршрутами.

Решение. Предположим, что какой-то завод X соединен автобусными маршрутами не более чем с 146 заводами. Тогда четверка заводов, состоящая из X и каких-то трех, с которыми он не соединен, не удовлетворяет условию задачи, поскольку X не может быть в паре ни с одним из трех оставшихся заводов. Поэтому каждый завод соединен хотя бы с 147 заводами. Следовательно, всего пар заводов, соединенных автобусными маршрутами, не меньше, чем $\frac{147\cdot 150}{2} = 11025$.

Покажем теперь, что может быть ровно 11025 пар заводов. Занумеруем заводы числами от 1 до 150 и соединим автобусными маршрутами все заводы, кроме первого и 150-го, а также заводов, номера которых отличаются на единицу. Проверим, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Поскольку каждый завод соединен автобусными маршрутами с 147 заводами, общее количество пар соединенных заводов в точности равно $\frac{147\cdot 150}{2} = 11025$.

Возьмем теперь любую четверку заводов. Возможны два случая.

1) Есть завод, не соединенный с двумя из трех остальных заводов. Пусть завод A не соединен с заводами B и C, но соединен с заводом D. Тогда заводы B и C должны быть соединены между собой, так как остатки от деления их номеров на 150 различаются на 2. Поэтому пары (A,D) и (B,C) нам подходят.

2) Все заводы соединены с не менее чем двумя из трех остальных заводов. Пусть завод A соединен с заводами B и C. По предположению завод D должен быть соединен с B или C. Если он соединен с B, то нам подойдут пары (A,C) и (B,D), а если с C, то пары (A,B) и (C,D).

Ответ: 11025.

Задача 2. Для числовой последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ выполняются соотношения $2x_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_n$ при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ Найдите каждый член x_n такой последовательности и значения сумм $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$.

Решение. Имеем

$$x_n = (1/3)(x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}).$$

Тогда x_0 — любое, и по индукции

$$x_n = x_0 4^{n-1}/3^n \text{ при } n \geq 1,$$

$$S_n = x_0(4/3)^n.$$

Ответ: $x_n = x_0 4^{n-1}/3^n$ при $n \geq 1$, $\quad S_n = x_0(4/3)^n$, x_0 — любое.

Задача 3. Шесть чисел записаны в ряд. Известно, что среди них есть единица и любые три соседних числа имеют одинаковое среднее арифметическое. Найдите максимальное значение среднего геометрического любых трех соседних в этом ряду чисел, если среднее арифметическое всех 6 чисел равно A.

Решение. Запишем в ряд $a_1, \ldots, a_6$. Из условий

$$(1/3)(a_1 + a_2 + a_3) = (1/3)(a_2 + a_3 + a_4),$$

$$(1/3)(a_2 + a_3 + a_4) = (1/3)(a_3 + a_4 + a_5),$$

$$(1/3)(a_3 + a_4 + a_5) = (1/3)(a_4 + a_5 + a_6)$$

получаем $a_1 = a_4 = x,\ a_2 = a_5 = y,\ a_3 = a_6 = z$. Запись в ряд имеет вид

$$x, y, z, x, y, z \qquad (1).$$

Среди 6 чисел есть по крайней мере три пары равных. Из (1) следует, что неважно, какое из значений равно 1, без ограничения общности положим $z = 1$ и перепишем (1) в виде $x, y, 1, x, y, 1$. Из условия на их среднее арифметическое имеем $(1/6)(x + y + 1 + x + y + 1) = (1/3)(x + y + 1) = A$, откуда

$$y = 3A - 1 - x.$$

Обозначим $p = 3A - 1$, тогда $y = p - x$ и среднее геометрическое трех соседних чисел выражается как $g(x) = \sqrt[3]{x(p-x)}$. Функция $g(x)$ имеет максимум в той же точке, что и функция

$$f(x) = g^3(x) = x(p - x).$$

Это парабола, ее максимум достигается в вершине с координатами $(p/2,\ p^2/4)$. Таким образом, максимальное значение функции $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ есть

$$\sqrt[3]{p^2/4} = \sqrt[3]{(3A-1)^2/4}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{(3A-1)^2/4}$.

