Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 002074ЭК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть x изготовил 1 ~~завод~~ типа

Тогда $4x$ – второй ~~завод~~ типа, а y – 3 ~~завод~~ типа

$y \vdots x > 5y \vdots x$

$5y = 4x + 22$

$4x \vdots x$ и $22 \vdots x \Rightarrow x = 1, 2, 11, 22$ (дробным числом кол-во деталей не может быть).

$x + 4x + y > 100$ обе части умножим на 5

$5x + 20x + 5y > 500$

$5x + 20x + 4x + 22 > 500 \Rightarrow 29x > 478$ подставим

вместо x 1, 2, 11, 22

$29 \cdot 1 \not> 478$

$29 \cdot 2 \not> 478$

$29 \cdot 11 \not> 478$

$29 \cdot 22 > 478$ т.к $29 \cdot 22 = 638$

$\Downarrow$

$x = 22$ 1го типа

$4x = 88$ 2го типа

$\frac{4x+22}{5} = 22$ 3го типа

Ответ: 22 - 1го типа, 88 - 2го типа, 22 - 3го типа.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4

$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$ приведем к общему знаменателю

$\frac{x^2y+y^2x}{xyz} = \frac{x^2z+z^2x}{xyz} = \frac{y^2z+z^2y}{xyz}$

$\cancel{x^2}y+y^2\cancel{x} = \cancel{x^2}z+z^2\cancel{x} \Rightarrow y+y^2=z+z^2, \; y=z$

$x^2\cancel{z}+\cancel{z^2}x = y^2\cancel{z}+\cancel{z^2}y \Rightarrow x^2+x=y^2+y, \; x=y$

$y=z, \; x=y \Rightarrow \; x=y=z$

В первом уравнении подставим вместо $y, z - x$

$\frac{x+x}{x} = \frac{2x}{x} = 2$

Ответ: 2.

+

№ 5

Если мы отнимаем 2 мандарина, то четность мандаринов не меняется. Но когда прибавляют 1 яблоко, то четность яблок меняется. Уберем 2 яблока и + 1 яблоко — четность всеравно изменится.

Если — 1м, то потом положат еще 1 мандарин, число мандаринов вообще не изменится ⇒ не поменяется и четность. А когда уберем 1 яблоко, то четность яблок изменится.

⇓

+

Четность мандаринов никогда не меняется, а у яблок всегда меняется. Т.к фруктов было нечетное число, то останется мандарин.

Ответ: мандарин.

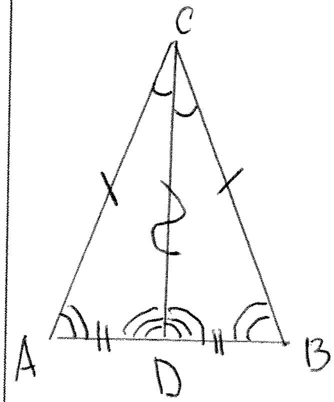
№3

Пусть все числа $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_{99} \in M$ число x_1 мы заменим. Получаем, что $2(x_2+x_3+\dots+x_{99}) = x_1+x_2+x_3+\dots+x_{99}$ если x_1 самое большое, то $x_2 \neq x_1+x_3+x_4+\dots x_{99}$ => они все равны. Но они не могут быть равными $1, 2, 3 \dots \infty$ т.к если они равны 1, то не выполняется $2(x_2+\dots+x_{99}) = x_1+x_2+\dots+x_{99}$ => они равны 0. Если я перемножу между собой 99 нулей. То ответ 0.

±

Ответ: 0.

№2



Пусть у нас есть ΔABC и он равнобедренный. В нем провели биссектрису CD. => $\angle ACD = \angle DCB$.

$\angle ACD = \angle DCB$ (CD - биссектриса)

$AC = CD$ (ΔABC - равнобедренный)

CD - общая

⇓ ∓

$\Delta ACD = \Delta CDB$ по 1 признаку равенства треугольников.

Поэтому $\angle ACD = \angle DCB$, $\angle CAD = \angle CBD$, $\angle CDA = \angle CDB$ как соответственные элементы равных треугольников.

Среди них 3 пары одинаковых углов => $N = 6$ т.к среди них $3 \cdot 2 = 6$ одинаковых углов

Ответ: $N = 6$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 00607НЭК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

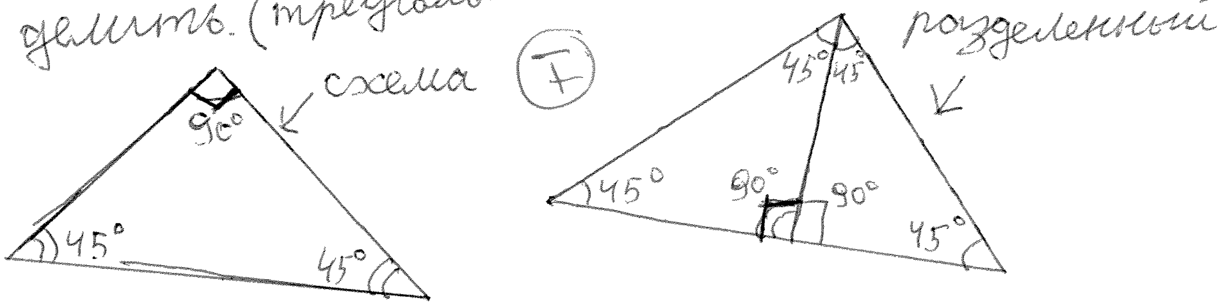
№1.

Можно предположить, что если кол-во установок 3-его типа умножить на 5, то это произведение будет заканчиватся либо на 0 либо на 5 => => число установок (сумма установок) 2-ого типа должно заканчиваться либо на 8 либо на 3, т.к. если число установок 3-его типа умножить на 5, то их будет на 22 больше, чем установок 2-ого типа. Но есть одно но, т.к. кол-во установок 2-ого типа в 4 раза больше установок 1-ого типа, а ни одно целое число при умножении на 4 не ~~дает~~ заканчивается на 3 => кол-во установок 2-ого типа заканчивается на 8 => кол-во установок первого типа заканчивается либо на 2 либо на 7. Но так как ~~если 2 умножать~~ можно сделать вывод, что кол-во установок 1-ого типа ~~кратно~~ равно ~~кратно~~ кол-ву установок 3-его типа. => кол-во установок первого ~~типа~~ типа не может оканчиваться на 7. => кол-во установок первого и третьего типа оканчиваются на 2. Но их количество не может быть меньше 17 => кол-во установок первого типа 22 и третьего типа тоже 22. А кол-во установок второго типа 88. Это кол-во соотве~~тст~~ствует всем условиям.

Ответ: 22 установок 1-ого типа, 88 2-ого типа и 22 3-его типа

№2.

Сперва надо понять какой тип треугольника лучше всего использовать. Точно не разносторонний, ~~ж~~ не тупоугольный и не остроугольный, т.к. в этих типах Δ-ов углы будут равны попарно или вообще не будут равны (при делении этих треугольников на два). Так же отпадает равнобедренный? и равносторонний треугольники, т.к. в них углы будут равны попарно => надо использовать прямоугольный треугольник, его я сейчас и буду делить. (треугольник нарисован схематично).



В этих треугольниках (они в разделённом треугольнике) четыре угла по 45° (в общем) и 2 равны между собой (они по 90°). А так в одном из маленьких треугольников два угла по 45° и один 90° => наибольшее значение N=4

Ответ: ~~N=4~~ наибольшее значение N=4

№3.

Если опять же думать логически то нет такого натурального числа, что если его заменить на другое число и сложить с 1 его изначально и потом когда мы его изменили. То конечно же сумма изменится, но если в ряд стоят 99 нолей и любой из этих нолей изменить на сумму всех остальных (98) нолей, то сумма не изменится (т.к. ноль - это можно сказать ничто) => Множество М состоит из ~~99~~ 99 нолей. А произведение ~~98~~ 99 нолей равно нолю. => Произведение всех элементов множества $M=0$

Ответ: произведение всех элементов множества М равно нолю ($M=0$)

4.

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$$

А такое может быть только если все эти числа равны. => чему бы не были равны эти числа их отношение будет $\frac{2}{1}=2$ к $1=2$.

Например $\frac{1+1}{1}=\frac{2}{1}=2$ или

$\frac{50+50}{50}=\frac{100}{50}=\frac{2}{1}=0$ => это значение равно 2

Ответ: они принимают значение 2.

№5.

(+)

Если думать логически, то если гость берёт два одинаковых фрукта, то в замен кладут одно яблоко, а если же два разных фрукта, то кладут один мандарин. А т.к. мандаринов 15, то есть их не чётное кол-во => в конце остаётся один мандарин. Сейчас я проведу одну из таких манипуляций с фруктами (=> - следующее, м - мандарин, я - яблоко, цифры - количество фруктов).

15 м => 13 м + 1 я => 11 м + 2 я => 9 м + 3 я => => 7 м + 4 я => 5 м + 5 я => 5 м + 4 я => 5 м + 3 я => => 3 м + 4 я => 1 м + 5 я => 1 м + 4 я => 1 м + 3 я => => 1 м + 2 я => 1 м + 1 я => 1 м

Проведя эту манипуляцию можно заметить, что пока мы берем по два мандарина кол-во яблок увеличивается. Если начинаем брать по два яблока или же по одному мандарину и одному яблоку, то кол-во мандаринов остаётся прежним, а кол-во яблок уменьшается на одно. => Какую бы манипуляцию я не проводил всегда в конце будет оставатся один в вазе мандарин.

Ответ: в вазе останется мандарин.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 014101ЭК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. Т.к. трехчлен $g(x)$ имеет один корень, то график этого трехчлена (парабола) касается оси Ox в одной точке, а остальные точки либо положительны, либо отрицательны, то есть $g(x)$ либо неположителен, либо неотрицателен на всей области значений. Рассмотрим теперь уравнение:

$$g(x^5+2x-1)+g(x^5+3x+1)=0.$$

~~По условию, у него один корн~~

Т.к. $g(x)$ при любом x неположителен либо неотрицателен, и невозможно получить 0, складывая два положительных или два отрицательных значения, то

$$g(x^5+2x-1)=g(x^5+3x+1)=0.$$

По условию, $g(x)$ имеет один корень. Значит,

$x^5+2x-1=x^5+3x+1;$

$2x-1=3x+1;$

$x=-2.$

Подставим полученное значение в выражение x^5+2x-1 (или x^5+3x+1, что то же самое) и найдем, что корень $g(x)$ равен -37. Значит, $(-37)^2+(-37)a+b=0$.

По теореме Виета:

$x_1x_2=b$. Но $x_1=x_2=-37$, значит, $b=(-37)^2=1369$.

$a=-(x_1+x_2)=-(-37-37)=74$.

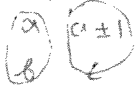
Ответ: $a=74$; $b=1369$.

+

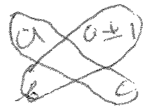
1. Предположим, что существует завод, не соединённый с собой и с тремя другими заводами. Тогда ~~он~~ найдется такая группа из четырёх заводов, в которой этот завод не входит ни в одну пару, что противоречит условию. Значит, каждый завод соединён хотя бы с 147 другими заводами. Тогда кол-во пар будет ~~равно~~ хотя бы $\frac{150\cdot 147}{2} = 11025$.
Покажем теперь, что такой случай возможен.
Занумеруем все заводы числами от 1 до 150. Пусть каждый завод соединен со всеми, кроме себя и 2 заводов, номер которых отличается от его номера на 1 (в кольце вычетов по модулю 150).
Тогда при разбиении заводов на четвёрки возможно три ~~два~~ случая.

1) какой-то завод a не соединен с двумя: $a \not\leftrightarrow a-1$, $a \not\leftrightarrow a+1$, b.
тогда он будет соединен с b; a
заводы $a-1$ и $a+1$ различаются на 2 и тоже будут соединены:

2) какой-то завод не соединен с одним: a $a\pm1$ b c.
тогда можно разбить так:



или так:



3) все соединены со всеми. Очевидно можно разбить.

Ответ: 11025.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. $2x_n = x_0 + x_1 + .. + x_{n-1} - x_n$;

$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$.

$x_n = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}}{3}$.

+

⇓

$x_1 = \frac{x_0}{3}$; $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{3} = \frac{x_0 + \frac{x_0}{3}}{3} = \frac{\frac{3x_0}{3} + \frac{x_0}{3}}{3} = \frac{4x_0}{9}$.

$x_3 = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3} = \frac{x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9}}{3} = \frac{\frac{9x_0}{9} + \frac{3x_0}{9} + \frac{4x_0}{9}}{3} = \frac{16x_0}{27}$.

Таким образом, на каждом шаге при упрощении формулы i-го члена последовательности числитель будет ~~увеличиваться в 4 раза, а зна~~ умножаться на 4, а знаменатель – на 3.

Учитывая, что $x_1 = \frac{x_0}{3}$, получим формулу n-го члена:

$x_n = \frac{4^{n-1} x_0}{3^n}$, то есть, $x_1 = \frac{x_0}{3}$, и знаменатель последовательности прогрессии равен $\frac{4}{3}$.

Ответ: $x_n = \frac{4^{n-1} x_0}{3^n}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 01410ИЭК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. Запишем эти числа: a, b, c, d, e, f.

по условию:

1) $\frac{a+b+c}{3}=\frac{b+c+d}{3} \Rightarrow a+b+c=b+c+d \Rightarrow a=d$.

ряд приобретает вид: a, b, c, a, e, f.

2) $\frac{b+c+a}{3}=\frac{c+a+e}{3} \Rightarrow b+c+a=c+a+e \Rightarrow b=e$.

ряд приобретает вид: a, b, c, a, b, f.

3) $\frac{c+a+b}{3}=\frac{a+b+f}{3} \Rightarrow c+a+b=a+b+f \Rightarrow c=f$.

ряд приобрел вид: ~~a c~~ a, b, c, a, b, c.

по условию, среди них есть единица. Пусть это будет, например, a. (a = 1), что не нарушает общности.

по условию: $\frac{a+b+c+a+b+c}{6}=A \Rightarrow \frac{2(b+c+1)}{6}=A \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(b+c+1)=6A \Rightarrow b+c+1=3A = b+c=3A-1.$ (1)

рассмотрим теперь ср. арифм. каких-то трех соседних чисел: $\frac{1+b+c}{3}$. из равенства (1) следует: ~~a+b+c~~

$\frac{1+b+c}{3}=\frac{1+3A-1}{3}=\frac{3A}{3}=A$. То есть, ср. арифм. любых трех соседних чисел равно A.

По неравенству средних (неравенству Коши), среднее арифметическое каких-то чисел всегда больше либо равно их среднему геометрическому: $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$.

Значит, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow A \geq \sqrt[3]{abc}$. ~~То~~ Есть, максимальное значение ср. геометрического любых трех соседних чисел в этом ряду равно A.

Ответ: A.

+

Лист 04 из 05

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. Запишем эти числа: a, b, c, d. По условию:

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+d}{b+c}=\frac{b+c}{a+d}=\frac{b+d}{a+c}=\frac{c+d}{a+b}=k.$$

Заметим, что $\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b}=k$. Это возможно, лишь когда $a+b=c+d$, и $k=1$. Аналогично получаем, что $a+c=b+d$ и ~~$\frac{a+d}{b+c}$~~ $a+d=b+c$. Имеем:

$$\begin{cases} a+b=c+d, \\ a+c=b+d, \\ a+d=b+c. \end{cases} \Rightarrow$$

1) $\begin{cases} a+b=c+d, \\ a+c=b+d \end{cases} \Rightarrow a+b-a-c=c+d-b-d \Rightarrow b-c=c-b \Rightarrow$
$\Rightarrow 2b=2c \Rightarrow b=c.$

2) $\begin{cases} a+b=c+d, \\ a+d=b+c. \end{cases} \Rightarrow a+b-a-d=c+d-b-c \Rightarrow b-d=d-b \Rightarrow$
$\Rightarrow 2b=2d \Rightarrow b=d.$

3) $\begin{cases} a+c=b+d, \\ a+d=b+c \end{cases} \Rightarrow a+c-a-d=b+d-b-c \Rightarrow c-d=d-c \Rightarrow$
$\Rightarrow 2c=2d \Rightarrow c=d.$

4) $\begin{cases} a+b=c+d, \\ b+d=a+c. \end{cases} \Rightarrow a+b-b-d=c+d-a-c \Rightarrow a-d=d-a \Rightarrow$
$\Rightarrow 2a=2d \Rightarrow a=d.$

Имеем: $a=b=c=d$. Значит, все числа в таком ряду равны (обязательно), что противоречит условию. Значит, ~~такого~~ такого ряда из четырех чисел не существует.

Ответ: $k=1$; таких четверок не существует.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. Предположим, что один завод P не связан с 147 заводами, тогда выберем эти четыре завода:

$P \quad x_1$
$x_2 \quad x_3$

Т.к. P не может быть связан ни с одним из такой четверки (из-за ~~нашего~~ предп. 1.), то мы не можем их разбить на пары => противоречие с условием. Тогда каждый город связан хотя бы с 147 городами => наим. возм. кол-во пар заводов $= 150 \cdot 147 = 22050$

Докажем, что такое возможно:

1) Объединим заводы по такому принципу: не объединяем никакие два рядом стоящих завода и первый с последним. Тогда у каждого завода ровно 147 связей.

~~2) Рассм. четверку $x_1 x_2 x_3 x_4$. Предп., что $x_1 \leftrightarrow x_4$ (связан), тогда $x_2 \leftrightarrow x_3$. Противоречие по нашему условию. Тогда $x_1 \leftrightarrow x_3$ и $x_2 \leftrightarrow x_4$~~

2) Рассм. любую четверку, располож. от ~~ближнего к дальн.~~: $x_1 x_2 x_3 x_4$. Предп., что $x_1 \leftrightarrow x_4$ (связан), тогда $x_2 \leftrightarrow x_3$.

Они могут быть рядом стоящие => противоречие предп. (такого случая не будет)

3) Если $x_2 \leftrightarrow x_3$ => они не рядом стоящие, тогда $x_1 \leftrightarrow x_4$ (если один из них не последний)

4) Если x_1 или x_4 первый или последний, то $x_1 \leftrightarrow x_3$ и $x_2 \leftrightarrow x_4$, что не будет противоречить нашим условиям.

~~Можно расположить~~ ~~от~~ Можно разбить на 22050 ~~пары~~ пар.

Ответ: 22050

2

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$$

$$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$$

$$x_n = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}}{3}$$

$$x_1 = \frac{x_0}{3}$$

$$x_2 = \frac{x_0 + \frac{x_0}{3}}{3} = \frac{4x_0}{9}$$

$$x_3 = \frac{\frac{x_0}{3} + x_0 + \frac{4x_0}{9}}{3} = \frac{16x_0}{27}$$

$$x_n = x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} + \frac{16x_0}{27} + \ldots + \frac{x_0 \cdot 4^{n-1}}{3^n}$$

+

Формула верна, т.к. каждый раз, когда мы ищем следующий член в числитель мы заносим сумму аргументов при „x_0" в числитель и умножаем на „3" из-за приведения к общему знаменателю. (Задано рекуррентно)

$$x_n = x_0 + \underbrace{\frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} + \ldots + \frac{x_0 \cdot 4^{n-1}}{3^n}}_{\text{геом. прогрессия с } n-1 \text{ членов}}$$

$$S_n = b_1 \frac{p^n - 1}{p - 1}; \quad p = \frac{4}{3}; \quad b_1 = \frac{x_0}{3}$$

$$S_{n-1} = \frac{x_0 \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} - x_0}{3\left(\frac{4}{3} - 1\right)} = x_0 \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} - x_0$$

$$x_n = x_0 + S_{n-1} = x_0 \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}}$$

Ответ: $x_n = x_0 \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}}$

№3. a b c d e f

~~Пусть a = 1, тогда получаем ряд 1 b c d e f~~

~~$\frac{1+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3}$ => d = 1~~

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = A$$

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} \Rightarrow a = d$$

$$\frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} \Rightarrow b = e$$

$$\frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3} \Rightarrow c = f$$

, тогда ряд выглядит так

a b c a b c. Как бы мы не выбирали 1 уже будет 2

1 b c 1 b c, тогда $\frac{1+b+c+1+b+c}{6} = A$; $\frac{1+b+c}{3} = A$

Среднее геометрическое $1bc = \sqrt[3]{bc}$; ~~$\frac{1+b+c}{3}$~~

b и c - любые. Мы не можем выявить закономерность ~~ряда~~ $\sqrt[3]{bc}$ через A.

$$\frac{1+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{bc}$$

$$A \geq \sqrt[3]{bc}$$

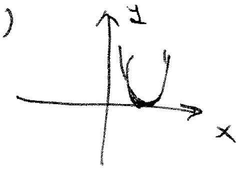
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

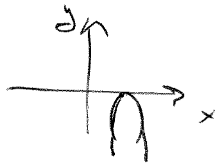
№4. $g(x) = x^2 + ax + b$

$x^2 + ax + b \to$ один корень

$g(x^5+2x-1) + g(x^5+3x+1) ~~\geq 0~~ \to$ один корень

Т.к. $g(x)$ имеет один корень, то график может выглядеть вот так:

1) 

2) 

1) ветви параболы вверх

2) ветви параболы вниз $\Big\} \Rightarrow g(x)$ имеет постоянный знак при любом x

Тогда $g(x^5+2x-1)$ и $g(x^5+3x+1)$ тоже имеют постоянный знак $\Rightarrow g(x^5+2x-1) = 0$ и $g(x^5+3x+1) = 0$. При этом $g(x^5+2x-1) + g(x^5+3x+1)$ тоже имеет один корень $\Rightarrow$ ~~графи~~ ~~функции должны совпадать в одном корне~~ функции совпадают в этой точке, тогда: $x^5+2x-1 = x^5+3x+1 = x_0$

$x = -2$; $x_0 = (-2)^5 - 2\cdot 2 - 1 = -37$

Т.к. $x^2+ax+b \to$ один корень

$D = 0 = a^2 - 4b$

$x_0 = \frac{-a}{2}$; $-37 = \frac{-a}{2}$; $a = 74$

$a^2 - 4b^2 = 0$; $4b^2 = 74^2$; $4b^2 = 5476$; $b^2 = 1369$

Ответ: $a = 74$; $b = 1369$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 a b c d

По усл.

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2=(c+d)^2 \Rightarrow |a+b|=|c+d|$$

1. $\begin{cases} a+b=c+d \\ a+b=-c-d \end{cases}$ → если так, то $k=1 \Rightarrow a=b=c=d \Rightarrow$ только 2 случай
2.

$a+b=-c-d$

$\frac{-(c+d)}{c+d}=-1$; $k=-1$

Пример четверки:

$-1; 2; 3; -4$. Легко проверить, что четв. подходит

$\frac{-1+2}{3-4}=-1$; $\frac{-1+3}{-4+2}=-1$ и т.д.

Чтобы привести общий вид таких чисел нужно, чтобы ~~ко~~ сумма двух чисел ÷ оставшуюся сумму $=-1$, тогда наш удовл. четверка:

$\overset{a}{-z-m}$; $\overset{b}{z+q}$; $\overset{d}{-n-q}$; $\overset{c}{n+m}$ С точностью до перестановок. Легко показать, что данная четверка удовлетворяет условию:

$\frac{-z-m+z+q}{-n-q+n+m}=-1$; $\frac{-z-m-n-q}{z+q+n+m}=-1$, и т.д.

Ответ: бесконечное кол-во четверок

№2. Проверим все значения N.

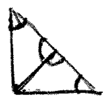
N=1. Выполняется всегда, т.к. 1 угол кроме себя самого может быть неравен другим.

N=2. Возможно. Например, когда треугольник (изначальный) равнобедренный, и его делят от вершины к основанию (углы при основании равнобедренного треугольника равны).

+

N=3. Возможно. Тоже когда равнобедренный треугольник делят от вершины к основанию, но чтобы линия из вершины делила этот угол на два угла, один из которых равен углам при основании.

N=4. Тоже возможно. Когда равнобедренный треугольник делят из вершины к основанию на два равных равнобедренных треугольника. Например, треугольник с углами 90°, 45°, 45°.



N=5. Невозможно, т.к. тогда треугольник делят на один равносторонний (у него все углы равны, т.е. =60°) и равнобедренный. Но т.к. 5 углов равны, то равны они должны быть 60°, а если два угла у равнобедр. треуг. равны каждый 60°, то и третий равен 60°.

N=6. Невозможно, т.к. тогда будут два равносторонних и равных друг другу треугольника, и каждый их угол будет равен 60°, а из таких составить треугольник нельзя.

Ответ: N=4

№3. Т.к. при замене сумма всех чисел не должна меняться, то каждый элемент должен равняться сумме всех остальных. Единственное число, удовлетворяющее данное условие, это 0. Сумма 99-ти 0-ей равна 0, и произведение равно 0, если хотябы 1 множитель – 0.

Ответ: 0

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

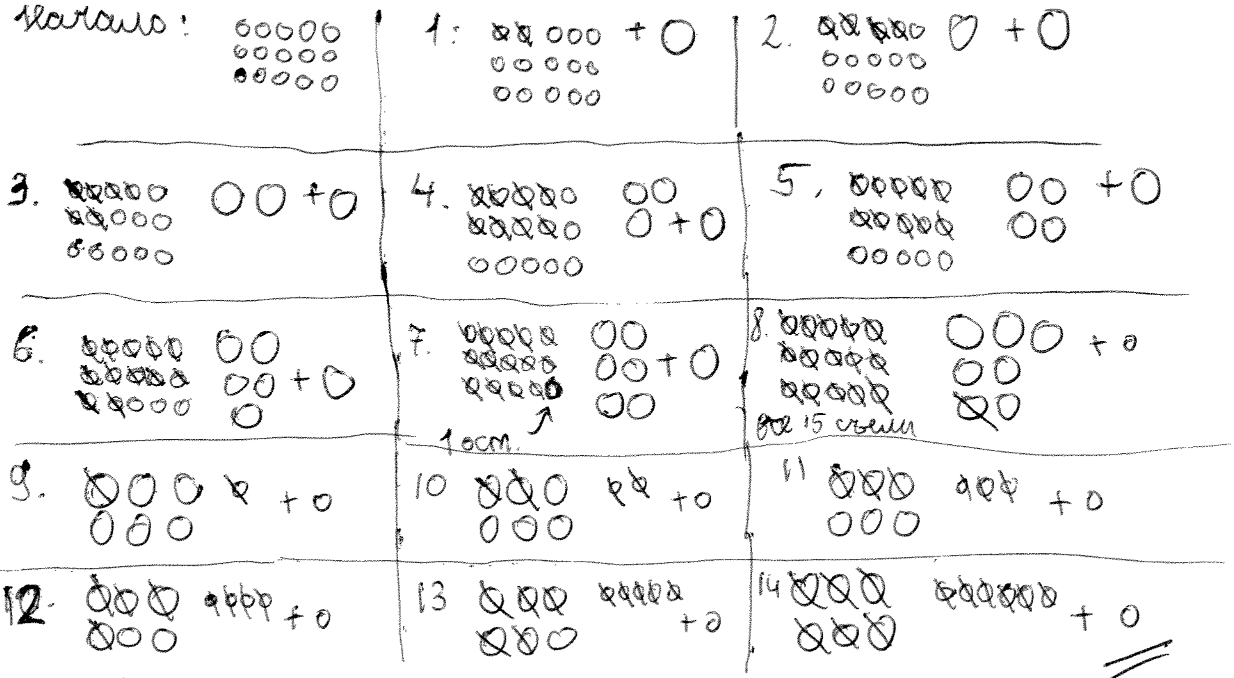
Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 01707НЯК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 Т.к. мандаринов нечётное кол-во, то при употреблении мандаринов и только них в итоге останется один мандарин, который придется употребить с яблоком, что даст ещё один мандарин, который в свою очередь придётся съесть с яблоком, и т.д., пока не останется один мандарин.

Пример: (пошагово) о-манд. О-яб. (+)



посл.

Ответ: мандарин

№1 Пусть x – уст. I типа. Тогда $4x$-уст. II типа. Т.к. кол-во уст. III типа кратно уст. I типа, то уст. III типа – это сколько-то x. Пусть будет $?x$. Составим ~~уравнение~~ неравенство:

$$x+4x+?x>100$$

$$5x+?x>100.$$

Т.к. $5(?x)$ на 22 больше $4x$, то составим уравнение.

$$5(?x)=4x+22$$

$$?x=0{,}8x+4{,}4.$$

Подставим в неравенство.

$$5x+0{,}8x+4{,}4>100.$$

Пусть y – число всех установок.

$$5{,}8x+4{,}4=y$$

$y - 5{,}8x = 4{,}4$

Теперь подберем такой x, чтобы удовлетворял все уравнения, был натуральным, и чтобы 5,8x знак после запятой был равен 6 (чтобы y стал целым).

Подходит 22.

$y - 127{,}6 = 4{,}4$

$y = 132$

Теперь составим еще уравнение, подставляя x.

$22 + 4 \cdot 22 + ? \cdot 22 = 132$

$110 + ?22 = 132$

$110 + 22 = 132.$

Проверим по ещё одному уравнению:

$5 \cdot 22 = 4 \ 22 + 22$

$110 = 110.$

Т.е. первого типа было 22 уст., II – 88 уст., III – 22.

Ответ: I тип – 22 уст., II тип – 88 уст., III тип – 22 уст.

№4 $\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} = a.$

a – это искомое значение. Составим еще 3 уравнения:

$az = x + y$

$ay = x + z$

$ax = y + z$

сложим все уравнения.

$az + ay + ax = (x+y) + (x+z) + (y+z)$

$az + ay + ax = 2x + 2y + 2z$

$a(x+y+z) = 2(x+y+z)$

$a = 2$

Ответ: значение равно 2.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант:

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 01908НЭК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Попробуем подставить x и получить y при котором $\frac{y}{x}$ целое.

Сразу проверяя это.

~~Важная закономерность, что каждое 5 начиная с 4,~~

I II III

x 4x y

$\frac{y}{x}$ целое

$5y = 4x + 99$

$y = \frac{4x+99}{5}$

$\frac{4x+99}{5x}$ должно быть целое

$5x + y < 200.$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4x	4	8	12	16					
$\frac{y}{x}$	$\frac{103}{5}$	$\frac{107}{10}$	$\frac{111}{15}$	$\frac{115}{20}$					

Чтобы $\frac{4x+99}{5}$, нужно чтобы 4 x оканчивалось на 6.

или на 1, но т.к. там 4, не оканчивается на 1 не может.

=> x будет равно одному из подходящих

x	4x	$\frac{y}{5x}$
4	16	$\frac{115}{20}$
9	36	$\frac{135}{45}$
14	56	$\frac{155}{70}$
19	76	$\frac{175}{95}$
24	96	$\frac{195}{120}$
29	116	$\frac{215}{145}$
34	136	$\frac{235}{170}$
39	156	$\frac{255}{195}$
44	176	уже много т.к.

не подходит

подходит. $\frac{135}{5} = 45 = y$

не подходит

$5x + y < 200.$

Получается $x = 9$ – I шаг

$4x = 36$ – II шаг

$y = 45$ – III шаг

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7884

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 01908ИЭК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

По условию:

$M_1 = M_2 \cdot M_3 \cdot \dots \cdot M_{1001}$

$M_2 = M_1, M_3 \dots + M_{1001}$

⋮

$M_{1001} = M_1, M_2 \dots M_{1000}$

Подставим M_1 в M_2 получим:

$M_2 = M_1 + M_2 + 2(M_3 \dots + M_{1001})$

делаем так со всеми уравнениями:

$M_3 = M_1 + M_3 + 2(M_2 + M_{4} \dots + M_{1001})$

⋮

$M_{1001} = M_1 + M_{1001} + 2(M_2 + M_3 \dots + M_{1000})$

Такое возможно только тогда когда $M_1, M_2, M_3 \dots M_{1001} = 0$

$\Rightarrow M = M_1 \cdot M_2 \dots \cdot M_{1001} = 0$

(+)

№5.

Нет не может т.к. ~~.....~~

Начальное число ~~од~~ фруктов и чет, и нет нечетно, а за один ход она может добавить только четное кол-во фруктов, то все одинаковые получиться не могут.

?

(±)

0 - яблоко

1 - апельсин

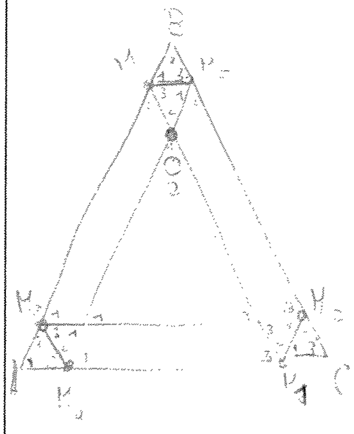
$\frac{01}{11} \to \frac{10}{00}$ + 2 яблока, $\frac{}{00} \to \frac{00}{11}$ + 0 яблок, $\frac{00}{01} \to \frac{11}{10}$ - 2 яблока

$\frac{00}{00} \to \frac{}{11}$ - 4 яблока. Тоже самое если она будет менять из каждой по 1, только начальные фрукты (подчеркнутые) будут в разных группах.

С другими фруктами (апельсинами) тоже самое.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2



Дано

BC || MM_1 || M_3M_4 ..., AC || MM_5 || M_1M_2,

AB || M_2M_1 || M_3M_4 ...

M_5 ~~попадаем~~ попадаем в M.

еще случаи?

Решение:

1) Т.к. мы проводим прямые параллельные сторонам △ABC, то мы отыскаем много ~~...~~ подобных △.

2) т.к ∠BMO = ∠BM_5O и ∠MBM_5 = ∠M_5OM и BM_5 || MO, BM || M_5O это ~~...~~ ромб => его стороны равны => M_5 попадаем в M.

6 шагов минимально чтобы попасть обратно в M.

№4

Значение = 2 т.к. x=y=z т.к. если x ≠ y ≠ z, то получается что $\frac{x+y}{z}$ ≠, $\frac{x+z}{y}$, $\frac{z+y}{x}$ имеют разное значение т.к. x,y,z ≠ 0 и если одно из них отрицательно, то может много не получиться, а если все положительны, то вариант 1 x = y = z.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 027ИНЭК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1. +

Оценка: заметим, что каждый завод должен быть соединён не менее, чем с 147 заводами. Действительно если какой-то завод соединён не более чем с 146 заводами, то в четвёрке, содержащей его и 3 завода с которыми он не соединён, ему не достанется пары, тогда общее кол-во маршрутов не менее чем $\frac{150 \cdot 147}{2} = 75 \cdot 147$.

Пример: расставим все заводы по кругу и сделаем так, чтобы соседние по кругу заводы не были соединены, а все остальные были. Число маршрутов в такой системе $\frac{150 \cdot 147}{2} = 75 \cdot 147$.

Возьмём какую-нибудь четвёрку. Пронумеруем заводы по часовой стрелке: 1, 2, 3, 4. Заводы 1 и 3 не являются соседними, т.к. между ними на одной дуге находится завод 2 на другой - завод 4 ⇒ они могут быть соединены в пары. Аналогично заводы 2 и 4. Таким образом, любую четвёрку (1; 2; 3; 4) можно разбить на пары (1; 3) и (2; 4)

Ответ: $75 \cdot 147 = 11025$.

№ 2

$$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n.$$

$$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}.$$

при $n = 1$. $3x_1 = x_0$, $x_1 = \frac{x_0}{3}$.

при $n > 1$. $3x_n = (x_0 + \ldots + x_{n-2}) + x_{n-1}$.

$$3x_n = 3x_{n-1} + x_{n-1}.$$

$$x_n = \frac{4}{3} x_{n-1}.$$

Таким образом $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ - геометрическая прогрессия ⇒ $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot x_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_0}{3}$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = x_0 + (x_1 + \ldots + x_n) = x_0 + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{4}{3} - 1} \frac{x_0}{3} =$

$= x_0 + 3 \cdot \frac{x_0}{3}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) =$

$= x_0 + x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0.$

Ответ: $x_n = \frac{x_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$; $S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$

№4.

~~Рассмотрим 2 случая~~

Т.к. $g(x)$ – кв. трёхчлен, имеющий 1 корень, то $g(x) \geq 0$ либо $g(x) \leq 0$. ← пусть x_0 – корень $g(x)$.

Рассмотрим II случая:

$g(x) \geq 0.$

$\begin{cases} g(ax+b) \geq 0 \\ g(cx+d) \geq 0 \end{cases}$

$g(ax+b) + g(cx+d) \geq 0.$

имеет 1 корень ⇒

⇒ $g(ax+b) = g(cx+d) = 0,$

$g(x) \leq 0.$

$\begin{cases} g(ax+b) \leq 0 \\ g(cx+d) \leq 0. \end{cases}$

$g(ax+b) + g(cx+d) \leq 0.$

имеет 1 корень ⇒

⇒ $g(ax+b) = g(cx+d) = 0.$

⇓

$ax+b = cx+d = x_0$ (т.к. $g(x)$ имеет только 1 корень).

$(a-c)x = d-b.$

$x = \frac{d-b}{a-c}.$ (т.к. $a \neq c$).

$a\frac{d-b}{a-c} + b = x_0.$

Ответ: $x_0 = a \cdot \frac{d-b}{a-c} + b.$

№3.

Пусть записаны числа $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

Т.к. $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_2+x_3+x_4}{3} = \frac{x_3+x_4+x_5}{3} = \frac{x_4+x_5+x_6}{3}$, то

$x_1 = x_4,\ x_2 = x_5,\ x_3 = x_6.$

Пусть среди чисел x_1, x_2, x_3 есть числа $a, b, 1$, тогда.

$\frac{2a+2b+2}{6} = A.$

$a+b+1=3A$.

$a=3A-b-1$. ~~все~~

~~Т.к. тройки всех соседних чисел в ряду имеют состоят~~

Т.к. все ~~соседние~~ тройки соседних в ряду чисел ~~имеют~~ состоят из a, b и 1, то их среднее геометрическое равно $\sqrt[3]{ab\cdot 1}=\sqrt[3]{b(3A-b-1)}$

Оно максимально когда максимально выражение $b(3A-b-1)=-b^2+b(3A-1)$ (т.к. $\sqrt[3]{x}\uparrow$).

$-b^2+b(3A-1)$ – кв. трёхчлен, ветви вниз $\Rightarrow$ его максимальное значение будет в вершине параболы.

$$x_в=\frac{1-3A}{-2}=\frac{3A-1}{2}.$$

$$\frac{3A-1}{2}\left(3A-\frac{3A-1}{2}-1\right)=\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2=\frac{9A^2-6A+1}{4}$$

$$\cancel{=\frac{9A^2-6A+1}{4}-\frac{6A-2}{4}=\frac{9A^2-12A+3}{4}}$$

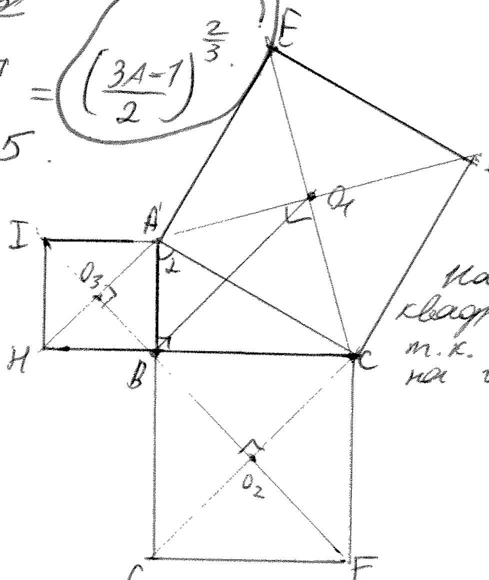
~~Ответ~~ $\cancel{\sqrt[3]{\frac{9A^2-12A+3}{4}}}$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{9A^2-6A+1}{4}}=\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

№5.

Дано:
ΔABC.
$\angle B=90^\circ$.
$\angle A=\alpha$.
$ACDE$, $BCFG$, $ABHI$ – квадраты
O_1, O_2, O_3 – центры их

Определить:
O_3O_2 или O_1B больше?
Найти: α.



наибольший квадрат – $ACDE$, т.к. он построен на гипотенузе

Пусть $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$.

Решение: точка B лежит на прямой O_3O_2, т.к. $\angle CBO_2=\angle HBO_3=45^\circ \Rightarrow O_2O_3=O_3B+O_2B$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\triangle CBO_2$ и $\triangle AO_3B$ – прямоуг $\Rightarrow$ $O_2B = BC \cdot \sin\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$O_3B = AB \cdot \sin\alpha = \frac{c\sqrt{2}}{2}$.

$O_{23} = a\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{c\sqrt{2}}{2} = b \cdot \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + b \cdot \cos\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= b\left(\sin\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = b \cdot \sin(\alpha + 45^\circ)$.

~~в $\triangle O_1BC$ по т. косинусов:~~

в AO_1CB $\angle AO_1C + \angle ABC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AO_1CB$ – вписан. $\Rightarrow \angle ABO_1 = \angle O_1BC =$

$= \angle O_1AC = \angle O_1CA = 45^\circ$ (т.к. $\triangle AO_1C$ – прямоуг.).

Обозначим O_1B за x.

в $\triangle AO_1B$ по т. косинусов:

$c^2 + x^2 - 2cx \cdot \cos 45^\circ = \frac{b^2}{2}$.

① $b^2 \cdot \cos^2\alpha + x^2 - x \cdot \sqrt{2} \cdot b\cos\alpha = \frac{b^2}{2}$.

в $\triangle O_1BC$ по т. косинусов.

$a^2 + x^2 - 2ax \cdot \cos 45^\circ = \frac{b^2}{2}$.

② $b^2\sin^2\alpha + x^2 - x \cdot \sqrt{2} \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{b^2}{2}$.

Сложим уравнения ① и ②

$b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 2x^2 - x\sqrt{2} \cdot b(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

$2x^2 - x\sqrt{2} \cdot b(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$. ($: 2x$. (т.к. $x \neq 0$).

$x - b\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right) = 0$.

$x = b \cdot \sin(\alpha + 45^\circ)$.

Таким образом, $O_1B = O_2O_3 = b \cdot \sin(\alpha + 45^\circ)$.

Ответ: они имеют равную длину при всех значениях α.

