**Материалы заданий Олимпиады школьников «Надежда энергетики»**
**по предмету «математика» в 2015/2016 учебном году**

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к усвоению образовательных программ технических ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления, умеющих математически "смоделировать" реальные ситуации из различных предметных областей и применить к ним наиболее подходящие математические методы.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на полное и безупречное решение. Они охватывают все разделы школьной программы, но носят, в большинстве, комплексный характер, позволяющий варьировать оценки в зависимости от проявленных в решении творческих подходов и продемонстрированных технических навыков. Участники должны самостоятельно определить разделы и теоретические факты программы, применимые в каждой задаче, разбить задачу на подзадачи, грамотно выполнить решение каждой подзадачи, синтезировать решение всей задачи из решений отдельных подзадач.

Успешное выполнение олимпиадной работы не требует знаний, выходящих за пределы школьной программы, но, как видно из результатов олимпиады, доступно не каждому школьнику, поскольку требует творческого подхода, логического мышления, умения увидеть и составить правильный и оптимальный план решения, четкого и технически грамотного выполнения каждой части решения, отбора допустимых решений из возможного их множества.

Умение справляться с такими заданиями приходит к участникам с опытом, который вырабатывается на тренировочном и отборочном этапах Олимпиады.

Материалы заданий отборочного этапа Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2015/2016 учебном году

## 11 класс

**1.** Известно, что свободный член $a_0$ многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами по модулю меньше 100, а $P(20) = P(16) = 2016$. Найдите $a_0$.

**Решение.** Можно записать $P(x) - 2016 = (x-16)(x-20)Q(x)$, где $Q(x)$-многочлен с целыми коэффициентами. Свободный член правой части равен $320k$, где $k$ – целое число. Таким образом, $a_0 = 2016 - 320k$. Условию удовлетворяет только значение $k = 6$, $a_0 = 96$.

**Ответ.** $a_0 = 96$.

**2.** Найдите решение системы

$$\begin{cases} 5x^7 + 3y^2 + 5u + 4v^4 = -2 \\ 2x^7 + 8y^2 + 7u + 4v^4 = \frac{6^5}{3^4 \cdot 4^2} \\ 8x^7 + 2y^2 + 3u + 6v^4 = -6 \\ 5x^7 + 7y^2 + 7u + 8v^4 = \frac{8^3}{2^6 \cdot 4} \end{cases}$$

**Решение.**
Рассмотрим систему с такими же коэффициентами, но без степеней.
Сложим первое уравнение с четвертым, а второе – с третьим.

$$\begin{cases} 10(x+y) + 12(u+v) = 0 \\ 10(x+y) + 10(u+v) = 0 \end{cases}$$

Откуда

$$y = -x, \qquad v = -u$$

Подставляя в предыдущую систему, имеем

$$\begin{cases} 2x + u = -2 \\ -6x + 3u = 6 \end{cases}$$

Следовательно, $u = 0$, $x = -1$ и, далее, $y = 1$, $v = 0$. Теперь, чтобы получить "настоящее" решение, остается вычислить корни соответствующих степеней из найденных величин.

**Ответ.** $\{x, y, u, v\} = \{-1, \pm 1, 0, 0\}$

**3.** В квадратной таблице из 2015 строк и столбцов расставлены положительные числа. Произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 2, а произведение чисел в любом квадрате 3x3 равно 1. Какое число стоит в центре таблицы?

**Решение**

Рассмотрим первые 3 строки таблицы. Из дополнительного условия следует, что если покрывать эти строки "встык" квадратами размера $3 \times 3$, двигаясь одновременно слева и справа навстречу, то 336-й квадрат слева и 336-й квадрат справа перекроются одним столбцом (т.к. $(336 \cdot 3) \cdot 2 = 2015 + 1$). Обозначим произведение чисел в этом столбике (их 3 штуки) через $M$.

Тогда произведение всех чисел в первых 3-х строках таблицы равно, с одной стороны, $2^3$, а с другой стороны, $1/M$.

Таким образом, $M = \dfrac{1}{2^3}$.

Теперь рассмотрим средний (1008-й) столбец таблицы. Он аналогичным образом разбивается на $336 \cdot 2$ блоков по 3 элемента, которые перекрываются на центральном элементе таблицы (если двигаться сверху и снизу навстречу). Обозначим этот элемент $C$.