Задача 4. Дан квадратный трехчлен $g(x) = x^2 + ax + b$, имеющий ровно один корень. Найдите коэффициенты a и b, если известно, что и многочлен $g(x^5 + 2x - 1) + g(x^5 + 3x + 1)$ имеет ровно один корень.

Решение. Пусть x_0 — единственный корень многочлена $g(x)$. Тогда функция $g(x)$ сохраняет знак во всех точках $x \neq x_0$ и только $g(x_0) = 0$. Следовательно, корнем многочлена $f(x) = g(x^5 + 2x - 1) + g(x^5 + 3x + 1)$ является только такая точка x_1, что

$$x_1^5 + 2x_1 - 1 = x_1^5 + 3x_1 + 1 = x_0.$$

Упрощая уравнение: $2x_1 - 1 = 3x_1 + 1$, находим $x_1 = -2$. Следовательно, $x_0 = (-2)^5 + 2(-2) - 1 = -37$.

Из единственности корня следует, что $g(x)$ имеет вид

$$g(x) = (x - x_0)^2 = (x + 37)^2 = x^2 + 74x + 37^2,$$

откуда $a = 74$, $b = 37^2 = 1369$.

Ответ: $a = 74$, $b = 37^2 = 1369$.

Задача 5. Имеется 4 числа, не все из которых одинаковы. Если взять любые два из них, то отношение суммы этих двух чисел к сумме двух других чисел будет равно одному и тому же значению k. Найдите значение k. Укажите хотя бы одну четверку чисел, удовлетворяющих условию. Опишите все возможные четверки таких чисел и выясните, сколько их.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — такие числа. Запишем соотношения для сумм двух чисел парами:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_3 + x_4} = \frac{x_3 + x_4}{x_1 + x_2} = k, \tag{2}$$

$$\frac{x_1 + x_3}{x_2 + x_4} = \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} = k, \tag{3}$$

$$\frac{x_1 + x_4}{x_2 + x_3} = \frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_4} = k. \tag{4}$$

Положим $A = x_1 + x_2$, $B = x_3 + x_4$. Тогда из (2) получим $A = kB$, $B = kA$, $AB \neq 0$, откуда $(k^2 - 1)A = 0$, $k = \pm 1$. Такие же значения получим, анализируя соотношения (3) и (4).

Если $k = 1$, то уравнения (2)–(4) принимают вид $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$, $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, откуда находим общее решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = C \neq 0$. Этот случай не соответствует условию (все числа получились равными).

Если $k = -1$, то каждое из уравнений (2)–(4) принимает вид $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, и общим решением является

$$x_1 = A, \quad x_2 = B, \quad x_3 = C, \quad x_4 = -A - B - C, \quad (A + B)(A + C)(B + C) \neq 0.$$

Ответ: $k = -1$.
$x_1 = A, \quad x_2 = B, \quad x_3 = C, \quad x_4 = -A - B - C, \quad (A + B)(A + C)(B + C) \neq 0.$
Множество наборов (x_1, x_2, x_3, x_4) бесконечно.

9 класс. 7991

Задача 1. Мальчики и девочки образовали хоровод таким образом, что число детей, у которых сосед справа — того же пола, равно числу детей, у которых сосед справа — другого пола. Каково может быть число всех детей в хороводе?

Решение. Пусть n – число детей, справа от которых стоит ребенок другого пола, а m – число детей, справа от которых стоит ребенок того же пола. Изначально $n = m$, т.е. общее количество детей (n + m) четно. Будем менять местами двух рядом стоящих детей так, чтобы мальчики собрались все подряд с одной стороны хоровода, а девочки с другой. Тогда n станет равно 2. При каждой такой перестановке детей числа n и m либо не меняются, либо одно из них увеличивается на 2, а второе уменьшается на 2. Это значит, что остаток от деления разности $(m\breve{}n)$ на 4 не меняется.

Изначально этот остаток был равен 0.