+

№1

Чтобы найти ответ разделим хоровод на две части: в одной дети одного пола в другой обоих

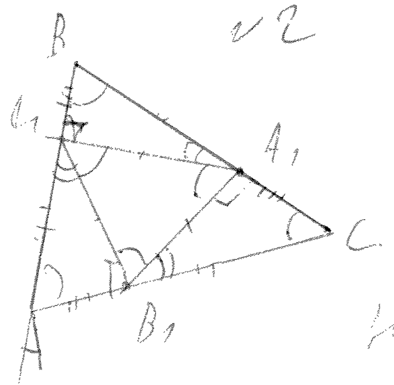
Чтобы выполнилось условие ~~что~~ надо чтобы у любых детей была пара такого же пола. Пусть это будет пол 1. У других частей достаточно иметь пару другого пола (пола 2)

+

Детей пола 1 $= \frac{1}{2}$ от всех детей, это то + детей пола 1 и 2 от оставшейся части поровну $1 = 2$: $1+2 = \frac{1}{2}$ значит $\frac{1}{4}$ первого и $\frac{1}{4}$ второго т.е. мы получаем, что 1 пола $\frac{3}{4}$ а второго $\frac{1}{4}$. Значит кол-во детей — это любое натуральное n которое делится на ~~четн~~ 4.

Ответ: $n \in N$: $n \vdots 4$.

№2



Дано: $\triangle ABC$; $AB = BC = AC$.

$B_1A_1 \perp BC$;

$A_1C_1 \perp AB$

$C_1B_1 \perp AC$

Найти: $\frac{AB_1}{B_1C}$ - ? $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}$ - ?

Решение

$\left.\begin{array}{l}\angle C = 60^\circ \\ \angle B_1A_1C = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1B_1C = 30^\circ$

аналогично углами $\angle AC_1B_1$ и $\angle BA_1C_1$

$\angle C_1B_1A_1 = 90^\circ - A_1B_1C_1 = 90 - 30^\circ = 60^\circ$

Аналогично углами $\angle B_1C_1A_1$ и $\angle C_1A_1B_1$ — $\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1$ — правильный

Рассмотрим прямоугольные △-ки C_1BA_1 и B_1A_1C.

$\left.\begin{array}{l}\angle A_1B_1C = \angle C_1A_1B = 30^\circ \\ C_1A_1 = B_1A_1 \text{ — правильн } \triangle\text{-к}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle A_1BC_1 = \triangle B_1A_1C$.

Аналогично с $\triangle AB_1C_1$ и $\triangle B_1A_1C$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$BA_1 = B_1C = A_1A$

$BC_1 = CA_1 = AB_1$

Рассмотрим $\triangle AB_1C_1$

$\left.\begin{matrix} \angle AC_1B_1 = 30 \\ \angle AB_1C_1 = 90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB_1 = \frac{AC_1}{2}$

$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{2}{1}$ $\quad \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{1}{2}$

$AC_1 = B_1C$

$\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{1}{2} = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{CA_1}{BA_1}$

$S\,ABC = AB \cdot AB \cdot \cos 60 = \frac{AB^2}{2}$

$S\,A_1B_1C_1 = A_1B_1^2 \cdot \cos 60 = \frac{A_1B_1^2}{2}$

$A_1B_1 = \frac{2}{3} AB \cdot \cos 30 = \frac{\cancel{2}\sqrt{3}}{3\cancel{2}} \cdot AB$

$\frac{S\,ABC}{S\,A_1B_1C_1} = \frac{\frac{AB^2}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot (AB)^2} = \frac{3}{1}$

Ответ: $\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{1}{2}$; $\frac{S\,ABC}{S\,A_1B_1C_1} = \frac{3}{1}$

+

№3

$M: a_1; a_2 \dots a_{2015}$

$a_1 + a_2 \dots a_{2015} = 2(a_2 + a_3 + a_4 \dots a_{2015}) = 2(a_1 + a_3 + a_4 \dots$
$+ a_{2015})$

$2(a_2 + a_3 \dots a_{2015}) = 2(a_1 + a_3 \dots + a_{2015}) \Rightarrow$

$a_1 = a_2$ всеми остальными: $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{2015}$

аналогично с $\cancel{a_1, a_3}$, a_4

~~$a_1 = a$~~

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a_1 = a_2 + a_3 + \dots a_{2015}$ } ~~только~~

$a_1 = a_2 = a_3 \dots a_{2017}$ } только при $a_1 = 0$.

Если $a_1 = 0$, то $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_{2015} = 0$

Ответ: 0.

№4.

$g(x) = ax^2 + 6x + c = 0$ $\quad D = 0$

$b^2 = 4ac$; $c = \frac{b^2}{4a}$

$x_n = \frac{-b}{2a}$

$a(1+3x)^2 + b(1+3x) + a(2x-3)^2 + b(2x-3) + 2c = 0$

$a((1+3x)^2 + (2x-3)^2) + b(1+3x+2x-3) + \frac{2b^2}{4a} = 0 \,|: b$

$\frac{a}{b}(13x^2 - 6x + 10) + 5x - 2 + \frac{b}{2a} = 0$

$13\frac{a}{b}x^2 - 6\frac{a}{b}x + 10\frac{a}{b} + 5x - 2 + \frac{b}{2a} = 0$

$13\frac{a}{b}x^2 - (6\frac{a}{b} - 5)x + 10\frac{a}{b} + \frac{b}{2a} - 2 = 0$

$D = 0$

$(3\frac{2a}{b} - 5)^2 - 4(13\frac{a}{b}(5\frac{2a}{b} + \frac{b}{2a} - 2)) = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$

$t = -x = \frac{b}{2a}$. $\quad$ ОДЗ: $t \neq 0$; $x \neq 0$

$(3\frac{2a}{b} - 5)^2 - 2 \cdot 13\frac{2a}{b}(5\frac{2a}{b} + \frac{b}{2a} - 2) = 0$

$\frac{9}{t^2} - \frac{30}{t} + 25 - \frac{26}{t}(\frac{5}{t} + t - 2) = 0$

$\frac{9}{t^2} - \frac{30}{t} + 25 - \frac{130}{t^2} - 26 + \frac{52}{t} = 0$.

$-\frac{121}{t^2} + \frac{22}{t} - 1 = 0 \,| \times -t^2$

$t^2 - 22t + 121 = 0 \quad t = 11 \Rightarrow x = -11$.

Ответ: -11.

№5.

a, b, c, d

$\frac{a+b}{c+d} = k;$

$\Rightarrow k = \pm 1$

$\frac{c+d}{a+b} = k$

1) при $k = +1$.

$+\begin{cases} a+b = c+d \\ a+c = b+d \\ a+d = b+c \end{cases}$; $+\begin{cases} b+a = c+d \\ b+c = a+d \\ b+d = a+c \end{cases}$ и т. д.

$3a = b+c+d$ $\quad 3b = a+c+d$.

$\begin{cases} 3a = b+c+d \\ 3b = a+c+d \\ 3c = a+b+d \\ 3d = a+b+c. \\ a+b \neq 0 \\ a+c \neq 0 \\ \dots \end{cases}$ $\Rightarrow$ отсюда $a = b = c = d \neq 0$. – это не возможно по усл. задачи $\Rightarrow$ $\Rightarrow \varnothing$

2) При $k = -1$

$+\begin{cases} a+b = -c-d \\ a+c = -b-d \\ a+d = -b-c \end{cases}$

$\begin{cases} a+b+c+d = 0. \\ a+b \neq 0 \\ a+c \neq 0 \\ a+d \neq 0 \\ c+d \neq 0 \\ b+d \neq 0 \\ b+c \neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ это возможно: $-3; -1; 4; 0$.

Ответ: $k = -1$; $(-3; -1; 4; 0)$; $\begin{cases} a+b+c+d = 0, \\ a \neq -b \\ a \neq -c \\ a \neq -d \\ b \neq -c \\ b \neq -d \\ c \neq -d \end{cases}$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

I тип – x | I – x   x – целое

II тип – 4x | II – 4x   y – целое

III тип – y ⋮ x | III – 5y = 4x+22 в „x"

$5y - 4x$, ~~x~~ = 1; 2; 11; 22 (на эти числа делится 22).
должно

$4x + 1x = 5x$ } подходит

$4x + 2x = 6x$ } не подходит

$4x + 11x = 15x$ } подходит

$4x + 22x = 26x$ } не подходит

⟹ т.к. полученный результат $= 5y$, где y – целое число ⟹ результат должен ⋮ 5.

Итак:

1) $5x = 4x + 22$

$x = 22$. Проверим: $22 + 22\cdot 4 + 22 = 22\cdot 6 = 132 \leftarrow > 100$. всё хорошо.

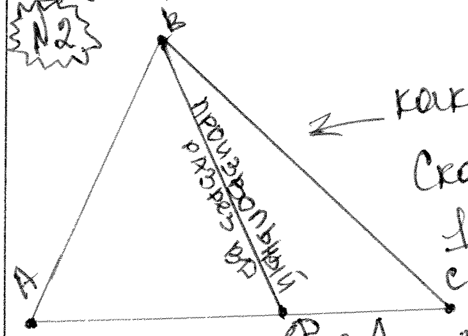
2) $15x = 4x + 22$

$11x = 22$

$x = 2$. Проверим: $2 + 2\cdot 4 + 2 = 2\cdot 6 = 12 \leftarrow$ явно < 100. всё плохо.

$\boxed{\text{Получим, что I типа – 22 штуки; II типа – 88 штук; III типа – 22 штуки}}$

№2



← какой-то произвольный ΔABC.

Скажем, что когда его разрезали = провели 1 линию, т.к. если проведут хотя бы с 2 линии, то разрежут минимум на 3 Δ.

Сумма углов в 2 Δ = 360° + если разрезали на 2 Δ, то провели линию из вершины изнач. Δ к его стороне.

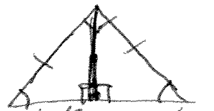
Все 6 углов быть = не могут, т.к. каждый из них должен быть = 60° (360° : 6). По рисунку видно, что какие-то 2 угла смежные (∠ при пересечении стороны Δ линией)(„разрезом")

Тогда если оба угла будут = 60°, то их сумма = 120°, что намного < 180° ⟹ это уже будет не Δ (который был вначале)

Тогда посмотрим на вариант, где 5 углов будут =. Здесь в каком-то из 2-ух Δ все углы будут =; ⟹ 60°, тогда другому Δ остается ещё 2 угла, которые = тоже 60°. Тогда 3-ий угол = (180 − 60 − 60) = 60°. Получим, ~~что~~ вариант, где все углы =, ⟹ такого быть не может.

$\boxed{\text{Ответ: 4.}}$

С 4-мя одинаковыми углами все гораздо проще: равнобедренный ◺ Δ, в котором провели высоту-разрез. все 4 угла = 45°.



Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ВВ 45-60

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.
Давайте последим за изменением кол-ва мандаринов
Что происходит с кол-вом мандаринов, когда берут 2 яблока?
Ничего.
яблоко и мандарин?
ничего. $(x_ч М + y_ч Я - \cancel{М} - Я + \cancel{М}) = (x_ч М + Я(y-1))$.
А когда берут 2 мандарина?
Уменьшается на 2.
⇓
в любой ситуации, единственное, что может происходить с мандаринами — уменьшение на 2 ⇒ четность кол-ва мандаринов меняться не будет. А т.к мандаринов было нечетное кол-во, то и останется нечетное кол-во, а „0" - четное (что должно было остаться) ⇒ остался 1 мандарин.

$\boxed{\text{Ответ: МАНДАРИН}}$

(+)

№3. Все эти числа не могут +, т.к.
давайте посмотрим на самое маленькое из этих чисел: оно должно быть = сумме всех остальных 98 чисел, кстати это утверждение выводится из 2 предложения задания.
Но сумма всех ~~пол~~ + чисел обязательно будет >, а не <.

+ - положительное число
– - отрицательное число.

⇓
числа не могут быть „+".
Аналогично все числа не могут быть –, только здесь нужно смотреть на самое большое из них.
1 ~~0~~ – или + число тоже не может быть, т.к. остальные числа будут с другим знаком
2 и > чисел с другим знаком тоже быть не может, т.к. допустим будет 2 отр. числа, тогда меньшее из них не понятно суммой чего будет являться, т.к. большее из них + положительное будет явно больше, чем складываемое –. Аналогично с другим кол-вом – и +. ⇒ + и – чисел там нет ⇒ все эти числа = 0.
$\underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \ldots \cdot 0}_{99\text{ раз}} = 0$.

$\boxed{\text{Ответ: 0}}$.

(+/–)

№4. Предположим, что все эти числа равны, тогда значение = 2.
Если же они не равны, то домножим числа и получим
↓
$\frac{x+x}{x} = 2x : x = 2$.
$x^2y + y^2x = z^2y + y^2z = x^2z + z^2x$
$x^2 + 2x^2y^2 + 2y; x^2 + xy = z^2 + zx; xy + y^2 = xz + z^2; \Rightarrow x^2 + xy = y^2 + xy$.
$x^2 = y^2 \quad x = y$.
$\boxed{\text{Ответ: 2}}$
$\frac{2x}{z_2} = \frac{x+z}{x}$
$2x = z^2 + xz$.

(–/+)

Задача №2

$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$

$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$

Найдём x_1 и x_2, и x_3

$3x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3}$

$3x_2 = x_0 + x_1 = \frac{4x_0}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4x_0}{9}$

$3x_3 = x_0 + x_1 + x_2 = \frac{4x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} = \frac{16x_0}{9} \Rightarrow x_3 = \frac{16x_0}{27}$

Предположим, что $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_0}{3}$

для $n = 1$

$x_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^0 \cdot \frac{x_0}{3} = \frac{x_0}{3}$

$n = 2$

$x_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{x_0}{3} = \frac{4x_0}{9}$

Пусть верно для x_n, что $x_n = \frac{x_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, тогда докажем для x_{n+1}

$3x_{n+1} = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$, а т.к. $3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$, то

$3x_{n+1} = 3x_n + x_n = 4x_n \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_0}{3} = \frac{x_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^n$, таким образом мы доказали методом математической индукции, что $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_0}{3}$. члены $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ образуют геометрическую прогрессию с $x_1 = \frac{x_0}{3}$ и $q = \frac{4}{3}$, тогда

$\Sigma_n = \frac{x_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{x_0}{3}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{4}{3} - 1} = x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)$, но так как

$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = x_0 + \Sigma_n = x_0 + \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0 - x_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$.

Ответ. $x_n = \frac{x_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

$S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$

Задача №3

пусть на доске записаны числа $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$, тогда если мы рассмотрим тройки подряд идущих чисел $x_1 x_2 x_3$ и $x_2 x_3 x_4$, то по условию

$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 \Rightarrow x_1 = x_4$

аналогично для троек $x_2 x_3 x_4$ и $x_3 x_4 x_5$ получаем, что $x_2 = x_5$,
для троек $x_3 x_4 x_5$ и $x_4 x_5 x_6$ получаем, что $x_3 = x_6$, тогда получаем следующую последовательность чисел

$x_1\ x_2\ x_3\ x_1\ x_2\ x_3$., их среднее арифметическое равно A, т.е.

$\frac{2x_1+2x_2+2x_3}{6} = A \Rightarrow x_1+x_2+x_3 = 3A$., так как в среднегеометрическом трёх последовательных чисел всегда будут члены x_1, x_2 и x_3, то неважно какой из них будет равен 1, поэтому пусть $x_1 = 1$, тогда

$1 + x_2 + x_3 = 3A$

$x_2 + x_3 = 3A - 1 \Rightarrow x_2 = 3A-1-x_3$

$S_г$ - среднее геометрическое

$S_г = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = \sqrt[3]{x_2 x_3} = \sqrt[3]{(3A-1-x_3)x_3} = \sqrt[3]{x_3(3A-1)-x_3^2}$

р-рим функцию $f(x_3) = x_3(3A-1) - x_3^2$

$f'(x_3) = 3A-1-2x_3$

$f'(x_3) = 0 \quad 3A-1-2x_3 = 0 \quad x_3 = \frac{3A-1}{2}$

$f'(x)$ + − ; $f(x)$ ↗ $\frac{3A-1}{2}$ ↘ x

т. $x_3 = \frac{3A-1}{2}$ - точка максимума, тогда

~~$S_г$~~ $\Rightarrow S_г$ - max при $f(x_3)$ - максимально, т.е.

$S_{г\,max} = \sqrt[3]{\left(3A-1-\frac{3A-1}{2}\right)\frac{3A-1}{2}} = \left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Ответ: $\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Задача №4

+

Пусть $g(x) = mx^2 + lx + n$, тогда т.к $g(x)$ имеет один корень, то
$mx^2 + lx + n = 0$
$D = l^2 - 4mn$, т.к один корень, то $D = 0 \Rightarrow l^2 = 4mn \quad l = 2\sqrt{mn}$,
тогда

модуль стоит т.к m и n могут быть меньше нуля.

$g(x) = mx^2 + 2\sqrt{mn}\,x + n = (\sqrt{|m|}x + \sqrt{|n|})^2$, тогда

$g(ax+b) + g(cx+d) = (\sqrt{|m|}(ax+b) + \sqrt{|n|})^2 + (\sqrt{|m|}(cx+d) + \sqrt{|n|})^2$, сумма квадратов будет равна 0 тогда и только тогда, когда каждый квадрат будет равен 0, т.е.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\sqrt{|m|}ax_1+\sqrt{|m|}b+\sqrt{|n|}=0$

$\sqrt{|m|}cx_2+\sqrt{|m|}d+\sqrt{|n|}=0$, т.к $g(x)$ - квадратный трехчлен, то $m\ne0$

$x_1=-\dfrac{\sqrt{|m|}b+\sqrt{|n|}}{a\sqrt{|m|}}$ $\quad x_2=-\dfrac{\sqrt{|m|}d+\sqrt{|n|}}{c\sqrt{|m|}}$, т.к только один корень, то $x_1=x_2$, т.е

$$-\frac{\sqrt{|m|}b+\sqrt{|n|}}{a\sqrt{|m|}}=-\frac{\sqrt{|m|}d+\sqrt{|n|}}{c\sqrt{|m|}}$$

$$\frac{\sqrt{|m|}b+\sqrt{|n|}}{a}=\frac{\sqrt{|m|}d+\sqrt{|n|}}{c}$$

$\sqrt{|m|}bc+\sqrt{|n|}c=cd\sqrt{|m|}+\sqrt{|n|}a.$

$\sqrt{|m|}(bc-ad)=\sqrt{|n|}(a-c)$

$\sqrt{\dfrac{n}{m}}=\dfrac{bc-ad}{a-c}$, т.к $a\ne c$ по условию, тогда

если $g(x)=0$

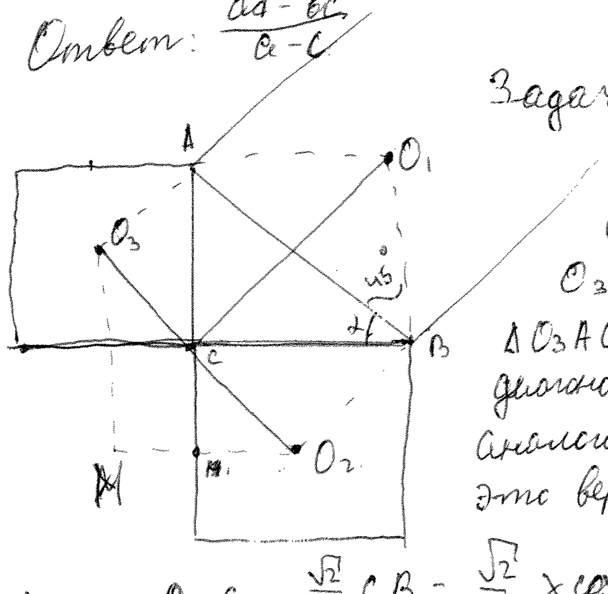
$(\sqrt{|m|}x+\sqrt{|n|})^2=0$

$x=-\sqrt{\dfrac{n}{m}}=-\dfrac{bc-ad}{a-c}$

$x=\dfrac{ad-bc}{a-c}$

Ответ: $\dfrac{ad-bc}{a-c}$

Задача №5



пусть $\angle ABC=\alpha$ и $AB=x$, тогда $CB=x\cos\alpha$ $\quad AC=x\sin\alpha$.

O_3C_2 проходит через точку C, т.к. ΔO_3AC - равнобедренный и $\angle AO_3C=90^\circ$ (как диагонали квадрата) $\Rightarrow$ $\angle ACO_3=45^\circ$, аналогично для ΔCO_2B $\angle O_2CB=45^\circ$, а т.к это вертикальные углы, то т. $C\in O_2O_3$,

тогда $O_2C=\frac{\sqrt2}{2}CB=\frac{\sqrt2}{2}x\cos\alpha$, $O_3C=\frac{\sqrt2}{2}AC=\frac{\sqrt2}{2}x\sin\alpha$,

т.к O_3C и O_2C - половины диагоналей квадрата, тогда

$O_2O_3=O_3C+O_2C=\frac{\sqrt2}{2}x(\sin\alpha+\cos\alpha)$.

р-рим ΔAO_1B - он равнобедренный и $\angle AO_1B=90^\circ$, т.к. O_1 - центр квадрата, тогда т.к $AO_1=O_1B$, то $\angle O_1BA=\angle O_1AB=45^\circ$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ВЭФ 48-31

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

р-рим $\triangle O_1BC$, $\angle O_1BC = \angle O_1BA + \angle ABC = 45^\circ + \alpha$.
$CB = x\cos\alpha$.
O_1B – половина диагонали квадрата, построенного на гипотенузе, поэтому $O_1B = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, тогда по т. синусов для $\triangle O_1BC$

$$O_1C^2 = CB^2 + O_1B^2 - 2\cos(45^\circ+\alpha)\,CB\cdot O_1B$$

$$O_1C^2 = x^2\cos^2\alpha + \frac{x^2}{2} - 2x\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x\,(\cos45^\circ\cdot\cos\alpha - \sin45^\circ\sin\alpha)$$

$$O_1C^2 = x^2\cos^2\alpha + \frac{x^2}{2} - \sqrt{2}x^2\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)$$

$$O_1C^2 = x^2\cos^2\alpha + \frac{x^2}{2} - x^2\cos^2\alpha + x^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$O_1C^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2\sin2\alpha}{2} = \frac{x^2(1+\sin2\alpha)}{2}$$

$$O_1C = \frac{x}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{1+\sin2\alpha}{\cancel{2}}} = \frac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{x}{\sqrt{2}}|\sin\alpha+\cos\alpha|$$

$O_1C = \frac{\sqrt{2}}{2}x|\sin\alpha+\cos\alpha|$, т.к. $\alpha\in(0;90^\circ)$, то ~~O_1C~~ $\sin\alpha>0$ и $\cos\alpha>0$ ⇒
$\Rightarrow O_1C = \frac{\sqrt{2}}{2}x(\sin\alpha+\cos\alpha)$

+

Таким образом получаем, что $O_1C = O_2O_3$, т.е все три линии имеют одинаковую длину.

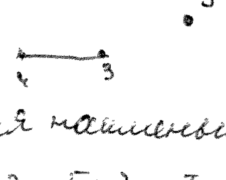
Ответ: Они одинаковы.

Задача №1

р-рим одну четверку ~~городов~~ заводов и соединим двух из них так чтобы выполнялось условие задачи

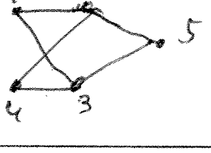
+

добавим еще один ~~город~~ завод, тогда

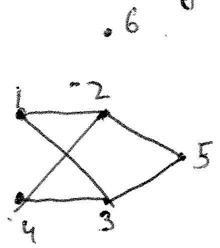


необходимо либо все соединить с 5, либо 1-3, 2-4 ~~или~~ и 5-3, 5-2, или 1-4, 2-3 и 5-1, 5-3,

для наименьшего кол-ва в последствии соединим 1-3, 2-4 и 5-2, 5-3, т.е.



Добавим ещё один ~~город~~ завод 6.



наименьшее кол-во будет, когда 6 мы соединим с 4 любыми городами, т.к. в любой четверке будет 6 соединен с одним из городов, аналогично для 7 завода необходимо будет соединиться 5 другими, любыми городами, таким образом каждый последующий n ~~город~~ завод добавляет n-2 пары, т.е. общее минимальное количество пар будет равно

$$S = 6 + 4+5+\ldots+148 = 6+\frac{152}{2}\cdot 143 = 6+143\cdot 76 = 6+10868 = 10874$$

Ответ: 10874

№1. Если имеются 150 заводов, и автобусный маршрут соединяет 2 из них, то C_{150}^2 - количество маршрутов, необходимое, чтобы соединить все завода автобусными маршрутами. В таком случае при выборе любых четырех заводов мы будем иметь 4 маршрута, их соединяющих. ∓ По условию задачи нам необходимо иметь только 2 таких маршрута ⇒ найденное число вдвое больше, чем нам необходимо. ⇒

Число автобусных маршрутов, необходимое для выполнения условия равно $\frac{C_{150}^2}{2} = \frac{150!}{2!\cdot 148!\cdot 2} = 5587,5$, число не целое, округлив до целого получим 5588.

Ответ: 5588.

№3

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 - числа

Ряд чисел имеет вид: $1; a_1; a_2; a_3; a_4; a_5$, при этом по условию справедливо равенство:

$$\underset{(I)}{\frac{1+a_1+a_2}{3}} = \underset{(II)}{\frac{a_1+a_2+a_3}{3}} = \underset{(III)}{\frac{a_2+a_3+a_4}{3}} = \underset{(IV)}{\frac{a_3+a_4+a_5}{3}}.$$

∓

из I и II $a_3=1$; из II и III $a_1=a_4$; из I и IV $a_2=a_5$; т.о. ряд чисел имеет вид: $1; a_1; a_2; 1; a_1; a_2$.

По условию $\sqrt[6]{1\cdot a_1\cdot a_2\cdot 1\cdot a_1\cdot a_2} = A$; $A>0$

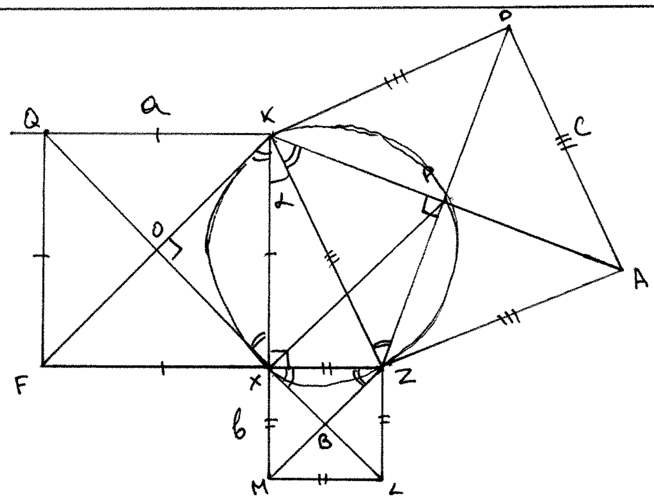
$$\sqrt[6]{a_1^2\cdot a_2^2} = A \Rightarrow |a_1a_2| = A^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1a_2 = A^3 \\ a_1a_2 = -A^3 \end{array}\right.$$

Среднее геометрическое любых 3х последовательно идущих чисел этого ряда имеет вид $\sqrt[3]{a_1a_2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{a_1a_2} = A \\ \sqrt[3]{a_1a_2} = -A \end{array}\right.$

Т.к. A - число положительное, то наибольшее значение среднего геометрического будет равно A

Ответ: A

№5



1. Отрезок KZ „видит" из точки X и P под одинаковыми углами ⇒ вокруг точки K, Z, X, P можно описать окружность. Углы KZP и KXP – вписанные, опираются на одну дугу. $\angle KZP = 45^\circ \Rightarrow \angle KXP = 45^\circ$ и XP – бис-са $\angle KXZ$.

$$OB = \frac{a\sqrt2}{2} + \frac{b\sqrt2}{2} = \frac{\sqrt2}{2}(a+b)$$

PX (по т. косинусов) $= \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{2} - \sqrt2\, ac\cos(\alpha+45)}$

$\frac{(a+b)}{\sqrt2} \vee \sqrt{a^2+\frac{c^2}{2} - \sqrt2\, ac\cos(\alpha+45)}$; оба выражения >0; $a, b, c > 0$

$\frac{(a+b)^2}{2} \vee a^2 + \frac{c^2}{2} - \sqrt2\, ac\cos(\alpha+45)$ $\qquad b = \sqrt{c^2-a^2}$

$a^2 + 2a\sqrt{c^2-a^2} + c^2 - a^2 \vee 2a^2 + c^2 - 2\sqrt2\, ac\cos(\alpha+45)$

$\sqrt{c^2-a^2} \vee a - \sqrt2\, c\cos(\alpha+45)$

$b \vee a - c(\cos\alpha - \sin\alpha)$ $\qquad \cos\alpha = \frac{a}{c}$; $\sin\alpha = \frac{b}{c}$

$b \vee a - a + b$

$0 = 0$; $OB = PX$

Ответ: Длины линий равны и не зависят от α

№4.

Если $g(x)$ имеет один корень, то многочлены $g(ax+b)$ и $g(cx+d)$ будут так же иметь один корень, при этом если x_0 – корень $g(x)$, то $x_1 = \frac{x_0-b}{a}$ – корень $g(ax+b)$; $x_2 = \frac{x_0-d}{c}$ – корень $g(cx+d)$. При этом если $g(ax+b) + g(cx+d)$ имеет только 1 корень, то

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x_1 = x_2$; $\frac{x_0 - b}{a} = \frac{x_0 - d}{c}$; $x_0 = \frac{cb - ad}{c - a}$

Ответ: $\frac{cb - ad}{c - a}$

№2.

$x_0; x_1; \dots; x_n; x_{n+1}$ $-$

$2x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n \Rightarrow x_n = \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}}{3}$

$S_n = x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{x_0 + x_1}{3} + \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. Пусть $g(x)=kx^2+mx+n$, где $k\neq 0$

Тогда при $g(x)=0$

$kx^2+mx+n=0$

$D=0$ – т.к. одно решение

$D=m^2-4kn=0 \Rightarrow m^2=4kn$ (1)

$x=-\frac{m}{2k}$ (2)

(+)

Тогда $g(ax+b)=k(ax+b)^2+m(ax+b)+n$

$g(cx+d)=k(cx+d)^2+m(cx+d)+n$

$g(ax+b)=ka^2x^2+ax(2kb+m)+kb^2+mb+n$

$g(cx+d)=kc^2x^2+cx(2kd+m)+kd^2+md+n$

$g(ax+b)+g(cx+d)=x^2(k(a^2+c^2))+x(2k(ab+cd)+m(a+c))+k(b^2+d^2)+m(b+d)+2n$

При $g(ax+b)+g(cx+d)=0$ имеем

$x^2(k(a^2+c^2))+x(2k(ab+cd)+m(a+c))+k(b^2+d^2)+m(b+d)+2n=0$

$D=0$ – т.к. одно решение

$D=4k^2(ab+cd)^2+m^2(a+c)^2+4k(ab+cd)\cdot m(a+c)-4k^2(b^2+d^2)(a^2+c^2)-$
$-4km(a^2+c^2)(b+d)-\underset{\text{"}2m^2\text{" из (1)}}{8kn}(a^2+c^2)=4k^2a^2b^2+8k^2abcd+4k^2c^2d^2+m^2a^2+$
$+2m^2ac+m^2c^2+4mk(a^2b+abc+acd+c^2d)-4k^2(a^2b^2+a^2d^2+d^2c^2+b^2c^2)-$
$-4km(a^2b+c^2b+c^2d+a^2d)-2m^2a^2-2m^2c^2=8k^2abcd-m^2a^2-m^2c^2+2m^2ac+$
$+4km(abc+acd-c^2b-a^2d)-4k^2(a^2d^2+b^2c^2)=$
$=-4k^2(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)-m^2(a^2-2ac+c^2)-4km(ad(a-c)-cb(a-c))=$
$=-4k^2(ad-bc)^2-m^2(a-c)^2-4km(a-c)(ad-cb)=$
$=-\underbrace{(4k^2(ad-bc)^2+4km(a-c)(ad-cb)+m^2(a-c)^2)}_{\text{полный квадрат}}=$

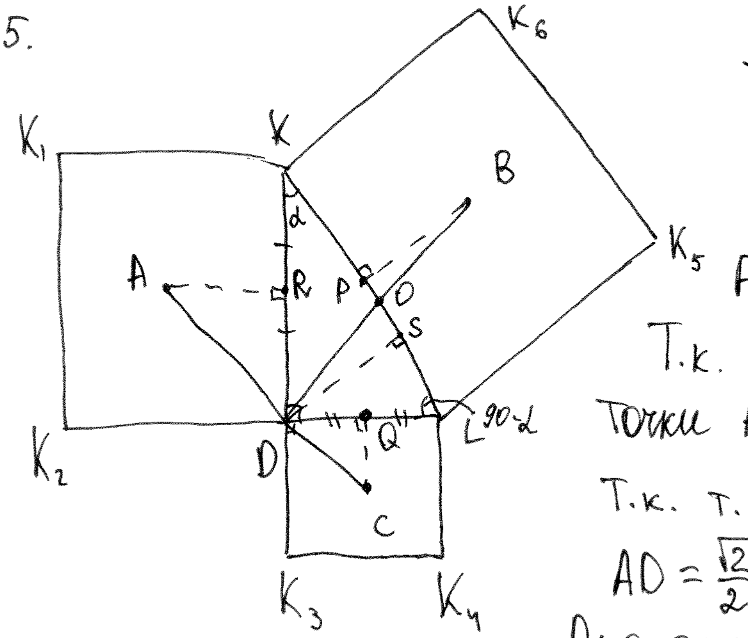
$=-(2k(ad-bc)+m(a-c))^2$

$-(2k(ad-bc)+m(a-c))^2=0 \Rightarrow 2k(ad-bc)=-m(a-c)$

$-\frac{m}{2k}=\frac{ad-bc}{a-c}$ по (2) $x=\frac{ad-bc}{a-c}$

Ответ: $x=\frac{ad-bc}{a-c}$

5.



Т.к. K_1KDK_2 - квадрат, то $\angle ADK = 45^\circ$ лежит т. A в центре квадрата.

Аналогично $\angle CDL = 45^\circ$

Т.к. $\angle KDK_3 = 180^\circ$ и $\angle K_2DL = 180^\circ$, то точки A, D, C лежат на одной прямой

Т.к. т. A - центр квадрата, то

$AD = \frac{\sqrt{2}}{2} KD$

Аналогично, $CD = \frac{\sqrt{2}}{2} DL$

$BP = PK$.

Пусть $KL = 2a$ т.к. $\triangle KDL$ - прямоугольный, то

$KD = KL \cdot \cos\alpha = 2a\cos\alpha \Rightarrow AD = a\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$

$DL = KL \cdot \sin\alpha = 2a\sin\alpha \Rightarrow CD = a\sqrt{2}\sin\alpha$

$AC = AD + DC = a\sqrt{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

$\angle KLD = 90 - \alpha \Rightarrow$ т.к. $\triangle SDL$ - прямоугольный, то

$SL = DL \cdot \cos(90-\alpha) = DL \cdot \sin\alpha = 2a \cdot \sin^2\alpha$

$SD = DL \cdot \sin(90-\alpha) = a \cdot \sin 2\alpha$

Тогда $PS = PL - SL = a - 2a\sin^2\alpha = a \cdot \cos 2\alpha$

$\angle POB = \angle DOS$ - вертикальные $\Rightarrow$ т.к. $\triangle POB$ и $\triangle DOS$ - прямоугольные, то $\triangle POB \sim \triangle DOS$

$$\frac{PB}{DS} = \frac{PO}{OS} = \frac{BO}{OD} = \frac{1}{\sin 2\alpha} \Rightarrow PO = \frac{OS}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{PB}{DS} = \frac{a}{a \cdot \sin 2\alpha}$$

$$PO + OS = OS\left(1 + \frac{1}{\sin 2\alpha}\right) = a \cdot \cos 2\alpha$$

$$OS = \frac{a \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} \Rightarrow PO = \frac{a \cdot \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$$

Из $\triangle BOP$:

$$BO^2 = OP^2 + PB^2 = a^2\left(\frac{\cos^2 2\alpha}{(1+\sin 2\alpha)^2} + 1\right) = a^2\left(\frac{\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha + 1 + 2\sin 2\alpha}{(1+\sin 2\alpha)^2}\right) =$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$= 2a^2\left(\frac{1}{1+\sin 2\alpha}\right) \Rightarrow BO = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}}$

$\frac{BO}{OD} = \frac{1}{\sin 2\alpha} \Rightarrow OD = BO \cdot \sin 2\alpha = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sin 2\alpha}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}}$

$BD = BO + OD = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}}(1+\sin 2\alpha) = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sin 2\alpha}$

$BD = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\sin 2\alpha} = a\sqrt{2}\left(\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}\right)$ т.к. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, то $\sin\alpha+\cos\alpha > 0$

$AC = a\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)}$

+

$BD = a\sqrt{2}\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha) \Rightarrow AC \neq BD$

Ответ: равны.

2. $2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$

+

$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$

$3x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3}$

$3x_2 = x_1 + x_0 = 4x_1 \quad x_2 = \frac{4x_1}{3}$

~~$3x_3 = x_2 + x_1 + x_0 = 4x_1 + \frac{4}{3}x_1 = \frac{16x_1}{3} \quad x_3 = \frac{16x_1}{9}$~~

~~$3x_4 = 3x_1 + x_1 + \frac{4x_1}{3} + \frac{16x_1}{9} = \frac{40x_1}{9}$~~

$3x_3 = x_0 + x_1 + x_2 = 4x_1 + x_2 = 4x_2$

$3x_4 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 4x_2 + x_3 = 4x_3$

...

$3x_n = 4x_{n-2} + x_{n-1} = 4x_{n-1}$

Получаем: $x_n = \frac{4}{3}x_{n-1}$

Геометрическая прогрессия с первым членом x_1

$x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\cdot x_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{x_0}{3}$

Тогда $S_n = x_0 + \frac{\frac{x_0}{3}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{3}} =$

$= x_0 + x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$

$x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{x_0}{3}$

Ответ: $S_n = x_0\left(\frac{4}{3}\right)^n$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. Имеем числа $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6$

Т.к. средние арифметические любых трех соседних чисел равны, то и суммы любых трёх соседних чисел равны. Тогда:

$a_1+a_2+a_3=a_2+a_3+a_4 \Rightarrow a_1=a_4$

$a_2+a_3+a_4=a_3+a_4+a_5 \Rightarrow a_2=a_5$

$a_3+a_4+a_5=a_4+a_5+a_6 \Rightarrow a_3=a_6$

+

Имеем

$a_1\ a_2\ a_3\ a_1\ a_2\ a_3$

Тогда по условию

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_1+a_2+a_3}{6}=A \Rightarrow \frac{a_1+a_2+a_3}{3}=A$$

Значит, по условию в каждом среднем ариф. соседних участвует 1 ⇒ для группы $x\ y\ 1$

$$\frac{x+y+1}{3}=A \Rightarrow x+y=3A-1$$

$x=3A-1-y$

Среднее геометрическое:

$K=\cancel{x+y+}\sqrt[3]{x\cdot y\cdot 1}=\sqrt[3]{y(3A-1-y)}$

$f(y)=y(3A-1-y)$ K максимально при $f(y)$ максимально.

$f'(y)=3A-1-2y$

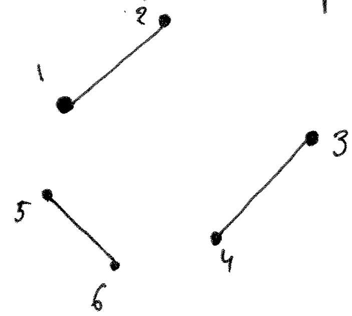
$f'(y)=0$

$y=\frac{3A-1}{2}$ $\quad$ $+\quad \frac{3A-1}{2} \quad -\quad f(y)$ $\Rightarrow y=\frac{3A-1}{2}$ – точка максимума

K максимально при $y=\frac{3A-1}{2}$

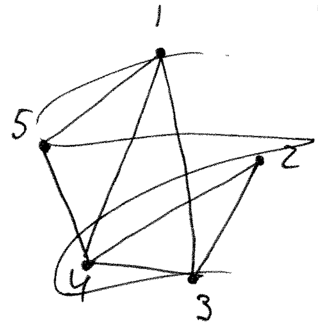
$K=\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\qquad$ Ответ: $\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

1. Рассмотрим четверку городов и добавим еще 2 города



Для группы 1-2-3-4 и 3-4-5-6 и 1-2-5-6 выполняется условие, но (+) возьмём группу 3-4-2-6, тогда нужно либо соединить 2-6 либо 2-3(4) и 6-4(3)

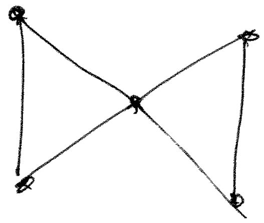
Получаем, что если у нас имеется группа из n городов подходящих по условию и мы добавляем ещё 1 город, то количество дорог увеличится минимум на 2. Действительно, добавим к четверке 1 город



Для четверки 1-3-4-5 необходима еще ~~3~~4 (как минимум) дорога

⇓

При добавлении n-го города нужно добавить $n-1$ дорогу



Для $n=4$ – 2 дороги

Для $n=5$ – 6 дорог

Для $n=6$ – 11 дорог

...

Для $n=150$ – $\frac{(4+149)\cdot 146}{2}+2=11171$

Ответ: 11171

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. $2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n \Rightarrow 3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$

1) Рассмотрим x_k и x_{k+1} ($k+1 \leq n$).

$3x_k = x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1}$

$3x_{k+1} = x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k$

(+)

Подставим первое во второе:

$3x_{k+1} = 3x_k + x_k = 4x_k \Rightarrow x_{k+1} = \frac{4}{3}x_k$ - получили формулу, задающую член последовательности через предыдущий. Преобразуем её в формулу для нахождения n-ного члена через 0-вой:

$$x_n = \frac{4}{3}x_{n-1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}x_{n-2} = \ldots = \underbrace{\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{3}}_{n \text{ раз}}\cdot x_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$$

Получаем, что при заданном x_0 и n мы всегда можем найти x_n.