Произведение всех чисел этого столбца равно 2. Поэтому $2 = M^{2 \cdot 336}/C$.

Откуда $C = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2^{2 \cdot 336 \cdot 3}} = 2^{-2017}$.

**Ответ.** в центре таблицы стоит число $2^{-2017}$.

**4.** Числа $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ записаны в ряд. Средние арифметические любых трех соседних чисел равны. Найдите все значения $\alpha$, при которых это возможно.

**Решение.** Обозначим данные 5 чисел через $x_1$, $x_2$, …, $x_5$. По условию,

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_4 = a,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = x_3 + x_4 + x_5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_5 = b,$$

Рассмотрим пару полученных равенств.

$$\begin{cases} \sin\alpha = \sin 2\alpha, \\ \cos\alpha = \cos 2\alpha. \end{cases}$$

Из первого $\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$, т.е. $\sin\alpha(1 - 2\cos\alpha) = 0$

1. Если $\sin\alpha = 0$, то $\alpha = \pi n$. Тогда $\sin 2\alpha = \sin 2\pi n = 0 = \sin\alpha$. $\cos\alpha = \cos\pi n = (-1)^n$, $\cos 2\alpha = \cos 2\pi n = 1$. Следовательно, $(-1)^n = 1$, что может быть только при четных $n$. Таким образом, в первом случае получаем $\alpha = 2\pi k$.

2. Если $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$. Тогда $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $2\alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi k$. Но тогда $\cos\alpha \neq \cos 2\alpha$. Таким образом, во втором случае решений нет.

**Ответ.** $\alpha = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

**5.** Решите уравнение $2^{[\sin x]} = 3^{1-\cos x}$, в котором $[a]$ означает целую часть числа $a$.

**Решение.** Целое число $[\sin x]$ может принимать только значения $0, \pm 1$.

1) Если $[\sin x] = 0$, то $2^0 = 1$. Следовательно, $3^{1-\cos x} = 1$, откуда $\cos x = 1$. Решением этого уравнения являются $x = 2\pi n$. Заметим, что $\sin x = 0$ при таких $x$.

2) Если $[\sin x] = -1$, то $3^{1-\cos x} = 2^{-1} = 1/2$. Но $1 - \cos x \geqslant 0$, следовательно, $3^{1-\cos x} \geqslant 1$. Поэтому уравнение $3^{1-\cos x} = 1/2$ не имеет решений.

3) Если $[\sin x] = 1$, то $x = \pi/2 + 2\pi k$. При этих значениях $\cos x = 0$. При подстановке в уравнение это дает $2^1 = 3^1$, чего не может быть.

**Ответ.** $x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

## 10 класс

**1.** Известно, что $x + \dfrac{1}{x} \leqslant 4$. Найдите область значений функции

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

**Решение.** Пусть $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Если $x > 0$, то $g(x) \geqslant 2$. Вместе с условием задачи получаем, что $2 \leqslant g(x) \leqslant 4$ при $x > 0$. Теперь

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = g(x)\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 1\right) = g(x)\left(g^2(x) - 3\right).$$

Если $g(x) \geqslant 2$, то $g(x)\left(g^2(x) - 3\right) \geqslant 2(2^2 - 3) = 2$.

Если $g(x) \leqslant 4$, то $g(x)\left(g^2(x) - 3\right) \leqslant 4(4^2 - 3) = 52$.

Итак, если $x > 0$, то $f(x) \in [2; 52]$.

Заметим, что обе границы достигаются. Нижняя — при $x = 1$, верхняя — при таком $x$, при котором $g(x) = 4$. Он находится из уравнения $x + 1/x = 4$ и равен $2 \pm \sqrt{3}$.

Пусть теперь $x < 0$. Функции $g(x)$ и $f(x)$ нечетны, поэтому, если $x < 0$, то $g(x) \leqslant -2$, $f(x) \leqslant -2$

Для всех $M < 0$ из неравенства $x < \sqrt[3]{M}$ следует, что $f(x) = x^3 + 1/x^3 < x^3 < M$. Это означает, что функция $f(x)$ не ограничена снизу, т.е. любое отрицательное число, меньшее $-2$, принадлежит области ее значений.