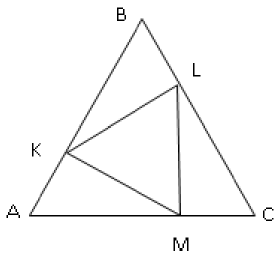
Если всего детей $2k$, $n = 2$, то $m = 2k\breve{}2$. Тогда $m\breve{}n = 2k\breve{}4$.

Для того, чтобы остаток от деления $m\breve{}n$ на 4 был равен нулю, надо, чтобы k делилось на 2. То есть общее число детей должно быть кратно 4.

Ответ. Любое натуральное число, кратное четырем.

Задача 2. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Каждая сторона треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярна какой-либо стороне исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит сторону исходного треугольника? Каково отношение площадей исходного и образованного треугольников?

Решение. Пусть точки K, L, M лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC правильного треугольника ABC, причем $KL \perp BC$, $LM \perp AC$, $MK \perp AB$.



1) Тогда $\angle MKL = 180° - \angle AKM - \angle LKB = 180° - 90° - 30° = 60°$. Так же можно показать, что $\angle KML = 60°$, значит, треугольник KLM равносторонний. Прямоугольные треугольники AKM, BLK и CML равны по катету и острому углу, а так как $CM = AK = 1/2AM$ (как катет, лежащий против угла 30^o), то $CM : AM = 1 : 2$. Аналогично, $AK : KB = 1 : 2$, $BL : LC = 1 : 2$.

2) Пусть $CM = AK = BL = a$. Тогда сторона исходного треугольника равна $3a$, а сторона вписанного $a\sqrt{3}$, т.е. в $\sqrt{3}$ раз меньше. Поскольку площади равносторонних треугольников относятся друг к другу, как квадраты сторон, то площадь вписанного будет в 3 раза меньше.

Ответ: 1) 1 : 2. **2)** 3 : 1.

Задача 3. Множество M состоит из n чисел, n нечетно, $n > 1$. Оно таково, что при замене любого его элемента на сумму остальных $n-1$ элементов из M сумма всех n элементов не изменяется. Найдите произведение всех n элементов множества M.

Решение. Пусть

$$M = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad x_1 + \cdots + x_n = S.$$

Заменим элемент x_1 на сумму остальных. Тогда

$$S = (S - x_1) + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = (S - x_1) + (S - x_1).$$

Рассуждая аналогично для других элементов, получаем, что

$$2x_k = S, \quad k = 1 \ldots n.$$

Таким образом, все элементы множества равны друг другу. Поскольку при замене одного слагаемого сумма не изменяется, то это слагаемое должно быть равно тому, на что оно заменяется, т.е.

$$x_1 = x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

С учетом равенства элементов получаем $x_1 = (n-1)x_1$, следовательно, $x_1 = 0$. Тогда произведение всех чисел множества M равно 0.

Ответ: 0.

Задача 4. Дан квадратный трехчлен $g(x)$, имеющий ровно один корень. Найдите этот корень, если известно, что и многочлен $g(ax+b) + g(cx+d)$ $(a \neq c)$ имеет ровно один корень.

Решение. Пусть x_0 — единственный корень многочлена $g(x)$. Тогда функция $g(x)$ сохраняет знак во всех точках $x \neq x_0$ и только $g(x_0) = 0$. Следовательно, корнем многочлена $f(x) = g(ax+b) + g(cx+d)$ является только такая точка x_1, что $ax_1 + b = cx_1 + d = x_0$. Получаем уравнение с параметрами

$$(a - c)x_1 = (d - b).$$

Так как по условию $a \neq c$, то $x_1 = (d-b)/(a-c)$,

$$x_0 = a(d-b)/(a-c) + b = (ad - bc)/(a-c).$$

Ответ. $x_0 = -11$.