2) Найдем S_n:

$$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = \underbrace{(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1})}_{\text{из условия } = 3x_n} + x_n = 4x_n = 4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$$

Ответ: $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$

$S_n = 4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$

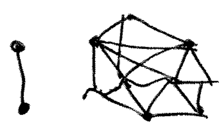
1. Возьмём 2 завода, соединенные дорогой. Тогда при любом выборе 2 других заводов они либо будут соединены дорогой, либо дорога будет иметь вид ломаной из 3-ёх звеньев (т.к. нужно минимальное кол-во пар - возьмём 1-ый вариант). При этом схема исходных дорог имеет вид 148-угольника со всеми возможными проведёнными диагоналями, значит:

? (+)

$$k_{min} = 1 + \sum_{i=1}^{147} i = 1 + \frac{1+147}{2}\cdot 147 = 1 + 74\cdot 147 = 10879$$

Меньшего кол-ва быть не может, т.к. при выборе ещё одного завода придётся соединять его со всеми остальными ~~[illegible]~~ заводами многоугольника.

Ответ: 10879



ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. Обозначим искомые 6 чисел за $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5$ и x_6, тогда из условия выполняется (числа упорядочены):

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_2+x_3+x_4}{3} \Rightarrow x_1 = x_4$$

$$\frac{x_2+x_3+x_4}{3} = \frac{x_3+x_4+x_5}{3} \Rightarrow x_2 = x_5 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x_3+x_4+x_5}{3} = \frac{x_4+x_5+x_6}{3} \Rightarrow x_3 = x_6$$

(+)

$$\Rightarrow A = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_6}{6} = \frac{2x_1+2x_2+2x_3}{6} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} -$$

откуда получаем подстановкой x_4, x_5 и x_6 вместо x_1, x_2 и x_3, что все ср. арифметические послед. 3-ёх чисел равны A. Возьмём произвольную тройку, числа в ней будут такие же, как и в $x_1; x_2; x_3$ (следует из вышесказанного). Тогда пусть какой-то x из них равен единице, а другие имеют номера n и m, ~~тогда~~:

$$\begin{cases} A = \frac{1+x_m+x_n}{3} \Rightarrow x_m+x_n = 3A-1;\ x_m = 3A-1-x_m \\ \sqrt[3]{1\cdot x_m\cdot x_n} - \text{максимально.} \end{cases}$$

Подставим во второе $x_m = 3A-1-x_n$

$$\sqrt[3]{(3A-1-x_n)x_n} = \sqrt[3]{3Ax_n - x_n - x_n^2} = \sqrt[3]{-x_n^2 + x_n(3A-1)}$$

$f(x) = -x^2 + x(3A-1)$ – ~~[illegible]~~ парабола с ветвями, направленными вниз $\Rightarrow$ max. значение в вершине.

$$x_{max} = \frac{-(3A-1)}{-2} = \frac{3A-1}{2}$$

$f_{max}(x) = -\frac{(3A-1)^2}{4} + \frac{(3A-1)^2}{2} = \frac{(3A-1)^2}{2}$, значит максимальное значение среднего геометрического трёх чисел из исходной последовательности:

$$\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{2}}$$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{2}}$

4. $g(x)$ имеет один корень $\Rightarrow g(ax+b)$ и $g(cx+d)$ имеют так же один корень.

$\mp$

Представим $g(x)=(kx+B)^2$ т.к. данный квадратный трёхчлен имеет ровно один корень.

$g(ax+b)+g(cx+d)=(k(ax+b)+B)^2+(k(cx+d)+B)^2$ – имеет один корень. Т.к. квадрат всегда неотрицательный, то единственный вариант, когда данный многочлен ~~имеет~~ ~~один~~ равен 0 – когда обе скобки равны нулю:

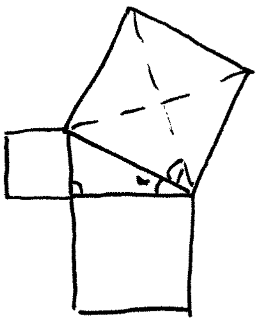
$$\begin{cases} k(ax+b)+B=0 \\ k(cx+d)+B=0 \end{cases} ; \begin{cases} ax+b=\frac{B}{k} \\ cx+d=\frac{B}{k} \end{cases} \Rightarrow ax+b=cx+d$$

$$x=\frac{d-b}{a-c}$$

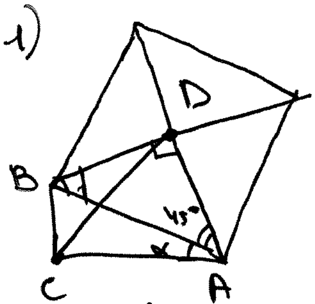
Из условия $a \neq c \Rightarrow$ этот корень всегда существует.

Ответ: $\frac{d-b}{a-c}$?

5. Возьмем за угол α тот угол прямоугольного Δ, который принимает значения от 0 до 45° и обозначим гипотенузу за l:



1)

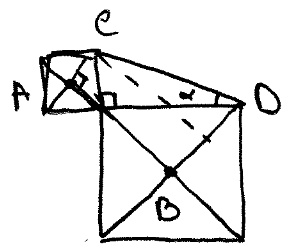


$AC = l\cos\alpha$

$AD = l\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

(из равнобед ΔBDA)

2)



1) по теореме косинусов для ΔACD:

$$CD^2 = l^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}l^2 - 2l^2\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha+45^\circ) =$$

$$= l^2\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{2} - \sqrt{2}\cos\alpha\left(\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$$

$$= l^2\left(\cos^2\alpha + \frac{1}{2} - \cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha\right) =$$

$$= l^2\left(\frac{1}{2}(1 + 2\sin\alpha\cos\alpha)\right) = l^2\left(\frac{1}{2}\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)^2\right)$$

т.к. $\alpha \in [0;45]$

$$CD = \frac{\sqrt{2}}{2}l(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

+

2) По т. Фалеса, т.к. $AC \perp AB$ и $DB \perp AB$, то:

$$AB = l\cdot\sin(\alpha+45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}l(\sin\alpha+\cos\alpha) = CD \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ эти две линии равны при любом значении угла α.

Ответ: обе линии равны при любых значениях α.

Задача №3

(+)

Дан ряд чисел (одно из которых 1):

$x \quad y \quad z \quad 1 \quad v \quad w$

Тогда для данных чисел выполняется условие:

$$\frac{x+y+z}{3} = \frac{y+z+1}{3} = \frac{z+1+v}{3} = \frac{1+v+w}{3}$$

$$\frac{x+y+z+1+v+w}{6} = A$$

Чтобы ср. арифмет. были равны:

$x+y+z = y+z+1$

$x = 1$

Найти max. значение ср. геом. 3-х чисел:

$\sqrt[3]{xyz}, \ \sqrt[3]{yz\cdot 1}, \ \sqrt[3]{z\cdot 1\cdot v}, \ \sqrt[3]{1\cdot v\cdot w}$

т.к $x = 1$.

Тогда $\sqrt[3]{yz}, \sqrt[3]{yz}, \sqrt[3]{zv}, \sqrt[3]{vw}$, max-?

Из арифм. прогрессии следует, что

$y+z+1 = z+1+v$; $y = v$;
$z+1+v = 1+v+w$; $z = w$;

тогда, чтобы у чисел было одинаковое ср. арифмет. требуется, чтобы $y = z$, т.е $y = v = z = w$

Тогда $\frac{4y+2}{6} = A$; $2y+1 = 3A$; $y = \frac{3A-1}{2}$.

Максимальное значение ср. геометр. 3-х чисел.

$$\sqrt[3]{y\cdot y} = \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$

Задача №2.

Дано: $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$

$2x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n$, $n = 1, 2.$

Найти: x_n, S_n

+

$2x_1 = x_0 - x_1$; $x_1 = \frac{x_0}{3}$

$2x_2 = x_0 + x_1 - x_2$; $3x_2 = x_0 + x_1$; $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{3} = \frac{4x_0}{9}$

$2x_3 = x_0 + x_1 + x_2 - x_3$; $3x_3 = x_0 + x_1 + x_2$; $x_3 = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3} = \frac{16x_0}{27}$ и т.д.

Значит, каждый след. член увелич. в $\frac{4}{3}$ раза.

$$x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n} x_0$$

$S_1 = x_0$; $S_2 = x_0 + x_1 = \frac{x_0}{3} + x_0 = \frac{4x_0}{3}$; $S_3 = \frac{x_0}{3} + x_0 + \frac{4x_0}{9} = \frac{4x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} = \frac{16x_0}{9}$

$S_4 = S_3 + x_3 = \frac{16x_0}{9} + \frac{16x_0}{27} = \frac{64x_0}{27}$ и т.д.

$$S_n = \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} x_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} x_0.$$

Ответ: 1) $x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n} x_0$; 2) $S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} x_0$.

Задача №4.

• Дан квадратный трёхчлен $g(x)$, который имеет один корень. Так как он имеет один корень, значит его можно свернуть как полный квадрат.

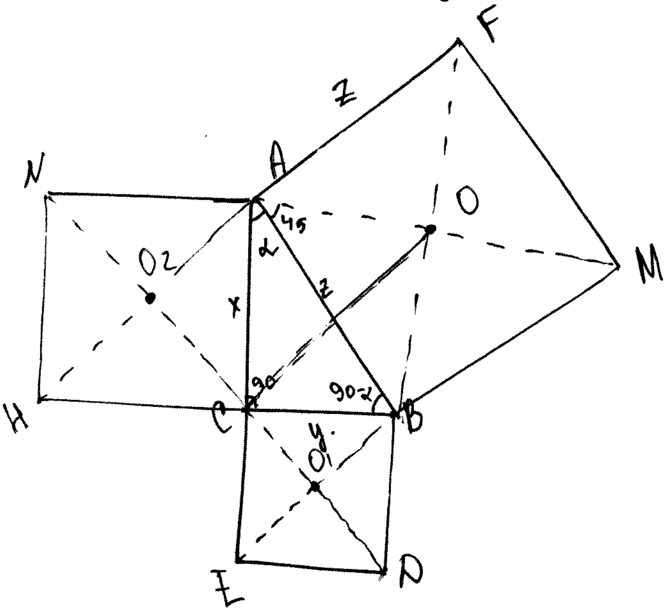
• Следующий многочлен $g(ax+b) + g(cx+d)$, где $a \neq c$, ~~эта сумма~~ будет иметь один корень только в том случае, если это сумма полных квадратов; ~~равных между собой~~. по т. Виетта можно найти корень, который

равен: $x = \frac{ad-bc}{a-c}$

+

Ответ: $\frac{ad-bc}{a-c}$

Задача №5.



Дано:
α

Решение:

1. пусть $AC = x$; $BC = y$; $AB = z$, тогда

$x = z\cos\alpha$; $y = z\sin\alpha$

$2O_2C = \sqrt{2x^2}$; $2O_1C = \sqrt{2y^2}$

$O_2C = \frac{\sqrt{2z^2\cos^2\alpha}}{2}$; $O_1C = \frac{\sqrt{2z^2\sin^2\alpha}}{2}$

$O_1O_2 = O_1C + CO_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(z\cos\alpha + z\sin\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}z(\cos\alpha + \sin\alpha)$.

2. $AO = \frac{\sqrt{2z^2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}z$

по т. косинусов $OC^2 = AO^2 + AC^2 - 2AO\cdot AC\cos(\alpha+45)$

$OC^2 = \frac{2}{4}z^2 + z^2\cos^2\alpha - 2\frac{\sqrt{2}}{2}z\cdot z\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45)$

$OC^2 = \frac{1}{2}z^2 + z^2\cos^2\alpha - \sqrt{2}z^2\cos\alpha(\cos\alpha\cos45 - \sin\alpha\sin45)$

$OC^2 = \frac{1}{2}z^2 + \cancel{z^2\cos^2\alpha} - \cancel{z^2\cos^2\alpha} + z^2\cos\alpha\sin\alpha$

$OC^2 = \frac{z^2 + 2z^2\cos\alpha\sin\alpha}{2} = \frac{z^2(1+2\cos\alpha\sin\alpha)}{2} = \frac{z^2(1+\sin2\alpha)}{2}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ВР 60-41

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$OC^1 = \frac{z\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\sin 2\alpha}$

$OC \vee O_2O_1$

$\frac{z\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\sin 2\alpha} \vee \frac{\sqrt{2}}{2}z(\cos\alpha+\sin\alpha)$

$\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha} \vee (\cos\alpha+\sin\alpha)$

$\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2} \vee (\sin\alpha+\cos\alpha)$

$|\sin\alpha+\cos\alpha| \vee \sin\alpha+\cos\alpha.$

значит, $OC = O_1O_2$, они будут одинаковые. Поэтому при любом значении угла α их длины будут одинаковы, т.е не будут различаться.

Задача №1.

В стране 150 заводов.

всего пар: $\frac{150}{2} = 75$

По условию: если есть н-р: 12 заводов, тогда.

т.к есть дорога между 1 и 4, тогда между 2 и 3 тоже есть дорога.

1 4 – 5 6

2 3 – 7

следующая четверка 4, 5, 6, 7.

Если есть дорога между 4 и 6, тогда и между 5 и 7 и.т.д.

получаем дороги: 1 4, 4 6, 6 8, 8 10, 10 12, 12 14

2 3, 5 7, 7 9, 9 11, 11 13, 13 15

и. т.д $\frac{75}{15} = 5$; значит дорог $5 * 12 = 60$ дорог + 1 дорога, которая соединит. первую пару с последней => всего 61 пара заводов. $* 2 = (122 - 1)$ умножим на два т.к есть дороги еще между чет. и нечет. заводами.

Ответ: 121 пара

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ВФ60-55 ДИ-М1-01

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1.

Рассмотрим самый худший вариант – один из 4-х выбранных заводов не соединен ни с одним цехом. Чтобы этого избежать, кол-во заводов, с которыми соединен каждый, должно охватывать хотя бы один из оставшихся трех, то есть численно равно $150-4+1=147$. Зная, что ~~это~~ нам нужно найти кол-во пар, получим их наименьшее число: $147\cdot150:2=11025$

кол-во выбираемых заводов; один из выбир. заводов

?

Ответ: 11025 пар.

N2.

$2x_n = x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}+x_n$

$x_n = \dfrac{x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}}{3}$

~~x_0~~ Получим следующие члены: $x_0, \frac{x_0}{3}, \frac{4}{3}\cdot\frac{x_0}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{x_0}{3}, \ldots, \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\frac{x_0}{3}$.

Доказать это очень легко. ~~В знаменателе дроби всегда будет 3^n, если первым членом~~

Рассмотрим образовавшуюся геометрич. прогрессию: $\left(\frac{4}{3}\right)^0\frac{x_0}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^1\cdot\frac{x_0}{3}, \ldots, \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\frac{x_0}{3}$.

Т.к. $\frac{x_0}{3}$ – неизменно, берем во внимание только коэффициент.

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{(3^{n-1}+3^{n-2}\cdot4^0+3^{n-3}\cdot4^1+\ldots+3\cdot4^{n-3}+4^{n-2})}{3^{n-1}}$$

Учитывая свойства бинома Ньютона, а значит все вычислено верно.

Сумма геометрической прогрессии: $A = \frac{x_0}{3}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n-1}{\frac{4}{3}-1} = \left(\left(\frac{4}{3}\right)^n-1\right)x_0 \Rightarrow S_n = A+x_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$.

Ответ: $x_0, \frac{x_0}{3}, \frac{4}{3}\cdot\frac{x_0}{3}, \left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{x_0}{3}, \ldots, \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\frac{x_0}{3}$; $S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$.

+

N3.

Пусть нам даны числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.

Тогда: (из условия)

1) $\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3} = \dfrac{a_2+a_3+a_4}{3} \Rightarrow a_1 = a_4$ (пусть $a_1 = a_4 = a$)

2) $\dfrac{a_2+a_3+a_4}{3} = \dfrac{a_3+a_4+a_5}{3} \Rightarrow a_2 = a_5$ (пусть $a_2 = a_5 = b$)

3) $\dfrac{a_3+a_4+a_5}{3} = \dfrac{a_4+a_5+a_6}{3} \Rightarrow a_3 = a_6$ (пусть $a_3 = a_6 = c$)

Следовательно, мы имеем следующий ряд чисел: a, b, c, a, b, c.

$\dfrac{a+b+c+a+b+c}{6} = A \Rightarrow \dfrac{a+b+c}{3} = A \Rightarrow$ среднее арифметическое любых трех соседних чисел (доступны 4 набора: a,b,c; b,c,a; c,a,b; a,b,c) равно A.

Из неравенства Коши: $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq A \Rightarrow$ наибольшее значение среднего геометрического любых трех соседних в ряду чисел равно A. (т.к. одно из чисел "1", это возможно, допустим, ~~при $a=A^2, b=A, c=1$)~~

Ответ: A.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ВФ 60-55 ДИ-М1-01

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

$g(x)=px^2+qx+r$

$D=q^2-4pr=0$, т.к. 1 корень

$q^2=4pr$ (*)

$x=\frac{-q}{2p}$ (**)

$A=g(ax+b)+g(cx+d)=p(ax+b)^2+q(ax+b)+r+p(cx+d)^2+q(cx+d)+r=$

$=pa^2x^2+2pabx+pb^2+pc^2x^2+2pcdx+pd^2+qax+qb+qcx+qd+2r=$

$=p(a^2+c^2)x^2+(2pab+2pcd+qa+qc)x+pb^2+pd^2+qb+qd+2r$

$D=(2pab+2pcd+qa+qc)^2-4p(a^2+c^2)(pb^2+pd^2+qb+qd+2r)=0$

$4p^2(a^2b^2+2abcd+c^2d^2)+4p(ab+cd)+2q(a+c)+q^2(a+c)^2-4p^2(a^2+c^2)(b^2+d^2)-4pq(a^2+c^2)(b+d)-$

$-\cancel{4p}\cdot\frac{q^2}{\cancel{4p}}\cdot 2(a^2+c^2)=0.$

$4p^2(\cancel{a^2b^2}+2abcd+\cancel{c^2d^2}-\cancel{a^2b^2}-\cancel{c^2d^2}-b^2c^2-a^2d^2)+4p(ab+cd)+2q(a+c)-4pq(a^2+c^2)(b+d)+$

$+q^2(a^2+2ac+c^2-2a^2-2c^2)=0.$

$-4p^2(ad-bc)^2+4p(ab+cd)+2q(a+c)-4pq(a^2+c^2)(b+d)-q^2(a-c)^2=0$

$q=-2px$ из (**)

$-4p^2(ad-bc)^2+4p(ab+cd)-4px(a+c)+8p^2x(a^2+c^2)(b+d)-4p^2x^2(a-c)^2=0$

$-4p^2(ad-bc)^2+4p(ab+cd)-4p^2(2x(a^2+c^2)(b+d)-x^2(a-c)^2)-4p\cdot x(a+c)=4p^2(ad-bc)^2-4p(ab+cd)$

$4p^2(2x(a^2+c^2)(b+d)-x^2(a-c)^2=(ad-bc)^2$

$\begin{cases}2x(a^2+c^2)(b+d)-x^2(a-c)^2=(ad-bc)^2\\ x(a+c)=ab+cd\end{cases}$

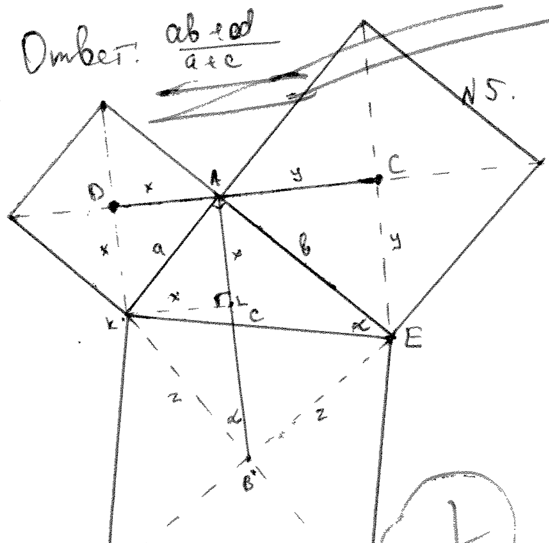
$x=\frac{ab+cd}{a+c}$

Ответ: $\frac{ab+cd}{a+c}$

$\mp$

Ошибки в преобр. нерацион. путь решения

№5.



По теореме Пифагора:

1) $x^2+x^2=a^2$
2) $y^2+y^2=b^2$
3) $z^2+z^2=c^2$
4) $a^2+b^2=c^2$

$\Rightarrow$ $x=\frac{a\sqrt2}{2}$, $y=\frac{b\sqrt2}{2}$, $z=c\frac{\sqrt2}{2}$

$CD=x+y=(a+b)\frac{\sqrt2}{2}$

т.к. диагонали квадрата образуют со стороной $\angle 45°$:

$\angle AKE=90°-\alpha$

$\angle AKL=45°$ (т.к. $\angle DKL=90°$, $\angle DKA=45°$) $\Rightarrow \angle LKE=45°-\alpha$

$\angle EKB=45° \Rightarrow \angle LKB=90°-\alpha \Rightarrow \angle LBK=\alpha$

$tg\alpha=\frac{a}{b}$; в $\triangle KLB$ $tg\alpha=\frac{x}{LB}\Rightarrow LB=x\frac{b}{a}$

$AB=x+x\frac{b}{a}=x(\frac{b}{a}+1)=x(1+ctg\alpha)=\frac{a\sqrt2}{2}(1+ctg\alpha)$

$ctg\alpha=\frac{b}{a}\Rightarrow b=a\,ctg\alpha.\Rightarrow CD=a(1+ctg\alpha)\frac{\sqrt2}{2}.$

$AB\overset{\text{II}}{=}CD$

Ответ: они одинаковы и не различаются друг от друга в зависимости от угла α

$+$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ВФ 60-75

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 $2x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_n$

$$x_n = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{3}$$

$x_1 = \frac{x_0}{3}$

+

$$x_2 = \frac{x_0 + \frac{x_0}{3}}{3} = \frac{(3+1)}{9} x_0$$

$$x_3 = \frac{x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{(3+1)}{9} x_0}{3} = \frac{(9 + 3 + 3\cdot(3+1))}{27} x_0$$

пусть k_n - числитель коэффициента перед x_0, т.е.

$$x_n = \frac{k_n}{3^n} x_0$$

$$x_n = \frac{3^{n-1} + 3^{n-2} k_1 + 3^{n-3} k_2 + \ldots + 3 k_{n-2} + k_{n-1}}{3^n} x_0$$

пусть $k_n = 4^{n-1}$, тогда $k_{n-1} = 4^{n-2}$

$$k_n = 3^{n-1} + 3^{n-2}\cdot 1 + 3^{n-3}\cdot 4 + \ldots + 3\cdot 4^{n-3} + 4^{n-2} =$$

$$= 3^{n-1} + \frac{(4-3)(3^{n-1} + 3^{n-2} + 3^{n-3}\cdot 4 + \ldots + 4^{n-2})}{4-3} = 3^{n-1} + 4^{n-1} - 3^{n-1} =$$

$$= 4^{n-1} \Rightarrow k_n = 4^{n-1}$$

$$x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n} x_0$$

$$S_n = x_0 + \frac{1}{3} x_0 + \frac{4}{9} x_0 + \frac{16}{27} x_0 + \ldots + \frac{4^{n-1}}{3^n} x_0 =$$

$$= \frac{3^n + 3^{n-1} + 4\cdot 3^{n-2} + 4^2\cdot 3^{n-3} + \ldots + 4^{n-1}}{3^n} x_0 =$$

$$= \frac{3^n + 4^n - 3^n}{3^n} x_0 = \frac{4^n}{3^n} x_0$$

Ответ: $\frac{4^{n-1}}{3^n} x_0$; $\frac{4^n}{3^n} x_0$.

№3 a, b, c, d, e, f = какое-то равно 1.

+

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = A$$

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3}$$

$$\begin{cases} a+b+c = b+c+d \\ b+c+d = c+d+e \\ d+e+f = c+d+e \end{cases}; \quad \begin{cases} a = d \\ b = e \\ c = f \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &a+b+c+d+e+f = 6A \\ &2a+2b+2c = 6A \\ &a+b+c = 3A \end{aligned}$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

продолж. №3.

пусть $c=1$

$a+b+1=3A$

$b=3A-1-a$

$\sqrt[3]{abc}=max$

$\sqrt[3]{a(3A-1-a)}=max$, когда $a(3A-1-a)\to max$

$(-a^2+a(3A-1))'=-2a+3A-1=0$

$a=\frac{3A-1}{2}$

$\sqrt[3]{a(3A-1-a)}=\sqrt[3]{\frac{3A-1}{2}\left(3A-1-\frac{3A-1}{2}\right)}=\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

№4 $g(x)=(nx-m)^2$, т.к. единственный корень

$x_0=\frac{m}{n}$ $a\neq c$ по усл.

$g(ax+b)+g(cx+d)=(n(ax+b)-m)^2+(n(cx+d)-m)^2=0$

$(anx+bn-m)^2=0$ или $(ncx+nd-m)^2=0$

$x=\frac{m-bn}{an}$ $x=\frac{m-nd}{nc}$

$x=x$

$\frac{m}{an}-\frac{b}{a}=\frac{m}{nc}-\frac{d}{c}$

$x_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)=\frac{b}{a}-\frac{d}{c}$

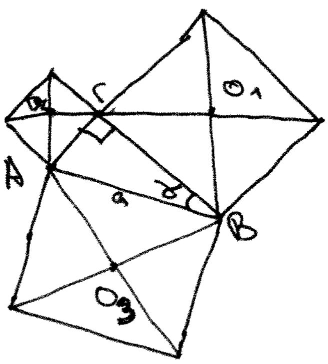
$x_0\frac{c-a}{ac}=\frac{bc-ad}{ac}$

$x_0=\frac{bc-ad}{c-a}$

Ответ: $\frac{bc-ad}{c-a}$

(+)

№5 $\angle O_1CB=45^\circ$, $\angle O_2CA=45^\circ$, $\angle ACB=90^\circ$ $\Rightarrow C\in O_1O_2$



пусть $AB=a$, тогда $AC=a\sin\alpha$

$BC=a\cos\alpha$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$2O_1C^2 = a^2\cos^2\alpha$

$O_1C = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{2}}$

$2O_2C^2 = a^2\sin^2\alpha$

$O_2C = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{2}}$

$O_1O_2 = O_1C + O_2C$

$2O_3B = a^2$

$O_3B = \frac{a}{\sqrt{2}}$

тег. косинусов:

$O_3C^2 = a^2\cos^2\alpha + \frac{a^2}{2} - \sqrt{2}a^2\cos\alpha \cdot$

$\cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) = a^2(\cos^2\alpha + \frac{1}{2} - \cos^2\alpha - \cos\alpha$

$\sin\alpha) = \frac{a^2}{2}(1 - \sin 2\alpha)$

$O_3C = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \sin 2\alpha}$

$O_1O_2 \vee O_3C$

$\frac{a}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha) \vee \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \sin 2\alpha}$

(*) $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} 1 \geq \sin\alpha > 0 \\ 1 \geq \cos\alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\alpha + \cos\alpha > 0$

$1 + \sin 2\alpha \vee 1 - \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha \vee 0$

$2\alpha \in (0; \pi) \Rightarrow \sin 2\alpha > 0 \Rightarrow O_1O_2 > O_3C$

разница $y(\alpha) = O_1O_2 - O_3C = \frac{a}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha - \sqrt{1 - \sin 2\alpha})$

$y'(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\cos\alpha - \sin\alpha - \frac{2\cos 2\alpha}{2\sqrt{1 - \sin 2\alpha}}\right) = 0$

$\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{1 - \sin 2\alpha}}$

$\cos\alpha \geq \sin\alpha$

$(1 - \sin 2\alpha)^2 = \cos^2 2\alpha$

$1 - 2\sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha$

$2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha - 1) = 0$

$\sin 2\alpha = 0$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = 1$

$2\alpha = \pi n, n \in Z$ $\qquad$ $2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$\alpha = \frac{\pi}{2}n, n \in Z$ $\qquad$ $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

уч. (*):

$\alpha = \frac{\pi}{4}$

Ответ: линия между центрами квадратов на катетах длиннее; при $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

Решение

a, b, c, d, e, f

Пусть $a = 1$

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3}$$

$$\frac{1+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3} \Rightarrow d = 1$$

$$\frac{1+b+c}{3} = \frac{b+c+1}{3} = \frac{c+1+e}{3} = \frac{1+e+f}{3} \Rightarrow \begin{matrix} b = e \\ c = f \end{matrix}$$

$1, b, c, 1, b, c$

Ср. арифм: $\frac{2+2b+2c}{6} = \frac{1+b+c}{3} = A \Rightarrow b+c = 3A-1$

$\frac{1+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{1bc}$ – по неравенству Коши.

$\sqrt[3]{1 b \cdot c} \leq \frac{1+3A-1}{3} = A$

$\cancel{\max \sqrt[3]{1 \cdot b \cdot c} = A}$

∓

Ответ: A

№ 1

±

Решение:

Две любые пары среди выбранных 4-х заводов должны быть соединены. Исходя из этого, каждый завод должен быть соединен как минимум со 147 другими заводами. Т.е каждый завод должен быть не соединен как минимум с 2-мя т.к если он не соединен с более, чем 2-мя заводами, то мы сможем взять 4 завода так, что это завод ни с каким другим соеди-нен не будет, что не удовлетворяет условию задачи

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

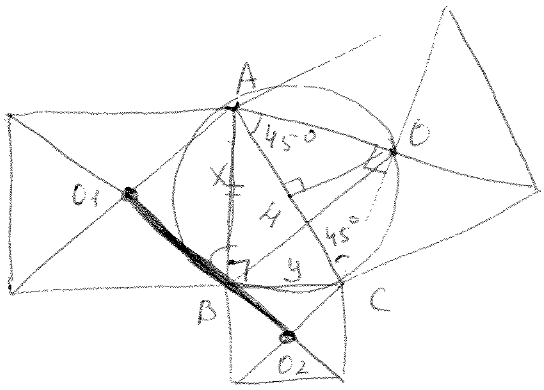
147 · 150, но каждую связь мы посчитали 2 раза.
Следовательно всего связей $\frac{147 \cdot 150}{2} = 11025$

$$\begin{array}{r} \times\ 147 \\ 150 \\ \hline 735 \\ 147\ \ \\ \hline 22050 \end{array}$$

$22050 : 2 = 11025$

Ответ: наименьшее число пар заводов, которые могут быть соединены автобусными маршрутами равно 11025

№ 5



Решение:
Пусть:
$AB = x$
$BC = y$, тогда $AC = \sqrt{x^2+y^2}$

$\angle ABC = 90°$, $\angle AOC = 90°$ (т.к диагонали квадрата)

A, O, C и B принадлежат одной окружности, в которой AC-диаметр

Применим теорему Птолемея:
$AO \cdot BC + AB \cdot OC = AC \cdot BO$

$\angle ABO_1 = 45°$, $\angle CBO_2 = 45°$ (диагонали в квадратах)

тогда $B \in O_1O_2$ и $O_1O_2 = x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2} = (x+y)\frac{\sqrt{2}}{2}$

Из $\triangle AOC$: $AO = OC$ (диагонали квадрата) $\triangle AOC$ - р.б и прям.

Проведем ⊥-р OH к AC т.е $OH \perp AC$

$AH = HC = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

т.к $\angle OAH = 45°$, то $OC = AO = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

$(\cos 45° = \frac{AH}{AO})$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ СН 23-16

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Тогда:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot y + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot x = BO \cdot (AC) = BO \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}(x+y) = BO \sqrt{x^2+y^2}$$

+

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}} = BO$$

$$BO = O_1O_2$$

Ответ: они равны

№ 2.

$$2x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n$$

$$2x_1 = x_0 - x_1$$

+

$$3x_1 = x_0; \quad x_1 = \frac{x_0}{3}$$

$n=2$: $2x_2 = x_0 + x_1 - x_2$

$3x_2 = x_0 + x_1 = 4x_1$

$$x_2 = \frac{4}{3}x_1 = \frac{4x_0}{9}$$

$n=3$: $2x_3 = x_0 + x_1 + x_2 - x_3$

$3x_3 = x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} = \frac{16x_0}{9}$, $x_3 = \frac{16x_0}{27}$

$n=4$: $3x_4 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3$

$$x_4 = x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} + \frac{16x_0}{27} = \frac{64x_0}{27 \cdot 3}$$

$$x_n = \frac{4^{n-1}x_0}{3^n}$$

Геометрическая прогрессия

$$a_1 = \frac{x_0}{3}$$

$$q = \frac{4}{3}$$

Тогда: $x_0 + S_n = x_0 + \frac{x_0}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{4}{3} - 1} = x_0\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Ответ: $x_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 Так как любые 4 завода можно разбить на 2 пары так что м/у заводами каждой пары будет ходить автобус, то значит что мы можем выбирать нужные нам вершины из этой четверки. Значит в нашем графе из 150 вершин достаточно будет соединить каждую вершину (150-3) = 147-ю диагоналями. (+)
И тогда даже если мы возьмём 4 соседних вершины, то нужно разбить их на 2 пары из 2х несоседних, и условию будет выполняться. Тогда всего диагоналей будет $\frac{n(n-3)}{2}$ т.к каждая посчитана по 2 раза.
=> $\frac{150\cdot(150-3)}{2} = 75\cdot147 = 11025$ диагоналей необходимо.
1 диагональ = 1 пара вершин (заводов).
Докажем, что меньше нельзя. Убрав 1 диагональ построим контр пример для невып. усл-я. Возьмём 4-ку из 3х соседних и 1-ой удаленной.
Тогда имеем

4 диагонали из которых убираем 1 любую. Понятно что 1 пара будет без дороги => не уд условию. => Меньше 11025 не может.

Ответ: 11025.

№2 $x_0; x_1; x_2 \dots x_n, x_{n+1}\dots$

$2x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} - x_n$

$3x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$ (+)

$n=1 \Rightarrow 3x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3}$

$n=2 \Rightarrow 3x_2 = x_0 + x_1 = x_0 + \frac{x_0}{3} = \frac{4}{3}x_0 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{9}x_0$

$n=3 \Rightarrow 3x_3 = x_0 + x_1 + x_2 = x_0\left(1+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\right) = \frac{16}{9}x_0 \Rightarrow x_3 = \frac{16}{27}x_0$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$n=4 \Rightarrow x_4 = \frac{64}{81} x_0$ и т.д.

Тогда заметим, что $x_1; x_2; x_3; x_4 \ldots x_n$ — геометрическая прогр, $x_1 = \frac{x_0}{3}$; $q = \frac{4}{3}$

Тогда $S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_0 + \frac{x_1 \cdot (1-q^n)}{1-q} =$

$= x_0 + \frac{\frac{x_0}{\cancel{3}} \cdot (1-q^n)}{\cancel{1-\frac{4}{3}}\ -1} = x_0 + x_0(q^n - 1) =$

$= x_0(1 + q^n - 1) = x_0 \cdot q^n = x_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$

каждый член геом. прогр:

$x_0 = x_0$

$x_1 = \frac{x_0}{3}$

$x_n = x_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{x_0}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

Ответ: $x_n = x_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ $S_n = x_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$

№3 Пусть это числа $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_2+x_3+x_4}{3} = \frac{x_3+x_4+x_5}{3} = \frac{x_4+x_5+x_6}{3} = \frac{2A}{2} = A$

По нер-ву Коши для 3х:

$\frac{x_n + x_{n+1} + x_{n+2}}{3} \geq \sqrt[3]{x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2}}$, при $n = 1; 2; 3; 4$
(показываем что $\forall$ 3-ка)

По усл-ю один член $= 1$. Пусть $x_n = 1$.

Всем известно, что в нер.ве Коши (и для 3х) выполняется равенство $\Leftrightarrow$ когда все члены равны м/у собой.

$\max\left(\sqrt[3]{x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2}}\right) = \frac{x_n + x_{n+1} + x_{n+2}}{3}$, $x_n = 1$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Чтобы вып-лось р-во $\Rightarrow$ $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = 1$.

$\Rightarrow \sqrt[3]{x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2}} = \cancel{x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2}} = \dfrac{x_n + x_{n+1} + x_{n+2}}{3} =$

$= \dfrac{1+1+1}{3} = 1 = \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot 1} = 1$.

Ответ: $\max\left(\sqrt[3]{x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_{n+2}}\right) = 1$, при $n = 1, 2, 3, 4$

$-$ / $+$

№4. Пусть к-ты m; p; q - у $g(x)$.

т.е. $g(x) = mx^2 + px + q$.

1 корень $\Rightarrow$ $D = p^2 - 4mq = 0$. $\Rightarrow p^2 = 4mq$.

$g(ax+b) = m(ax+b)^2 + p(ax+b) + q \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2m \cdot x^2 + x(2amb + pa) + b^2m + pb + q = g(ax+b)$.

Аналогично

$g(cx+d) = c^2mx^2 + x(2cmb + pc) + d^2m + pd + q$

Складывая $g(ax+b) + g(cx+d)$ и группируя:

$x^2(a^2m + c^2m) + x(2amb + 2cmb + ap + pc) + b^2m + d^2m +$

$+ pb + pd + 2q = 0$ имеет 1 корень $\Rightarrow D = 0$.

$(2amb + 2cmb + ap + pc)^2 = 4(a^2m + c^2m)(b^2m + d^2m + pb + pd + 2q)$

$(2mb + p)^2 \cdot (a+c)^2 = (4a^2m + 4c^2m)(b^2m + d^2m + pb + pd + 2q)$

Раскроем скобки:

$\cancel{4m^2a^2b^2} + 4a^2mbp + a^2p^2 + 8acm^2b^2 + 8acmbp + 2acp^2 +$

$+ 4m^2b^2c^2 + 4mbpc^2 + p^2c^2 = \cancel{4a^2m^2b^2} + 4a^2m^2d^2 +$

$+ 4a^2mpb + 4a^2mpd + 8a^2mq + 4c^2m^2b^2 + 4c^2m^2d^2 +$

$+ 4c^2mpb + 4c^2mpd + 8c^2mq$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ СН 32-13

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a^2p^2 + 8acm^2b^2 + 8acmbp + 2acp^2 + \cancel{c^2} p^2c^2 =$

$= 4a^2m^2d^2 + 4a^2mpd + 8a^2mq + 4c^2m^2d^2 +$

$+ 4c^2mpd + 8c^2mq$

Вспоминая, что $p^2 = 4mq$

$8acm^2b^2 + 8acmbp + 2acp^2 = 4a^2m^2d^2 + 4a^2mdp +$

$+ (2a^2p^2 - a^2p^2) + 4c^2m^2d^2 + 4c^2mpd + (2c^2p^2 - c^2p^2)$

$2ac(4m^2b^2 + 4mbp + p^2) = a^2(4m^2d^2 + 4mdp + p^2) +$

$+ c^2(4m^2d^2 + 4mdp + p^2)$

$2ac\underbrace{(2mb+p)^2}_{\geq 0} = \underbrace{(a^2+c^2)}_{\geq 0}\underbrace{(2md+p)^2}_{\geq 0}$

$\Rightarrow 2ac \geq 0.$

$\sqrt{2ac}\cdot\cancel{2m}\left(b + \frac{p}{2m}\right) = \sqrt{a^2+c^2}\cdot\cancel{2m}\cdot\left(\cancel{b}\,d + \frac{p}{2m}\right)$

$d\cdot\sqrt{a^2+c^2} + \frac{p}{2m}\sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{2ac}\cdot b + \sqrt{2ac}\cdot\frac{p}{2m}$

$\frac{p}{2m} = \frac{b\cdot\sqrt{2ac} - d\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{2ac}}$

У $g(x)$ корень $x_0 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2m} \overset{\text{„0}}{=} -\frac{p}{2m}$

$\Rightarrow x_0 = -\frac{p}{2m} = \frac{d\sqrt{a^2+c^2} - b\sqrt{2ac}}{\sqrt{a^2+c^2} - \sqrt{2ac}}$

Ответ: ↗ (нет времени)!

Путь решения далек от оптимального

+

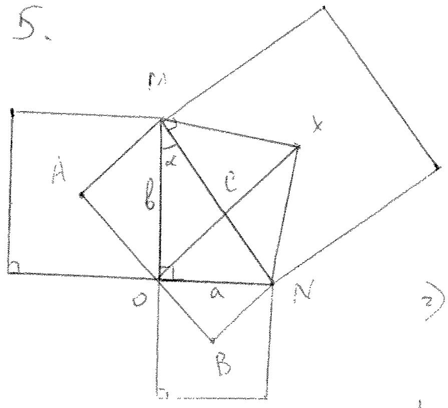
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ СН 88-13

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5.



$AB = l_1$ $\quad b = c\cdot\cos\alpha$

$OX = l_2.$ $\quad a = c\cdot\sin\alpha$

т.к. диаг. квадрата $a\sqrt{2}$

$\Rightarrow l_1^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2 =$

$= \frac{1}{2}(a^2+2ab+b^2) = \frac{1}{2}(c^2+2c^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$

$= \frac{c^2}{2} + c^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ (1) в $\triangle MNX$ $\angle XMN = 45^\circ$ т.к. MX - часть диагонали

По т косинусов $l_2^2 = b^2 + \left(\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2bc\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) =$

$= b^2 + \frac{c^2}{2} - \sqrt{2}c^2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

Далее сравним l_1^2 и l_2^2, при помощи разности.

$l_1^2 = \frac{c^2}{2} + c^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ и $l_2^2 = \frac{c^2}{2} + c^2\cdot\cos^2\alpha - \sqrt{2}c^2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$l_1^2 - l_2^2 = c^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{2} - c^2\cdot\cos^2\alpha +$

$+ \sqrt{2}\cdot\cos\alpha\cdot c^2\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = c^2\cdot\cos\alpha\left(\sin\alpha - \cos\alpha +\right.$

$\left.+\sqrt{2}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right) = c^2\cdot\cos\alpha\left(\sin\alpha - \cos\alpha + \cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{2} -\right.$

$\left.-\sin\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sqrt{2}\right) = c^2\cdot\cos\alpha(\sin\alpha - \cos\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha) =$

$= 0\cdot c^2\cdot\cos\alpha = 0.$

+

$\Rightarrow l_1^2 = l_2^2 \Rightarrow l_1 = l_2$

Ответ: Аллеи 3го этапа имеют одинаковую длину, и не различаются ни при каком значении $\angle\alpha$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 1

150 заводов всего

Заметим, что каждый завод соединен как минимум со 147 другими.