**Ответ.** $f(x) \in [-\infty; -2] \cup [2; 52]$.

**2.** Усеченной разностью чисел $x$ и $y$ называется операция $x \dot{-} y$, результат которой равен обычной разности $x - y$, если $x \geqslant y$, и нулю, если $x < y$. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x \dot{-} (y + 6) = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$.

**Решение.**

Первое уравнение системы эквивалентно неравенству $5x \leqslant y + 6$. Выразим $y$ из второго уравнения ($y = (1 - 2x)/3$) и подставим в неравенство.

$$5x \leqslant \frac{1 - 2x}{3} + 6 \iff 17x \leqslant 19$$

Таким образом, система имеет бесконечное количество решений, лежащих на луче $\begin{cases} x \leqslant 19/17, \\ y = (1 - 2x)/3. \end{cases}$ Если решать начальное неравенство относительно $y$, то получится альтернативная запись ответа $\begin{cases} x = (1 - 3y)/2, \\ y \geqslant -7/17. \end{cases}$

**Ответ.** $\begin{cases} x \leqslant 19/17, \\ y = (1-2x)/3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = (1-3y)/2, \\ y \geqslant -7/17. \end{cases}$

**3.** В квадратной таблице из 2015 строк и столбцов расставлены положительные числа. Произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в любом квадрате размером 1008 х 1008 клеток равно 2. Какое число стоит в центре таблицы?

**Решение**

Рассмотрим первые 1008 строк таблицы. Из дополнительного условия следует, что если покрывать эти строки двумя квадратами размера $1008 \times 1008$, то эти квадраты перекроются одним столбцом. Обозначим произведение чисел в этом столбике (их 1008 штук) через $M$.

Тогда произведение всех чисел в первых 1008 строках таблицы равно, с одной стороны, 1, а с другой стороны, $2^2/M$.

Таким образом, $M = 4$.

Теперь рассмотрим средний столбец таблицы. Он аналогичным образом разбивается на два блока по 1008 элементов, которые перекрываются на центральном элементе таблицы (если двигаться сверху и снизу навстречу). Обозначим этот элемент $C$.

Произведение всех чисел этого столбца равно 1. Поэтому $1 = M^2/C$.

Откуда $C = M^2 = 16$.

**Ответ.** В центре таблицы стоит число 16.

**4.** Маленькая егоза побежала наперегонки с лошадкой, установленной на механической карусели. Через $a$ секунд она обнаружила, что лошадка, сделав круг, догнала ее. Мгновенно развернувшись, маленькая егоза побежала с той же скоростью навстречу лошадке и встретилась с ней через $\frac{a}{2}$ секунд. Определите, за какое время карусель совершает полный оборот, если все движения равномерны.

**Решение.**

Пусть $v$ – угловая скорость егозы, $U$ – угловая скорость карусели, а $x$ – период обращения карусели. Отметим, что $\frac{a}{2} < x < a$. Расстояние, которое егоза пробежала за $a$ секунд, карусель прошла за $a - x$ секунд. То есть имеем

$$va = U(a - x).$$

После разворота расстояние, которое егоза пробежала за $\frac{a}{2}$ секунд, карусель прошла бы за $x - \frac{a}{2}$ секунд, то есть

$$\frac{va}{2} = U\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Отсюда получаем уравнение
$$\frac{a-x}{a} = \frac{2x-a}{a}$$
Находим из него $x = \frac{2}{3}a$.

**Ответ.** Карусель совершает полный оборот за $\frac{2}{3}a$ секунд.

**5.** Решите уравнение $[\sin x]^2 = \cos^2 x - 1$, в котором $[a]$ означает целую часть числа $a$.

**Решение.** Целое число $[\sin x]$ может принимать только значения $0, 1, -1$.

1) Если $[\sin x] = 0$, то $\cos^2 x = 0 + 1 = 1$, т.е. $\cos x = \pm 1$. Решая это уравнение, находим $x = \pi n$. В этих точках $\sin^2 x = 0$. Равенство верно.

2) Если $[\sin x] = \pm 1$, то $\cos^2 x = (\pm 1)^2 + 1 = 2$, чего не бывает. Ответом будет являться только первый случай.