Задача 5. Имеется 4 числа, не все из которых одинаковы. Если взять любые два из них, то отношение суммы этих двух чисел к сумме двух других чисел будет равно одному и тому же значению k. Найдите значение k. Укажите хотя бы одну четверку чисел, удовлетворяющих условию. Опишите все возможные четверки таких чисел и выясните, сколько их.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — такие числа. Запишем соотношения для сумм двух чисел парами:

$$\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4} = \frac{x_3+x_4}{x_1+x_2} = k, \tag{2}$$

$$\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4} = \frac{x_2+x_4}{x_1+x_3} = k, \tag{3}$$

$$\frac{x_1+x_4}{x_2+x_3} = \frac{x_2+x_3}{x_1+x_4} = k. \tag{4}$$

Положим $A = x_1 + x_2,\ B = x_3 + x_4$. Тогда из (2) получим $A = kB$, $B = kA$, $AB \neq 0$, откуда $(k^2 - 1)A = 0,\ k = \pm 1$. Такие же значения получим, анализируя соотношения (3) и (4).

Если $k = 1$, то уравнения (2)–(4) принимают вид $x_1+x_2 = x_3+x_4,\ x_1+x_3 = x_2 + x_4,\ x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, откуда находим общее решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = C \neq 0$. Этот случай не соответствует условию (все числа получились равными).

Если $k = -1$, то каждое из уравнений (2)–(4) принимает вид $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$, и общим решением является

$$x_1 = A,\quad x_2 = B,\quad x_3 = C,\quad x_4 = -A - B - C,\quad (A+B)(A+C)(B+C) \neq 0.$$

Ответ: $k = -1$.
$x_1 = A,\quad x_2 = B,\quad x_3 = C,\quad x_4 = -A - B - C,\quad (A+B)(A+C)(B+C) \neq 0.$
Множество наборов (x_1, x_2, x_3, x_4) бесконечно.

8 класс. 7881

Задача 1. Установок 3 типов всего не более 200. Установок типа 2 в 4 раза больше, чем типа 1, число установок типа 3 кратно числу установок типа 1. Если бы установок типа 3 было в 5 раз больше, то их было бы на 99 больше, чем установок типа 2. Найдите число установок каждого типа.

Решение. Если x_1, x_2, x_3 — количества установок типов 1,2,3, то условия представляютсчя соотношениями

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 200, \tag{1}$$

$$x_2 = 4x_1, \tag{2}$$

$$x_3 = kx_1, \tag{3}$$

$$5x_3 = x_2 + 99, \tag{4}$$

$$k, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}.$$

Из (2)-(4) получаем $(5k-4)x_1 = 99$, откуда следует, что $5k-4$ и x_1 — натуральные делители числа 99, т. е. эти величины принадлежат множеству $\{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$.

Если $x_1 = 1$, то $5k = 99 + 4$, это невозможно, так как k целое.

Если $x_1 = 3$, то $5k = 33 + 4$, это невозможно.

Если $x_1 = 9$, то $5k = 11 + 4$, $k = 3$, $x_2 = 36$, $x_3 = 27$, все условия выполняются.

Если $x_1 = 11$, то $5k = 9 + 4$, это невозможно.

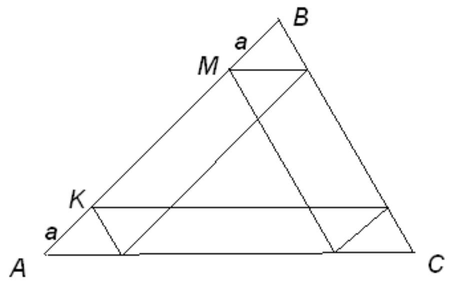
Если $x_1 = 33$, то $5k = 3 + 4$, это невозможно.

Если $x_1 = 99$, то $5k = 1 + 4$, $k = 1$, $x_3 = 99, x_2 = 4 \cdot 99$, не выполнено неравенство (1).

Ответ: 9, 36, 27.

Задача 2. На стороне AB треугольника ABC взята точка M. Она начинает двигаться параллельно BC до пересечения с AC, затем она движется параллельно AB до пересечения с BC и так далее. Верно ли, что через некоторое число таких шагов точка M вернется в исходное положение? Если это верно, то каково минимальное число шагов, достаточное для возврата?

Решение. Примем длину стороны AB за 1, и пусть точка M отстоит на a от точки B. Из свойств параллелограмма следует равенство маленьких треугольников, поэтому через 3 шага точка M окажется на расстоянии a от точки А, то есть на расстоянии $1 - a$ от точки B. Еще через 3 шага точка окажется на расстоянии $1 - (1 - a) = a$ от точки B, то есть вернется в исходное положение.