+

(150−1−2)

завод, о котором речь

Также заметим, что каждый не может быть не связанным минимум с двумя другими (в случае, если он не соединен больше, чем с двумя заводами, то возможен случай, когда можно выбрать четверку заводов так, что м/у ними связи не будет) - не уд условию

Общее число пар $= \frac{150 \cdot 147}{2}$

Делим на 2, т.к. каждый маршрут считаем дважды

$\frac{150 \cdot 147}{2} = 11025$

Ответ: 11025

N3

$x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \; x_6$

$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ - ср. геом.

$\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ - общее

$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1+x_2+x_3}{n}$ - для задачи

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}=A$$

Из условия: $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{x_2+x_3+x_4}{3} \Rightarrow x_1=x_4$

$\frac{x_2+x_3+x_4}{3}=\frac{x_3+x_4+x_5}{3} \Rightarrow x_2=x_5$

$\frac{x_3+x_4+x_5}{3}=\frac{x_4+x_5+x_6}{3} \Rightarrow x_3=x_6$

Введем обозначения: $x_1=x_4=k$
$x_2=x_5=m$
$x_3=x_6=n$

Используя

$\frac{2k+2m+2n}{6}=A$; $\frac{2(k+m+n)}{6}=\frac{k+m+n}{3}=A$

I вывод: сумма любых 3-арифм. прогрессия

$\frac{k+m+n}{3}\geq\sqrt[3]{kmn}$, $\sqrt[3]{kmn}\leq A$

но, не так.

Достигается при: $k=m=n=3A$
$x=A$

Используя условие: среди чисел есть 1:

$\sqrt[3]{kmn}=1$

$A=1$

Ответ: 1

$A=?$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ СН88-22

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2

$x_0, x_1, \dots x_n, x_{n+1}$

$2x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n$

$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n - ?$

$x_i - ?$ $\quad 0 \le i \le n$

~~$n=1$: $2x_1 = x_0 + x_1 + x_0 - x_1$; $2x_1 = 2x_0$; $x_1 = x_0$~~

~~$n=2$: $2x_2 = x_0 + x_1 + x_1 - x_2$; $3x_2 = x_0 + x_1 + x_1$; $3x_2 = x_1 + x_1 + x_1$; $3x_2 = 3x_1$; $x_2 = x_1$~~

~~$n=3$: $2x_3 = x_0 + x_1 + x_2 - x_3$; $3x_3 = x_0 + x_1 + x_2$; $3x_3 = 3x_2$; $x_2 = x_3$~~

~~$x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$~~

~~$S_n = x_0 + x_1 + \dots +$~~

$$x_n = \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}}{3}$$

$n=1$: $x_0 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3}$ | $n=2$: $3x_2 = x_0 + x_1 = \frac{4x_0}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4x_0}{9}$

$n=3$: $x_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_0}{3} = \frac{16x_0}{27}$ | $n=4$: $x_4 = \frac{64x_0}{81}$ | $n=5$: $x_5 = \frac{64\cdot 4x_0}{81\cdot 3} = \frac{256x_0}{243}$

Замечаем, что данная последовательность является геометрической

Исп. свойство: $\left(\frac{4x_0}{9}\right)^2 = \frac{16x_0}{27}\cdot\frac{x_0}{3}$ $\Bigg\}\ q = \frac{4}{3}$

$\Updownarrow$

$\frac{16x_0}{81} = \frac{16x_0^2}{81}$

$$x_n = \frac{x_0 \cdot 4^{n-1}}{3}$$

$$S_n = x_0 + \frac{x_0}{3}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{4}{3} - 1}$$

Путем преобразований:

$$S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot x_0$$

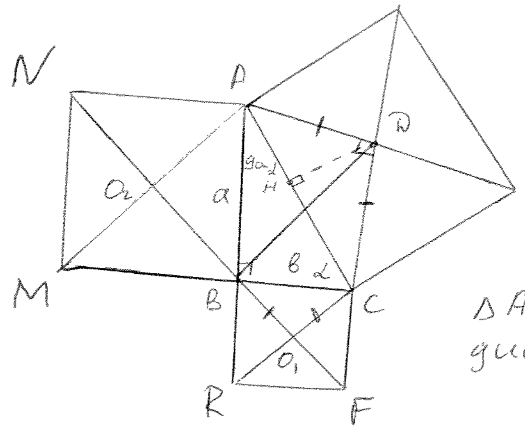
Ответ: $x_n = \frac{x_0 \cdot 4^{n-1}}{3^n}$

$S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 5



$AB = a$

$BC = b$

$DH \perp AC$

$AH = HC = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$AD = DC = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

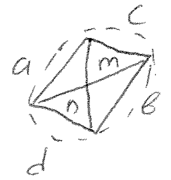
$\triangle ADC$ - рб + прямоуг. (В квадрате диагонали т. пересечения делятся пополам)

Заметим, что A, D, B, C лежат на одной окружности (сумма противоположных углов = 180°)

$\angle ADC + \angle ABC = 90 + 90°$. Затем по свойству чет угольника: сумма $\angle = 360° \Rightarrow \angle DAB + \angle DCB = 180°$.

ADBC - вписанный чет угольник.

Для вписанного чет угольника воспользуемся теоремой Птолемея:



$ab + cd = mn$

Для нашей задачи:

$AD \cdot BC + AB \cdot DC = AC \cdot BD$

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \cdot b + a \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = BD \cdot \sqrt{a^2+b^2}$ ↗ диагональ $\triangle ABC$ (по Пиф.)

+

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a+b) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot BD$

$BD = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$

$O_1O_2 = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$

$BD = O_1O_2$

$O_1O_2 = O_1B + BO_2$

$O_1B = \frac{b}{\sqrt{2}}$

$O_2B = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$\left.\begin{matrix} O_1B = \frac{b}{\sqrt{2}} \\ O_2B = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right\}$ 1/2 квадраты ABMN и BCRF

Ответ: длины равны

N3.

$\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ – среднее геометрическое трех чисел.

$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; a_5 \; a_6$

Неравенство Коши: $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$

Равенство достигается при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

По условию:

$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{a_2+a_3+a_4}{3}$ Значит $a_1 = a_4 = a$.

$\frac{a_2+a_3+a_4}{3} = \frac{a_3+a_4+a_5}{3}$ Тогда $a_2 = a_5 = b$

$\frac{a_3+a_4+a_5}{3} = \frac{a_4+a_5+a_6}{3}$ значит $a_3 = a_6 = c$

$a, \; b, \; c, \; a, \; b, \; c$

$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6} = A$

$\frac{2(a+b+c)}{6} = A$ $\quad \frac{a+b+c}{3} = A$, то есть среднее арифметическое любых трёх последовательных чисел $= A$.

По нер-ву Коши $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = A$.

Тогда $\sqrt[3]{abc} = A$ – ~~максимальное~~ значение. Оно достигается при $a = b = c$. Но в условии сказано, что одно число $= 1$ значит $a = b = c = 1$.

$A = ?$

$\sqrt[3]{abc} \leq 1$.

Ответ: 1.

−2

+

N1.

Среди 4-х любых заводов две пары должны быть соединены.

Тогда каждый завод должен быть соединен как минимум со 147 другими заводами $(150 - 1 - 2)$, то есть сам этот завод

каждый завод должен быть не соединен как максимум с двумя, потому что если он не соединен с >2 завода ми, то мы можем взять 4-ку заводов так, что этот завод не соединен ни с кем - противоречие условию. Тогда всего маршрутов 147·150, но каждую связь мы посчитали 2 раза. Тогда всего пар заводов (соединенных) $= \frac{147\cdot150}{2} = 11025$ - наим.!

Ответ: 11025.

№ 2.

$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$

$x_n = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}}{3}$

$n=1$: $3x_1 = x_0$, $x_1 = \frac{x_0}{3}$

(+)

$n=2$: $2x_2 = x_0 + x_1 - x_2$

$3x_2 = x_0 + x_1 = \frac{4x_0}{3}$ $\quad x_2 = \frac{4x_0}{9}$

$n=3$: $x_3 = \frac{x_0+x_1+x_2}{3} = \frac{x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9}}{3} = \frac{16x_0}{27}$

$n=4$: $x_4 = \frac{x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} + \frac{16x_0}{27}}{3} = \frac{64x_0}{27\cdot3}$

Получается последовательность

x_0; $\frac{x_0}{3}$ (b_1); $\frac{4x_0}{9}$ (b_2); $\frac{16x_0}{27}$; $\frac{64x_0}{27\cdot3}$; ...; $\frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^n}$ (b_n); ....

$x_n = \frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^n}$

По характеристическому свойству $\frac{x_0}{3}$; $\frac{4x_0}{9}$; $\frac{16x_0}{27}$; ... - геометрическая последовательность.

$\left(\frac{4x_0}{9}\right)^2 = \frac{x_0}{3}\cdot\frac{16x_0}{27}$. $\qquad b_1 = x_0$; $q = \frac{4}{3}$

Тогда $S_n = x_0 + S_n' = x_0 + \frac{x_0}{3}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{4}{3} - 1} = x_0 + x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Ответ: $x_n = \frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^n}$; $S_n = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

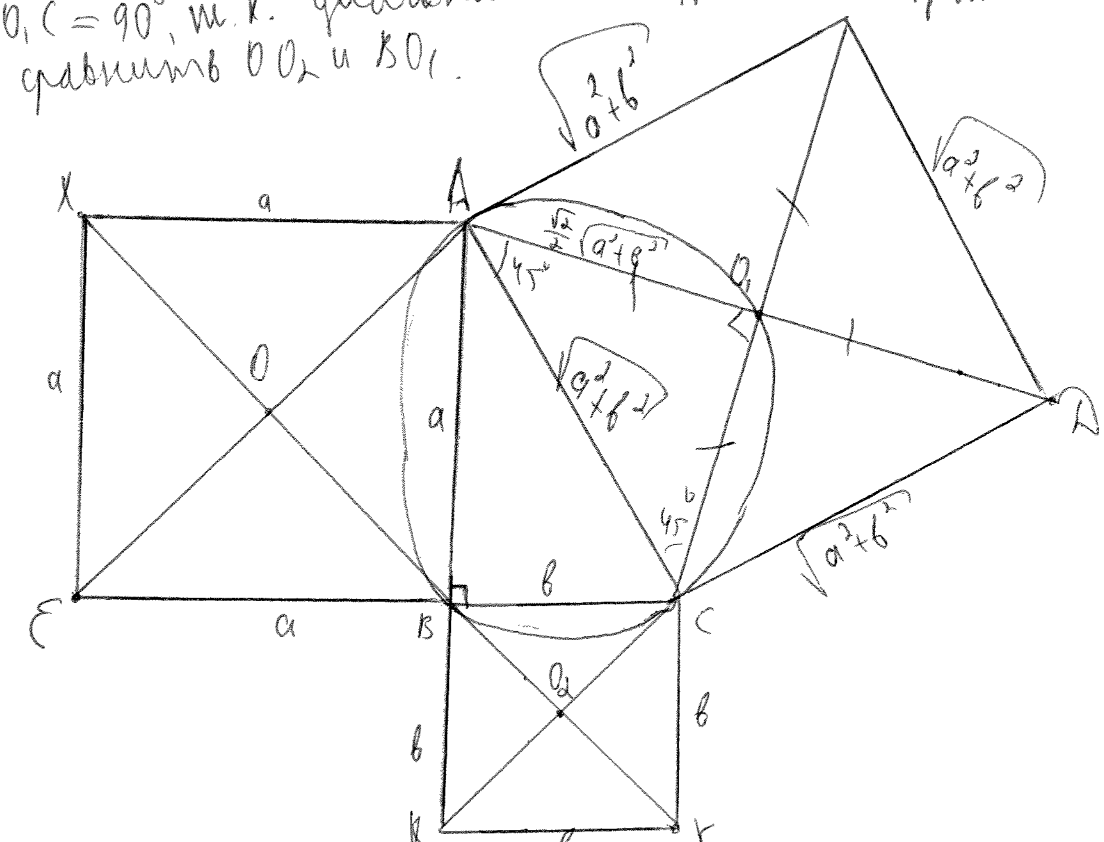
№5.

Пусть $AB = a$; $BC = b$

Тогда по теореме Пифагора $AC = \sqrt{a^2+b^2}$

$\angle AO_1C = 90°$, т.к. диагонали квадрата пересекаются под прямым углом

Надо сравнить OO_2 и BO_1.



Около AO_1CB можно описать окружность, так как сумма противоположных сторон $= 90°+90° = 180°$. AC — диаметр, т.к. на него опираются ∠-ы $= 90°$

По теореме Птолемея: $AO_1 \cdot BC + AB \cdot O_1C = AC \cdot BO_1$ (1)

$AO_1 = O_1C$ — т.к. диагонали квадрата =-ы и делятся пополам.

Тогда $\triangle AO_1C$ — равнобедр. и $\angle O_1AC = \angle O_1CA = \frac{90°}{2} = 45°$.

по т. Пифагора $AD = \sqrt2 \sqrt{a^2+b^2}$

Тогда $AO_1 = \frac{\sqrt2}{2}\sqrt{a^2+b^2}$

(1) $\Rightarrow \frac{\sqrt2}{2}\cancel{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot b + a \cdot \frac{\sqrt2}{2}\cancel{\sqrt{a^2+b^2}} = \cancel{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot BO_1$

$BO_1 = \frac{\sqrt2}{2}(a+b)$

По т. Пифагора $AE = a\sqrt2$

Тогда $OB = \frac{a\sqrt2}{2}$ } так как $XABE$ — квадрат.

Аналогично $BCYK$ — квадрат. Тогда $BO_2 = \frac{\sqrt2}{2} b$

$OO_2 = OB + BO_2 = (a+b)\frac{\sqrt2}{2}$

+

$OO_2 = (a+b)\frac{\sqrt{2}}{2} = BO_1$. Значит аллеи третьего этапа одинаковы по длине.

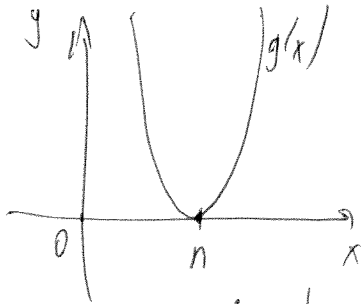
Ответ: одинаково.

№4.

$g(x) = m(x-n)^2$ - так как имеет (!) корень.

$m \neq 0$.

$g(ax+b)$ - перенос $g(x)$ по оси Ox на b влево, если $b>0$ и на b вправо, если $b<0$. и сжатие, если $a>1$; растяжение, если $0<a<1$.



$g(cx+d)$ аналогично.

$g(ax+b)$ имеет (!) решение.

$g(cx+d)$ имеет (!) решение.

Тогда $G(x) = g(ax+b) + g(cx+d)$ может иметь (!) решение только при $b = d = 0$.

(так как $G(x)$ получается при сложении Ox координат. Поэтому, если осуществляют перенос по Ox, то Σ соответственных координат $\neq 0$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Пусть $g(x) = mx^2 + nx + k$.

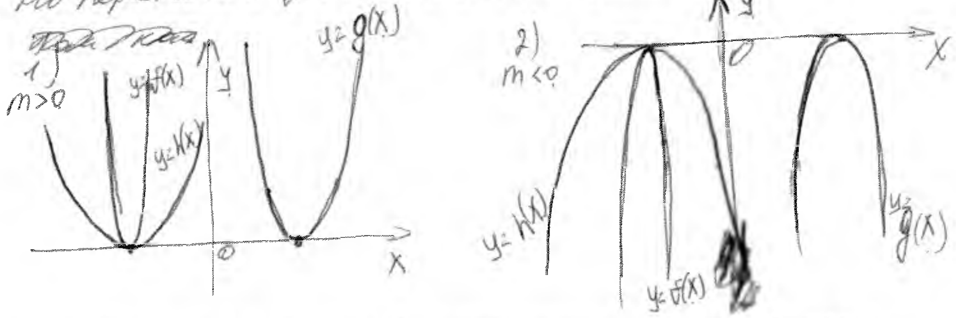
Так как корень единственный $D = 0$

$D = n^2 - 4mk = 0$
$n^2 = 4mk$

Пусть $f(x) = g(ax+b)$ $f(x) = g\left(a\left(x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right)\right)$

$h(x) = g(cx+d)$ $h(x) = g\left(c\left(x - \left(-\frac{d}{c}\right)\right)\right)$

$f(x)$ и $h(x)$ лежат в одной полуплоскости с $g(x)$ и представляют собой сжатую или растянутую по оси Ox и параллельно перенесенную влево или вправо функцию. (см рис. 1 и 2.) $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $f(x)$ и $h(x)$ имеют единственный корень.

Т.к. $f(x)$ и $h(x)$ лежат в одной полуплоскости относительно O_x и имеют ~~[illegible]~~ по одному корню, то

$f(x) + h(x) = 0 \Leftrightarrow$ когда их корни совпадают. $x_f = x_h$ (1)

$f(x) = ma^2x^2 + x(2mab + na) + mb^2 + nb + k$

$f(x) = mc^2x^2 + x(2mcd + nc) + md^2 + nb + k$

$h(x) = mc^2x^2 + \ldots$

(2) $\begin{cases} x_f = x_0 - \frac{b}{a} \\ x_h = x_0 - \frac{d}{c} \end{cases}$

(1) и (2) $-\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$ $bc = ad$ (4)

(3) $\begin{cases} x_f = \frac{-(2mab+na)}{2ma^2} \\ x_h = \frac{-(2mcd+nc)}{2mc^2} \end{cases}$

(1) и (3) $\frac{a(2mb+n)}{2ma^2} = \frac{c(2md+n)}{2mc^2}$

$c(2mb+n) = a(2md+n)$

$2m(bc - ad) = n(a-c)$ (5)

(4) и (5): $0 = n(a-c)$

$\left[\begin{array}{l} n=0 \\ a=c \text{ - не уд условию} \end{array}\right.$

$n=0 \Rightarrow 0 = 4mk$

$\left[\begin{array}{l} m=0 \text{ - не уд условию квадрат.} \\ k=0 \end{array}\right.$

$g(x) = mx^2$ $x=0$ - единственный корень

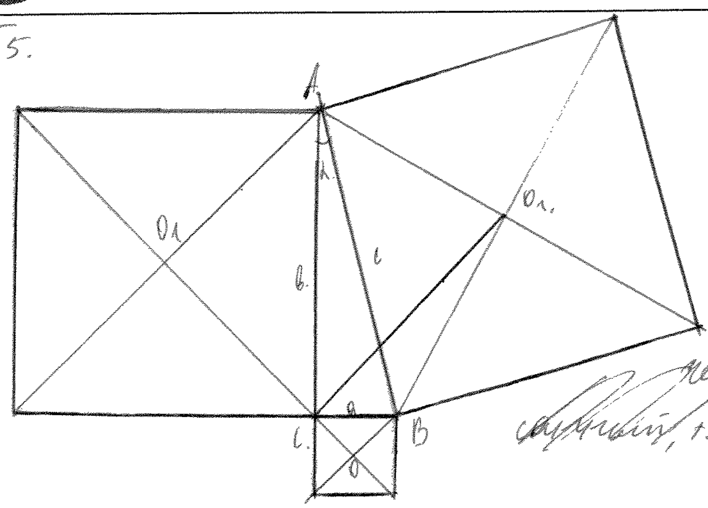
Ответ: 0

не действия следующий вывод !!

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.



Пусть O, O_1, O_2 – центры квадратов по возрастанию длины:

$AB = c$. $\quad a = c\cdot\sin\alpha$

$AC = b$. $\quad b = c\cdot\cos\alpha$.

$BC = a$. $\quad a^2+b^2=c^2$.

$\angle ABC = \alpha$.

~~четырёхугольник $ACBO_2$ – вписанный~~, т.к. $\angle ACB + \angle AO_2B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\angle O_2AB = 45^\circ$, $AO_2 = \frac{c}{\sqrt2}$ – по свойству квадрата

$$CO_2^2 = b^2 + \frac{c^2}{2} - 2b\frac{c}{\sqrt2}\cdot\cos(45^\circ+\alpha) = b^2 + \frac{c^2}{2} - 2bc\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cos(45^\circ+\alpha) =$$

$$= b^2 + \frac{c^2}{2} - bc\cdot(\cos\alpha - \sin\alpha) = b^2 + \frac{c^2}{2} - bc\cos\alpha + bc\sin\alpha =$$

$$= \cancel{b^2} + \frac{a^2+b^2}{2} - \cancel{b\cdot b} + b\cdot a = \frac{(a+b)^2}{2}$$

$$CO_2 = \frac{a+b}{\sqrt2}$$

$$O_1O = \frac{b}{\sqrt2} + \frac{a}{\sqrt2} = \frac{a+b}{\sqrt2} = CO_2.$$

~~$(OO_1 \perp OB)$~~

~~$CBAO_2$ – прямоугольная трапеция~~, значит ~~$AB \parallel OO_1$~~

Ответ: они равны при любом α.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$$

Домножим на xyz

$xy(x+y)=xz(x+z)=yz(y+z)$

$xy(x+y)=xz(x+z)$

Разделим на x

$y(x+y)=z(x+z)$

$xy+y^2=xz+z^2$

$y=z$

$xy(x+y)=yz(y+z)$

Разделим на y

$x(x+y)=z(z+y)$

$x^2+xy=z^2+zy$

$x=z \Rightarrow$

$\Rightarrow x=y=z \Rightarrow \frac{x+y}{z}=2.$

Ответ: 2.

−

№3.

Возьмем наименьший элемент множества M. По условию, сумма остальных элементов, больших его, равна ему. Такого быть не может $\Rightarrow$ все элементы равны.

Возьмем один из них. Сумма 1000 др. элементов равна ему: $x=1000x \Rightarrow x=0 \Rightarrow x^{1001}=0$.

−

№1.

Пусть кол-во установок 1-го типа – x, 2-го типа – y, 3-го типа – z.

x, y, z – целые числа.

Тогда $x+y+z \leq 200$.

$y = 4x$ (по условию)

$5z - 99 = 4x$ (по условию)

$5x + z \leq 200$

$$\frac{5}{4}(5z-99)+z \leq 200$$

$z + 6{,}25z - 123{,}75 \leq 200$

$7{,}25z - 123{,}75 \leq 200$

Домножим на 4

$29z - 495 \leq 800$

$29z \leq 1295$

$z \leq 44$

~~$5x \leq 156\ 200-z$~~

~~$x \leq 31$~~

~~$156 \leq 5x \leq 200$~~

~~$31 \leq x \leq 40$~~

$5x \leq 156$

$x \leq 31$.

$y \leq 124$

$y = 5z - 99$

$y = 116$

$z = 43$

$x = 29$

Ответ: $x = 29$, $y = 116$, $z = 43$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Изначальное кол-во яблок и апельсинов $⋮ 2 \Rightarrow$ хотя бы в 1 вазе кол-во апельсинов и яблок $⋮ 2$.

1 случай

В вазе:	кол-во яблок	кол-во апел.
1 ябл. и 3 ап. ⟷ 3 ябл и 1 ап.	± 2	∓ 2
2 ябл. и 2 ап ⟷ 2 ап. и 2 ябл.	не измен.	не изм
4 ябл ⟷ 4 ап.	± 4	∓ 4

Четность кол-ва яблок (и апельсинов) не изменилась.

2 случай:

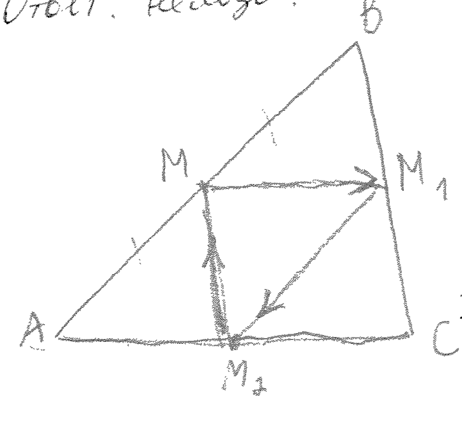
4 вазы. Из каждой вазы берем и меняем

	кол-во яблок	кол-во апел.
Я Я Я Я ⟷ А А А А	± 4	∓ 4
Я Я Я А ⟷ А А А Я	± 2	∓ 2
Я Я А А ⟷ А А Я Я	не измен.	не измен.

+

Четность кол-ва яблок и апельсинов не изменилась.
Если четность суммарного количества яблок (и апельсинов) не изменилась, то она и осталась, как изначально, нечетной. А чтобы заполнить все вазы одинак. фруктами надо, чтобы оба количества были четными $\Rightarrow$ так сделать нельзя.

Ответ: нельзя.



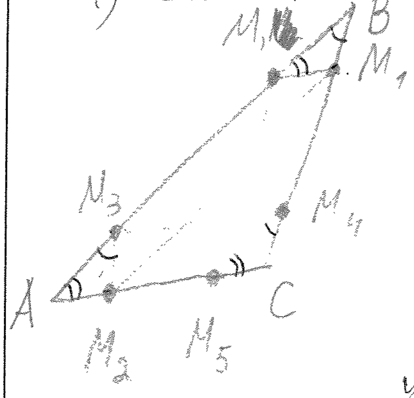
№2. +

1) если точка М — ~~лежит не сред~~ середина АВ, то ей достаточно 3 шагов, чтобы вернуться в исх. положение, т.к. она будет двигаться по средней линии.

2) MM_1 — сред. линия, т.к. она $\parallel AC$ и М — середина АВ. $\Rightarrow$ ~~M~~ M_1 — середина ВС.

3) Аналогично п. 2 для MM_2 и M_1M_2.

4) Если точка M — не середина AB.



1) $\left.\begin{matrix} M_1M_2 \parallel M_3B \\ M_2M_3 \parallel BM_1 \end{matrix}\right] \Rightarrow M_2M_3BM_1$ — параллелограмм

2) $\angle MBM_1 = \angle AM_3M_2$, т.к. $M_2M_3 \parallel BC$ и эти углы — соответственные

$\angle M_3AM_2 = \angle BMM_1$, т.к. $MM_1 \parallel AC$ и эти углы — соответственные.

$M_2M_3 = BM_1$ (по св-ву пар-мма) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AM_2M_3 = \triangle BMM_1$

3) $\left.\begin{matrix} M_3M_4 \parallel M_2C \\ M_2M_3 \parallel M_4C \end{matrix}\right] \Rightarrow \square M_2M_3M_4C$ — параллелограмм.

$M_2M_3 = M_4C$ (по св-ву пар-мма)

$M_4M_5 \parallel AB \Rightarrow \angle M_3AM_2 = \angle M_4M_5C$ (~~соответ~~ соответственные) $\Rightarrow$

$M_4M_5 \parallel AB \Rightarrow \angle MBM_1 = \angle M_5M_4C$

$\triangle M_4CM_5 = \triangle M_3M_2A = \triangle BMM_1$, где бы точка M не лежала $\Rightarrow$ В любом случае точка M вернется в исходное положение за 6 шагов.

Ответ: В любом случае — за 6

Если M — середина AB — за 3.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.

Чтобы любые 4 завода можно было разбить на 2 пары так, что между заводами каждой пары ходил автобус, каждый завод должен быть соединен автобусными маршрутами с 147, 148 или 149 заводами, т.е. каждый завод будет не соединен максимум с 2 заводами, значит в любой четверке заводов каждый завод будет соединен как минимум с 1 заводом.

Это надо обосновать!

Т.к. нужно найти наименьшее число пар заводов, которые могут быть соединены автобусными маршрутами, то каждый завод будет соединен с 147 заводами (наименьшее возможное количество). ?

Тогда количество соединенных маршрутами пар заводов будет равно:

$$\frac{147 \cdot 150}{2} = 11025$$

Ответ: 11025 пар заводов

5.

Сумма любых двух чисел из этой четверки не равна 0, т.к. на 0 делить нельзя.

Для удобства обозначим эти числа буквами: a, b, c, d

Имеем: $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a+d}{b+c} = \frac{b+c}{a+d} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{c+d}{a+b} = k$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{c+d}{a+b} = k$$

$$(a+b)^2 = (c+d)^2$$

$$|a+b| = |c+d| \iff \left[\begin{array}{l} a+b = c+d \\ a+b = -c-d \end{array}\right.$$

1) $a+b = c+d$

Аналогично получаем, что $a+c = b+d$, $a+d = b+c$

Имеем систему: $\begin{cases} a+b = c+d \\ a+c = b+d \\ a+d = b+c \end{cases}$ $\begin{cases} a = c+d-b \\ c+d-b+c = b+d \\ c+d-b+d = b+c \end{cases}$ $\begin{cases} a = c+d-b \\ 2c = 2b \\ 2d = 2b \end{cases}$

$\begin{cases} b = c \\ b = d \\ a = b+b-b \end{cases}$ $\Rightarrow a = b = c = d$, а в условии сказано, что не все числа одинаковы, значит этот вариант не подходит.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ FW 53-23

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) $a+b=-c-d$
$a+c=-b-d$
$a+d=-b-c$ $\Big| \Rightarrow a+b+c+d=0$

Т.е. можно взять любые 3 числа, а четвертое число ~~будет~~ взять таким, чтобы условие $a+b+c+d=0$ выполнялось, тогда ~~сумма~~ отношение суммы любых 2 чисел к другим 2 числам будет равно одному и тому же значению k. Таких четверок бесконечное количество.

$k=\frac{a+b}{c+d}=\frac{-c-d}{c+d}=-1$

Возьмем $a=5$, $b=3$, $c=-6$, тогда $d=-2$.

$\frac{a+b}{c+d}=\frac{5+3}{-6-2}=\frac{8}{-8}=-1$

$\frac{a+c}{b+d}=\frac{5-6}{3-2}=\frac{-1}{1}=-1$

$\frac{a+d}{b+c}=\frac{5-2}{3-6}=\frac{3}{-3}=-1$

$\frac{b+c}{a+d}=\frac{3-6}{5-2}=\frac{-3}{3}=-1$

$\frac{b+d}{a+c}=\frac{3-2}{5-6}=\frac{1}{-1}=-1$

$\frac{c+d}{a+b}=\frac{-6-2}{5+3}=\frac{-8}{8}=-1$

Т.е. четверка чисел $5; 3; -6; -2$ удовлетворяет условие.

Ответ: $k=-1$; четверка чисел, удовлетворяющих условию: $5; 3; -6; -2$; чтобы выполнялось условие, сумма 4 чисел должна быть равна 0; таких четверок бесконечное количество.

(+)

3.

Для удобства обозначим числа в ряду буквами: a, b, c, d, e, f

(+)

По условию: $\frac{a+b+c}{3}=\frac{b+c+d}{3}=\frac{c+d+e}{3}=\frac{d+e+f}{3}$

Тогда $a+b+c=b+c+d \;|\Rightarrow a=d$
$b+c+d=c+d+e \;|\Rightarrow b=e$
$c+d+e=d+e+f \;|\Rightarrow c=f$ $\Big| \Rightarrow$ ряд из 6 чисел можно записать так: a, b, c, a, b, c

Т.е. в каждой тройке соседних чисел будет число равное a, число равное b, число равное c. Значит среднее геометрическое каждой тройки будет равно.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6}=\frac{a+b+c+a+b+c}{6}=\frac{2(a+b+c)}{6}=\frac{a+b+c}{3}=A.$$

$a+b+c=3\cdot A$

По условию в этом ряду есть 1, т.к. средние геометрические трех соседних чисел равны, то можно приравнять 1 любое число из ряда, возьмем $c=1$.

Тогда $a+b=3A-1$.

Среднее геометрическое будет наибольшим, если оставшиеся 2 числа будут равны друг другу, т.е. $a=b=\frac{3A-1}{2}=1{,}5A-0{,}5$

Среднее геометрическое будет равно: $\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{(1{,}5A-0{,}5)^2}$

Ответ: $\sqrt[3]{(1{,}5A-0{,}5)^2}$

2.

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$

$x_0+x_1+\dots+x_{n-1}-x_n, \quad n=1,2,\dots$

$2x_n=x_0+x_1+\dots+x_{n-1}-x_n, \quad n=1,2,\dots$

$3x_n=x_0+x_1+\dots+x_{n-1}$

$x_n=\frac{1}{3}(x_0+x_1+\dots+x_{n-1})$ ±

$x_1=\frac{x_0}{3}$

$x_2=\frac{1}{3}\left(x_0+\frac{x_0}{3}\right)=\frac{4\cdot x_0}{9}=\frac{4x_0}{3^2}$

$x_3=\frac{1}{3}\left(x_0+\frac{x_0}{3}+\frac{4x_0}{9}\right)=\frac{16x_0}{27}=\frac{4^2x_0}{3^3}$

$x_4=\frac{1}{3}\left(x_0+\frac{x_0}{3}+\frac{4x_0}{9}+\frac{16x_0}{27}\right)=\frac{64\cdot x_0}{81}=\frac{4^3x_0}{3^4}$

Заметим, что $x_n=\frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^n}$?

Ответ: $x_n=\frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^n}$

4.

$g(x)=x^2+ax+b$ имеет 1 корень $\Rightarrow a^2-4b=0$

$a^2=4b$

$b=\frac{a^2}{4}$

$g(x)=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$g(x^5+2x-1)+g(x^5+3x+1)=x^{10}+4x^2+1+4x^6-2x^5-4x+1+$

$+a(x^5+2x-1)+\frac{a^2}{4}+x^{10}+9x^2+1+6x^6+2x^5+6x+a(x^5+3x+1)+\frac{a^2}{4}=$

$=2x^{10}+10x^6+13x^2+2x+2+a(2x^5+5x)+\frac{a^2}{2}=$

$=2x^{10}+10x^6+2ax^5+13x^2+(2+5a)x+\frac{a^2}{2}+2=(x^5+5x+a)^2$

$2x^{10}+10x^6+2ax^5+13x^2+(2+5a)x+\frac{a^2}{2}+2=2x^{10}+10x^6+2ax^5+25x^2+10ax+a^2$

$2x+2=12x^2+5ax+\frac{a^2}{2}$

$24x^2+(10a\cancel{}-4)x+a^2-4=0$

$D=(10a-4)^2-4\cdot24(a^2-4)=100a^2-80a+16-96a^2+384=$

$=4a^2-80a+400=(2a-20)^2=0$

$2a-20=0$

$a=\frac{20}{2}=10$

$b=\frac{a^2}{4}=\frac{10^2}{4}=\frac{100}{4}=25$

Ответ: $a=10$; $b=25$

2. $2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$, $n = 1, 2 \ldots$

$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$.

$n=1$.

$3x_1 = x_0 \quad x_1 = \frac{1}{3} x_0$

$n=2$

$3x_2 = x_0 + x_1 = 4x_1 \quad x_2 = \frac{4}{3} x_1$

$(\cancel{из}\ x_0 = 3x_1)$

$n=3$

$3x_3 = \underbrace{x_0 + x_1}_{3x_2} + x_2 = 3x_2 + x_2 = 4x_2 \quad x_3 = \frac{4}{3} x_2$

+

Видно, что каждый член последовательности отличается от предыдущего в $\frac{4}{3}$ раза.

$3x_{k-1} = x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-2}$.

$3x_k = \underbrace{x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-2}}_{3x_{k-1}} + x_{k-1} = 4x_{k-1}$

$x_k = \frac{4}{3} x_{k-1}$

Значит это геометрическая последовательность, каждый член которой больше предыдущего в $\frac{4}{3}$ раза, кроме первого.

Общее уравнение данной последовательности:

$\cancel{x_n = x_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n}$ $\quad x_n = x_0 \cdot \frac{(4)^{n-1}}{(3)^n}$ первый отличается от нулевого в $\frac{1}{3}$ раза, ~~значит~~ умножение на четверку добавляется только со 2-ого члена прогрессии.

Пример такой последовательности:

Пусть $x_0 = 1$, тогда.

$x_1 = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ $\quad x_3 = 1 \cdot \frac{16}{27} = \frac{16}{27}$

$x_2 = 1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$ $\quad$ и так далее.

Ответ: $x_n = x_0 \cdot \frac{4^{(n-1)}}{3^n}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ FW 53-30

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. ~~Пусть эти числа~~

Обозначим эти числа как a, b, c, d.

Запишем эти выражения, удовлетворяющие условию.

$\frac{a+b}{c+d}=k \quad \frac{c+d}{a+b}=k \quad \frac{a+c}{b+d}=k \quad \frac{b+d}{a+c}=k \quad \frac{a+d}{b+c}=k \quad \frac{b+c}{a+d}=k$

$$\frac{a+b}{c+d}=k=\frac{c+d}{a+b}$$

$$\begin{cases} c+d\neq 0 \\ a+b\neq 0 \\ a+c\neq 0 \\ b+d\neq 0 \\ a+d\neq 0 \\ b+c\neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{(a+b)^2-(c+d)^2}{(c+d)(a+b)}=0$$

$$\left[\begin{array}{l}(c+d)(a+b)\neq 0 \\ (a+b)^2=(c+d)^2\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}a+b=c+d \ (1) \\ a+b=-c-d \ (2)\end{array}\right.$$

(1) если $a+b=c+d$, тогда $k=1$.

$\frac{a+c}{b+d}=1 \qquad a+c=b+d$ Получим систему

$\frac{a+d}{b+c}=1 \qquad a+d=b+c$

$$\begin{cases} a+b=c+d \ (*) \\ a+c=b+d \ (**) \\ a+d=b+c \ (***) \end{cases}$$

$(* \text{ и } **)$ $a+b-a-c=c+d-b-d$
$2b=2c$
$\underline{b=c}$

$(**)$ $a+c=b+d$
$a+b=c+d$
$\underline{a=d}$

$(***)$ $a+d=b+c$
$2a=2b$
$\underline{a=b}$

Получим, что $a=b=c=d$
Но по условию не все числа одинаковы. Значит $a+b\neq c+d$.

Другие в-ты?

(2). $\underline{a+b=-c-d}$, тогда $\boxed{k=-1}$
$a+c=-b-d$
$a+d=-b-c$

$a+c+b+d=0$, при этом среди этих чисел нет равных по модулю и при этом противоположных по знаку.

Пример этих чисел:
$2, 2, -3, -1$. $\quad \frac{2+2}{-3-1}=-1 \quad \frac{2-3}{2-1}=-1 \quad \frac{2-1}{2-3}=-1$

+

Ответ: $k=-1$
$a+b+c+d=0$, но среди них не равных по модулю и противоположных по знаку.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. Обозначим эти числа, как $a\ b\ c\ d\ e\ f$.

По условию любые 3 соседних числа имеют одинаковое среднее арифметическое, обозначим его k.

$$\frac{a+b+c}{3}=k \qquad \frac{b+c+d}{3}=k$$

$$a+b+c=3k \qquad b+c+d=3k$$

$$a+b+c-b-c-d=0$$

$$\boxed{a=d}$$

Аналогично рассмотрим тройку b,c,d и $c\,d\,e$, получим что $b=e$, и тройку c,d,e и d,e,f, получим, что $c=f$.

Т.о. наши 6 цифр имеют вид:

$a\ b\ c\ a\ b\ c$.

Среднее арифметическое всех чисел равно A.

$$\frac{a+b+c+a+b+c}{6}=A$$

$$\frac{a+b+c}{3}=A. \text{ — это является среднем арифметическим любых трех чисел, стоящих рядом.}$$

Среди них есть 1., но т.к. мы доказали, что среди них по 2 одинаковых числа, значит среди них есть две 1.

Не нарушая общности, ~~предположим~~ обозначим $a=1$.

Получим:

$$\frac{1+b+c}{3}=A \qquad b+c=3A-1 \qquad b^2+c^2+2bc=(3A-1)^2$$

$$(b+c)^2=(3A-1)^2 \qquad bc=\frac{(3A-1)^2-b^2-c^2}{2}$$

Видим, что чем меньше сумма b^2+c^2, тем больше произведение $b\cdot c$. Нам нужно найти максимальное значение $\sqrt{b\cdot c\cdot 1}=\sqrt{bc}$. Такое значение достигается когда $b=c$. Получим:

$$2b\cdot c=(3A-1)^2-b^2-c^2 \qquad 2b^2+2b^2=(3A-1)^2 \quad 4b^2=(3A-1)^2$$

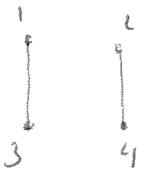
Продолжение 3 задачи.

$$|b| = \sqrt[3]{\frac{(3a-1)^2}{4}} = \boxed{\frac{|3a-1|}{2}} = \sqrt[3]{b\cdot c} = \sqrt{b\cdot b} = |b|.$$

Значит это значение и есть среднее геометрическое любых трех чисел

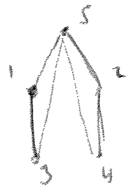
Ответ. $\frac{|3a-1|}{2}$

1. Рассмотрим случай, ~~где~~ когда в стране было 4 завода.



Тогда, для того чтобы условие выполнялось, мы должны провести как минимум 2 дороги.

2. Если в стране 5 заводов.



Рассмотрим эти 5 заводов, как 4 завода из прошлого случая и 1 добавленный к ним. Необходимо провести 4 дороги дополнительно, для этих четверок заводов: 1235 (соединим 5 и 2), 1245 (соединим 1 и 5), 2345 (соединим 5 и 3), 1345 (соединим 5 и 4). Мы выбираем такие дороги, соединяя этим образом, чтобы при каждой ~~расстановке~~ четверке мы проводили минимум одну дорогу, для того чтобы общее число дорог было ~~меньше~~ минимально. Таким образом получим что минимальное число дорог, если заводов было 5, будет равно 6. (2, которые были поставлены в случае, когда только 4 завода, и 4 дороги из завода №5 во все другие заводы)

Т.о. при добавлении еще одного завода, мы проведем 5 дополнительных дорог (к каждому из заводов, как и в случае выше), чтобы выполнялось условие. А общее число дорог составит: $2 + \cancel{5}\, 4 + 5 = 11$

~~Это будет работать и для всех натуральных чисел.~~

Т.е.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Заметим, что кол-во дорог можно считать по формуле: $2+4+5+\ldots+n-1$, где n – кол-во узлов. Т.к. при добавлении еще одного узла ~~также~~ с номером k, нам необходимо будет провести $k-1$ дорогу.

В сетке „Энергетика" 150 узлов, значит $n=150$.