**Ответ.** $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

## 9 класс

**1.** Мост через реку соединяет два разных региона страны. Как-то раз один из регионов подновил краску на относящейся к нему части моста. Если бы свежеокрашенная часть моста оказалась на 30% больше, то неподкрашенная часть была бы на 50% меньше. Может ли окрашенная часть моста составлять ровно его половину? Какую часть моста нужно докрасить (или наоборот), чтобы была окрашена ровно половина моста?

**Решение**

Пусть $x$ и $y$ – доли подкрашенной и не... частей. Ясно, что $x+y=1$. Согласно условию, $1,3x+0,5y=1$. Получаем уравнение

$$x+y=1,3x+0,5y$$

из которого можно найти отношение

$$\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$$

Теперь можно долю окрашенной части

$$\frac{x}{x+y}=\frac{1}{1+y/x}=\frac{1}{1+3/5}=\frac{5}{8}=0,625=62,5\%$$

Таким образом, подкрашено больше половины моста на 12,5%.

**Ответ:** подкрашено больше половины моста на 12,5%.

**2.** Усеченной разностью чисел $x$ и $y$ называется операция $x \dot{-} y$, результат которой равен обычной разности $x-y$, если $x \geqslant y$, и нулю, если $x<y$.

Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x \dot{-} y = 0 \\ x+2y=1 \end{cases}$.

**Решение.** Первое уравнение системы эквивалентно неравенству $2x \leqslant y$. Выразим $y$ из второго уравнения $(y=(1-x)/2)$ и подставим в неравенство.

$$\frac{1-x}{2} \geqslant 2x \iff 1 \geqslant 5x$$

Таким образом, система имеет бесконечное количество решений, лежащих на луче $\begin{cases} x \leqslant 1/5, \\ y=(1-x)/2. \end{cases}$ Если решать начальное неравенство относительно $y$, то получится альтернативная запись ответа $\begin{cases} x=1-2y, \\ y \geqslant 2/5. \end{cases}$

**Ответ.** $\begin{cases} x \leqslant 1/5, \\ y = (1-x)/2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 1-2y, \\ y \geqslant 2/5. \end{cases}$

**3.** В ряд выписаны 2015 положительных чисел. Произведение всех чисел равно 2015, а произведение любых трех подряд стоящих чисел равно 1. Чему равно 1008-ое по счету число?

**Решение**

Из дополнительного условия следует, что если разбивать ряд на блоки по 3 числа "встык", двигаясь одновременно слева и справа навстречу, то 336-й блок слева и 336-й блок справа перекроются на среднем числе. Обозначим это число $C$.

Тогда произведение всех чисел равно, с одной стороны, 2015, а с другой стороны, $1/C$. Таким образом, $C = \dfrac{1}{2015}$.

**Ответ.** 1008-ое по счету число равно $\dfrac{1}{2015}$.

**4.** Существует ли выпуклый многоугольник, имеющий 2015 диагоналей?

**Решение.**

Число диагоналей выпуклого $n$-угольника равно

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-3n}{2}.$$

Решим уравнение

$$\frac{n^2-3n}{2} = 2015 \iff n^2 - 3n - 4030 = 0.$$

Его дискриминант $D = 9 + 4 \cdot 4030 = 16129$. Заметим, что $120^2 < 16129 < 130^2$ и $D$ заканчивается цифрой 9. Если $D$ является квадратом целого числа $m$, то $m$ заканчивается цифрой 3 или 7, т.е. возможны только два варианта: $m = 123$ или $m = 127$. Легко проверяется, что $123^2 = (120+3)^2 \neq 16129$, а $127^2 = (130-3)^2 = 16900 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 130 = 16129$. Отсюда $n = \dfrac{3 \pm 127}{2}$. Выбирая положительное значение, получаем $n = 65$. Таким образом, указанный многоугольник существует, это 65-угольник.

**Ответ.** Да. Это 65-угольник.

**5.** Дан отрезок AB. Пользуясь только циркулем, необходимо отметить точку C, находящуюся на продолжении отрезка AB и такую, что отрезок AC вдвое длиннее исходного. Опишите алгоритм (последовательность действий) такого построения.