Особый случай – при $a = 1/2$. Тогда $1 - a = a$, и возврат произойдет уже через 3 шага.

Ответ: Верно.

Достаточно 3 шагов, если точка M делит сторону AB пополам,

6 шагов в остальных случаях.

Задача 3. Множество M состоит из n чисел, n нечетно, $n > 1$. Оно таково, что при замене любого его элемента на сумму остальных $n-1$ элементов из M сумма всех n элементов не изменяется. Найдите произведение всех n элементов множества M.

Решение. Пусть

$$M = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_1 + \dots + x_n = S.$$

Заменим элемент x_1 на сумму остальных. Тогда

$$S = (S - x_1) + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (S - x_1) + (S - x_1).$$

Рассуждая аналогично для других элементов, получаем, что

$$2x_k = S, \quad k = 1 \dots n.$$

Таким образом, все элементы множества равны друг другу. Поскольку при замене одного слагаемого сумма не изменяется, то это слагаемое должно быть равно тому, на что оно заменяется, т.е.

$$x_1 = x_2 + x_3 + \dots + x_n.$$

С учетом равенства элементов получаем $x_1 = (n-1)x_1$, следовательно, $x_1 = 0$. Тогда произведение всех чисел множества M равно 0.

Ответ: 0.

Задача 4. Числа x, y, z таковы, что отношения

$$\frac{x+y}{z}, \quad \frac{x+z}{y}, \quad \frac{y+z}{x}$$

принимают одинаковое значение. Найдите его.

Решение. Пусть k — значение такого отношения. Тогда

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} = k,$$

откуда $xyz \neq 0$ и

$$x + y = kz, \quad x + z = ky, \quad y + z = kx.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$2(x + y + z) = k(x + y + z).$$

Возможны два случая:

$$x + y + z = 0 \tag{1}$$

или
$$x + y + z \neq 0, \quad k = 2. \tag{2}$$
В случае (1) получаем $z = -(x + y)$,
$$k = \frac{x+y}{-(x+y)} = -1,$$
всем условиям удовлетворяют, например, числа
$$x = y = 1, \quad z = -2.$$
В случае (2) всем условиям удовлетворяют, например, числа
$$x = y = z = 1.$$

Ответ: -1 или 2.

Задача 5. Маша, готовясь принять гостей, разложила 13 апельсинов и 3 яблока в 4 вазы, по 4 фрукта в каждую. Затем ее сестра Саша решила изменить состав фруктов в вазах. Она забирала одновременно по одному фрукту из каждой вазы и заменяла каждый фрукт на противоположный: яблоко на апельсин, а апельсин — на яблоко. Или же она заменяла на противоположные все четыре фрукта из одной вазы. Могла ли Саша получить во всех 4 вазах одновременно одинаковые фрукты: только яблоки или только апельсины?

Решение. Если интерпретировать вазы и фрукты в вазах как таблицу 4x4, каждому апельсину поставить в соответствие +1, а яблоку -1, то замена Сашей фруктов на противоположные равносильна смене знака в таблице у всех чисел в одной строке или в одном столбце. При этом знак произведения всех чисел строки или столбца меняться не будет, а, следовательно, и знак произведения чисел в таблице. Изначально произведение равно -1. А если все фрукты будут одинаковые, то произведение будет равно 1. А это невозможно.

Ответ. Не сможет.

7 класс. 7771

Задача 1. Установок 3 типов всего не менее 100. Установок типа 2 в 4 раза больше, чем типа 1, число установок типа 3 кратно числу установок типа 1. Если бы установок типа 3 было в 5 раз больше, то их было бы на 22 больше, чем установок типа 2. Найдите число установок каждого типа.