Подсчитаем:

$$2+4+5+\ldots+149=\cancel{11271}\ 11171$$

Ответ: ~~11271~~ 11171

4. $g(x)=x^2+ax+b$ – имеет один корень

$D=0=a^2-4b$

$\cancel{a=2\sqrt{b}}$ $\quad b=\frac{a^2}{4}$

$g(x^5+2x-1)+g(x^5+3x+1)=2x^{10}+10x^6+13x^2+2x+2b+a(2x^5+5x)=$

$=2x^{10}+10x^6+13x^2+2x+\frac{a^2}{4}+a(2x^5+5x)=0$ – имеет один корень

$|2x+a(2x^5+5x)|=2x^{10}+10x^6+13x^2+\frac{a^2}{4}$

x ~~нет~~ не в четной степени

Если $x=0$ $\Rightarrow$ $a=0$ $\quad b=0$

(–)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 +

1) $g(x)=x^2+ax+b$ имеет 1 корень, т.о. $D=a^2-4b=0$, $a^2=4b$, $b=\frac{a^2}{4}$.

Отсюда, $g(x)=x^2+ax+\frac{a^2}{4}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$

2) $g(x^5+2x-1)+g(x^5+3x+1)=\left(x^5+2x-1+\frac{a}{2}\right)^2+\left(x^5+3x+1+\frac{a}{2}\right)^2$.

Известно, что $\left(x^5+2x-1+\frac{a}{2}\right)^2+\left(x^5+3x+1+\frac{a}{2}\right)^2=0$ имеет 1 корень. Оба слагаемых неотрицательны, т.е. равенство возможно только при:

$$\begin{cases} x^5+2x-1+\frac{a}{2}=0 \\ x^5+3x+1+\frac{a}{2}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^5+2x-1+\frac{a}{2}-x^5-3x-1-\frac{a}{2}=0 \\ \frac{a}{2}=1-x^5-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x-2=0 \\ \frac{a}{2}=1-x^5-2x \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ a=2(1-x^5-2x) \end{cases} \quad \begin{cases} x=-2 \\ a=2\cdot(1+32+4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ a=74 \end{cases}$$ Отсюда, $a=74$, $b=\frac{74^2}{4}=\left(\frac{74}{2}\right)^2=37^2=1369$

Ответ: $a=74$, $b=1369$

№3 +

Возможны 3 случая: ⓐ 1 стоит на 1-ом месте
ⓑ 1 стоит на 2-ом месте
ⓒ 1 стоит на 3-ем месте

* Случаи, когда 1 стоит на 4, 5 или 6 месте симметричн. случаям ⓐ, ⓑ и ⓒ.

ⓐ 1 стоит на 1 месте, т.е. ряд чисел имеет вид: 1, a, b, c, d, e.

Известно, что $\frac{1+a+b}{3}=\frac{a+b+c}{3}=\frac{b+c+d}{3}=\frac{c+d+e}{3}$, т.е.

$1+a+b=a+b+c=b+c+d=c+d+e$.

$1+a+b=a+b+c$, т.о. $c=1$, $a+b+c=b+c+d$, т.е. $a=d$, $b+c+d=c+d+e$, т.о. $b=e$.

Ряд чисел примет вид: 1, a, b, 1, a, b. Известно, что $\frac{1+a+b+1+a+b}{6}=A$,

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$1+a+b=3A$, т.е. $b=3A-a-1$. Заметим, что все сред. геом. 3 сосед. чисел равны $B=\sqrt[3]{1\cdot a\cdot b}=\sqrt[3]{ab}=$

$=\sqrt[3]{a(3A-a-1)}=\sqrt[3]{-a^2+3A\cdot a-a}=\sqrt[3]{-a^2+(3A-1)a}$.

B примет макс. значение при максим. $\sqrt[3]{-a^2+(3A-1)a}$, т.е. при максим. $-a^2+(3A-1)a$ (т.к. кубический корень - корень нечетной степени). $-a^2+(3A-1)\cdot a$ принимает максим. значение в вершине, т.е. в $a=\frac{-(3A-1)}{-2}=\frac{3A-1}{2}$.

Отсюда, B примет максим. значение при $a=\frac{3A-1}{2}$,

т.е. $B=\sqrt[3]{\frac{3A-1}{2}\left(3A-\frac{3A-1}{2}-1\right)}=\sqrt[3]{\frac{3A-1}{2}\cdot\left((3A-1)-\frac{3A-1}{2}\right)}=$

$=\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)\left(\frac{3A-1}{2}\right)}=\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$

б) Если 1 стоит на 2-ом месте, ряд примет вид: $a, 1, b, c, d, e$. Известно, что $\frac{a+1+b}{3}=\frac{1+b+c}{3}=\frac{b+c+d}{3}=\frac{c+d+e}{3}$, т.е. $a+1+b=1+b+c=b+c+d=c+d+e$. $a+1+b=1+b+c$, т.е. $a=c$, $1+b+c=b+c+d$, т.е. $d=1$, $b+c+d=c+d+e$, т.е. $b=e$, сл-но, ряд примет вид: $a, 1, b, a, 1, b$. Известно, что $\frac{a+1+b+a+1+b}{6}=A$, т.е. $a+1+b=3A$, $b=3A-a-1$. Все ср. геом. равны $\sqrt[3]{1\cdot a\cdot b}=$

$=\sqrt[3]{a\cdot(3A-a-1)}=B$ — это уже было рассм. в п. а.

Отсюда, $B_{max}=\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$

в) Если 1 стоит на 3 месте, то ряд имеет вид: $a, b, 1, c, d, e$. По услов.: $\frac{a+b+1}{3}=\frac{b+1+c}{3}=\frac{1+c+d}{3}=\frac{c+d+e}{3}$, т.е. $a+b+1=b+1+c=1+c+d=c+d+e$, $a+b+1=b+1+c$, т.е. $a=c$, $b+1+c=1+c+d$, т.е. $b=d$, $1+c+d=c+d+e$, т.е. $e=1$. Ряд прим. вид: $a, b, 1, a, b, 1$. Изв., что $\frac{a+b+1+a+b+1}{6}=A$, $a+b+1=3A$, $b=3A-a-1$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ FW 53-84

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Заметим, что все ср. геом. равны $B=\sqrt[3]{1\cdot a\cdot b}=\sqrt[3]{a(3A-a-1)}$ – это было расс. в п. ⓐ, т.е. $B_{max}=\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$

Ответ: максим. значение ср. геом. – $\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$

№2

$2x_n = x_0+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}-x_n$, т.е. $3x_n=x_0+\ldots+x_{n-1}$

$3x_{n-1}=x_0+\ldots+x_{n-3}+x_{n-2}$

I

$3x_n=(x_0+\ldots+x_{n-2})+x_{n-1}=3x_{n-1}+x_{n-1}=4x_{n-1}$.

Отсюда $x_n=\frac{4}{3}x_{n-1}$ (кроме x_1, $x_1=\frac{x_0}{3}$)

Следовательно, $x_1=\frac{x_0}{3}$, $x_2=\frac{4}{3}x_1=\frac{4}{9}x_0=\frac{4}{3}\cdot\frac{x_0}{3}$,

$x_3=\left(\frac{4}{3}\right)^2\frac{x_0}{3}$ .... $x_n=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{x_0}{3}$ {?

Ответ: $x_n=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{x_0}{3}$ $(n\in N)$

№5

Пусть эти числа a, b, c, d, причем среди них нет противоп., т.к. их сумма была бы 0, сл-но, эта сумма могла бы оказаться в знаменателе, а на 0 дел. нельзя.

По условию $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+d}{b+c}=\frac{b+c}{a+d}=\frac{b+d}{a+c}=\frac{c+d}{a+b}=k$

Имеем, что $\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b}$, $\frac{a+c}{b+d}=\frac{b+d}{a+c}$, $\frac{a+d}{b+c}=\frac{b+c}{a+d}$,

т.е. $\begin{cases}(a+b)=\pm(c+d)\\(a+c)=\pm(b+d)\\(a+d)=\pm(b+c)\end{cases}$ Заметим, что случаи

ⓐ $\begin{cases}(a+b)=(c+d)\\(a+b)=b+d\\a+d=-(b+c)\end{cases}$, $\begin{cases}(a+b)=-(c+d)\\(a+b)=b+d\\a+d=(b+c)\end{cases}$, $\begin{cases}a+b=c+d\\a+b=-(b+d)\\a+d=b+c\end{cases}$

ⓑ $\begin{cases}(a+b)=c+d\\a+b=-(b+d)\\a+d=-(b+c)\end{cases}$ $\begin{cases}(a+b)=-(c+d)\\a+b=-(b+d)\\a+d=(b+c)\end{cases}$ $\begin{cases}a+b=-(c+d)\\a+b=b+d\\a+d=-(b+c)\end{cases}$ – аналог,

т.е. дост. рассм. 1 из них.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ FW 53-84

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) $\begin{cases} a+b=c+d \\ a+c=b+d \\ a+d=b+c \end{cases}$

Отсюда, $a=b=c=d$ – противоречие

2) $\begin{cases} a+b=-(c+d) \\ a+c=b+d \\ a+d=b+c \end{cases}$

$\begin{cases} 2a+c+d=2b+c+d \\ a+c=b+d \\ a+b=-(c+d) \end{cases}$

$\begin{cases} a=b \\ c=d \\ 2a=-2c \end{cases}$

$a=-c$ – противор. (по док-ву)

3) $\begin{cases} a+b=-(c+d) \\ a+c=-(b+d) \\ a+d=(b+c) \end{cases}$

4) Отсюда, возможен только случай. $\begin{cases} a+b=-(c+d) \\ a+c=-(b+d) \\ a+d=-(b+c) \end{cases}$

И правда, например: 1, 3, −2, −2. И таких чисел бесконечно много. Для того, чтобы они подходили, их сумма должна быть 0, и модуль суммы двух любых у них был равен мод. суммы двух других. Тогда $k=-1$.

+

Ответ: $k=-1$. Пример 4-ки: 1, 3, −2, −2. Их сумма равна 0, а модуль суммы любых 2-ух равен модулю суммы 2-ух других. Таких чисел бесконечно много.

№1

1) Всего в 150-угольнике можно провести $\frac{150\cdot149}{2}=75\cdot149$ отрезков.

2) Всего 4-ов в 150 угольнике: $\frac{150\cdot149\cdot148\cdot147}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=25\cdot149\cdot147\cdot37$.

3) Каждый ~~диагональ~~ отрезок встречается в $\frac{25\cdot149\cdot147\cdot37}{75\cdot149}=49\cdot37$ четырехугольниках. ?

F

4) В 4-ке можно провести ровно 6 отрезков, а нам нужно всего 2, причем не ~~из одн. вершины~~ у 1 вершины. Таких пар существует всего 3, а всего пар отрезков в 4-ке – 15

Отсюда, всего таких дорог должно быть как минимум $\frac{150\cdot149}{2}-150=75\cdot147=11025$ (все диагонали 150 уг-ка)

Ответ: 11025

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача № 3

6 чисел записаны в ряд: a, b, c, d, e, f

1) Из услов $\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} \Rightarrow a=d$

$\frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} \Rightarrow b=e$

$\frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3} \Rightarrow c=f$

Т.о. любое среднее геометрическое любых трёх соседних чисел в этом ряду равно $\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$

~~Одно из шести~~

2) Среди 6 данных чисел есть единица. Не нарушая общности, присвоим значение 1 числу a. Тогда и число $d=1$ (см. п. 1)

Т.о. среднее геометрическое любых 3х соседних чисел в этом ряду равно $\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c} = \sqrt{1\cdot b\cdot c} = \sqrt{b\cdot c}$ (ОДЗ: $b\cdot c>0$)

3) $\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = A$ $\qquad a+b+c = 3A$

(из п 1) $\frac{2a+2b+2c}{6} = A$ $\qquad a=1$

$b+c = 3A-1$

Т.О. нам нужно найти максимальное значение $b\cdot c$ при фиксированной сумме: $b+c=3A-1$

При том по ОДЗ: b и c – одного знака

4) Если b и c – ~~полож~~ неотрицательны, то $b\cdot c = |b|\cdot|c|$

Если b и c – неположительные, то $b\cdot c = |b|\cdot|c|$

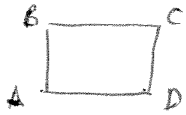
Т.о. нам надо найти максимальное значение $|b|\cdot|c|$ при фиксированной сумме: $b+c=3A-1$

(продолжение на листе 2)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3 (продолжение)

5) Площадь прямоугольника равна произведению двух соседних его сторон: $S_{ABCD} = AB \cdot BC$

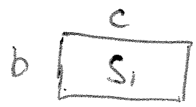


Причём при заданном периметре ($P_{ABCD} = 2(AB+BC)$), т.е. при заданном значении суммы 2х его соседних сторон, наибольшую площадь будет иметь квадрат.

Т.е. $S_{ABCD} = AB \cdot BC$ — максимальна при $AB = BC$ при заданном значении P_{ABCD}

6) Вернёмся к нашей задаче.

$S_1 = |b| \cdot |c|$ — максимальна, если $|b| = |c|$



Т.о. $|b| = |c|$ и т.к. b и c — одного знака, то $b = c$

Имеем: $\begin{cases} b+c = 3A-1 \\ b = c \end{cases} \Rightarrow b = c = 1{,}5A - 0{,}5$

Тогда среднее геометрическое любых трёх соседних чисел в этом ряду примет вид:

$\sqrt[3]{a \cdot b c} = \sqrt{b \cdot c} = \sqrt{(1{,}5A - 0{,}5)^2} = |1{,}5A - 0{,}5|$

Ответ: $|1{,}5A - 0{,}5|$ — максимальное значение среднего геометрического любых трёх чисел (соседних) в этом ряду

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №2

$2x_n = x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}-x_n$

$3x_n = x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$

$x_n = \frac{1}{3}(x_0+x_1+\ldots+x_{n-1})$ (+)

$x_1 = \frac{1}{3}x_0 \quad x_2 = \frac{1}{3}(x_0+\frac{1}{3}x_0) = \frac{4}{9}x_0 \quad x_3 = \frac{1}{3}(x_0+\frac{1}{3}x_0+\frac{4}{3}x_0) = \frac{16}{27}x_0$

Заметив закономерность, выведем формулу n-ного члена данной последовательности x_n:

$$x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n}\cdot x_0$$

Теперь докажем верность этой формулы с помощью мат. индукции:

1) $x_1 = \frac{4^0}{3^1}x_0 = \frac{1}{3}x_0$

2) пусть для $n=k$ данная формула справедлива, тогда: $x_k = \frac{4^{k-1}}{3^k}\cdot x_0$

3) $n=k+1$

$x_{k+1} = \frac{1}{3}(x_0+x_1+\ldots+x_k) = \frac{1}{3}\left(x_0+\frac{1}{3}x_0+\ldots+\frac{4^{k-1}}{3^k}x_0\right)$

Приведем выражение в скобке к одному знаменателю:

$x_0+\frac{1}{3}x_0+\ldots+\frac{4^{k-1}}{3^k}x_0 = \frac{x_0(3^k+3^{k-1}+4\cdot 3^{k-2}+\ldots+4^{k-1})}{3^k} = \frac{x_0\cdot 4^k}{3^k}$

тогда $x_{k+1} = \frac{1}{3}(x_0+x_1+\ldots+x_k) = \frac{1}{3}\cdot\frac{x_0\cdot 4^k}{3^k} = \frac{x_0\cdot 4^k}{3^{k+1}} = \frac{4^k}{3^{k+1}}x_0$

Т.о. данная формула справедлива

Ответ: $x_0 = x_0$

$x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n}\cdot x_0$, при $n \geq 1$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача № 4

−

1) $g(x) = x^2+ax+b$

$g(x)$ имеет только 1 корень $\Leftrightarrow D=0$

$D = a^2-4b = 0$

$a^2 = 4b$

$a = 2\sqrt{b}$

$x = \frac{-a}{2} = \frac{-2\sqrt{b}}{2} = -\sqrt{b}$

Т. образом $g(x) = (x+\sqrt{b})^2$

2) Обозначим $x^5+2x-1 = t_1$

$x^5+5x+1 = t_2$

Тогда $g(t_1)+g(t_2)$ - имеет ровно один корень,

т.е. $g(t_1)+g(t_2)=0$

$(t_1+\sqrt{b})^2+(t_2+\sqrt{b})^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1+\sqrt{b}=0 \\ t_2+\sqrt{b}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} t_1=-\sqrt{b} \\ t_2=-\sqrt{b} \end{cases}$

$t_1=t_2$

$\cancel{x^5}+5x+1 = \cancel{x^5}+2x-1$

$x=-2$

3) $g(x) = g(-2) = x^2+2\sqrt{b}x+b$

$x = \frac{-2\sqrt{b}}{2} = -2$

$-2\sqrt{b} = -4$

$\sqrt{b} = 2$

$b = 4$

Тогда $a = 2\sqrt{b} = 2\sqrt{4} = 4$

Ответ: $a=b=4$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача № 5

Имеется 4 числа: a, b, c, d

Причём

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+d}{b+c}=\frac{b+c}{a+d}=\frac{b+d}{a+c}=\frac{c+d}{a+b}=k$$

Из этого делаем вывод:

а) нулей среди этих четырёх чисел не больше 1, иначе какой-либо из знаменателей дробей (см. выше) обратится в 0

б) среди этих четырёх чисел нет чисел одинаковых по модулю но разных по знаку, иначе какой-либо из знаменателей дробей (см. выше) обратится в 0

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{b+d}{a+c} \Big| \Rightarrow (a+c)^2=(b+d)^2$$

$$a+c=\pm(b+d)$$

1 сл. $a+c+b+d=0$

$a+c=-b-d$

Этот случай нам подходит, учитывая выполнение условий п. а) и п. б)

2 сл. $a+c=b+d$

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b} \quad a+b=\pm(c+d)$$

сл. 2.1

$a+b=-c-d$

$a+c=b+d$

$b+d=a+c$

$a+2b+d=a-d$

$2b=-2d$

$b=-d$

не подходит по п. б) (см. выше)

сл. 2.2

$a+b=c+d$

$a+c=b+d$

$2a+b+c=b+c+2d$

$a=d$

$b=c$

$$\frac{a+d}{b+c}=\frac{b+c}{a+d}$$

$a+d=\pm(b+c)$

сл.2.2.1 сл.2.2.2

(продолжение см. на листе 6)

Задача 5 (продолжение)

сл 2.2.1

$a+d=-b-c$

$a+c=b+d$

$b+d=a+c$

$a+b+2d=a-b$

$2d=2a$

$2a=-2b$

$a=-b$

не подходит (см п. б))

сл. 2.2.2.

$a+d=b+c$

$a+c=b+d$

$a=d$

$b=c$

$2a=2b$

$a=b$

$a=b=c=d$

не подходит (по усл. все 4 числа не могут быть попарно равными)

Таким образом нам подходит только случай 1

$a+b+c+d=0$

Тогда $k=\frac{a+b}{c+d}=\frac{a+b}{0-a-b}=-1$

Теперь приведём 2 примера 4ки чисел, удовлетворяющих условию:

1) $a=1$ $c=-3$
$b=2$ $d=0$

$a+b+c+d=1+2-3+0=0$

$k=\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b}=\frac{3}{-3}=\frac{-3}{3}=-1$

$k=\frac{a+d}{b+c}=\frac{b+c}{a+d}=\frac{1}{-1}=\frac{-1}{1}=-1$

$k=\frac{a+c}{b+d}=\frac{b+d}{a+c}=\frac{-2}{2}=\frac{2}{-2}=-1$

2) $a=3$ $c=-1$
$b=3$ $d=-5$

$a+b+c+d=3+3-1-5=0$

$k=\frac{a+b}{c+d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+d}{b+c}=\frac{c+d}{a+b}=\frac{b+d}{a+c}=\frac{b+c}{a+b}=-1$

И так как чисел бесконечно много, то и четвёрок чисел, удовлетворяющих условию, бесконечно много

(продолжение см. лист 7)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5 (продолжение)

Ответ: • $k = -1$

• четвёрка чисел, удовлетворяющих условию: 1; 2; −3; 0

• таких четвёрок чисел, удовлетворяющих условию, бесконечно много; они должны удовлетворять следующим параметрам: - сумма всех чисел в четвёрке равна 0

- нулей, среди чисел четвёрки не больше 1

- среди этих 4х чисел нет чисел одинаковых по модулю и разных по знаку.

Задача № 1

Каждый из 150 заводов может быть соединён 149ю автобусными маршрутами со 149ю другими заводами. Причём, чтобы у завода N в любой четвёрке заводов, его включающих, была по крайней мере 1 пара (завод M, такой что соединён с заводом N автобусным маршрутом), нужно, чтобы завод N был связан автобусным маршрутом по крайней мере с 147ю другими заводами. Это надо обосновать!

Т.о. каждый 150 заводов связан по крайней мере с 147 заводами. Тогда наименьшее кол-во пар заводов, соединенных автобусным маршрутом, равно

±

$$\frac{147 \cdot 150}{2} = 75 \cdot 147 = 11025$$

Ответ: 11025 - наименьшее кол-во пар заводов, ? которые могут быть соединены автобусным маршрутом

∓

№5

Пусть эти четыре числа: a, b, c, d,

тогда можно записать: $\begin{cases} (a+b)\cdot k = c+d \\ (a+c)\cdot k = b+d \\ (a+d)\cdot k = b+c \end{cases}$

Раскроем скобки и выразим:

$$\begin{cases} a\cdot k + b\cdot k = c+d \\ a\cdot k + c\cdot k = b+d \\ a\cdot k + d\cdot k = b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & a\cdot k = c+d-b\cdot k \\ & c+\cancel{d}-b\cdot k + c\cdot k = b+\cancel{d} \\ & c - b\cdot k + c\cdot k = b \\ & ck - b\cdot k = b - c \\ & k(c-b) = b-c \Rightarrow k=-1. \end{aligned}$$

Так как $k=-1$, то:

$$\begin{cases} -a-b = c+d \\ -a-c = b+d \\ -a-d = b+c \end{cases} \Rightarrow$$ Укажем пример четверки чисел. Так как не все из четырех чисел одинаковые то:

Пусть $a=1$, $b=2$, тогда $c+d=-3$.

Пусть $c=-6$, $d=3$, если рассмотреть оставшиеся два уравнения, то можно убедиться, что представленная четверка чисел удовлетворяет условию.

Таких четверок чисел бесконечное множество, ведь в основе их получения лежит такой принцип: выбираем любые 3-и случайные числа,

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ FW 61-34

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

и присваиваем их значение переменным a, в и c. Четвертое число, d находим с помощью уравнения: $d = -a - в - c$.

Ответ: $K = -1$, пример четверки чисел: $1, 2, 3, -6$.

+

Таких четверок чисел бесконечное множество.

№ 4.

$g(x) = x^2 + ax + в$, $D = 0$

$g(x^5 + 2x - 1) + g(x^5 + 3x + 1)$

$\mp$

$\begin{cases} g(x^5+2x-1) = x^2 + ax + в \\ g(x^5+3x+1) = x^2 + ax + в \end{cases}$

$\begin{cases} x^5 + 2x - 1 = x^2 + ax + в \\ x^5 + 3x + 1 = x^2 + ax + в \end{cases}$

$\begin{cases} x^5 = x^2 + ax + в - 2x + 1 \\ x^5 = x^2 + ax + в - 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow$ $-2x + 1 = -3x - 1$

$-2x + 3x = -1 - 1$

$x = -2$

$x^2 + ax + в = 0$, $D = 0$

$D = a^2 - 4в = 0 \Rightarrow a^2 = 4в$

$(-2)^2 - 2a + в = 0$

$4 - 2a + в = 0 \Rightarrow в = 2a - 4$

$\begin{cases} a^2 = 4в \\ в = 2a - 4 \end{cases} \Rightarrow$ $a^2 = 4(2a - 4)$

$a^2 - 8a + 16 = 0$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$D = 64 - 64 = 0$

$a = \frac{8}{2} = 4 \; | \Rightarrow \; 4^2 = 4b \; | \rightarrow b = 4.$

Ответ: $a = 4$; $b = 4$.

№ 3

Пусть это числа: a, b, c, d, e, f, тогда.

$\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3} \; | \Rightarrow$

$a+b+c = b+c+d = c+d+e = d+e+f \; | \Rightarrow$ +

(1) $\begin{cases} a = d \\ b = e \\ c = f \end{cases}$ $\quad \frac{a+b+c+d+e+f}{6} = A$

$\frac{2a+2b+2c}{6} = A \; | \Rightarrow a+b+c = 3A$

Запишем эти числа снова, учитывая равенство (1):

a, b, c, a, b, c, тогда их среднее геометрическое:

$\sqrt[3]{abc}, \sqrt[3]{bca}, \sqrt[3]{cab}, \sqrt[3]{abc}$ Как мы видим, все значения их среднего геометрического равны.

Максимальное значение достигается при двух равных переменных. Т.к одна из них равна 1, то пусть $a = 1$, тогда $b = c \; | \rightarrow 1 + 2b = 3A \; | \rightarrow$

$b = \frac{3A-1}{2}$. Тогда среднее геометрическое:

$\sqrt[3]{1 \cdot b^2} = \sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Так для числовой последовательности:

$x_0, x_1, x_n, x_{n+1} \dots$ выполняется условие

$2x_n = x_0 + x_1 \dots + x_{n-1} - x_n$, при $n \in N$, то

При $n=1$: $2x_1 = x_0 - x_1 \mapsto 3x_1 = x_0 \mapsto x_1 = \frac{x_0}{3}$

При $n=2$, $2x_2 = x_0 + x_1 - x_2 = x_0 + \frac{x_0}{3} - x_2 \mapsto 3x_2 = x_0 + \frac{x_0}{3}$

$3x_2 = \frac{4}{3}x_0$

$x_2 = \frac{4x_0}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}x_0$

+

При $n=3$ $2x_3 = x_0 + x_1 + x_2 - x_3 = x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4}{9}x_0 - x_3$

$3x_3 = x_0 + \frac{3x_0}{9} + \frac{4x_0}{9} = \frac{16x_0}{9}$

$x_3 = \frac{16x_0}{27}$

Заметим, что наблюдается геометрическая последовательность: $x_0, \frac{x_0}{3}, \frac{4}{9}x_0, \frac{16x_0}{27}, \dots$

Тогда каждый член x_n можно выразить в виде формулы: $\{ x_n = x_0 \cdot \frac{4^{n-1}}{3^n}$, $n \in N$?

Ответ: $x_n = x_0 \cdot \frac{4^{n-1}}{3^n}$, $n \in N$

№1.

−

Можно представить заводы в виде вершин, а маршруты в виде ребер, тогда получится граф. Из каждой вершины 4 ребра $\mapsto$ $150 \cdot 4 : 2 = 300$ пар заводов (т.к одно ребро для двух вершин) Ответ: 300

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N5

Обозначим 4 числа, о которых идёт речь, буквами a, b, c, d. По условию $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a+d}{b+c}=\frac{b+c}{a+d}=\frac{b+d}{a+c}=\frac{c+d}{a+b}=k$. С другой стороны, если $\frac{a+d}{b+c}=k$, то $\frac{b+c}{a+d}=\frac{1}{\frac{a+d}{b+c}}=\frac{1}{k}$. Значит, $k=\frac{1}{k}$ ($k\neq0$; это возможно, если все суммы чисел не равны 0), или $k^2=1$. Но $k\neq1$ (не все четыре числа одинаковы). Значит, $k=-1$. Зная значение k, выразим одну из переменных через остальные три (например, a через b, c и d): $\frac{a+b}{c+d}=-1$; $a+b=-c-d$; $a=-b-c-d$. Следовательно, четвёрки чисел, удовлетворяющих условию, можно задать так: одно из чисел — сумма трёх других, взятая с противоположным знаком, при этом 0 может встречаться не более одного раза (если два числа равны 0, то одна из сумм равна 0, и отношение другой суммы к сумме этих чисел нельзя составить). Пример такой четвёрки: −6; 1; 2; 3 ($\frac{-5}{5}=\frac{-4}{4}=\frac{-3}{3}=-1=\frac{3}{-3}=\frac{4}{-4}=\frac{5}{-5}$). С учётом условий, описанных выше, получаем, что можно подобрать любые b, c и d таким образом, что a будет иметь смысл и при этом максимум одна переменная равна 0. Сделать это можно бесконечно много раз (a, b, c и d могут быть ~~четвёркой~~ тройкой разными числами, условие не запрещает этого).
Ответ: k=−1; четвёрок бесконечно много.

+

N3

Пусть записаны числа a, b, c, k, m, n (пока не будем обращать внимание на то, что хотя бы одно из чисел равно 1). По условию $\frac{a+b+c+k+m+n}{6}=A$ и $\frac{a+b+c}{2}=\frac{b+c+k}{2}=\frac{c+k+m}{2}=\frac{k+m+n}{2}$. Пусть $\frac{a+b+c}{2}=F$. Тогда $a+b+c=2F$ и $\frac{k+m+n}{2}=F$, $k+m+n=2F$; $a+b+c+k+m+n=4F$; $\frac{4F}{6}=A$; $\frac{2F}{3}=A$; $F=\frac{3}{2}A$; $\frac{a+b+c}{2}=\frac{3}{2}A$; $a+b+c=3A$. Из равенства средних арифметических следует, что $a+b+c=b+c+k=c+k+m=k+m+n$, или $a=k$; $b=m$ и $c=n$. Теперь рассмотрим тройку чисел a, b, c (для других троек ~~сумма чисел, а значит, и~~ среднее геометрическое будет равно среднему геометрическому этой тройки чисел, например $\sqrt[3]{ckm}=\sqrt[3]{cab}$ и т.д.). Пусть a=1, и b=k. Тогда $c=3A-k-1$. Среднее геометрическое будет равно $\sqrt[3]{k(3A-k-1)}$. Пусть $3A-1=x$. Тогда подкоренное выражение $k(3A-k-1)=k(x-k)=kx-k^2=-(k^2-kx)=-(k^2-kx+\frac{1}{4}x^2)+\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}x^2-(k-\frac{1}{2}x)^2$ достигает максимума при $k-\frac{1}{2}x=0$, т.е. $k=\frac{x}{2}=\frac{3A-1}{2}$. Тогда $\sqrt[3]{k(3A-k-1)}$ максимально при $k=\frac{3A-1}{2}$ и равно $\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$.
Ответ: $\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$.

+

N2

Перепишем равенство из условия, перенеся $-x_n$ в левую часть: $3x_n=x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$. Тогда для n=1 $3x_1=x_0$; $x_1=\frac{x_0}{3}$; для n=2 $3x_2=x_0+x_1=x_0+\frac{x_0}{3}=\frac{4x_0}{3}$, $x_2=\frac{4x_0}{9}$; для n=3 $3x_3=x_0+x_1+x_2=\frac{4x_0}{3}+\frac{4x_0}{9}=\frac{16x_0}{9}$; $x_3=\frac{16x_0}{27}$. Но $x_1=\frac{x_0}{3}=\frac{1\cdot x_0}{3}=\frac{4^{1-1}\cdot x_0}{3^1}$; $x_2=\frac{4x_0}{9}=\frac{4^{2-1}\cdot x_0}{3^2}$. Следовательно, формула n члена может выглядеть как $x_n=x_0\cdot\frac{4^{n-1}}{3^n}$. Докажем это методом математической индукции. При n=1 формула верна: $x_1=x_0\cdot\frac{4^{1-1}}{3^1}=x_0\cdot\frac{4^0}{3^1}=x_0\cdot\frac{1}{3}=\frac{x_0}{3}$. Пусть эта формула верна для n=k: $x_k=x_0\cdot\frac{4^{k-1}}{3^k}$. Но тогда $x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}=3x_k=\frac{4^{k-1}}{3^{k-1}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$. Тогда для n=k+1 имеем: $3x_{k+1}=x_0+x_1+\ldots+x_{k-1}+x_k$; или $3x_{k+1}=\frac{4^{k-1}}{3^{k-1}}+\frac{4^{k-1}}{3^k}=\frac{4^{k-1}\cdot(3+1)}{3^k}=\frac{4^{k}}{3^k}=\left(\frac{4}{3}\right)^k$ и $x_{k+1}=\frac{4^k}{3^k\cdot3}=\frac{4^k}{3^{k+1}}=\frac{4^{k+1-1}}{3^{k+1}}$. Следовательно, формула n члена данной прогрессии действительно выглядит как $x_n=x_0\cdot\frac{4^{n-1}}{3^n}$.
Ответ: $x_n=x_0\cdot\frac{4^{n-1}}{3^n}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 010 70-29

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

+

Для начала рассмотрим 4 завода. Разобьём их на две пары и в каждой из них проложим дорогу между заводами (уже есть 2 дороги). Теперь добавим 5 завод. Исключая любой завод из выбираемой четвёрки, получим, что можно разбить оставшиеся 4 завода по парам так, что необходимо будет построить дороги только от 5 завода ко всем остальным (ещё 4 дороги), т. к. обязательно в четвёрке будут 2 завода, между которыми уже есть дорога. При добавлении 6 завода придётся исключать 2 завода и опять приходим к выводу, что необходимо построить дороги от 6 завода ко всем остальным. Аналогично, для каждого добавляемого завода должны существовать дороги ко всем остальным; для 7 - 6 новых дорог; для 8 - 7 новых дорог; ...; для 150 - 149 новых дорог. Следовательно, минимально можно построить $2+(4+5+6+\ldots+148+149)=2+153\cdot73=2+11169=11171$ дорогу. А значит, минимальное число пар - 11171.

Ответ: 11171.

№4

Для существования одного корня $g(x)$, т. е. единственного значения x, при котором $x^2+ax+b=0$, необходимо, чтобы $a^2-4b=0$ ($\cancel{b=\frac{a^2}{4}>0}$). Уравнение $g(x^5+2x-1)+$ $+g(x^5+3x+1)=0$ будет иметь один корень, если $g(x^5+2x-1)=g(x^5+3x+1)=0$ или $g(x^5+2x-1)=-g(x^5+3x+1)$. Первое уравнение требует, чтобы $x^5+2x-1=x^5+3x+1$, или $x=-2$. Значит, корень трёхчлена равен $(-2)^5+2\cdot(-2)-1=-32-4-1=-37$. Второе уравнение не имеет решений при $g(x^5+2x-1)>0$, т. к. по условию $g(x)\geq0$ при любых x, т. к. трёхчлен имеет один корень, а значит, $-g(x^5+3x+1)<0$ при любых x. Следовательно, если $x_0=-37$ - корень трёхчлена, то $-37=-\frac{a}{2}$, или $37=\frac{a}{2}$, или $a=74$. Отсюда $b=\frac{74^2}{4}=\frac{74^2}{2^2}=\left(\frac{74}{2}\right)^2=37^2=1369$.

+

Ответ: $a=74$; $b=1369$.

Задача №1.

Самый ~~хо~~ экономичный способ - сделать один центр и провести из него дороги в каждую из точек. (−)
Тогда соединены будут $150-1=149$ пар заводов.

Ответ: 149.

Задача №2.

$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$.

$2x_n = x_0+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}-x_n$, ~~отсю~~ отсюда найдем x_n:

$$x_n = \frac{x_0+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{3}.$$

Запишу первые 5 членов этой последовательности:

$x_1 = \frac{x_0}{3}$

$x_2 = \frac{4x_0}{9}$

$x_3 = \frac{16x_0}{27}$

$x_4 = \frac{64x_0}{81}$

$x_5 = \frac{256x_0}{243}$

нетрудно заметить (выскажу предположение): $\Rightarrow x_n = \frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^n}$ (+)

Применив метод мат. индукции можно доказать это предположение (к сожалению, у меня не хватит времени прописать все вычисления). ?

Ответ: $x_n = \frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^n}$, где x_0 - нулевой член ~~от~~ последовательности.

Задача №3.

Пусть эти числа - $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, тогда,

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_2+x_3+x_4}{3} \Rightarrow x_1 = x_4$.

$\frac{x_2+x_3+x_4}{3} = \frac{x_3+x_4+x_5}{3} \Rightarrow x_2 = x_5 \Rightarrow$

$\frac{x_3+x_4+x_5}{3} = \frac{x_4+x_5+x_6}{3} \Rightarrow x_3 = x_6$.

$\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_5 \\ x_3 = x_6 \end{cases}$ тогда, $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6} = A \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2(x_1+x_2+x_3)}{6} = A \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1+x_2+x_3 = 3A$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x_1+x_2+x_3=3A.$

и мы имеем вот такую последовательность:

$x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3.$ тогда среднее геометрическое трех соседних постоянно и равно $\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$, пусть $x_1=1$ (а вообще это может быть и x_2 и x_3), тогда,

$3A=x_2+x_3+1 \Rightarrow x_2+x_3=3A-1$

и ср.геом $=\sqrt[3]{1\cdot x_2\cdot x_3}=\sqrt[3]{x_2\cdot x_3}$

среднее геометрическое максимально, когда $x_2=x_3 \Rightarrow$ пусть $x_2=x_3=a$, где a - любое число, тогда,

$3A-1=2a$ и $a=\frac{3A-1}{2}$, тогда запишем среднее геометрическое:

ср. геом $=\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Ответ: максимальное среднее геометрическое $=\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

+

Задача №4.

$g(x)=x^2+ax+b$. если число x^2+ax+b имеет один корень, то его можно представить в виде квадрата: $g(x)=x^2+ax+b=(x+\sqrt{b})^2$, тогда, $(x+\sqrt{b})^2=x^2+2\sqrt{b}x+b$ и $x^2+2\sqrt{b}x+b=x^2+xa+b$, тогда, $2\sqrt{b}=a$

и его корень при $(x+\sqrt{b})^2=0$, $x=-\sqrt{b}$.

число является корнем многочлена

$g(x^5+3x+1)+g(x^5+2x-1)=0$, если ~~$g(x^5+3x+1)=0$ и $g(x^5+2x-1)=0$.~~

~~значит, $x^5+3x+1=x^5+2x-1 \Rightarrow x=-2$, корень =~~

$g(x^5+3x+1)=g(x^5+2x-1) \Rightarrow x^5+3x+1=x^5+2x-1 \Rightarrow x=-2$ - это корень, при этом он единственный, тогда,

$\begin{cases} x^5+3x+1=-\sqrt{b} \\ x^5+2x-1=-\sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow$ подставив x получаю, что $\sqrt{b}=37 \Rightarrow b=37^2$, тогда, $a=2\sqrt{b}=2\cdot 37. \Rightarrow$

$\Rightarrow b=1369,\ a=74.$

Ответ: $b=1369,\ a=74.$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GЮ 86-95

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5

пусть эти числа – x_1, x_2, x_3, x_4, тогда, по условию:

$\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4} = \frac{x_3+x_4}{x_1+x_2}$. Отсюда следует, что, либо $x_1+x_2 = x_3+x_4$,

либо $x_1+x_2 = -(x_3+x_4)$. ~~отсюд~~ поработаем с выражением

$x_1+x_2 = x_3+x_4$, и ~~про~~ приравняв также остальные выражения, получим: (соответственно $k=1$, поэтому опустим его).

$$\begin{cases} x_1+x_2 = x_3+x_4 \\ x_1+x_3 = x_2+x_4 \\ x_1+x_4 = x_2+x_3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

, значит, это не подходит, т.к. по условию, не все числа равны.

тогда, ~~не подх~~ $x_1+x_2 = -(x_3+x_4) \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_3+x_4} = k = -1 \Rightarrow k=-1$.

составим из этого систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2 = k(x_3+x_4) \\ x_1+x_3 = k(x_2+x_4) \\ x_1+x_4 = k(x_2+x_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2-x_3 = k(x_3-x_2) \\ x_3-x_4 = k(x_4-x_3) \\ x_2-x_4 = k(x_4-x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2(k+1) = x_3(k+1) \\ x_3(k+1) = x_4(k+1) \\ x_2(k+1) = x_4(k+1) \end{cases} \Rightarrow x_2 = x_3 = x_4,$$

обозначим x_2, x_3 и x_4 за b, тогда,

$x_2 = x_3 = x_4 = b$., тогда,

$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = -3b$.

наши числа принимают вид:

$b, b, b, -3b$.

пример такого числа – $1, 1, 1, -3$.

Ответ: $k = -1$.

пример числа: $1, 1, 1, -3$

~~такие чис~~ четверка таких чисел имеет вид:

3 равных ~~числ~~ числа и одно следующее, в -3 раза отличное от них

примеры: $b, b, b, -3b$; $-3b, b, b, b$; $b, -3b, b, b$; $b, b, -3b, b$). их можно составить бесконечно много при разных b.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ IO 27-94

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1.

$x, y \in N$

Пусть x – количество установок 1 типа. Тогда установок второго типа – $4x$, а третьего – xy.

$x+4x+xy \leq 200$

$5xy-99=4x$

$5xy-4x=99$

$x(5y-4)=99$

т.к. $x \in N$

$5y-4 \in N$

$99=3\cdot3\cdot11 \Rightarrow x\cdot(5y-4)=9\cdot11=3\cdot33$

Предположим, $x=3$; тогда $5y-4=33$

$5y=37$

$y \notin N$

Тогда пусть $x=9$; тогда $5y-4=11$

$5y=15$

$y=3$

по условию

$5x+xy \leq 200$

$5x+xy=45+27=72<200$

$5xy-99=4x$

$5(27)-99=135-99=36=9\cdot4=4x$

I тип – 9 уст.

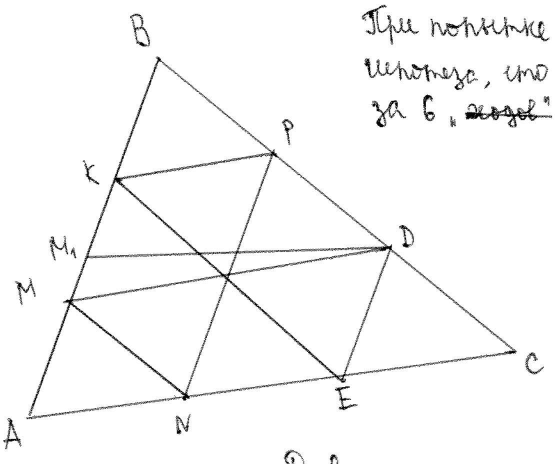
II тип. – 36 уст.

III тип. – 27 уст.

Ответ: 9; 36 и 27 установок.