**Решение.** Достаточно сообразить, что самая длинная диагональ правильного шестиугольника является диаметром окружности, в которую он вписан, а его сторона равна радиусу этой окружности.

**Ответ.** Алгоритм построения.

1. Построить окружность с центром в т. B и радиусом AB.

2. Раствором циркуля, равным AB, отметить на полученной окружности шесть равноудаленных точек, начиная от т. A.

3. Точка, симметричная точке A относительно центра окружности, и будет являться искомой т. C.

## 8 класс

**1.** После очередного трудового сезона электрифицированная часть Средиземской Тундры увеличилась вдвое. При этом ее неэлектрифицированная часть сократилась на 25%. Какую часть всей Тундры составляла в начале трудового сезона ее не обеспеченная электричеством часть?

**Решение**

Пусть $x$ и $y$ – доли электрифицированной и не... частей. Ясно, что $x + y = 1$. Согласно условию, $2x + 0,75y = 1$. Получаем уравнение

$$x + y = 2x + 0,75y$$

из которого можно найти отношение

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$$

Теперь можно найти нужное отношение

$$\frac{y}{x+y} = \frac{1}{x/y+1} = \frac{1}{1/4+1} = \frac{4}{5} = 0,8 = 80\%$$

**Ответ:** 80%

**2**. Таблица чисел из 20 строк и 15 столбцов, $A_1, \dots, A_{20}$ — суммы чисел в строках, $B_1, \dots, B_{15}$ — суммы чисел в столбцах.

а) Возможно ли, что $A_1 = \dots = A_{20} = B_1 = \dots = B_{15}$?

б) Если равенства п. а) выполняются, то чему равна сумма $A_1 + \dots + A_{20} + B_1 + \dots + B_{15}$?

**Решение** Пусть $A_i = B_j = X$ при $i = 1, \dots 20$ и $j = 1, \dots, 15$. Рассмотрим сумму $S$ всех элементов таблицы. Имеем $S = 20X = 15X$, $X = 0$ и $A_1 + \dots + A_{20} + B_1 + \dots + B_{15} = 0$. Примером такой таблицы является, например, таблица из одних нулей. Другие случаи рассматривать нет необходимости.

**Ответ**: а) — да, б) — 0.

**3.** Можно ли разбить числа от 1 до 89 на группы так, чтобы в каждой группе было не менее четырех чисел, а одно из чисел в каждой группе было бы равно сумме остальных чисел той же группы?

**Решение**. Пусть в каждой группе $x_4 = x_1 + x_2 + x_3$. Тогда сумма всех чисел этой группы $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2(x_1 + x_2 + x_3)$ четна. Таким образом, сумма всех чисел множества как сумма четных слагаемых четна.

С другой стороны, она равна

$$1 + \dots + 89 = \frac{1}{2}\left((1+89) + (2+88) + \ldots + (89+1)\right) = \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 89 = 45 \cdot 89$$

и нечетна.

Полученное противоречие дает отрицательный ответ.

**Ответ.**: нельзя.

**4.** Рано утром включили насос и начали заполнять бассейн. В 10 ч утра подключили еще один насос и к 12 ч дня бассейн заполнился наполовину. В 17 ч бассейн был заполнен. Каким может быть самое позднее время включения первого насоса ?

**Решение.** Пусть объем бассейна равен $V$. Обозначим через $x$ и $y$ производительности насосов, а через $t$ время работы первого насоса до момента включения второго.

Тогда $tx + 2x + 2y = V/2$, $5x + 5y = V/2$.

Откуда $tx + 2x + 2y = 5x + 5y$ или $tx = 3x + 3y$.

В итоге $t = 3 + 3y/x$. Так как $x > 0$ и $y > 0$, то $t \geqslant 3$.

**Ответ.** Первый насос включили не позднее 7 ч утра.

**5.** Целой частью $[x]$ числа $x$ называется наибольшее целое число n такое, что $n \leqslant x$, например, $[10] = 10$, $[9,93] = 9$, $\left[\frac{1}{9}\right] = 0$, $[-1,7] = -2$. Найдите все решения уравнения $\left[\frac{x-1}{2}\right]^2 + 2x + 2 = 0$.