Решение. Если x_1, x_2, x_3 — количества установок типов 1,2,3, то условия представляютсчя соотношениями

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100, \tag{1}$$

$$x_2 = 4x_1, \tag{2}$$

$$x_3 = kx_1, \tag{3}$$

$$5x_3 = x_2 + 22, \tag{4}$$

$$k, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}.$$

Из (2)-(4) получаем $(5k-4)x_1 = 22$, откуда следует, что $5k-4$ и x_1 — натуральные делители числа 22, т. е. эти величины принадлежат множеству $\{1, 2, 11, 22\}$.

Если $x_1 = 1$, то $5k = 22 + 4$, это невозможно, так как k целое.

Если $x_1 = 2$, то $5k = 11 + 4$, $k = 3$, $x_2 = 8$, $x_3 = 6$, не выполняется (1).

Если $x_1 = 11$, то $5k = 2 + 4$, это невозможно.

Если $x_1 = 22$, то $5k = 1 + 4$, $k = 1$, $x_2 = 88$, $x_3 = 22$, все условия выполняются.

Ответ: 22, 88, 22.

Задача 2. Треугольник разрезали на два треугольника. Найдите наибольшее значение N такое, что среди 6 углов этих двух треугольников ровно N одинаковых.

Решение. Пример на $N = 4$ – равнобедренный прямоугольный треугольник, поделенный на два равнобедренных прямоугольных: четыре угла по $45°$. Допустим, нашлось пять равных углов. Тогда в одном из треугольников равны все три угла, то есть все они, а с ними и два угла другого треугольника равны $60°$. Но тогда оба эти треугольника – равносторонние, а из двух равносторонних треугольников нельзя сложить треугольник.

Ответ: N=4.

Задача 3. Множество M состоит из n чисел, n нечетно, $n > 1$. Оно таково, что при замене любого его элемента на сумму остальных $n-1$ элементов из M сумма всех n элементов не изменяется. Найдите произведение всех n элементов множества M.

Решение. Пусть

$$M = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_1 + \dots + x_n = S.$$

Заменим элемент x_1 на сумму остальных. Тогда

$$S = (S - x_1) + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (S - x_1) + (S - x_1).$$

Рассуждая аналогично для других элементов, получаем, что

$$2x_k = S, \quad k = 1 \dots n.$$

Таким образом, все элементы множества равны друг другу. Поскольку при замене одного слагаемого сумма не изменяется, то это слагаемое должно быть равно тому, на что оно заменяется, т.е.

$$x_1 = x_2 + x_3 + \dots + x_n.$$

С учетом равенства элементов получаем $x_1 = (n-1)x_1$, следовательно, $x_1 = 0$. Тогда произведение всех чисел множества M равно 0.

Ответ: 0.

Задача 4. Числа x, y, z таковы, что отношения

$$\frac{x+y}{z}, \quad \frac{x+z}{y}, \quad \frac{y+z}{x}$$

принимают одинаковое значение. Найдите его.

Решение. Пусть k — значение такого отношения. Тогда

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} = k,$$

откуда $xyz \neq 0$ и

$$x + y = kz, \quad x + z = ky, \quad y + z = kx.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$2(x + y + z) = k(x + y + z).$$

Возможны два случая:

$$x + y + z = 0 \tag{1}$$

или

$$x + y + z \neq 0, \quad k = 2. \tag{2}$$

В случае (1) получаем $z = -(x + y)$,

$$k = \frac{x + y}{-(x + y)} = -1,$$

всем условиям удовлетворяют, например, числа

$$x = y = 1, \quad z = -2.$$

В случае (2) всем условиям удовлетворяют, например, числа

$$x = y = z = 1.$$

Ответ: -1 или 2.

Задача 5. Мама поставила на стол вазу с 15 мандаринами. Один из гостей взял два мандарина, мама взамен положила одно яблоко. Другие гости тоже стали брать по два фрукта. Каждый раз, когда гость брал два одинаковых фрукта (два мандарина или два яблока), мама взамен клала в вазу одно яблоко; если же гость брал два разных фрукта (один мандарин и одно яблоко), мама клала в вазу один мандарин. В итоге в вазе остался один фрукт. Какой?

Решение. Можно заметить, что количество мандаринов либо не меняется, либо уменьшается на два. Поскольку мандаринов было нечетное количество, в конце один мандарин обязательно останется.

Ответ. Остался мандарин.