+

Задание 2



При попытке найти „путь" точки M появилась гипотеза, что она возвратится в исходное положение за 6 „~~ходов~~" шагов.

Дано: $MN \parallel BC$ $NP \parallel AB$ $PK \parallel AC$ $KE \parallel BC$ $DE \parallel AB$

Д-ть: $DM \parallel AC$

Д-во:

Предположим противное: M не вернётся в исходное положение за 6 шагов. $DM \nparallel AC$

Тогда $DM_1 \parallel AC \Rightarrow$ ~~AM_1DC - трапеция~~. AM_1DE - параллелограмм

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle MBD$:

$$\left.\begin{array}{l} MD \parallel AC \Rightarrow \angle BMD = \angle BAC \text{ (н/у)} \\ MD \parallel AC \Rightarrow \angle BDM_1 = \angle BCA \text{ (н/у)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MBD$$

Ещё случай?

(±)

Рассмотрим $\triangle DEC$ и $\triangle ABC$:

$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel AB \Rightarrow \angle CDE = \angle CBA \text{ (н/у)} \\ \angle CED = \angle CAB \text{ (н/у)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle DEC \sim \triangle ABC$$

Рассмотрим $\triangle AMN$ и $\triangle ABC$:

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BC \Rightarrow \angle AMN = \angle ABC \text{ (н/у)} \\ \angle ANM = \angle ACD \text{ (н/у)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

$\Rightarrow \triangle DEC \sim \triangle AMN$

Рассмотрим $\triangle AKE$ и $\triangle ABC$:

$$\left.\begin{array}{l} KE \parallel BC \Rightarrow \angle AKE = \angle ABC \text{ (н/у)} \\ \angle AEK = \angle ACB \text{ (н/у)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AKE \sim \triangle ABC \Rightarrow$$

Рассмотрим $\triangle CPN$ и $\triangle ABC$:

$$\left.\begin{array}{l} NP \parallel AB \Rightarrow \angle CPN = \angle CBA \text{ (н/у)} \\ \angle CNP = \angle CAD \text{ (н/у)} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle CPN \sim \triangle ABC$$

$\Rightarrow \triangle AKE \sim \triangle CPN$

$\Rightarrow \triangle DEC \sim \triangle AMN \sim \triangle AKE \sim \triangle CPN \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{CN}{CE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AN+NE}{AN} = \frac{CE+NE}{CE} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + \frac{NE}{AN} = 1 + \frac{NE}{CE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{NE}{AN} = \frac{NE}{CE} \Rightarrow AN = CE \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AMN = \triangle CDE \Rightarrow AM = ED \Rightarrow$ ~~AMCD - трапеция~~ AMDE - параллелограмм $\Rightarrow$

$AM \parallel ED$

$\Rightarrow DE = AM$

$DE = AM_1$ - противоречие $\Rightarrow DM \parallel AC$

$DM_1 \parallel AE$

Ответ: верно; 6 шагов.

Задание 3.

$M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \dots a_{1001}\}$ $\quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1001} = x$

Попробуем заменить a_1. тогда $2(a_2 + a_3 + a_4 \dots + a_{1001}) = x$ $\Rightarrow a_1 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \dots + a_{1001}$

аналогично каждое число из 1001 равно сумме остальных 1000.

Значит все элементы равны нулю. а их произведение тоже ноль.

Ответ: 0.

Задание 4.

$x, y, z \neq 0$

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$$

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \frac{x}{y} + \frac{z}{y} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x}$$

Найдем сумму всех элементов:

$$\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ т.к. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

при $a; b > 0$

Значит сумма всех элементов ≥ 6. Они равны. Значит $\frac{x+y}{z} \geq 2$

I $\quad \frac{x+y}{z} = 2 \quad x = y = z$

II $\quad \frac{x+y}{z} > 2 \quad \frac{y+z}{x} > 2 \quad \frac{x+z}{y} > 2$

$x + y > 2z \quad y + z > 2x \quad x + z > 2y$

$$+\begin{array}{l} x + y > 2z \\ x + z > 2y \\ y + z > 2x \\ \hline 2y + 2x + 2z > 2y + 2x + 2z \end{array}$$

Это невозможно, т.к. $x, y, z \neq 0$

значит

Ответ: $\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{z+y}{x} = 2$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 5.

Рассмотрим 3 случая, где будут яблоки:

I 2я 1я ◡ ◡ $\xrightarrow{\text{замена}}$ 1я ◡ 1я 1я

II 1я 1я 1я ◡

III 3я ◡ ◡ ◡ $\xrightarrow{\text{замена}}$ ◡ 1я 1я 1я

Мы видим, что во всех случаях после замены остаются 3 вазы с разными фруктами.

Пусть ваза с одинаковыми фруктами – „правильная", а с разными – „неправильная"

У нас 13 апельсинов и 3 яблока. – нечётные число каждых

Чтобы все вазы были правильными кол-во фруктов должно быть кратно 4м.

II 1я 1я 1я ◡

При замене одной вазы кол-во правильных и неправильных не меняется, а кол-во яблок изменяется на 2 или 4 (остаётся нечётным)

При замене фруктов „по одному" кол-во яблок либо увеличивается на 4 (при замене апельсинов во всех вазах), либо уменьшается на 2 (при замене только яблок) – чётность не меняется.

При смешанной замене (неск. яблок и неск. апельсинов) происходит следующее.

◡ ◡ ◡ ◡ $\rightarrow$ 3а 1я: апельс. +4 −3+1 = 2; яблоки −1+3 = 2

$\rightarrow$ 2а 2я: апельс. −2+2 = 0; яблоки +2−2 = 0

$\rightarrow$ 1а 3я: апельс. −1+3 = 2; яблоки −3+1 = 2

} чётность не меняется.

+

Во всех возможных примерах чётность апельсинов и яблок не менялась.

Следовательно, Саша не могла получить одинаковые фрукты в каждой вазе.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

I типа - ?

II типа - ?, в 4 раза больше

III типа - ?, кратно числу I типа. При увеличении ~~на~~ в 5 раз, на 22 больше II типа.

Пусть I типа делали x установок, тогда II типа - 4x установок, а III типа будет $22+4x:5$.

Тогда:

$22+4x=5xy$

$22+4x-5xy=0$

$22+x(4-5y)=0$

1) При $y=1$, $x=22$

$22+x(4-5\cdot 1)=0$

~~0=0~~ $22-22=0$

$0=0$

+

Если $x=22$, то $4x=88$, а $22+4x:5=22$

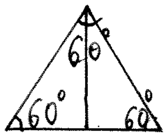
$22+88+22=132$

$132>100$

Ответ: I типа - 22, II типа - 88, III типа - 22

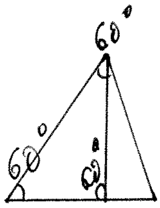
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2

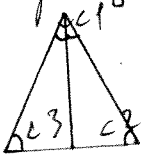


~~На~~ N не может быть равен 6, т.к. тогда это должны быть два равносторонних треугольника, а т.к. если это будут два равносторонних треугольника, то углы их будут равны 60°. Если у двух ~~б~~ крайних углов, $\angle = 60°$ => начальный треугольник тоже должен быть равносторонним, а т.к. один из его углов надо будет разделить => углы у 2-х получившихся треугольников $\neq 60°$.

(+)



N не может быть равен 5, т.к. если 5 из 6 углов, то один из треугольников равнобедренный, т.е. его углы по 60°, у 2 треугольника тогда 2 угла должны быть по 60°, а т.к. у треугольника сумма углов = 180°, то и третий угол должен быть = 60°, а мы уже доказали, что так невозможно.



А 4 угла может быть если у начального треугольника один угол в 2 раза больше двух других, т.е. $\angle 1 = 90°$, $\angle 2 = 45°$, $\angle 3 = 45°$. И тогда $\angle 1$ мы разделим пополам и 4 угла будут равны 45°.

Ответ: N = 4

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Пусть все числа одинаковые, тогда при замене одного из чисел ~~сумма~~ на сумму остальных, оно будет больше, ~~чем~~ (или меньше), чем было и произведение будет другим, но кроме 0.

Пусть числа разные, тогда будет число, которое больше остальных (x), если мы заменим любое другое число (y), но $y < x$, тогда при сумме число будет больше.

Тогда M может состоять только из 0.

$0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0 = 0$

Ответ: 0

+

№4

Если x, y и z принимают разное значение, то и отношения будут разные.

Тогда эти числа должны быть одинаковые, но $\neq 0$, т.к. на 0 делить нельзя => числитель будет в 2 раза больше знаменателя => отношения будут равны 2

Ответ: 2

∓

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JD 30-19

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

1) Если будут чередоваться: яблоко и мандарин, два мандарина, то в конце останется: 1 мандарин и одно яблоко, и тогда мама положит туда 1 мандарин, он и будет последним фруктом.

2) Если сначала будут брать по 2 мандарина, а когда останется один мандарин, будут брать по 2 яблока, пока не останется 1 яблоко, то в конце останется 1 мандарин и 1 яблоко и в конце положат 1 ~~ябл~~ мандарин.

(+)

1)

	манд.		яблоки
I.	13	и	1
II.	13	и	0
III.	11	и	1
IV	11	и	0
...			
	1	и	1

⇓

1 мандарин

2)

	манд.		ябл.
I	13	и	1
II.	11	и	2
III.	9	и	3
...			
	1	и	7
	1	и	4
	1	и	2
	1	и	1

⇓

1 мандарин

Ответ: мандарин

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$ используем одно из равенств:

$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y} \Rightarrow z(x+z)=y(x+y)$

$zx+z^2=yx+y^2$

$zx-yx=y^2-z^2$

$x(z-y)=(y-z)(y+z)$

$-x(y-z)=(y-z)(y+z)$ $(y-z)$ сокращается

$-x=y+z \Rightarrow \underline{x=-y-z}$ подставляем это равенство в отношения:

$\left.\begin{array}{l} \frac{-y-z+y}{z}=\frac{-\cancel{z}1}{\cancel{z}1}=-1 \\ \frac{-y-z+z}{y}=\frac{-\cancel{y}1}{\cancel{y}1}=-1 \\ \frac{\cancel{(y+z)}1}{-\cancel{(y+z)}1}=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ отношение $=-1$

$\Rightarrow z=1;\ y=1;\ x=-(y+z)=-2$

Ответ: отношение $=-1$; $z=1$; $y=1$; $x=-2$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

более 100

I – X

II – $4X$

III – $X(yX)$

$5yX$ на 22 больше $4X$

$X+4X+yX>100$

$5X+yX>100$

$X(5+y)>100$

$5yX-22=4X$

$5yX-4X=22$

$X(5y-4)=22$

$5y-4=\frac{22}{X}$

$110y-88=X$

Предположим, что $y=1$ => III = I, тогда:

$X(5-4)=22$

+

$X=22$, тогда $4X=88$, и $yX=22$

проверка: $110-22=88$

Ответ: I типа – 22, второго – 88, третьего – 22

№5

Так как у нас было 15 мандаринов, то в первый раз могли взять только 2 мандарина, => остаток 13М и 1Я. Далее есть множество способов решения:

$\overline{+}$

1) (13М + 1Я) − 2М + 1Я − 2М + 1Я − 2М + 1Я − 2М + 1Я − 2М + 1Я − 2М + 1Я = 1М + 1Я − 1М − 1Я = 1М

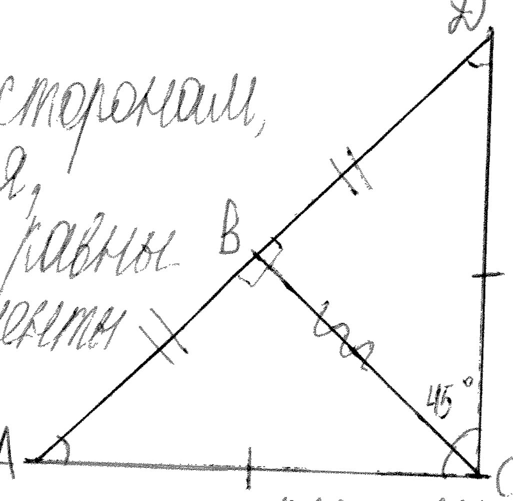
2) (13М + 1Я) − 1М − 1Я + 1М − 2М + 1Я − 1Я − 2М + 1Я − 1Я − 2М + 1Я − 1Я − 2М + 1Я − 1Я − 2М + 1Я − 1Я − 2М + 1Я = 1М + 1Я − 1М − 1Я = 1М

3) ~~(13М + 1Я) − 2М + 1Я − 2М − 1Я − 2М + 1Я − 1Я − 2М + 1Я − 1Я − 2М + 1Я − 1Я − 2М + 1Я − 1Я − 2М + 1Я = 1М + 2Я~~

и так далее.

Остался 1 мандарин в любом случае, т.к как бы мы не брали, в конце останется 1М и 1Я, т.к первоначальное кол-во мандаринов − 15, а яблок нет вообще.

№2



ΔABC = ΔBDC по трём сторонам, т.к AB = BD, BC − общая, AC = CD ⇒ у равных Δ равны соответствующие элементы ⇒ ∠BAC = ∠BDC и и ∠BCA = ∠DCB, а т.к эти Δ равнобедренные, то ∠BAC = ∠ACB = ∠DCB = = ∠CDB ⇒ 4 равных угла

±

II вариант

Доп. лист 1.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JD 30-62

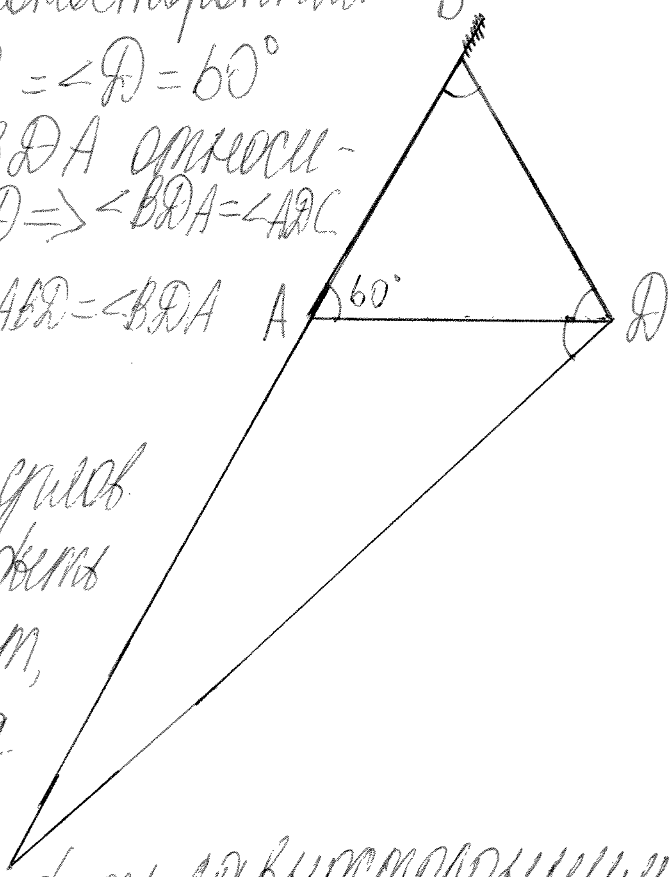
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\triangle ABD$ равносторонний

$\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle D = 60^\circ$

$\angle ADC = \angle BDA$ относительно $AD \Rightarrow \angle BDA = \angle ADC$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle ABD = \angle BDA = \angle ADC$



5 равных углов и более быть не может, т.к. тогда два $\triangle$ должны быть равносторонними, а это невозможно (см. рисунок 3):

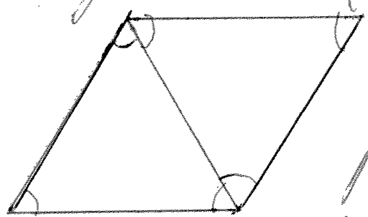


рисунок 3

Ответ: ?

№3

Пусть сумма 99 чисел — n, тогда сумма $98 = n - x$, где x — любое число данного множества. Тогда из условия новая сумма 99 чисел $= (n-x)+(n-x) = 2(n-x) = 2n-2x$, составляем уравнение:

Доп. лист 2

$2n-2x=n$

$2n-n=2x$

$n=2x$ – противоречие, т.к. сумма всех чисел данного множества не может равняться любому удвоенному числу этого множества.

Следовательно, это пустое множество, или множество, состоящее из 0.

Ответ: такого множества нет.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JD 30-95

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть I типа - x шт, II - y шт, III - z шт, тогда $x=\frac{y}{4}$, $5z=y+22$, $\frac{z}{x}\in N$.

Если $5z=y+22$, то $z=\frac{y+22}{5} \Rightarrow y=5z-22 \Rightarrow x=\frac{5z-22}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y+z=\frac{5z-22}{4}+5z-22+z>100$

$5z-22+20z-88+4z>400$

$29z-110>400$

$29z>510$

(+)

$29z$ может быть равным $522 \Rightarrow z=18$, $y=5\cdot18-22=68$,

$68+18=86 \Rightarrow$ число, которому кратно 18, должно быть не меньше 14 $\Rightarrow$

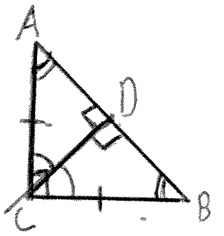
$\Rightarrow x=18$

Ответ: I типа — 18 шт

II типа - 68 шт

III типа - 18 шт

№2



$AC=\cancel{AB}=CB$

(±)

$\angle ACB=90^\circ$

$\angle CAB=\angle CBA=45^\circ$

$\angle ACD=\angle BCD=45^\circ$, т.к. CD - биссектриса $\angle ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACD=\angle BCD=\angle CAD=\angle CBD=45^\circ \Rightarrow$ 4 равных угла.

6 равных углов быть не может, т.к. тогда все углы будут по 60°, а чтобы образовать 1 треугольник, нужно чтобы один угол одного Δ + + один угол другого $\Delta=180^\circ$, а $60+60=120^\circ$

$n=5$ - ?

Ответ: 4.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JD 30-95

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Множество M состоит из 99 нулей, т.к. в ином случае условие выполнятся не будет => произведение элементов = 0

Ответ: 0

−/+

№4

$$x = \frac{y+z}{\frac{x+z}{y}} = \frac{y^2+z}{x+z}$$

$$z = \frac{x+y}{\frac{x+z}{y}} = \frac{x+y^2}{x+z}$$

$y^2 + z = x^2 + z$

$y^2 = x^2$

$y = x$

$x + y^2 = x + z^2$

$y^2 = z^2$

$y = z = x$

−/+

Если $x=y=z$, то возьмём их как a, тогда $\frac{2a}{a} = 2$

Ответ: 2.

№5

+

Мандаринов всегда нечётное кол-во, т.к. их изначально 15, и их кол-во всегда уменьшается на 2 (тогда чётность не изменился) или не изменяется. Ближе к концу останется 1 мандарин и несколько яблок. Тогда будет уменьшаться только кол-во яблок на 1, и в конце останется 1 мандарин.

Ответ: мандарин

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. сразу можно сказать, что каждый завод должен быть связан как минимум с 142 другими заводами, потому что если он не будет связан с $(n \geq 3)$ заводами, то можно будет составить четверку из ~~этих~~ 3 таких заводов и нашего. и тогда наш завод ни ~~с~~ с кем не связан и значит условие не выполнится.

ещё для того чтобы условие выполнялось не должно быть так:

(+)

например:

1 не связан с 2 и 3

2 не связан с 1 и 3

3 не связан с 2 и 1

тогда условие не будет выполнятся

нам ~~над~~ надо найти минимальное кол-во дорог => нам нужно использовать наилучший вариант когда такого не случается

например:

1 не связан с 150 и 2

2 не связан с 1 и 3

3 не связан с 2 и 4

. . . .

150 не связан с 149 и 1

и тогда кол-во дорог будет $\frac{147 \cdot 150}{2} = 11025$

Ответ: минимально 11025 пар заводов связанных дорогой.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. $2x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_n$

$$\left.\begin{aligned} 3x_n &= x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \\ 3x_{n-1} &= x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3x_n = 3x_{n-1} + x_{n-1}$$

$x_n = \frac{4}{3} x_{n-1}$ для $n > 1$

(+)

$3x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} x_0$

Значит эта последовательность $(x_1; x_2; x_3 \ldots x_n \ldots)$ является геометрической прогрессией

где $b_1 = x_1 = \frac{1}{3} x_0$

$q = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow x_n = \frac{1}{3} x_0 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{3} x_0 \cdot \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{4^{n-1}}{3^n} \cdot x_0$

Ответ: $x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n} x_0$ (для $n = 1, 2, \ldots$)

3. $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} \Rightarrow x_1 = x_4$

(+)

$\frac{x_2 + x_3 + x_4}{3} = \frac{x_3 + x_4 + x_5}{3} \Rightarrow x_2 = x_5$

$\frac{x_3 + x_4 + x_5}{3} = \frac{x_4 + x_5 + x_6}{3} \Rightarrow x_3 = x_6$

последовательность будет такой: $x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3$

какие бы мы не выбрали 3 подряд идущих числа

это будет числа x_1, x_2, x_3

и тогда среднее геометрическое всегда равно

$\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$ одно из этих чисел равно 1 и не важно какое тогда:

$\sqrt[3]{1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \sqrt[3]{x_2 \cdot x_3}$

еще мы знаем, что $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6} = A$

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = A \Rightarrow 1 + x_2 + x_3 = 3A \Rightarrow x_2 = (3A-1) - x_3$

$\sqrt[3]{x_2 \cdot x_3} = \sqrt[3]{((3A-1)-x_3) \cdot x_3} = \sqrt[3]{-x_3^2 + (3A-1) \cdot x_3}$

максимальное значение будет когда $-x_3^2 + (3A-1) \cdot x_3$ будет максимально

Это парабола, ветви вниз $\Rightarrow$ макс. значение в вершине

$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-(3A-1)}{-2} = \frac{3A-1}{2}$

$-\frac{(3A-1)^2}{4} + \frac{(3A+1)^2}{2} = \frac{(3A-1)^2}{4} = \frac{9A^2-6A+1}{4}$

и тогда максимальное среднее геометрическое будет равно $\sqrt[3]{\frac{9A^2-6A+1}{4}}$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{9A^2-6A+1}{4}}$

5. всегда будет выполнятся:

$$\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4}=\frac{x_3+x_4}{x_1+x_2} \Rightarrow (x_1+x_2)^2=(x_3+x_4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1+x_2)=\pm(x_3+x_4) \text{ и аналогично} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(x_1+x_3)=\pm(x_2+x_4)\\ (x_1+x_4)=\pm(x_2+x_3)\end{cases}$$

если $x_1+x_2=x_3+x_4$ то: $x_1-x_4=x_3-x_2$

тогда если $x_1+x_3=x_2+x_4$ то: $x_1-x_4=x_2-x_3$ $\Rightarrow x_3-x_2=x_2-x_3$ и $\boxed{x_2=x_3 \Rightarrow x_1=x_4 \text{ и } x_1=x_2}$

и тогда $x_1=x_2=x_3=x_4$ – не подходит под условие

а если $x_1+x_3=-(x_2+x_4) \Rightarrow x_1+x_2=-(x_3+x_4) \Rightarrow x_3+x_4=-(x_3+x_4)$

$\Rightarrow x_3+x_4=0$, что невозможно, потому что тогда $\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4}=\frac{x_1+x_2}{0}$ не будет $=K$ в любом случае

значит $x_1+x_2\neq x_3+x_4$ и тогда значит

$x_1+x_2=-(x_3+x_4) \Rightarrow x_1+x_3=-(x_2+x_4) \Rightarrow x_1+x_4=-(x_2+x_3)$

~~если x_1+x_3~~ значит все остальные соотношения выходят из первого: $x_1+x_2=-(x_3+x_4)$ т.е. если это будет выполнятся ~~то~~ и все остальные будут выполнятся

$K=\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4}=\frac{-(x_3+x_4)}{x_3+x_4}=-1$ и какие мы бы пары не взяли $\underline{K=-1}$ будет всегда

Подходят все числа которые удовлетворяют $(x_1+x_2)=-(x_3+x_4)$ ~~например~~ (кроме тех в которых можно найти пару противоположных чисел) например: 5 7 13 -25

$5+7=-(13-25)=+12$

таких четверок бесконечно много

+

4. $g(x)=x^2+ax+b$ — парабола ветви вверх

если $g(x)$ имеет 1 корень $\Rightarrow$ вершина параболы находится на оси Ox и $\Rightarrow$ $g(x)\geq 0$ при любых x

$g(x^5+2x-1)+g(x^5+3x+1)=0$ ~~их~~ имеет корень

$g(x^5+2x-1)\geq 0$ и $g(x^5+3x+1)\geq 0$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} g(x^5+2x-1)=0 \\ g(x^5+3x+1)=0 \end{cases}$$

$x^2+ax+b=0$ имеет 1 корень $\Rightarrow D=0$ $a^2=4b$ $\Rightarrow a=2\sqrt{b}$

$x^2+2\sqrt{b}+b=\underline{(x+\sqrt{b})^2=0}$ $\Rightarrow x=-\sqrt{b}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^5+2x-1=-\sqrt{b} \\ x^5+3x+1=-\sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

$(-2)^5+2\cdot(-2)-1=-32-4-1=-37$

$-37=-\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{b}=37 \Rightarrow b=37^2=1369$

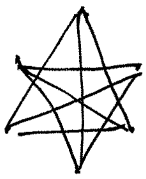
$a^2=4b=4\cdot 37^2 \Rightarrow a=2\cdot 37=74$

Ответ: $a=74$, $b=1369$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Наименьшее число пар, если каждый завод соединён со всеми заводами кроме 2-х, тогда для любых четырёх заводов будут 2 такие пары, между которыми будет ходить автобус. Для удобства расположим их по кругу у соседних заводов не будем делать ~~зарош~~ маршруты.



n - заводов

$\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ - маршрутов ?

$\pm$ Почему не м.б. меньше?

Отв. Не обоснован

$\frac{150\cdot147}{2}=\frac{300\cdot147}{4}=\frac{44100}{4}=11025$

Ответ: 11026.

$\mp$

№2.

$X_0, X_1, X_2 \dots, X_n, X_{n+1}\dots$

$+$

$2X_n = X_0+X_1+\dots+X_{n-1}-X_n$

$3X_n = X_0+X_1+\dots+X_{n-1}$ $\quad X_n=\frac{X_0+X_1+X_2+\dots+X_{n-1}}{3}$

$X_0,\ \frac{X_0}{3},\ \frac{X_0}{3}+\frac{X_0}{9},\ \frac{X_0}{3}+\frac{2X_0}{9}+\frac{X_0}{27},\ \frac{X_0}{3}+\frac{3X_0}{9}+\frac{3X_0}{27}+\frac{X_0}{81},$

$\frac{X_0}{3}+\frac{4X_0}{9}+\frac{6X_0}{27}+\frac{4X_0}{81}+\frac{X_0}{3^5}$

$\frac{1}{3}: 1,1,1,1,1\dots \quad \frac{1}{9}: 1,2,3,4,\dots \quad \frac{1}{27}: 1,3,6\dots$

$\frac{1}{81}: 1,4$

$1,2,1;\ 1,3,3,1;\ 1,4,6,4,1;\ \dots$

$\frac{X_0}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{X_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ____________

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭМ 33-42 ДИ-НО-05

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{x_0}{3}\left(1+\dots+\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\right)=\frac{x_0}{3}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n-1}{\frac{4}{3}-1}=x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n-1\right)$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n=\frac{1+\dots+\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}{3}+1 \qquad \left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot x_0=x_0\frac{1+\dots+\left(\frac{4}{3}\right)^n}{3}+x_0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ n-ый член последовательности

$$\frac{x_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Ответ: $x_n=\frac{x_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

№3

(a) (b) (c) (a) (b) (c)

3 соседних - одинак. ср. арифм. $\Rightarrow$ у каждых 3-х соседних одинаковая сумма., если первые 3 - a, b, c, то вторые - также a, b, c. $(a+b+c=b+c+a)$

У любых 3-х соседних чисел одинаковое ср. геом. сумма 3-х $=3A$. допустим $a=1\Rightarrow$

$\Rightarrow b+c=3A-1$ для равных b и c - максимальное значение. $b=c=\frac{3A-1}{2}$

ср. геом. $=\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}=\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$ +

№4

$g(x)=x^2+ax+b$ ~~=0~~ 1 корень $\Rightarrow x^2+ax+b=0$

$a^2=4b \quad b=\frac{a^2}{4} \quad \cancel{x^2+a} \quad \left(x+\frac{a}{2}\right)^2=0$

$g(x)=x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 \qquad x=-\frac{a}{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$9(x^5+2x-1)+9(x^5+3x+1)=0$ 1 корень

это сумма квадратов => каждый равен 0

$\Rightarrow x^5+2x-1=-\frac{9}{2}$, $x^5+3x+1=-\frac{9}{2}$

$x=-2$ $\cancel{-2=-\frac{9}{2}}$ $-32\cancel{+}4-1=-\frac{9}{2}$

$a=64+8+2=64+10=74$

$b=\frac{a^2}{4}=\left(\frac{a}{2}\right)^2=37^2=1369$

Ответ: $a=74$, $b=1369$ +

№5

~~a+~~ a, b, c, d – числа

$\frac{a+b}{c+d}=k=\frac{c+d}{a+b}$ $(a+b)^2=(c+d)^2$

$\left.\begin{array}{l}a+b=c+d\\ a+c=b+b\\ a+b=b+c\end{array}\right\}$ $a=b=c=d$ – не подходит

$a+b=-c-d \Rightarrow a+b+c=-d$

$\left.\begin{array}{l}a+c=-b-d\\ a+d=-b-c\end{array}\right\}$ для любых

a, b, c – любые $d=-a-b-c$, $d+a\neq0$, $d+b\neq0$, $d+c\neq0$.

(2, 5, 4, –11) например

Ответ: a, b, c – любые, $d=-(a+b+c)$, $d+a\neq0$, $d+b\neq0$, $d+c\neq0$, таких четвёрок бесконечное кол-во

±

k = ?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ LE 84-95

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. Т.к. квадратный трехчлен $g(x)$ имеет ровно один корень, то его можно представить как $(x-k)^2$ ~~(т.к. уравнение $(x-k)^2=0$ имеет один корень)~~

Тогда $(x-k)^2 = x^2+ax+b$

$x^2-2kx+k^2 = x^2+ax+b$

$a=-2k$; $k=-\frac{a}{2}$

$b=k^2$

(+)

Пусть $(x^5+2x-1)=y$ Тогда $g(y)=(y-k)^2=(x^5+2x-1-k)^2 = (x^5+2x-1+\frac{a}{2})^2$

$(x^5+3x+1)=z$, тогда $g(z)=(z-k)^2 = (x^5+3x+1+\frac{a}{2})^2$

Тогда $g(x^5+2x-1)+g(x^5+3x+1) = (x^5+2x-1+\frac{a}{2})^2 + (x^5+3x+1+\frac{a}{2})^2$

Найдем его корни

$(x^5+2x-1+\frac{a}{2})^2 + (x^5+3x+1+\frac{a}{2})^2 = 0$

$\begin{cases}(x^5+2x-1+\frac{a}{2})^2=0\\(x^5+3x+1+\frac{a}{2})^2=0\end{cases}$ $\begin{cases}x^5+2x-1+\frac{a}{2}=0\\x^5+3x+1+\frac{a}{2}=0\end{cases}$ $\begin{cases}x^5+2x-1=-\frac{a}{2}\\x^5+3x+1=-\frac{a}{2}\end{cases}$

$\begin{cases}x^5+2x-1=-\frac{a}{2}\\x^5+2x-1=x^5+3x+1\end{cases}$ $\begin{cases}x^5+2x-1=-\frac{a}{2}\\x=-2\end{cases}$ $\begin{cases}-32-4-1=-\frac{a}{2}\\x=-2\end{cases}$

$\begin{cases}a=74\\x=-2\end{cases}$

У многочлена получился ровно один корень. Это удовлетворяет условию

$k=-\frac{a}{2}=-37$

$b=k^2=(-37)^2=1369$

Ответ: $a=74$, $b=1369$

2. $2x_n = x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}-x_n$

(+)

$3x_n = x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$

Тогда

$3x_1=x_0$

$3x_2=x_0+x_1$

$3x_3=x_0+x_1+x_2$

и т.д.

Значит, $3x_n-3x_{n-1}=x_0+x_1+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}-(x_0+x_1+\ldots+x_{n-2})=x_{n-1}$

$3x_n=4x_{n-1}$

$x_n=\frac{4}{3}x_{n-1}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ LE 84-95

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Итак, последовательность представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{4}{3}$, начиная с x_1, а первые два члена — x_0 и x_1 — равны. (Если они равны нулю, последовательность представляет собой стационарную последовательность из нулей). Тогда запишем формулу n-го члена: $x_n = x_1\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, $x_0 = x_1$

Ответ: $x_0 = x_1$, $x_n = x_1\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

3. Пусть a, b, c, d, e, f (в этом порядке) — данные числа. Тогда $\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3}$

$\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3}$

$\frac{a}{3} + \frac{b+c}{3} = \frac{d}{3} + \frac{b+c}{3} \Rightarrow a = d$

7+

Аналогично, $b = e$, $c = f$.

Тогда $\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = \frac{2a+2b+2c}{6} = A = \frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3}$

По неравенству Коши для трех чисел,

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$

$A \geq \sqrt[3]{abc}$, где $\sqrt[3]{abc}$ — среднее геометрическое чисел a, b и c.

Аналогично, $A \geq \sqrt[3]{bcd}$, $A \geq \sqrt[3]{cde}$, $A \geq \sqrt[3]{def}$

Тогда наибольшее значение среднего геометрического трех соседних чисел равно A. ~~Приведем пример.~~

~~Т.к. числа a и d, b и e, c и f попарно равные, то либо $a = d = 1$, либо $b = e = 1$, либо $c = f = 1$, значит любое из выражений $\frac{a+b+c}{3}$, $\frac{b+c+d}{3}$, $\frac{c+d+e}{3}$, $\frac{d+e+f}{3}$ можно представить~~ не зачеркнуто в любом одно из чисел точно равно

единице. Тогда ~~и из эт~~ ~~любое~~ из них можно предста-
вить как $\frac{x+y+1}{3}$. Аналогично, любое из выражений — не зачеркнуто

$\sqrt[3]{abc}$, $\sqrt[3]{bcd}$, $\sqrt[3]{def}$, $\sqrt[3]{cde}$ можно представить

~~Пусть все числа равны 1, тогда~~

~~$\frac{1+1+1}{3} = \sqrt{1\cdot1\cdot1}$ - верное~~

как $\sqrt[3]{xy}$. ~~Запишем уравнение:~~

$\frac{x+y+1}{3} = \sqrt[3]{xy}$

$(x+y+1)^3 = 27xy$

$(x+y+1)(x+y+1)(x+y+1) = 27xy$

$(x^2+y^2+1+2x+2y+2xy)(x+y+1) = 27xy$

$x^3+x^2y+x^2+xy^2+y^3+y^2+x+y+1+2x^2+2xy+2x+2xy+2y^2+2y+$

$+2x^2y+2xy^2+2xy = 27xy$

$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2+6xy+3x^2+3y^2+3x+3y = 27xy$

~~$(x+y)^3+3(x+y)^2+3(x+y)(xy)=0$~~

$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2+3x^2+3y^2-21xy+3x+3y=0$

Ответ: A

5. ~~По у~~ Пусть a, b, c и d - данные числа.

Тогда по условию, $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a+d}{b+c} = \frac{c+d}{a+b} = \frac{b+d}{a+c} =$

$= \frac{b+c}{a+d} = k$

Т.к. $\frac{a+b}{c+d} = \frac{c+d}{a+b} = k$,

то $(c+d)^2 = (a+b)^2$

$\left[\begin{array}{l} c+d = a+b \\ c+d = -(a+b) \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{c+d}{a+b} = 1 \\ \frac{c+d}{a+b} = -1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -1 \end{array}\right.$

Пусть $k = 1$, тогда

$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a+d}{b+c} = 1$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\begin{cases} a+b=c+d \\ a+c=b+d \\ a+d=b+c \end{cases}$ $\begin{cases} 2a+b+c=2d+b+c \\ a+b=c+d \\ a+d=b+c \end{cases}$ $\begin{cases} a=d \\ a+b=c+d \\ 2a+b+d=2c+b+d \end{cases}$

$\begin{cases} a=d \\ a=c \\ a+b=c+d \end{cases}$ $\begin{cases} a=d \\ a=c \\ a=b \end{cases}$. Но не все из чисел одинаковы, значит, $k=-1$ Тогда

$\begin{cases} a+b=-c-d \\ a+c=-b-d \\ a+d=-b-c \end{cases}$ $\begin{cases} b-c=-b+c \\ a+b=-c-d \\ a+d=-b-c \end{cases}$

$\begin{cases} b=-c \\ b-d=-d+b \\ a+d=b+c \end{cases}$ $\begin{cases} b=-c \\ b=-d \\ a-b=b-b \end{cases}$ $\begin{cases} b=-c \\ b=-d \\ a=b \end{cases}$

не бьёт сч.

V

Тогда это числа вида: $a, a, -a, -a$. Например, $1, 1, -1, +1$

~~Ответ:~~ Ответ: $k=-1$

$\pm$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 2E 26-18

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Требуется найти наим. число пар заводов, соединенных автобусным маршрутом, это все равно, что найти наим. кол-во автобусных маршрутов ~~(дорог)~~.

Их $149+148+147+\ldots+1=\frac{149+1}{2}\cdot 149=75\cdot 149=11175$

Докажем, что это наим. число

Предположим противное, что число маршрутов ~~дорог~~ меньше 11175, пусть их 11174.

Тогда обозначим заводы ~~цис~~ номерами (от 1 до 150), тогда, когда дорог было 11175, каждый завод соединялся маршрутом с каждым из остальных и условие выполнялось.

Теперь, пусть 1 завод не имеет маршрута с 150 заводом, тогда если мы возьмем четыре завода (1, 150, 2, 3), то заметим, что 2 и 3 имеют маршрут, тогда т. к. по условию задачи любые четыре завода можно

№2

X_0

$2X_1=X_0-X_1$

$3X_1=X_0$

$\boxed{X_1=\frac{1}{3}X_0}$

+

$2X_2=X_0+X_1-X_2$

$3X_2=X_0+\frac{1}{3}X_0$

$\boxed{X_2=\frac{4}{9}X_0}$

$3X_3=X_0+X_1+X_2=X_0+\frac{1}{3}X_0+\frac{4}{9}X_0=\frac{16}{9}X_0$

$\boxed{X_3=\frac{16}{9}X_0}$

$\boxed{X_4=\frac{64}{81}X_0}$

$X_n=\frac{4^{n-1}}{3^n}X_0$ — т. е. задавая первый член числовой последовательности (X_0), мы можем найти каждый член последовательности

Ответ: $X_n=\frac{4^{n-1}}{3^n}X_0$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ LE 86-18

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

Пусть это числа a, b, c, d, e, f, по условию:

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{b+c+d}{3}=\frac{c+d+e}{3}=\frac{d+e+f}{3} \quad (1)$$

(+)

$$\frac{a+b+c+d+e+f}{6}=A \quad (2)$$

из (1) $\begin{cases} a+b+c=b+c+d \\ b+c+d=c+d+e \\ c+d+e=d+e+f \end{cases}$ $\begin{cases} a=d \\ b=e \\ c=f \end{cases}$ I

из (2) $a+b+c+d+e+f=6A$ используя систему I:

$2a+2b+2c=6A$

$a+b+c=3A=b+c+d=c+d+e=d+e+f$

1) $a=1$

$\Rightarrow d=1$

$b+c=3A-1$

$c=3A-b-1$, т.к. $c=f$, $f=3A-b-1$

~~$3A-b-1+1+e=3A$ (т.к. $c+d+e=3A$)~~

~~$e=b$ (т.к.~~

2) $\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{1\cdot b\cdot(3A-b-1)}=\sqrt[3]{-b^2+3Ab-b}=\sqrt[3]{-b^2+(3A-1)b}$ – это число будет максимально,

~~3) $\sqrt[3]{bcd}=\sqrt[3]{b(3A-b-1)\cdot 1}$~~ тогда когда $-b^2+(3A-1)b$ – макс.

$f(b)=-b^2+(3A-1)b$ – парабола с ветвями вниз

$\Rightarrow$ своё наибольшее значение принимает в вершине

$b_в.=\frac{-3A+1}{-2}=\cancel{1-3}\frac{3A-1}{2}$

$$f\left(\frac{3A-1}{2}\right)=-\frac{(3A-1)^2}{4}+\frac{(3A-1)^2}{2}=\frac{-(3A-1)^2+2(3A-1)^2}{4}=\frac{(3A-1)^2}{4}=\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2$$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}=\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{bcd}=\sqrt[3]{cde}=\sqrt[3]{def}$$

Случаи, где $b=1$ или $c=1$ полностью аналогичны

Ответ: $\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Пусть это числа a, b, c, d, по условию:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = k \ (1) \\ \frac{a+c}{b+d} = k \ (2) \\ \frac{a+d}{b+c} = k \ (3) \\ \frac{c+d}{a+b} = k \ (4) \\ \frac{c+b}{a+d} = k \ (5) \\ \frac{b+d}{a+c} = k \ (6) \end{cases}$$

Из (1) и (4): $\frac{a+b}{c+d} = \frac{c+d}{a+b} = k$, т. е. $(a+b)^2 = (c+d)^2$
и $a+b = k(c+d)$
$\Rightarrow (a+b)^2 = k^2(c+d)^2$

Получается $k^2(c+d)^2 = (c+d)^2$
$(c+d)^2(k^2-1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} c=-d \ \text{III} \\ k=1 \ \text{I} \\ k=-1 \ \text{II} \end{array}\right.$$

I $k=1$

$$\begin{cases} a+b = c+d \\ a+c = b+d \\ a+d = b+c \\ \dots \end{cases}$$

~~$3a = b+c+d$~~ ~~Например, $a=b=2$~~ ~~$k \neq 1$~~ ~~$b \neq 3$~~

Тогда $a=b=c=d$, что противоречит условию

II $k=-1$

$$\begin{cases} a+b = -c-d \\ a+c = -b-d \\ a+d = -b-c \\ c+d = -a-b \\ c+b = -a-d \\ b+d = -a-c \end{cases}$$

$a+b+c+d=0$

Случай возможен, например, если $a=2, b=3, c=-1, d=-4$

III $c=-d$

Случай не возможен, т. к. $\begin{cases} c+d \neq 0 \\ b+d \neq 0 \\ b+c \neq 0 \\ a+b \neq 0 \\ a+d \neq 0 \\ a+c \neq 0. \end{cases}$

+

Тогда $k=-1$ $(2,3,-1,-4)$

Ответ: $k=-1$; $(2;3;-1;-4)$; $\begin{cases} a+c = -b-d \\ a+b = -c-d \\ a+d = -b-c \\ c+d = -a-b \\ c+b = -a-d \\ b+d = -a-c \end{cases}$; —

↓

общий вид?