**Решение.** Из уравнения следует, что $2x = 2 - \left[\frac{x-1}{2}\right]^2$ – целое. Поэтому либо $2x = n \in \mathbb{Z}$, либо $x = n + \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$. При этом нужно отдельно рассмотреть случаи четного и нечетного $n$.

1) Если $x = 2k$, то

$$\left[\frac{2k-1}{2}\right]^2 + 2(2k) + 2 = \left[k - \frac{1}{2}\right]^2 + 4k + 2 = (k-1)^2 + 4k + 2 =$$
$$= k^2 - 2k + 1 + 4k + 2 = (k^2 + 2k + 1) + 2 = (k+1)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Так как полученное выражение строго положительно, то решения вида $x = 2k$ невозможны.

2) Если $x = 2k + 1$, то

$$\left[\frac{2k}{2}\right]^2 + 2(2k+1) + 2 = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2 = 0.$$

Полученное уравнение имеет решение $k = -2$, что дает $x = -3$.

3) Если $x = 2k + \frac{1}{2}$, то

$$\left[\frac{2k - \frac{1}{2}}{2}\right]^2 + 2\left(2k + \frac{1}{2}\right) + 2 = \left[k - \frac{1}{4}\right]^2 + 4k + 3 = (k-1)^2 + 4k + 3 =$$
$$= k^2 - 2k + 1 + 4k + 3 = (k^2 + 2k + 1) + 3 = (k+1)^2 + 3 \geqslant 3.$$

Так как полученное выражение строго положительно, то решения вида $x = 2k + \frac{1}{2}$ невозможны.

4) Если $x = 2k + 1 + \frac{1}{2}$, то

$$\left[\frac{2k + \frac{1}{2}}{2}\right]^2 + 2\left(2k + \frac{3}{2}\right) + 2 = \left[k + \frac{1}{4}\right]^2 + 4k + 3 + 2 = k^2 + 4k + 5 =$$
$$= k^2 + 4k + 4 + 1 = (k+2)^2 + 1 \geqslant 1.$$

Так как полученное выражение строго положительно, то решения вида $x = 2k + 1 + \frac{1}{2}$ невозможны.

**Ответ.** $x = -3$.

## 7 класс

**1.** Мост через реку соединяет два разных региона страны. Как-то раз один из регионов подновил краску на относящейся к нему части моста. Если бы свежеокрашенная часть моста оказалась в 1,2 раза больше, то она составила бы ровно половину всего моста. Какую часть моста нужно докрасить, чтобы он стал окрашен ровно наполовину?

**Решение**

Пусть $x$ – подкрашенная часть моста. (Весь мост принимаем за единицу.) Согласно условию,

$$1,2x = 1/2 \implies x = \frac{5}{12}.$$

Докрасить нужно

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{1}{12}.$$

**Ответ:** $\frac{1}{12}$ часть.

**2**. Таблица чисел из 20 строк и 15 столбцов заполнена числами 2 и 5.

а) Могут ли произведения чисел каждой строки быть четными, а каждого столбца — нечетными?

б) Могут ли произведения чисел каждой строки быть нечетными, а каждого столбца — четными?

**Решение**. Рассмотрим произведение $P$ всех чисел таблицы.

Если произведение элементов строки $i$ (столбца $j$) четно, то эта строка (этот столбец) содержит элемент $t_{ij} = 2$. Тогда и произведение всех элементов столбца $j$ (строки $i$) четно.

**Ответ**: а) — нет, б) — нет.

**3.** Можно ли разбить числа от 1 до 77 на группы так, чтобы в каждой группе было не менее трех чисел, а одно из чисел в каждой группе было бы равно сумме остальных чисел той же группы?

**Решение**. Пусть в каждой группе $x_3 = x_1 + x_2$. Тогда сумма всех чисел этой группы $x_1+x_2+x_3 = 2(x_1+x_2)$ четна. Таким образом, сумма всех чисел множества как сумма четных слагаемых четна.

С другой стороны, она равна

$$1 + \cdots + 77 = \frac{1}{2}\left((1 + 77) + (2 + 77) + \ldots + (77 + 1)\right) = \frac{1}{2} \cdot 78 \cdot 77 = 39 \cdot 77$$

и нечетна.