№1

$g(x)=x^2+ax+b$

$D=a^2-4b$ (1)

$a^2-4b=0$ т.к. один корень

(–)

Пусть $x^5+2x-1=k$, $x^5+3x+1=t$, значит $k+t=2x^5+5x$, тогда

$g(x^5+2x-1)+g(x^5+3x+1)=k^2+t^2+ak+at+2b$ ⊜

$k^2+t^2=(k+t)^2-2kt$

⊜ $(k+t)^2-2kt+(k+t)a+2b$

$(k+t)^2-(k+t)a+2b-2kt=0$

$D=a^2-4(2b-2kt)=a^2-8b+8kt \overset{\text{из (1)}}{=} -4b+8kt$

$8kt-4b=0$

$2kt=b$

Тогда $b=2(x^5+2x-1)(x^5+3x+1)$

$a=\sqrt{8(x^5+2x-1)(x^5+3x+1)}$

Ответ: $b=2(x^5+2x-1)(x^5+3x+1)$

$a=\sqrt{8(x^5+2x-1)(x^5+3x+1)}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NE 86-24

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2 $x_0, x_1, \dots x_n, x_{n+1}, \dots$

$2x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n$, при всех $n = 1, 2, \dots$

$3x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}$, тогда для $n+1$-го члена:

$3x_{n+1} = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n$

+

$3 \cdot (x_{n+1} - x_n) = x_n$

$3x_{n+1} = 4x_n \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4}{3} = q$ то есть $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$ (т.к. $n \geq 1$)

$2x_1 = x_0 - x_1$

$x_0 = 3x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3}$

Последовательность будет:

$x_0, \frac{x_0}{3}, \frac{4}{9}x_0, \dots, \frac{4^{n-1}}{3^n}x_0$.

№ 3 Пусть a, b, c, d, e, f – 6 данных чисел, тогда

$\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3}$, т.е. $a+b+c = b+c+d = c+d+e = d+e+f$

пусть $S = a+b+c$.

а так же:

$\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = A$, т.е. $a+b+c+d+e+f = 6A$

+

$a+b+c + e+d+f = a+b+c+a+b+c \Rightarrow 2 \cdot (a+b+c) = 6A$

$a+b+c = 3A$

$S = a+b+c = 3A$

Пусть $a = 1$, тогда $b+c = 3A-1 \Rightarrow d = 3A - b+c = 1 \Rightarrow e+f = 3A$. $f = 3A-1$.

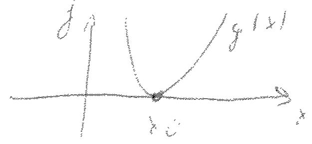
$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$ по аналогии с ост. тройками $\Rightarrow$ макс. значение среднего геом. между 3х соседних в ряду чисел будет равно: $\frac{S}{3}$? V

то есть $\frac{3A}{3} = A$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4. $g(x)=x^2+ax+b$. имеет 1 корень, т.к. функция касается оси Ox в вершине:

$D=a^2-4b=0$



$x_0=\frac{-a}{2}$, тогда

+

$g(x)=(x-x_0)^2$

$g(x)=(x+\frac{a}{2})^2$

$f(x)=g(x^5+2x-1)+g(x^5+3x+1)$ имеет 1 корень

$f(x)=0$ когда $g(x^5+2x-1)+g(x^5+3x+1)=0$

$(x^5+2x-1+\frac{a}{2})^2+(x^5+3x+1+\frac{a}{2})^2=0$ тогда и только тогда, когда

$\begin{cases} x^5+2x-1+\frac{a}{2}=0 \\ x^5+3x+1+\frac{a}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x^5+2x-1+\frac{a}{2}=0 \end{cases} \begin{cases} x=-2 \\ \frac{a}{2}=1+4+32 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-2 \\ \frac{a}{2}=37 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ a=74 \end{cases}$

~~$a^2-4b=0$~~

~~$a^2-4\cdot 74a=0$~~

~~$\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=296 \end{array}\right.$~~

~~$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=296 \end{array}\right. \\ b=74\cdot a \end{cases}$~~

~~$a=0$ $b=0$~~

$a^2-4b=0$

$b=\frac{a^2}{4}$ $b=\frac{(37\cdot 2)^2}{4}$ $b=37^2$ $b=1369$

Ответ: $a=74$ $b=169$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5. Пусть a, b, c, d — 4 числа, удовлетворяющих условию задачи, тогда $k=\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b}$. Два обратных числа равны друг другу => они равны 1 или −1, т.е. k=1 или k=−1.

Если k=1, то a=b=c=d, что противоречит условию задачи, т.к. $k=\frac{a+b}{c+d}=\frac{a+c}{d+b}=\frac{a+d}{c+b}=\frac{c+d}{a+b}=\frac{d+b}{a+c}=\frac{c+b}{a+d}$ и не все из чисел a, b, c, d должны быть одинаковыми. не равны 0.

Тогда k=−1. Возьмём любое число x, тогда пусть

a=b=c=x, а d=−3x $k=\frac{x+x}{-3x+x}=\frac{-3x+x}{x+x}=-1$

То есть таких четвёрок a, b, c, d — бесконечное множество.

Пример такой четвёрки: −3, 1, 1, 1.

не

все

списаны

±

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1.

Пусть a (установок) – I типа,

x (раз) – количество, показывающее, во сколько раз III типа больше I типа.

Тогда $4a$ (установок) – II типа,

ax (установок) – III типа, т.к. кол-во установок III типа должно делиться на число установок I типа,

$5ax$ (установок) – было бы III типа.

Т.к. установок III типа стало бы на 22 больше, чем установок II типа, то можно составить уравнение:

$$5ax - 4a = 22$$

$$a(5x-4) = 22$$

1) $a = 22$; $5x - 4 = \frac{22}{22}$

$5x = 5$

$x = 1$

Если $a = 22$, то кол-во установок II типа – $22 \cdot 4 = 88$; III типа – $22 \cdot x = 22 \cdot 1 = 22$. Т.к. установили более 100 установок, а $22 + 88 + 22 > 100$, то число установок I типа – 22; II типа – 88; III типа – 22.

2) $a = \frac{22}{22}$; $5x - 4 = 22$

$5x = 5,2$

Если $a = \frac{22}{22} = 1$, то кол-во установок II типа – $1 \cdot 4 = 4$; III типа – $1 \cdot x = 1 \cdot 5,2 = 5,2$. Т.к. установили более 100 установок, а $1 + 4 + 5,2 < 100$, то установок I типа не может быть 1, установок II типа не может быть 4, установок III типа не может быть 5,2.

(+)

Ответ: I типа 22 установки, II типа 88 установок, III типа 22 установки.

№ 5.

Последним фруктом в вазе был мандарин. Рассмотрим несколько случаев:

1) Допустим, каждый гость брал по два мандарина? Тогда мама вместо 14 мандаринов положила 7 яблок ⇒ в вазе осталось 7 яблок и один мандарин. ? Потом каждый гость брал бы по 2 яблока. В вазе осталось бы 1 яблоко и один мандарин. Гость заберет яблоко и мандарин, и в итоге останется мандарин. Что требовалось доказать.

(+)

2) Допустим, гости бы чередовались один через 2. Первый и второй брали бы по два мандарина, мама бы докладывала по яблоку. Третий бы забрал эти два яблока. И так далее. В конце останется одно яблоко и один мандарин, и мама положит мандарин. Что требовалось доказать.

Как бы гости не брали яблоки и мандарины, в итоге оставался бы мандарин и яблоко, и в конце концов, когда их забирали, мама бы докладывала мандарин.

Ответ: в вазе остался бы мандарин.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771.

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ МС 49-78

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Чтобы все отношения принимали одно и то же значение, числа x, y и z должны быть равны. Пусть они все равны числу a. Тогда любое отношение, например $\frac{x+y}{z}$, можно записать так: $\frac{a+a}{a}=\frac{2a}{a}=\frac{2}{1}=2$. В любом случае отношение будет принимать значение, равное двум.

Ответ: 2.

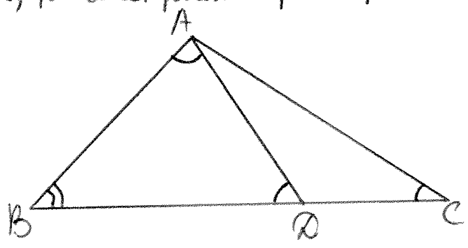
№3.

Все из 99 элементов должны равняться 0, т.к. $0+0+0+0\ldots+0=98\cdot 0=0$, и 0 никак не изменится, а если взять любое другое число и прибавить к нему 98 других элементов, не равных 0, то сумма чисел изменится. Если каждое число равно 0, то $0\cdot 0\cdot 0\cdot 0\ldots\cdot 0\cdot 0=0^{99}=0$ – произведение 99 элементов множества M.

Ответ: 0.

№2.

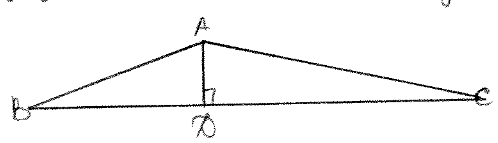
1) В двух треугольниках самое минимальное количество равных углов – 2. Т.к. если будет 0 равных углов, то получится, что среди шести углов нет ни одной пары одинаковых углов. Если будет 1 равный угол, то ситуация будет такая же, как и в I случае, когда в 2-х треугольниках 0 равных углов, и каждый угол равен только самому себе. 3 равных угла быть тоже не может, т.к. равных углов может быть только четное кол-во, чтобы это доказать, рассмотрим пример:



Пусть $\angle C=\angle DAB=\angle ADB=50^\circ$. Т.к. сумма углов треугольника равна 180°, то $\angle B=180-50-50=80^\circ$, т.к. $\angle B=\cancel{180}=180^\circ-\angle DAB-\angle ADB$. Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle A=180-\angle B-\angle C=180-80-50=50^\circ$, т.к. сумма углов треугольника равна 180°. $\Rightarrow \angle CAD=0^\circ$, т.к. $\angle CAD$ явл. частью $\angle BAC=50^\circ$. Угол не может быть равен 0°. $\Rightarrow$ ~~При~~ В любом случае нечетного кол-ва равных углов быть не может.

2) Самое минимальное кол-во одинаковых углов – 2:

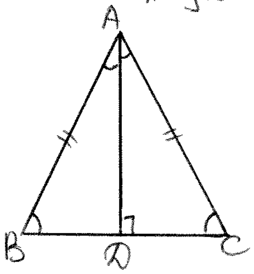
$\angle A$-тупой, AD - высота $\triangle ABC$.



Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$. В этом случае есть только 2 равных угла: $\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$. Остальные углы не равны $\Rightarrow$ в этом $\triangle ABC$ 2 одинаковых угла.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) Т.к. пока самое максимальное кол-во углов 2, то можно предположить, что одинаковых углов может быть больше.



$\triangle ABC$ - равнобедренный, т.е. $AB=AC$, $\angle A = 90°$

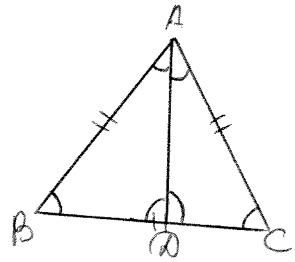
Тогда $\angle B = \angle C = \frac{180-90}{2} = 45°$ как углы при основании.

AD - высота, биссектриса и медиана $\triangle ABC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD = \frac{90}{2} = 45°$; $\angle ADB = \angle ADC = 90°$.

В ~~этих~~ треугольниках $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$ 4 равных угла.

4) Следующее четное число - 6. $\angle BAD = \angle CAD = \angle ABD = \angle ACD = \angle ADB = \angle ADC = 60°$



Пусть все углы равны 60°. Этого быть не может, т.к. $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = 60° + 60° = 120°$. ~~$\triangle ABC = 120$~~ Т.к. сумма углов треугольника равна 180°, то $\angle B + \angle C + BAC = 180°$

$60° + 60° + 120° \neq 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ такого треугольника не существует.

5) Больше шести брать четные числа смысла нет, т.к. в 2-х треугольниках только 6 углов.

6) Из пяти пунктов мы понимаем, что самое большое кол-во равных углов может быть 4.

Ответ: 4 равных угла.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ МС 79-17

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Всего у нас было 15 мандаринов. Пусть я-яблоки, а м-мандарины. Тогда каждый гость мог:

1) Взять 2 я, а мама положит 1 я в вазу.
2) Взять 2 м, а мама положит 1 я в вазу.
3) Взять я и м, а мама положит 1 м в вазу.

Когда к вазе подошёл последний гость, то там лежало:

1) 2 я. или 2) 2 м или 3) 1 я и 1 м.

Также стоит заметить, что кол-во мандаринов всегда будет нечётным, так как из 15 мы можем вычесть 2 или вычесть 1 и добавить 1 (от этого поменяется только кол-во яблок).

Из этого мы можем сделать вывод, что нам подойдёт варианта, когда в вазе было 1 я и 1 м, когда к вазе подошёл последний гость, так как 0 мандарин и 2 мандарина - чётные кол-во мандарин. А такого быть не может, так как мы доказали раннее. Значит у последнего гостя в вазе лежал 1 м и 1 я. У последнего гостя был только 1 вариант, это когда он берёт 1 м и 1 я, а мама ложит в вазу 1 мандарин. Значит последний фруктом был мандарин. Вот один из примеров:

1-ый: 15-2=13 м.
Мама: +1 я.

2-ой: 13-2=11 м. 1+1=2 я
3-ий: 11-2=9 м. 2+1=3 я
4-ый: 9-2=7 м. 3+1=4 я.
5-ый: 7-2=5 м. 4+1=5 я.
6-ой: 5-2=3 м 5+1=6 я
7-ой: 3-2=1 м. 6+1=7 я.
8-ой: 1-1+1=1 м. 7-1=6 я.
9-ый: 1-1+1=1 м. 6-1=5 я.
10-ый: 1-1+1=1 м. 5-1=4 я.
11-ый: 1-1+1=1 м. 4-1=3 я.
12-ый: 1-1+1=1 м. 3-1=2 я
13-ый: 1-1+1=1 м. 2-1=1 я
14-ый: 1-1+1=1 м. 1-1=0 я

Ответ: этот фрукт - мандарин

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$. (Стоит отметить, что ни ~~одно~~ одно из значений чисел x, y, z, не может быть равно 0.)

$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$

$x+y = \frac{x+z}{y} \cdot z = \frac{y+z}{x} \cdot z$

$(x+y) \cdot y \cdot x = (x+z) \cdot z \cdot x = (y+z) \cdot z \cdot y$

$x^2y + y^2x = x^2z + z^2x = y^2z + z^2y$.

~~Сп~~

справа приведено док-во, почему $z=y$ и почему $x=y$

⇓

$z=y=x$.

А так как они равны, то их можем записать начальное выражение с помощью 1-ой переменной.

$\frac{x+x}{x} = \frac{x+x}{x} = \frac{x+x}{x}$.

$\frac{2x}{x} = \frac{2x}{x} = \frac{2x}{x}$

$2=2=2$

Ответ: одинаковое значение всегда будет 2.

+

$\frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$.

$x^2\cancel{x} + z^2x = y^2\cancel{x} + z^2y$.

$x^2 + zx = y^2 + zy$.

$x(x+z) = y(y+z)$.

Так как к числу z мы прибавляем числа x и y, а затем умножаем на числа x и y соответственно, то это возможно если $x=y$, или если $x \neq y$, то $x+z=0$ или $y+z=0$, а $y=0$ или $x=0$. Соответственно. А так как ни одно из чисел не равно 0, то $x=y$.

$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y}$

$x^2y + y^2x = x^2z + z^2x$

$xy + y^2 = xz + z^2$.

$y(x+y) = z(x+z)$.

У нас есть 2 варианта: если $z=y$, или если $z \neq y$. Предположим, что $z \neq y$, значит $y=0$ или $z=0$; $x+y=0$ или $x+z=0$, так как если $y(x+y) = z(x+z)$ равны, но а y и z разные, то если среди них будет например, что $z > y$, то у нас получится: $y(x+y) < z(x+z)$. А так как они равны и не отличны от 0, то наше предположение неверно и $z=y$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

~~Возьмем такие 3 числа x, y, z, которые стоят в конце множества М.~~ Если при смене числа, от этой смены, сумма не поменялась, то либо число стало самим собой. Это значит, что каждое число в множестве М равно сумме всех других 98 чисел этого множества. Значит в множестве М есть отрицательные и положительные числа, либо все числа равны 0. Чтобы числа было равно сумме чисел все других чисел множества m, то их сумма должна быть равна 0. Пусть все числа в множестве М будут $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{98}, a_{99}$. Тогда сумма от a_1 до a_{98} будет равна 0. А от a_2 до a_{99} тоже будет равна 0. В обоих случаях у нас не поменялись числа от a_2 до a_{98}, а числа a_1 и a_{99} поменялись. Но от этого результат не поменялся. Значит $a_1 = a_{99}$. Ту же самую операцию мы можем провести со всеми числами множества a, и получим, что $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_{99}$. Это значит, что все числа равны. Но все числа множества М, не могут быть отрицательными или положительными: из-за того, что:

1) $a_{99} = 98 \cdot a_1$

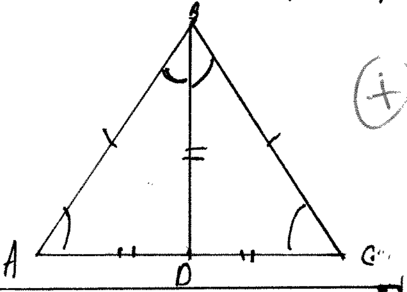
2) Тогда $a_1 = a_{99} + 97 \cdot a_1$, но у нас возникает противоречие, так как $a_1 < a_{99}$ в 1, и $a_1 > a_{99}$ во 2 случае, а это происходит в одном множестве М.

Значит все числа в множестве М, будут равны 0, а значит произведение 99 нулей будет равно 0.

Ответ: произведение 99 элементов будет равно 0.

№ 2.

Рассмотрим случай, когда у нас равнобедренный треугольник. Сразу стоит отметить, что разрез будет выполнять либо биссектриса, либо медиана треугольника.



Пусть $BD = 0,5\ AC$, и BD – медиана.

(+)

1) $\angle BAC = \angle BCD$ (как углы при основании равнобедр. $\triangle ABC$)

~~2) ∠ABD = ∠DBC~~

2) $\angle BAD = \angle ABD$ (как углы при основании равнобедр. $\triangle ABD$)

3) $\angle DCB = \angle DBC$ (как углы при основании равнобедр. $\triangle BDC$)

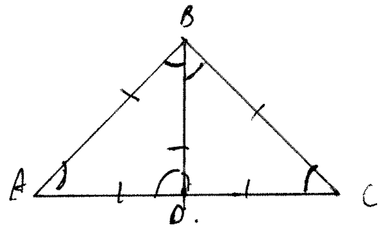
⇓

$\angle ABD = \angle DBC$, как соотв. углы в равных $\triangle$.

У нас получилось 4 равных угла: $\angle BAD = \angle ABD = \angle DBC = \angle BCD$.

5 равных углов не будет, так как $\angle BDA$ – внешний угол к $\triangle BDC$, а $\angle BDC$ – внешний угол к $\triangle BDA$. А внешний угол не может быть равен углу треугольника, не смежного с внешним углом. Значит 5 равных углов быть не может, ч.т.д.

Предположим, что у нас все 6 углов в ~~2 равных~~ $\triangle$-ах равны. Тогда они все должны быть по 60°, т.е. 2 равносторонних треугольника. Пусть $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$ – ~~равн~~ равностор.



Но как мы видим через ту вершину, через которую мы проводим линию мы не получим 60°, либо если этот угол будет 120°, то два других могут быть равны только ~~120°~~ $(180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$. Значит у нас возникло противоречие.

Ответ: у нас будет максимум 4 равных угла.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Пусть x - установка 1-ого типа

$4x$ - установок 2-ого типа

y - установок 3-его типа

$x+4x+y>100.$

$5y-22=4x.$

$x+5y-22+y>100$

$6y+x>122$

$\Downarrow$

$x+4x+y>122$

~~$5x+y=6y+x$~~ ~~$4x=5y$~~.

$4x+22=5y$

$x+22=1{,}25y.$

$22>0{,}25y$

$22\cdot 4=88>y.$

$y=87$, не подходит, т.к $87\cdot 5=435$ $435-22 \nmid 4.$

$y=86$ - максимальное возможное значение, если $y \mid x.$

$86\cdot 5=430$ $430-22=408$ $408:4=102$

$86\cdot 2=162$

$86\cdot 3=244$

~~$y=86$~~

~~$x=43$~~

~~$43\cdot 4=452$~~

$4x+22=5y.$

Чтобы условие подходило, у нас x должен быть равен y. $x=y=22.$

$4\cdot 22+22=5\cdot 22.$ $22:22=1.$ $88+44=132$ $132>100.$

Ответ: 1-ого типа - 22; 2-ого типа - 88; 3-его типа - 22

(+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ МВ 79-46

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. Возьмём 1 тип за x, а так же в задании сказано, что „число установок 3-его типа кратно числу установок 1-типа"

Итак

1) $x + 4x + xy > 100$

в значении кратно означает делить, таким образом получается, что число делимо без остатка делиться на x, неизвестное я взяла за xy, где y - ~~полож~~ ное число, при умножении, однако установки 3 типа также могут по кол-ву быть равны установкам 1 типа (ибо это не отрицается в условии, и это может быть возможно, но тогда xy-уже может быть просто x

2) $xy \cdot 5 - 22 = 4x$

$5xy - 22 = 4x$

$5x \cdot y - 4x = 22$

$5xy = 4x + 22$

3) Пробую при равенстве $x(\mathrm{I}) = x(\mathrm{III})$

$5x - 22 = 4x$

$5x - 4x = 22$

$x = 22$

⇒ Проверка:

$22 + 22 \cdot 4 + 22 = 132 > 100$ (+)

(см.)

Ответ: I - 22; II - 88; III - 22.

№5.

Ответ: мандарин, т.к. 15 число нечётное и полностью избавиться от мандаринов будет нельзя т.к. при взятии разных 2-ух фруктов он появляется, то есть чётного кол-ва мандаринов добиться невозможно (+)

1) ⓜ ⓐ → ⓜ и число всё ещё остаётся нечётным

2) ⓐ ⓐ → ⓐ мандаринов при этом действии не прибавляется и не убавляется.

3) ⓜ ⓜ → ⓐ ⇒ только от чётного кол-ва мандаринов можно было избавиться

4) Апельсин же получается всегда в чётном ~~кол-ве~~ и даже если останется одно мандарин, то (см. 1) мандарин останется последним.

№2.

Среди 6 углов этих треугольников ровно 4 одинаковых. т.к.

1) Берём (хотим) сделать 6 одинак углов. это возможно при $180:3=60°$ должна быть равна каждая сторона у раздел. треугольников. (равносторонний), однако поделить мы можем таким образом один △ и тогда на сторонах разреза возникнет проблема пример $60+60$ уже 120, когда как сумма всех сторон треугольника равна 180 - $\frac{60/60}{60}$ и это мы ещё не считали. (+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ МG 79-46

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2 других стороны. То есть это не возможно. (что бы сделать аккуратно можно спокойно попробовать 4 угла

1) $180:4=45$ (сторона образующаяся при делении не в счёт)

2) Таким образом делённый самый большой угол будет образовывать $90°$ а другие 2 по $45°$ $90+\overset{90}{(45+45)}=180°$ (+)

№1.1 (доп. объяснение)

$5xy=4x+22 \Rightarrow 5x$ повторяется y-ное кол-во раз возьмём наименьшее 1, $5x=4x+22 \Rightarrow x=22$ что нельзя ибо будет равно x, далее 2 $5x\cdot 2=4x+22=10x=4x+22 \Rightarrow$ из этого же выходит что $6x=22$, что прямо говоря физически не возможно, как и те числа, что больше, ибо если это так, то <100 в решении не получится вовсе то есть $4x$ - будет меньше 22 как и просто а $10x$ чуть больше того но всё равно не сможет покрыть "убытки"

№3.

99 - число нечётное и между этими 99 числами должна быть определённая закономерность, однако они не могут идти просто по порядку или просто, так как в таком случае условие противоречит полностью и единственным вариантом становится просто складывать числа ибо этот вариант выходит оптимальным и самым правильным $\Rightarrow$ в этой закономерности должны присутствовать отрицательные числа. Для начала стоит сократить 99 до 9 и начать вычислять повторение. Мы не можем взять единицу т.к. при таком вычислении если закрыть (заменить) чётное, то число получится меньше, нечётное - больше, так же то, что число нечётное влияет на то, с какого числа начать считать, с чётного или нечётного ведь знака с которого мы начинаем будет больше. Уберём 9.

$+1-2+3-4+5-6+7-8+9=-8 \Rightarrow +1-2+3-4+5-6+7-8+9=\underline{5}$ (−)

$-1+2-3+4-5+6-7+8-9=8 \Rightarrow -1+2-3+4-5+6-7+8-9=\underline{5}$ (−)

Таким образом даже если просто считать по порядку чередуя знаки, то не получится.

Ответ: 0.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №5.

Сравним кол-ва фруктов до выполнения данных операций и после.

Если было взято два разных фрукта, то количество мандаринов и яблок ~~для~~ ~~умень~~ ~~раз~~ отдельно уменьшилось на 1. Но кол-во мандаринов ещё и увеличилось на 1 (мама положила). Итак, мандаринов осталось столько, сколько было до операции, а кол-во яблок уменьшилось на 1. Значит, чётность кол-ва мандаринов не изменилась, а кол-ва яблок сменилось на противоположное.

Если было взято два одинаковых фрукта, то возможно два случая:

1) Оба мандарина: в таком случае чётность кол-ва мандаринов не изменилась, а кол-ва яблок сменилось на противоположную (мама положила одно).

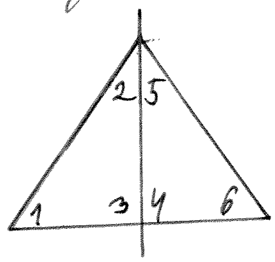
2) Оба яблока: в таком случае чётность кол-ва мандаринов не изменилась (не было никаких операций), а чётность яблок сменилась (убавлено 2, прибавлено 1).

Можно заметить, что при выполнении данных операций чётность кол-ва яблок меняется, а мандаринов — нет. Изначально было 15 мандаринов. 15 — нечётное число. 0 — чётное. Значит, мандаринов стать 0 не могло. Из этого следует, что закончились яблоки, а ман-

дарин остался 1. (1 - нечётное число).
Ответ: мандарин.

Задание №2.

Треугольник можно разрезать на два треугольника только проведя разрез через вершину и противоположную ей сторону.



Здесь изображён случайный треугольник углы которого пронумерованы.

±

Углы 3 и 4 - смежные, а значит, они равны ~~то~~ только при $\angle 3 = \angle 4 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. В прямоугольном треугольнике один угол прямой, а два другие - острые $\Rightarrow \angle 1 \neq \angle 3 \Rightarrow$ все шесть углов не могут быть одновременно равными.

~~Пусть 5 углов равны, причём не равным с ними~~

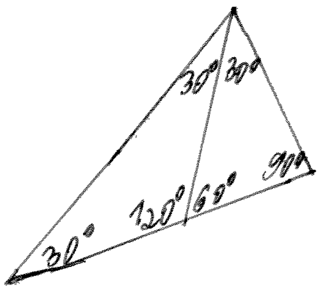
$\angle 4$ не может быть равен ни углу 1, ни углу 2, т.к. если ~~они равны~~ хотя бы ~~два~~ один из них равен ~~то~~ (например $\angle 4 = \angle 2$), то $\angle 4 = \angle 2 + \angle 1$ ($\angle 4$ - внешний); $\angle 4 = \angle 2 \Rightarrow \angle 1 = 0^\circ$, что не может быть.
Аналогичная ситуация с углами 4 и 1; 3 и 5; 3 и 6. $\Rightarrow \angle 4 \neq \angle 1; \angle 4 \neq 2; \angle 3 \neq \angle 5; \angle 6 \neq \angle 3$.

~~1) Если требуется найти~~

Если ~~$\angle 3 = \angle 4$,~~ $\angle 1 = \angle 2 = \angle 5 = \angle 6$, то $\angle 3 = \angle 4$ ($\angle 3 = \angle 5 + \angle 6$; $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$). $\angle 3 = \angle 4$, если они оба равны 90°, а значит, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 5 = \angle 6 = 45^\circ$.

У нас получилось две группы с равными углами ($\angle 3 = \angle 4$; $\angle 1 = \angle 2 = \angle 5 = \angle 6$). ~~Но тогда мы не сможем подсчитать~~ В этом случае $N=4$ или $N=2$, а по условию у нас должно быть ровно N одинаковых. (Но если такая ситуация возможна, то $N=4$).

2) Если ~~$\angle 1 \neq$~~ $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ – ~~подходит~~ ложно, то у нас не более 3 равных углов. Такое возможно при $\angle 1 = \angle 2 = \angle 5 = 30^\circ$; $\angle 6 = 90^\circ$; $\angle 3 = 120^\circ$; $\angle 4 = 60^\circ$



Ответ: $N=3$ ($N=4$, если возможна ~~а~~ ситуация с 2-мя группами).

Задание №3

Обозначим данные числа мн-ва M $x_1, x_2, x_3, \dots x_{99}$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_2 + x_3 + \dots + x_{99} \\ x_2 = x_1 + x_3 + \dots + x_{99} \\ \dots \\ x_{99} = x_1 + x_2 + \dots + x_{98} \end{array}\right\}$$

Каждое число здесь употреблено 98 раз. Значит,

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{99} = 98(x_1 + x_2 + \dots + x_{99})$$

Если $x_1 + x_2 + \dots + x_{99} \neq 0$, то $1 = 98$ – неверно, значит, $x_1 + x_2 + \dots + x_{99} = 0$. Тогда:

$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{99} = 0$

$\cancel{x_1}\ x_2 + x_3 + \dots + x_{99} = -x_1$, но ~~х~~ эта же сумма равна x_1. $\Rightarrow x_1 = -x_1$, что возможно только при $x_1 = 0$.

Тогда: $0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{99} = 0$

Ответ: 0.

Задание № 4.

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$$

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y}$$

$$xy + y^2 = xz + z^2$$

$$\frac{xy+y^2}{\cancel{z}\, x} = \frac{xz+z^2}{\cancel{z}\, x}$$

$$\frac{xy}{x} + \frac{y^2}{x} = \frac{xz}{x} + \frac{z^2}{x}$$

$$y + \frac{y^2}{x} = z + \frac{z^2}{x}$$

$$z - y = \frac{z^2}{x} - \frac{y^2}{x}$$

$$\frac{xy}{x} + \frac{y^2}{x} = \frac{xz}{x} + \frac{z^2}{x}$$

$$y + \frac{y^2}{x} = z + \cancel{\frac{z^2}{y}}\ \frac{z^2}{x}$$

$$y - z = \frac{z^2}{x} - \frac{y^2}{x}$$

$$y - z = \frac{z^2 - y^2}{x}$$

$$y - z = \frac{(z-y)(z+y)}{x}$$

$$z - y = \frac{(z-y)(z+y)}{-x}$$

$$1 = \frac{\cancel{(z-y)}(z+y)}{-x\cancel{(z-y)}}$$

$$1 = -\frac{z+y}{x}$$

$$\frac{z+y}{x} = -1$$

Это отношение равно -1, а значит и остальные тоже равны -1 (по условию).

Ответ: -1

Задание №1.

Пусть $x^{\text{шт.}}$ – установок первого типа, $4x^{\text{шт.}}$ – кол-во установок второго типа, kx – кол-во установок 3-его типа, где k – ~~целое~~ нат. число (по условию).

$5kx = 4x + 22$

$5kx - 4x = 22$

$x(5k-4) = 22$

Если $5k-4=11$, то

$11x = 22$

$x = 2$. Но тогда $4x = 8$, а $kx = \cancel{22}\,6$. $2+8+6<100$, ~~что~~ что противоречит условию.

$22 = 2\cdot 11 = 1\cdot 22$

$5k-4$ оканчивается либо на 1, либо на 6.

$\Downarrow$

$5k-4 = 11$ или $5k-4=1$.

$5k-4=11 \Rightarrow 5k=15 \Rightarrow k=3$

Если $5k-4=1$ ($k=1$), то $1\cdot x = 22 \Rightarrow x = 22$.

Тогда $4x = 88$; $kx = 1\cdot 22 = 22$.

$22+22+88>100$, что соответствует условию.

$5\cdot 22 = 4\cdot 22+22$, что соответствует условию.

Значит, $x=22$; $4x=88$; $kx=22$.

+

Ответ: первого типа – 22 шт; второго типа – 88 штук; третьего типа – 22 ~~штуки~~ шт.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NG 20-88

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N2.

1) $2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$

$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$

Пусть $x_0 = a \Rightarrow$,

$3x_1 = a$

$x_1 = \frac{a}{3}$

$3x_2 = a + \frac{a}{3}$

$x_2 = \frac{a}{3} + \frac{a}{9} = \frac{a + \frac{a}{3}}{3}$

$x_3 = \frac{a + \frac{a}{3} + \cancel{a+\frac{a}{3}} x_2}{3}$

$$x_n = \frac{S_{n-1}}{3} = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}}{3}$$

2) $S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n$ (+)

$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} + \frac{S_{n-1}}{3}$ $| \cdot 3$

$3S_n = 3(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}) + (x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1})$

$3S_n = 4(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1})$

$S_n = \frac{4}{3}(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1})$ (++)

$S_n = \frac{4}{3}\left(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-2} + \frac{S_{n-2}}{3}\right)$ $| \cdot 3$

$3S_n = \frac{4}{3}\left(3(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-2}) + x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-2}\right)$

$3S_n = \frac{4}{3}\left(4(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-2})\right)$

$S_n = \frac{4^2}{3^2}(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-2})$ (+++)

из (+), (++) и (+++) $\Rightarrow$

$S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot x_0$, $x_0 = a$ (по предположению)

$\cancel{S_1 = x_0 + x_1 = a + \frac{a}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^1 \cdot a}$

$x_n = \frac{S_{n-1}}{3}$

$$x_n = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot x_0}{3} = \frac{4^{n-1}}{3^{n-2}} \cdot x_0$$

$x_1 = \frac{4^0}{3^{-1}} \cdot x_0 = 3x_0 = 3a$, а т.к. $x_1 = \frac{a}{3}$, то

$3a = \frac{a}{3}$

$9a - a = 0$?

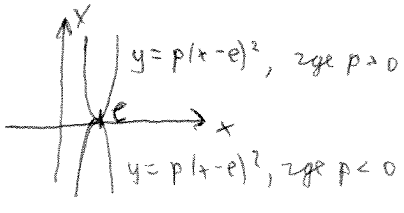
$8a = 0$, $a = 0$, тогда каждый член последовательности x_n равен нулю, а суммы (S_n) следовательно тоже равны нулю.

Ответ: $x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$ и $S_1 = S_2 = \ldots = S_n = 0$.

N4.

1) ~~$g(x) = 0$ только при $x = e$~~

Т.к. наш квадратный трёхчлен имеет только один корень то мы можем его представить в виде параболы которая касается своей вершиной ось OX



тоесть $y = 0$, при $x = e$.

+

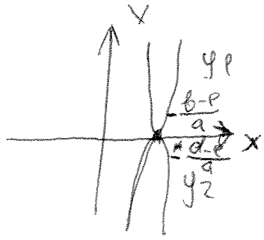
$y_3 = g(ax+b) + g(cx+d) = p(ax+b-e)^2 + p(cx+d-e)^2 = p((ax+b-e)^2 + (cx+d-e)^2)$, пусть

$y_1 = (ax+b-e)^2$, $y_2 = (cx+d-e)^2$, т.к. $y_3 = g(ax+b) + g(cx+d)$ имеет единственный корень, тогда (т.к. $p \neq 0$)

$y_1 = -y_2$, т.е. $(ax+b-e)^2 = -(cx+d-e)^2$

$\underbrace{\left(a\left(x+\frac{b-e}{a}\right)\right)^2}_{y_1} = \underbrace{-\left(c\left(x+\frac{d-e}{c}\right)\right)^2}_{y_4}$

Т.к. $y_1 = \left(a\left(x+\frac{b-e}{a}\right)\right)^2$ — парабола проходящая своей вершиной через Ox, ветви которой направлены вверх, а $y_4 = -y_2 = -\left(c\left(x+\frac{d-e}{c}\right)\right)^2$ — парабола проходящая ~~своей~~ вершиной через Ox, ветви которой направлены вниз тогда уравнение вида $y_1 = \underbrace{y_4}_{=-y_2}$ будет решаться как $-\frac{b-e}{a} = -\frac{d-e}{c}$, т.к.



по графику видно что эти параболы если и имеют корни то только в вершинах по оси Ox.

$$\frac{b-e}{a} = \frac{d-e}{c}$$

$$ad - ae = bc - ec$$

$$ad - bc = ae - ec$$

$$e(a-c) = ad - bc$$

$$e = \frac{ad-bc}{a-c}$$

Ответ: $x = \frac{ad-bc}{a-c}$ — корень.

№3.

1) $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6$ — числа в ряд.

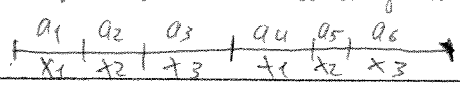
$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{a_2+a_3+a_4}{3} = \frac{a_3+a_4+a_5}{3} = \frac{a_4+a_5+a_6}{3} \Rightarrow a_1 = a_4,\ a_2 = a_5,\ a_3 = a_6.$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3 + a_4+a_5+a_6}{6} = A$$

$$2(a_1+a_2+a_3) = 6A$$

$$a_1+a_2+a_3 = 3A$$

2) расставим числа зная что $a_1 = a_4 = x_1;\ a_2 = a_5 = x_2;\ a_3 = a_6 = x_3$.



ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~среднее гео~~

тогда среднее геометрическое любых трёх соседних чисел это $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$.

т.к $y=\sqrt[3]{x}$ возрастает тогда чем больше подкореное выражение тем больше значение функции, т.е.

~~чем~~ чем больше $(x_1+x_2+x_3)$ тем больше $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$.

по условию сказано что один из них $(x_1; x_2; x_3)$ равен 1, пусть $x_1=1$, тогда

$$x_1+x_2+x_3=3A$$

$x_2+x_3=3A-1$. пусть $x_2=a$, тогда

$$x_3=3A-1-a$$

рассмотрим функцию $f(a)=1\cdot a(3A-1-a)=$

$=a(3A-1-a)$.

$D(a)=\cancel{[0;3A-1]}\ R$, то $f(a)$ непрерывна и деференцирована на R

$f'(a)=a(3A-1-a)=a'(3A-1-a)+a(3A-1-a)'=3A-1-a-a=$

$=3A-1-2a$

$f'(a)=0$ при

$$2a=3A-1$$

$$a=1{,}5A-0{,}5.$$

$+$ $-$

$1{,}5A-0{,}5$ $f(a)$

$\nearrow$ $\searrow$, то

$$f(a)_{max}=f(1{,}5A-0{,}5), \text{ тогда}$$

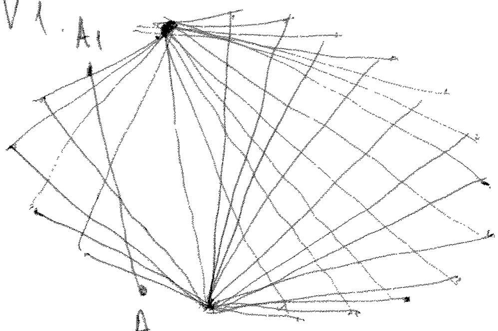
$\sqrt[3]{f(a)_{max}}=\sqrt[3]{f(1{,}5A-0{,}5)}=\sqrt[3]{(1{,}5A-0{,}5)(-1{,}5A+0{,}5+3A-1)\cdot 1}=$

$=\sqrt[3]{(1{,}5A-0{,}5)(1{,}5A-0{,}5)}=\sqrt[3]{(1{,}5A-0{,}5)^2}$ Ответ: $\sqrt[3]{(1{,}5A-0{,}5)^2}$

⊕

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1.



рег точки - заводы.
пусть A_1 и A_2 - заводы соединённые маршрутами тогда
если с ними есть какая-то пара то в целях экономии маршрутов оно будет соединена друг с другом.