Полученное противоречие дает отрицательный ответ.

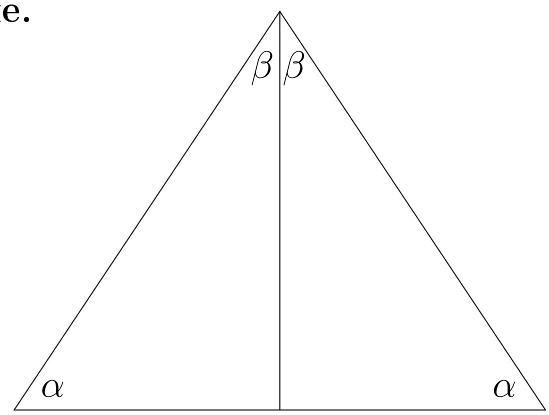
**Ответ.**: нельзя.

**4.** Два одинаковых прямоугольных треугольника приложили одинаковыми катетами друг к другу. При этому образовался больший треугольник, у которого один угол составляет среднее арифметическое двух других углов.

а) Может ли длина одной стороны большого треугольника составлять среднее арифметическое двух других сторон?

б) Может ли длина какой-либо стороны большого треугольника НЕ быть равной среднему арифметическому двух других сторон?

**Решение.**




Обозначим углы исходного прямоугольного треугольника через $\alpha$ и $\beta$. Ясно, что $\alpha+\beta=90$ ( градусов). Пусть при описанных действиях удваивается угол $\beta$. Рассмотри два случая.

1-й случай. $\alpha \leqslant \beta$.

Ясно, что наибольший угол треугольника – $2\beta$ – не может быть средним арифметическим двух других. Поэтому

$$\alpha=\frac{\alpha+2\beta}{2}=\frac{\alpha+2(90-\alpha)}{2}=90-\frac{\alpha}{2},$$

откуда $\alpha=60$. Но $\alpha \leqslant 45$. Получили противоречие.

2-й случай. $\alpha>\beta$.

Если средним арифметическим является $2\beta$, то

$$2\beta=\frac{\alpha+\alpha}{2}=\alpha=90-\beta,$$

откуда $\beta=30$ и $\alpha=60$, т.е. больший треугольник – равносторонний.

Если средним арифметическим является $\alpha$, то

$$\alpha=\frac{\alpha+2\beta}{2}=\frac{\alpha+2(90-\alpha)}{2}=90-\frac{\alpha}{2},$$

откуда $\alpha = 60$ и $\beta = 60$, т.е. больший треугольник – равносторонний.

Ясно, что в равностороннем треугольнике каждая сторона является средним арифметическим двух других.

**Ответ.** а) может; б) не может.

**5.** Целой частью $[x]$ числа $x$ называется наибольшее целое число n такое, что $n \leqslant x$, например, $[10] = 10$, $[9,93] = 9$, $\left[\frac{1}{9}\right] = 0$, $[-1,7] = -2$. Найдите все решения уравнения $\left[\dfrac{x+3}{2}\right]^2 - x = 1$.

**Решение.**

Из уравнения следует, что $x = \left[\dfrac{x+3}{2}\right]^2 - 1$ – целое. Поэтому $x = n \in \mathbb{Z}$, но нужно отдельно рассмотреть случай четного и нечетного $n$.

Предварительно перенесем все слагаемые в левую часть уравнения.

1) Если $x = 2k$.

$$\left[\frac{2k+3}{2}\right]^2 - 2k - 1 = \left[k + 1 + \frac{1}{2}\right]^2 - 2k - 1 =$$
$$= (k+1)^2 - 2k - 1 = k^2 = 0$$

Полученное уравнение имеет решение $k = 0$, что дает $x = 0$.

2) Если $x = 2k + 1$.

$$\left[\frac{2k+4}{2}\right]^2 - (2k+1) - 1 = (k+2)^2 - 2k - 2 = k^2 + 2k + 2 =$$
$$= (k^2 + k) + (k+1) + 1 = k(k+1) + (k+1) + 1 = (k+1)(k+1) + 1 \geqslant 1.$$

Так как полученное выражение строго положительно, то решения вида $x = 2k + 1$ невозможны.

**Ответ.** $x = 0$.