тогда таких путей будет ~~150 - 2 = 148~~

$$\frac{((150-2)-1)^2}{2} =$$

(7)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NG 75-36

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Если квадратный трехчлен имеет ровно один корень, то его можно представить в виде: $g(x)=q(x-p)^2$, где q,p - некоторые числа $(q\neq0)$ и $x=p$ - корень трёхчлена

$g(ax+b)=q(ax+b-p)^2$

$g(ax+b)=qa^2(x+\frac{b-p}{a})^2 \quad (a\neq0)$

$g(cx+d)=q(cx+d-p)^2$

$g(cx+d)=qc^2(x+\frac{d-p}{c})^2 \quad (c\neq0)$

$P(x)=g(cx+d)+g(ax+b)$

Найдём корень многочлена: $g(cx+d)+g(ax+b)=0$

$qa^2(x+\frac{b-p}{a})^2=-qc^2(x+\frac{d-p}{c})^2 \quad |:q \ (q\neq0)$

$a^2(x+\frac{b-p}{a})^2=-c^2(x+\frac{d-p}{c})^2$

Выражение в правой части неотрицательно, а в левой - неположительно. Поэтому уравнение имеет решение только тогда, когда выражения в правой и левой частях равны 0

$\begin{cases} a^2(x+\frac{b-p}{a})^2=0 \\ c^2(x+\frac{d-p}{c})^2=0 \\ a\neq0 \\ c\neq0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-(\frac{b-p}{a}) \\ x=-(\frac{d-p}{c}) \end{cases} \quad \frac{b-p}{a}=\frac{d-p}{c}$

$bc-pc=ad-ap$

$p(a-c)=ad-bc$

$p=\frac{ad-bc}{a-c}$ ($a\neq c$ по условию)

p - корень трёхчлена $g(x)$

Если $a=0$, то $P(x)=g(cx+d)+g(b)$

Найдём корень многочлена: $g(cx+d)=-g(b)$

$qc^2(x+\frac{d-p}{c})^2=-q(b-p)^2$

$\underbrace{c^2(x+\frac{d-p}{c})^2}_{\geq0}=\underbrace{-(b-p)^2}_{\leq0} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2(x+\frac{d-p}{c})^2=0 \\ p=b \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{p-d}{c} \\ p=b \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{p-d}{c} \\ p=\frac{ad-bc}{a-c} \\ a=0 \end{cases}$

$c\neq0$ (т.к $a=0$, а $a\neq c \Rightarrow$ многочлен имеет 1 корень)

Аналогично, при $c=0$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NG 75-36

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$g(d) = -g(ax+b) \Leftrightarrow \begin{cases} p=d \\ x=\frac{p-b}{a} \end{cases}$ $\begin{cases} p=\frac{ad-bc}{a-c} \\ b=0 \\ x=\frac{p-b}{a} \\ a\neq 0 \end{cases}$ +

Таким образом, корень многочлена $g(x)$: $p=\frac{ad-bc}{a-c}$ ~~при любом a~~, при $a\neq c$

Ответ: $\frac{ad-bc}{a-c}$

№1

~~Найдем, ско~~ Количество способов которыми можно выбрать 4 завода из 150: $C^4_{150} = \frac{150!}{146!\,4!} = \frac{147\cdot148\cdot149\cdot150}{2\cdot3\cdot4} = 49\cdot37\cdot149\cdot75$

В каждой ~~такой~~ четверке должно бы не менее двух пар заводов, которые соединены автобусными маршрутами. Так как нам необходимо найти наименьшее число пар заводов, мы предположим, что в каждой четвёрке равно 2 соединённых маршрутами пары.

Тогда всего таких пар во всех четверках: $C^4_{150}\cdot 2 = 49\cdot37\cdot149\cdot75\cdot2$ +

Найдем в какое количество четвёрок входит одна пара заводов. К этой паре необходимо прибавить ещё одну пару, которую можно выбрать $C^2_{148} = \frac{148!}{146!\,2!} = \frac{147\cdot148}{2} = 74\cdot147$ способами

$\frac{C^4_{150}\cdot 2}{C^2_{148}} = \frac{49\cdot37\cdot149\cdot75\cdot2}{74\cdot147} = 25\cdot149 = 3725$ – минимальное количество ~~необходимы~~ соединённых пар заводов (т.е мы делим количество пар соединённых маршрутами заводов во всех четверках на количество четвёрок, в которые входит одна такая пара)

Ответ: ~~25·149~~ 3725

№2

$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots x_{n-1} - x_n$ +

$x_n = \frac{x_0 + x_1 + \ldots x_{n-1}}{3}$

Таким образом, каждый член прогрессии, начиная с x_1, равен сумме всех предыдущих членов, разделённой на 3

$$x_1 = \frac{x_0}{3}$$

При $n \geq 2$ $\quad x_{n-1} = \frac{x_0 + x_1 + \ldots x_{n-2}}{3}$

$$x_0 + x_1 + \ldots x_{n-2} = 3x_{n-1}$$

$$x_n = \frac{(x_0 + x_1 + \ldots x_{n-2}) + x_{n-1}}{3} = \frac{4x_{n-1}}{3}$$

Таким образом, при $n \geq 1$ последовательность представляет собой геометрическую прогрессию b_n с первым членом ~~равным~~ $b_1 = \frac{x_0}{3}$ и знаменателем $q = \frac{4}{3}$

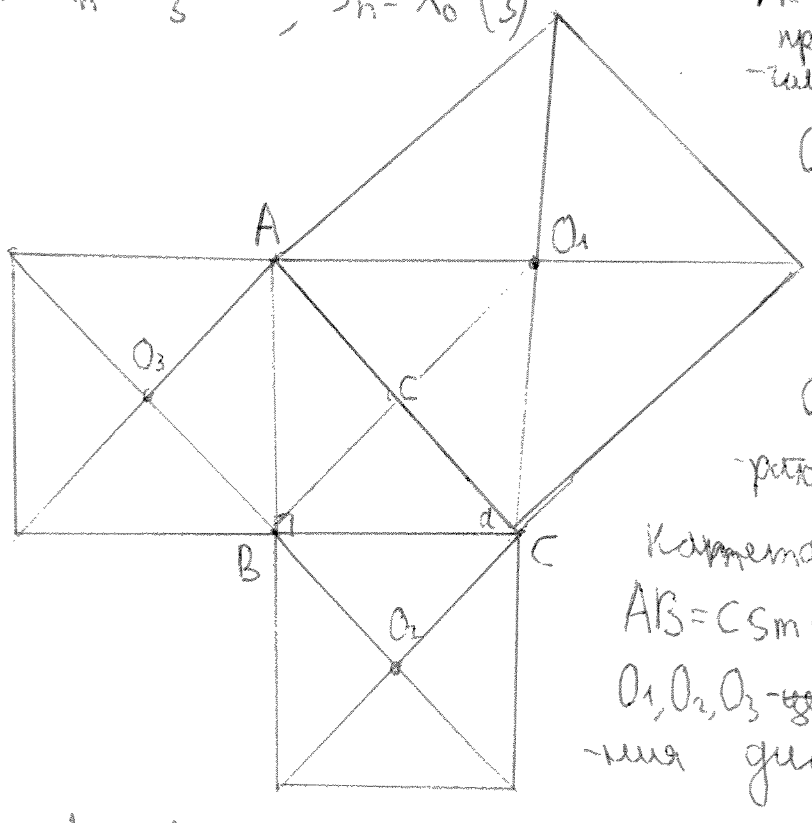
$$x_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

$$x_n = \frac{x_0}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{4^{n-1} x_0}{3^n}$$

$$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = x_0 + \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = x_0 + \frac{\frac{x_0}{3}\left(1 - \left(\frac{4}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{4}{3}} = x_0 + x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) =$$

$$= x_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Ответ: $x_n = \frac{4^{n-1} x_0}{3^n}$, $S_n = x_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$



$AC = c$ - гипотенуза прямоугольного треугольника ABC ($\angle ABC = 90°$)

O_1 - центр большего квадрата (то есть построенного на гипотенузе)

O_2, O_3 - центры квадратов, построенных на катетах

$AB = c\sin\alpha$, $BC = c\cdot\cos\alpha$

O_1, O_2, O_3 - ~~центр~~ точки пересечения диагоналей квадратов

По свойству квадрата $\angle O_2BC = 45°$, $\angle O_3BA = 45°$ (диагонали квадрата делят прямые углы пополам)

$\angle O_3BO_2 = 45° + 45° + 90° = 180°$ ⇒ точки O_3, B, O_2 лежат на одной прямой

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$O_3B = \frac{1}{2}$ – половина диагонали квадрата. $O_3B = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2+AB^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c\sin\alpha$

$BO_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2BC^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c\cos\alpha$

$\cancel{O_2O_3 = BO_3 + BO_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}c(\sin\alpha+\cos\alpha)}$ $O_2O_3 = BO_3 + BO_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}c(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$\angle ACO_1 = 45^0 \Rightarrow \angle BCO_1 = \alpha + 45^0$

$\cos\angle BCO_1 = \cos(\alpha+45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$

$CO_1 = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2+AC^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$

В $\triangle BCO_1$ по т. Косинусов: $BO_1^2 = BC^2 + CO_1^2 - 2BC\cdot CO_1\cdot\cos\angle BCO_1$

$BO_1^2 = c^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}c^2 - 2\cdot c\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}c\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) = c^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}c^2 - c^2\cos^2\alpha + c^2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}c^2(1+2\sin\alpha\cos\alpha)$

(α – острый $\Rightarrow$ $\sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0$, $1+2\sin\alpha\cos\alpha > 0$)

$\cancel{BO_1 = \sqrt{\frac{1}{2}c^2(1+2\sin\alpha\cos\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{2}c\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}}$

~~Сравним BO_1 и O_2O_3 и докажем~~

~~BO_1~~

+

$BO_1^2 = \frac{1}{2}c^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha) = \frac{1}{2}c^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = O_2O_3^2$

$BO_1 = O_2O_3$

Таким образом, длины аллей третьего этапа равны

№3

Ряд чисел: $a\ b\ c\ d\ e\ f$

По условию любые три соседних числа имеют одинаковое среднее арифметическое. Значит, $\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3}$

$a = d$

$\frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} \Rightarrow b = e$

$\frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3} \Rightarrow c = f$

Значит, $a+b+c = d+e+f$

Среднее арифметическое всех 6 чисел: $A = \frac{a+b+c+d+e+f}{6}$

$\frac{2(a+b+c)}{6} = A$

$\frac{a+b+c}{3} = A$ То есть среднее арифметическое трех соседних чисел также равно A

По условию известно, что в ряду чисел есть единица
Пусть $a=d=1$
Тогда среднее ~~арифметическое~~ геометрическое любых трех соседних чисел одинаково и равно $x=\sqrt[3]{bc\cdot 1}=\sqrt[3]{bc}$
Если $bc\geq 0$ то оно ~~наиб.~~ достигает наибольшего значения, когда bc достигает наибольшего значения

$$\frac{b+c+a}{3}=A$$

$$\frac{b+c+1}{3}=A \Rightarrow \quad b+c=3A-1$$

$$b=3A-1-c$$

$$bc=-c^2+(3A-1)c$$

$(-c^2+(3A-1)c)$ - квадратичная функция, зависящая от переменной c, которая (график - парабола ветви которой направлены вниз) достигает наибольшего значения в вершине параболы, т.е при $c=\frac{3A-1}{2}$

$$b=\frac{3A-1}{2}$$

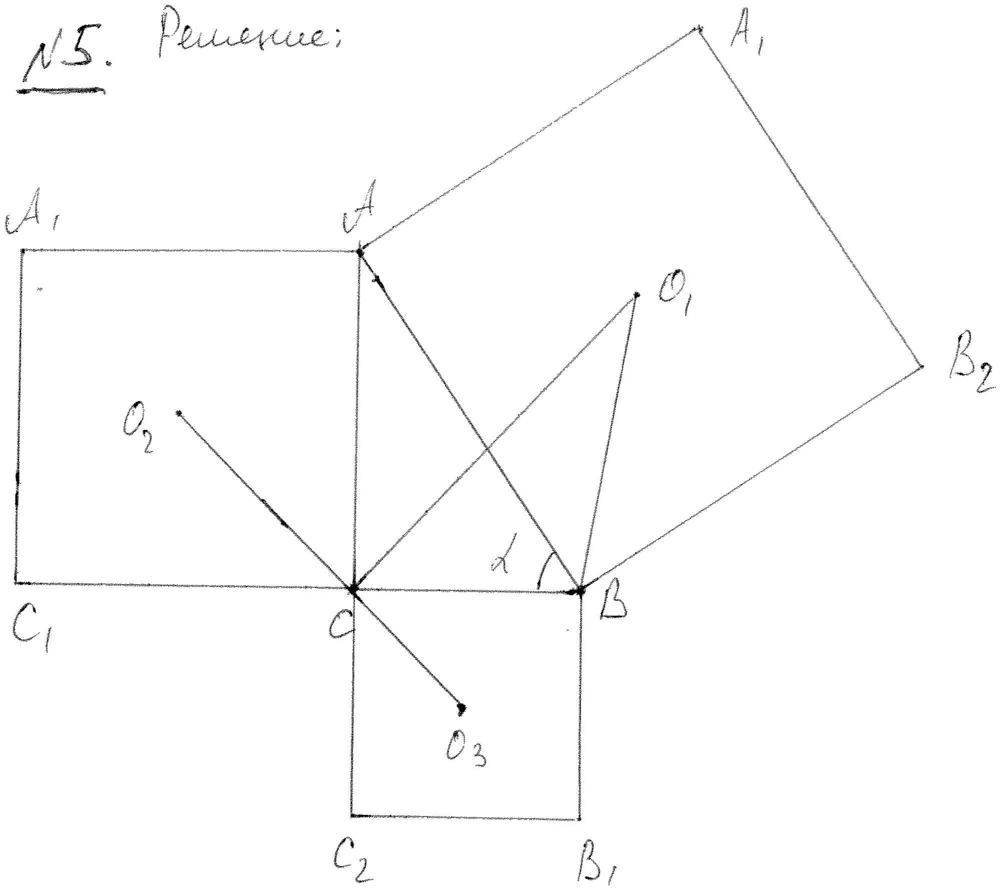
$$bc=\frac{(3A-1)^2}{4} \quad bc\geq 0$$

$$x_{max}=\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

+

№5. Решение:



Пусть ABC – изначальные три аллеи, квадраты AA_1C_1C, BCC_2B_1 и AA_1B_2B – аллеи, полученные на втором этапе, отрезки O_1C и O_2O_3 – аллеи третьего этапа.

$\angle ABC = \alpha$

Пусть гипотенуза $AB = a$, тогда

$BC = AB \cdot \cos\alpha = a \cdot \cos\alpha$

$AC = AB \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\alpha$

CO_3 и CO_2 – половины диагоналей соответствующих квадратов, т.е.

$$CO_3 = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{a\cdot\cos\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$CO_2 = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a\cdot\sin\alpha}{\sqrt{2}}$$

Тогда длина отрезка O_2O_3 равна:

$$O_2O_3 = O_2C + CO_3 = \frac{a\cdot\cos\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}(\cos\alpha+\sin\alpha).$$

Рассмотрим $\triangle O_1BC$.

$O_1B = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (как половина диагонали соответствующего квадрата.)

$\angle O_1BC = \angle ABC + \angle ABO_1 = \alpha + 45°$

$BC = a\cdot\cos\alpha$

По теореме косинусов из $\triangle O_1BC$ имеем:

$O_1C^2 = O_1B^2 + BC^2 - 2\cdot O_1B\cdot BC\cdot\cos\angle O_1BC$

$O_1C^2 = \frac{a^2}{2} + a^2\cos^2\alpha - 2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot a\cdot\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45°)$

$O_1C^2 = \frac{a^2}{2} + a^2\cos^2\alpha - \sqrt{2}a^2\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45°)$

$O_1C = a\cdot\sqrt{\frac{1}{2} + \cos^2\alpha - \sqrt{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45°)}$

Сравним отрезки O_2O_3 и O_1C

$O_2O_3 \vee O_1C$

$\frac{a}{\sqrt{2}}(\sin\alpha+\cos\alpha) \vee a\sqrt{\frac{1}{2}+\cos^2\alpha-\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45°)}$

$\sin\alpha+\cos\alpha \vee \sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\cos^2\alpha-\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45°)}$

Делим на a, т.к. гипотенуза AB не может быть отрицательной.

Поскольку длины отрезков не могут быть меньше нуля, возведем обе части неравенства в квадрат.

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha \vee 2\left(\frac{1}{2}+\cos^2\alpha-\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45°)\right)$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 1 \vee 1 + 2\cos^2\alpha - 2\sqrt{2}\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45°)$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha \vee \cos^2\alpha - \sqrt{2}\cdot\cos\alpha\cos(\alpha+45°)$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha \vee \cos^2\alpha - \sqrt{2}\cdot\cos\alpha(\cos\alpha\cdot\cos45° - \sin\alpha\cdot\sin45°)$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha \vee \cos^2\alpha - \sqrt{2}\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha \vee \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha \vee \sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\alpha\cdot\cos\alpha$

+

Следовательно, $O_2O_3 = O_1C$ и при любом значении α разность их длин равна нулю.

Ответ: $O_2O_3 = O_1C$; при любом α разность длин равна 0.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2. Решение: $2x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n$

$$3x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} \quad (1)$$

Поскольку приведённое в задаче условие выполняется при всех $n = 1, 2 \dots$, то

$$3x_{n-1} = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-2}$$

$$x_{n-1} = \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_{n-2}}{3}$$

Подставим это в выражение 1, получим:

$$3x_n = \frac{4}{3}x_0 + \frac{4}{3}x_1 + \dots + \frac{4}{3}x_{n-2} = \frac{4}{3}(x_0 + x_1 + \dots + x_{n-2})$$

Аналогично для x_{n-2} получим:

$$x_{n-2} = \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_{n-3}}{3}$$

$$3x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^2 (x_0 + x_1 + \dots + x_{n-3})$$

В итоге совершая ~~~~ подобные действие до x_1 получим:

$$3x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot x_0$$

$$x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_0}{3}; \quad n = 1, 2 \dots$$

Мы получили выражение для нахождения n-го члена последовательности.

Рассмотрим сумму S_n

$$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

$$S_n = x_0 + \left(\frac{4}{3}\right)^0 \cdot \frac{x_0}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^1 \frac{x_0}{3} + \dots \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_0}{3}$$

$$S_n = x_0 \left(1 + \left(\frac{4}{3}\right)^0 \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}\right)$$

Слагаемые в скобке, начиная с $\left(\frac{4}{3}\right)^0 \frac{1}{3}$, являются последовательными членами геометрической прогрессии с множителем $\frac{4}{3}$. (Формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии забыл)

Ответ: $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_0}{3}$; $n = 1, 2 \dots$

$$S_n = x_0 \left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^0 + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}\right) \dots$$

±

№4. Решение: Пусть $g(x) = kx^2 + nx + m$; $k \neq 0$, тогда в силу того, что трёхчлен имеет один корень:

$$g(x) = k(x - x_0)^2, \text{ где } x_0 = -\frac{n}{2k} \text{ - единственный корень.}$$

~~Пусть~~ $g(ax+b) = k(ax+b-x_0)^2$

$g(cx+d) = k(cx+d-x_0)^2$

$$g(ax+b) + g(cx+d) = k((ax+b-x_0)^2 + (cx+d-x_0)^2)$$

По условию этот многочлен имеет один корень, значит:

$$k((ax+b-x_0)^2 + (cx+d-x_0)^2) = 0$$

$$(ax+b-x_0)^2 + (cx+d-x_0)^2 = 0 \quad (\text{т.к. } k \neq 0)$$

$\cancel{ax+b+cx+d=2x_0}$

$$ax+b-x_0 = cx+d-x_0$$

$$ax+b = cx+d = 0$$

$\cancel{x = \frac{d-b}{a-c}}$; $\cancel{x = -\frac{b}{a}}$; $x =$

$$x = -\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$$

С другой стороны:

$$g(ax+b) = k(ax+b)^2 + n(ax+b) + m = k(a^2x^2 + 2abx + b^2) + nax + nb + m$$

$$g(cx+d) = k(cx+d)^2 + n(cx+d) + m = k(c^2x^2 + 2cdx + d^2) + ncx + nd + m$$

$$g(ax+b) + g(cx+d) = k(a^2+c^2)x^2 + (2k(cd+ab) + n(a+c))x + k(b^2+d^2) + n(b+d) + 2m$$

Это квадратный трёхчлен, который имеет один корень:

$$x = \frac{-(2k(cd+ab) + n(a+c))}{2k(a^2+c^2)}$$

Получаем уравнение:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{2k(cd+ab) + n(a+c)}{2k(a^2+c^2)}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{cd+ab}{a^2+c^2} + \frac{n(a+c)}{2k(a^2+c^2)}$$

$$\frac{b}{a}-\frac{cd+ab}{a^2+c^2}=\frac{n(a+c)}{2k(a^2+c^2)}$$

$$\frac{b(a^2+c^2)-a(cd+ab)}{a(a^2+c^2)}\cdot\frac{(a^2+c^2)}{a+c}=\frac{n}{2k}$$

$$\frac{b(a^2+c^2)-a(cd+ab)}{a(a+c)}=\frac{n}{2k}$$

$$\frac{ba^2+bc^2-acd-a^2b}{a(a+c)}=\frac{n}{2k}$$

$$\frac{bc^2-acd}{a(a+c)}=\frac{n}{2k}$$

Так как $-\frac{b}{a}=-\frac{d}{c}$, то $b=\frac{d\cdot a}{c}$

$$\frac{\frac{d\cdot a}{c}\cdot c^2-acd}{a(a+c)}=\frac{n}{2k}$$

$$\frac{acd-acd}{a(a+c)}=\frac{n}{2k}$$ ~~(т.к. $a\neq c$, то $(a+c)\neq 0$)~~

$$\frac{n}{2k}=0$$

+

Исходя из этого, $x_0=-\frac{n}{2k}=0$

Ответ: $x_0=0$

№3 Решение: Пусть $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6$ — числа на доске, тогда

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}=A$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=6A$$

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{x_2+x_3+x_4}{3}=\frac{x_3+x_4+x_5}{3}=\frac{x_4+x_5+x_6}{3}$$

$$x_1+x_2+x_3=x_2+x_3+x_4=x_3+x_4+x_5=x_4+x_5+x_6$$

$$x_1=x_4;\ x_2=x_5;\ x_3=x_6$$

$x_1+x_2+x_3+x_1+x_2+x_3=6A$

$x_1+x_2+x_3=3A$

Следовательно, $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=A$

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{x_2+x_3+x_4}{3}=\frac{x_3+x_4+x_5}{3}=\frac{x_4+x_5+x_6}{3}=A.$$

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\geq\sqrt[3]{x_1\cdot x_2\cdot x_3}$$

$$A\geq\sqrt[3]{x_1\cdot x_2\cdot x_3}$$

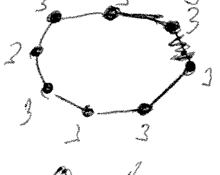
~~Значит максимальное значение среднего геометрического трёх соседних чисел - A.~~

~~Рав~~ Заметим, что равенство $A=\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ достигается при $x_1=x_2=x_3$. Т.к. одно из чисел равно 1, то максимальное значение среднего геометрического равно 1.

Ответ: 1.

~~№1 Решение:~~ ~~Из~~ условия следует, что каждый завод должен иметь автобусное сообщение минимум со 147 другими заводами. В противном случае он может попасть в четвёрку заводов, в которой не будет иметь автобусного маршрута ни с одним из других трёх заводов.

Исходя из этого, все заводы должны быть связаны автобусными маршрутами. Минимальное число искомых пар достигается если соединить заводы в одну цепочку, где каждый завод (кроме ~~...~~) будет входить в две искомых пары.



Тогда их число равно:

$$\frac{150\cdot 2}{2}-1=150-1=149 \text{ пар.}$$

7

Ответ: 149 пар.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ SQ62-32

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №1

a - кол-во установок 1 типа

4a - кол-во установок 2 типа

c - кол-во установок 3 типа

понятно, что a и c — целые

(+)

$5c = 99 + 4a$

$c = \frac{99+4a}{5}$

причем $\frac{c}{a} = n$ n - натуральное

$\frac{\frac{99+4a}{5}}{a} = n$

$\frac{99+4a}{5} = na$

$99 + 4a = 5na$

$99 = 5na - 4a$

$99 = a(5n-4)$

$a = \frac{99}{5n-4}$

a - натуральное, значит $5n-4 = 1, 3, 11, 33$ или 9, 99 (все делители 99)

$5n-4=1$

но тогда $a = 99$ и сумма числа установок > 200 ($5a + c$, $5a > 200$)

$5n-4=3$

$a = 33$

$\frac{99+4a}{5} = \frac{231}{5}$ - не целое такого не может быть т.к. c - целое

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ SQ62-32

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$5n-4=9$ $\quad \frac{99+44}{5}$ - не целое
$a=11$

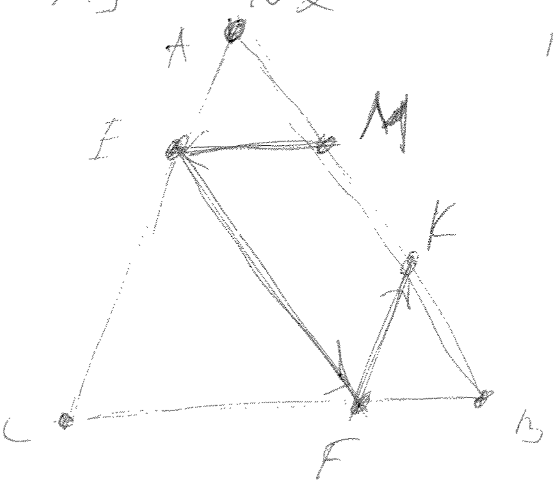
$5n-4=11$ $\quad \frac{99+36}{5}=27$ этот вариант подходит
$a=9$

$5n-4=33$ $\quad \frac{99+12}{5}$ - не целое $\quad a=9 \quad 4a=36$
$a=3$ $\quad c=27$

$5n-4=99$ $\quad \frac{99+4}{5}$ - не целое
$a=1$

Ответ: установок I типа - 9, установок II типа - 36, установок III типа - 27

Задача №2



~~по т. теоремы т. Фалеса~~

Допустим $\frac{AM}{MB}=\frac{p}{q}$

$ME \parallel CB$
$EF \parallel AB$
$KF \parallel AC$

Тогда по теореме Фалеса

$\frac{AE}{EC}=\frac{p}{q}$, далее $\frac{BF}{CF}=\frac{p}{q}$

и $\frac{KB}{AK}=\frac{p}{q}$

Если $p \neq q$

то точки M и K не совпадут.

EM, EF, KF прямые, по которым движется точка M.

Лист 2 из 5

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

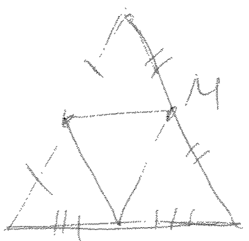
Вариант: 7кл 1

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ SQ62-32

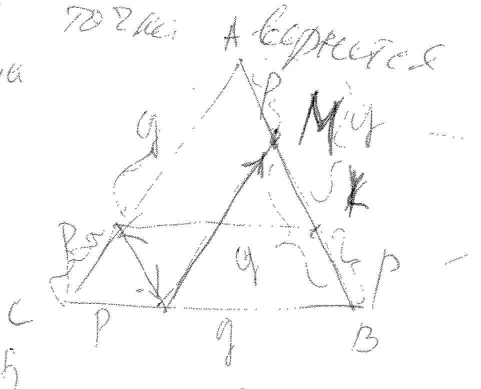
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Но, если мы посмотрим на отношение отрезков относительно A, то за ~~одну~~ ~~операцию~~ один такой цикл, отношение отрезков поменялось с $\frac{p}{q}$ на $\frac{q}{p}$ $\left(\frac{AM}{MB}=\frac{p}{q}, \frac{AK}{KB}=\frac{q}{p}\right)$. Тогда еще через один такой цикл, у нас появится новая точка E, такая, что $\frac{AE}{EB}=\frac{p}{q}$. Тогда ~~E~~ E совпадет с M.

Значит, если $p \neq q$ точка M вернется в исходное положение через 6 ходов. Если $p=q$, то точка вернется через 3 хода.



за 3 хода



отношение отрезков

Задача №3.

Возьмем ~~числа~~ любые 2 числа a и b. Сумма оставшихся 999 чисел $= c$.

$a = b + c$

$b = a + c$

$b = b + c + c$

$b = b + 2c$

$2c = 0$

$c = 0$

$a = b + 0 = b$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Тогда любые 2 числа равны. Значит

$999e=0$

$e=0$

999е — это ж 999 чисел, кроме а и в

Тогда $в=а=е=0$

Значит все числа $=0$.

Тогда их произведение $=0$.

Ответ: 0

(+)

Задача №4

$z, x, y \neq 0$

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}$$

$(x+y)y=(x+z)z$

$xy+y^2=xz+z^2$

$xy-xz=z^2-y^2$

$x(y-z)=(z+y)(y-z)$

2 варианта

$y=z$

~~z~~

$\frac{x+y}{y}=\frac{2y}{x}$

$x(x+y)=2y^2$

$x^2+yx=2y^2$

$x^2-y^2=y^2-yx$

$(y-x)(y+x)=y(y-x)$

$y \neq z$

$x=z+y$

$\frac{z+y}{x}=1$

2 варианта

$y=x$

$y=x=z$

$\frac{2x}{x}=2$

(например $\frac{2}{1}=2$ $x=y=z=1$)

$y \neq x$

$y+x=y$

$z+x=y$

$\frac{z+x}{y}=1$

НО!!

$\frac{z+x}{y}=1$

$z+x=y$

$\frac{y+z}{x}=1$

$y+z=x \Rightarrow y=x-z$

$z+x=x-z$

$2z=0$

$z=0$

Значит ед. вар.

$\frac{x+y}{z}=2$ Ответ: 2

(−/x)

Задача №5.

Посмотрим на ~~кол-во~~ изменение кол-ва яблок и апельсинов.

Окрем	изм. я	изм. а
3я 1а	−2	+2
2я 2а	0	0
1я 3а	+2	−2
0я 4а	+4	−4

где вазы, где действия?

±

В начале у нас было нечетное кол. яблок. В конце мы должны получить четное кол. яблок (0, 4, 8, ...), но каждым ходом мы изменяем кол. яблок на четное число, то есть четность не изменяется. (всегда нечетное кол. яблок)

Противоречие.

№4.

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$$

1. чтобы избавиться от первого знаменателя, я домножаю числитель на z, следовательно, домножаю и остальные числители.

$$\frac{\cancel{z}(x+y)}{\cancel{z}} = \frac{z(x+z)}{y} = \frac{z(y+z)}{x}$$

2. второй числитель я домножаю на y, а третий на x. Получается:

$$xy(x+y) = zx(x+z) = zy(y+z)$$

3. $x-y=z \neq 0$, тогда значение $\frac{x+y}{z} = \frac{z+y}{y} = \frac{y+z}{x} = 2$.

Числа x, y, z ~~не~~ могут быть разными, т.к:

$$|x^2y + xy^2 = z^2x + x^2z| = y^2z + z^2y$$

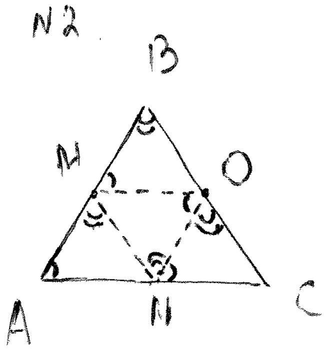
$$|x^2y - x^2z = z^2x - xy^2|$$

$$x^2(y-z) = x(z^2-y^2)$$

$$x^2y + xy^2 = z^2y + y^2z$$

$$x^2y - z^2y = y^2z - xy^2$$ (см. лис. 06)

N2



$MN \parallel BC$

$NO \parallel AB$

$MO \parallel AC$

Т.к. $MN \parallel BC$, $NO \parallel AB$, $MO \parallel AC$, то $MO = \frac{1}{2}AC$, $MN = \frac{1}{2}BC$; $NO = \frac{1}{2}AB$. (подобие △)

Отметим равные углы:

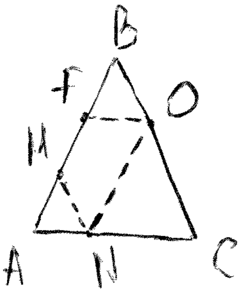
$\angle MON = \angle ONC$ (накрест.) $= \angle BMO$ (накрест лежащие) $= \angle MAN$ (верт.)

$\angle CON = \angle ONM = \angle AMN$ (верт.)

$\triangle MBO = \triangle MON$, т.к. $\angle B = \angle N$; $\angle BMO = \angle MON$, MO — общая сторона. $\Rightarrow NO = MB \Rightarrow \triangle NOC = \triangle MBO = \triangle MAN$.

Минимальное число шагов $= \frac{3}{2}AB = \frac{P_{\triangle ABC}}{2} = P_{\triangle MON}$

Но если т. M расположена не на середине AB, то



она не вернется в исходное положение, т.к. она не может пересекать (выходить за) треугольник ABC.

№1.

1 составим уравнение:

$X + y + z \leq 200$

(+)

$y = 4X$

$4X + 99 = 5z$

$z = \frac{4x + 99}{5}$

$X + 4X + 0,8X + 24,18 \leq 200$

$5,8X = 175,82$

$X \approx 30$, следовательно $X < 30$.

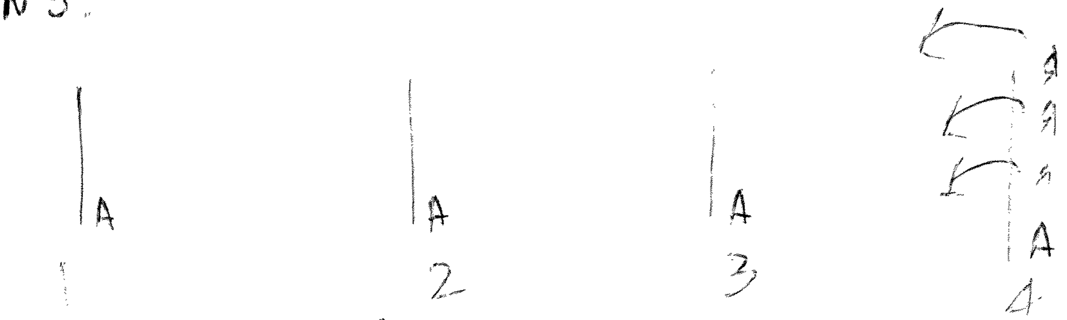
4X - четное число, а 4X+99 делится на 5 без остатка. ⇒ 4X заканчивается либо на 1, либо на 6. Т.к 1 нечетное число, то 4X заканчивается на 6, следовательно X заканчивается либо на 4, либо на 9.

X	4X	z
29	116	~~39~~ 43
24	96	39
19	76	35
14	56	31
9	36	27

По условию z должно быть кратно ~~3~~ x, следовательно $x = 9$; $y = 36$; $z = 27$.

Ответ: 1ого типа — 9; второго — 36; третьего — 27.

№ 5.



13 апельсинов и 3 яблока. Следовательно, в каждой вазе хотя бы 1 апельсин. Саша не могла получить во всех 4 вазах одни фрукты (только яблоки в одних подразумевает, что в другой только апельсины), т.к яблок — 3, а количество фруктов не изменилось, т.к. допустим, что в вазе 4 — 1 апельсин и 3 яблока. И Саша заменила на противоположные все фрукты из этой вазы. а Апельсин будет меняться на яблоко, которое она только что переложила, в итоге в 4 вазе останется 3 апельсина и 1 яблоко.

?

То есть, количество фруктов в вазах меняться не будет, а значит во всех четырех вазах не могут быть одни и те же фрукты.

N 3.

Множество $M = 0$, т.к все числа $- 0$, т.е

$0^{1001} = 0$. сумма $= 0$, произведение тоже будет равно нулю.

Если мы берем число 1, то множество $= 1$, сумма $= 1001$, но при замене одного из элементов (1), сумма будет $= 1000 \cdot 1 + (1 \cdot 1000) = 2000$, т.е число не может содержать числа больше нуля. $X \leq 0$.

Если мы возьмём отрицательное число, то $-1^{1001} = -1$, сумма равна -1001, при замене одной -1 на $(-1 \cdot 1000)$, сумма будет равна -2001, т.е $X = 0$.

Ответ: произведение $M = 0$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ SQ62-84

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$y(x^2-z^2)=y^2(z-x)$

$y(x^2-z^2)=y^2(z-x) \to y(z-x)=x^2-z^2$

$x(z^2-y^2)=x^2(y-z) \to x(y-z)=z^2-y^2$

$z(y^2-x^2)=z^2(x-y) \to z(x-y)=y^2-x^2$

$-y=x+z$; $-x=z+y$; $-z=x+y$ (поменяли знаки, поставив $-$ перед)

подставим эти выражения в изначальное:

$-\frac{z}{z}=\frac{-y}{y}$; $\frac{-x}{x}=-1$, где ~~%~~

x, y, z — разные числа, и тогда

значение $=-1$.

Лист 06 из 06

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~4) Т.к. отношения принимают одинаковое значение, то получим равенство~~

~~$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}$~~

~~$x+y^2=x+z^2$~~

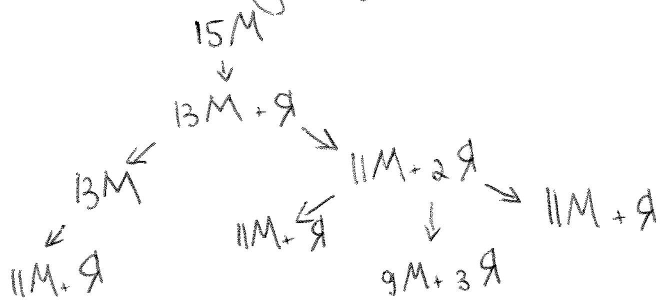
~~$y^2=z^2$~~

~~Т.к. отношения принимают одинаковое значение, то получим другое равенство~~

~~$\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$~~

~~$x^2+z=y^2$~~

5) Начнём расписывать ходы действий.



+

Заметим, что при любых убираниях в вазе чётность мандаринов не изменяется. Кол-во мандаринов в вазе всегда нечётное число. 1 - нечётное число. Значит, в вазе останется мандарин.

Ответ: мандарин останется в вазе

3) $M=\{a_1; a_2; a_3; \dots; a_{99}\}$

Предположим, что сумма всех элементов равна с. Получим:

$a_1+a_2+a_3+\dots+a_{99}=C$ (1)

Заменим a_1 на сумму оставшихся 98 элементов. Получим:

$a_2+a_3+a_4+\dots+a_{99}+a_2+a_3+a_4+\dots+a_{99}=C$

$2\cdot(a_2+a_3+a_4+\dots+a_{99})=C$

$a_2+a_3+a_4+\dots+a_{99}=\frac{1}{2}C$ (2)

Из (1) вычтем (2), получим

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ___________ ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ SHO 73-42

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$-\frac{\begin{aligned}a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{99}&=C\\ a_2+a_3+\ldots+a_{99}&=\tfrac{1}{2}C\end{aligned}}{a_1=\frac{1}{2}C}$$

Аналогичным образом проделаем ту же самую операцию для каждого элемента множества M. Получим:

$$\underbrace{a_1=\tfrac{1}{2}C\ ;\ a_2=\tfrac{1}{2}C\ ;\ a_3=\tfrac{1}{2}C\ ;\ \ldots\ ;\ a_{99}=\tfrac{1}{2}C}$$

$\Downarrow$

$a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{99}$

Т.к. все элементы множества M равны, то получим, что их сумма

$\frac{1}{2}C\cdot 99=\frac{99}{2}C$

Т.к. сумма всех элементов C и $\frac{99}{2}C$, то получим уравнение

$\frac{99}{2}C=C$

$\Downarrow$

$C=0$

Т.к. $C=0$, то $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$, ..., $a_{99}=0$

Найдём произведение всех элементов.

$0\cdot0\cdot0\cdot0\cdot\ldots\cdot0=0$

Значит, 0 – произведение всех элементов множества M.

Ответ: 0 – произведение всех элементов множества M.

(4) Т.к. отношения принимают одинаковое значение, то

$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$

Приведём все дроби к общему знаменателю.

$\frac{x+y}{z}^{\backslash xy}=\frac{x+z}{y}^{\backslash xz}=\frac{y+z}{x}^{\backslash yz}$

$x^2y+xy^2=x^2z+xz^2=y^2z+yz^2$

Рассмотрим два результата

$x^2y+xy^2=x^2z+xz^2$

$\cancel{x}(xy+y^2)=\cancel{x}(xz+z^2)$

$xy+y^2=xz+z^2$

Допустим, что $y>z \Rightarrow xy+y^2>xz+z^2$. Противоречие.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Допустим, что $y<z \Rightarrow xy+y^2<xz+z^2$. Противоречие

Значит, $y=z$.

Рассмотрим других два результата.

$x^2z+xz^2=y^2z+yz^2$

$z(x^2+xz)=z(y^2+yz)$

$x^2+xz=y^2+yz$

Допустим, что $x>y$, тогда $x^2+xz>y^2+yz$. Противоречие

Допустим, что $x<y$, тогда $x^2+xz<y^2+yz$. Противоречие

Значит, $x=y$.

Т.к. $y=z$ и $x=y$, то $x=y=z$.

Т.к. все три числа равны, то в дроби мы можем подставить одинаковые буквы

$\frac{z+z}{z}=\frac{y+y}{y}=\frac{x+x}{x}$

$\frac{2\cancel{z}}{\cancel{z}}=\frac{2\cancel{y}}{\cancel{y}}=\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}$

$2=2=2$

Значит, значение каждой дроби 2.

Ответ: 2 - значение.

F

① I - x ус

II - $4x$ ус

III - xn ус

$5xn=4x+22$

$5xn-4x=22$

$x(5n-4)=22$

$x=\frac{22}{5n-4}$

Т.к. изготовили более 100 установок, то

$\frac{22}{5n-4}+\frac{22}{5n-4}\cdot 4+\frac{22}{5n-4}>100$

$\frac{22}{5n-4}+\frac{88}{5n-4}+\frac{22n}{5n-4}>100$

$110+22n>500n-400$

$510>478n$

$\Downarrow$

$n=1$

Подставим в первоначальное уравнение. Получим

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$5x = 4x + 22$

$x = 22$

Значит, 22 установки I типа.

$22 \cdot 4 = 88$ (ус) – II типа

$22 \cdot 1 = 22$ (ус) – III типа

Ответ: 22 установки I типа, 88 установок II типа, 22 установки III типа.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ SIO 73 - 68

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.

1. x.
2. 4x.
3. y.

} ≥ 110.

$\frac{x}{5}$ = целое число.

Если бы 3. ~~[illegible]~~ [illegible] было бы больше в 5 раз чем 1 [illegible] [illegible]

$5y - 4x = 22.$

Чтобы x:5, y должен быть = от x. Т.к при других обстоятельствах, к примеру ~~[illegible]~~ $2y = \cancel{x}$.

~~$2,5x - 4x = 22$~~

$2,5x - 4x = 22$, этого быть не может, т.к ответ должно быть положительное число.

Следовательно $x = y$.

$5x - 4x = 22.$

$x = 22$, значит

$110 - 88 = 22.$

$22 \cdot 4 = 88.$

1. 22.
2. 88.
3. 22.

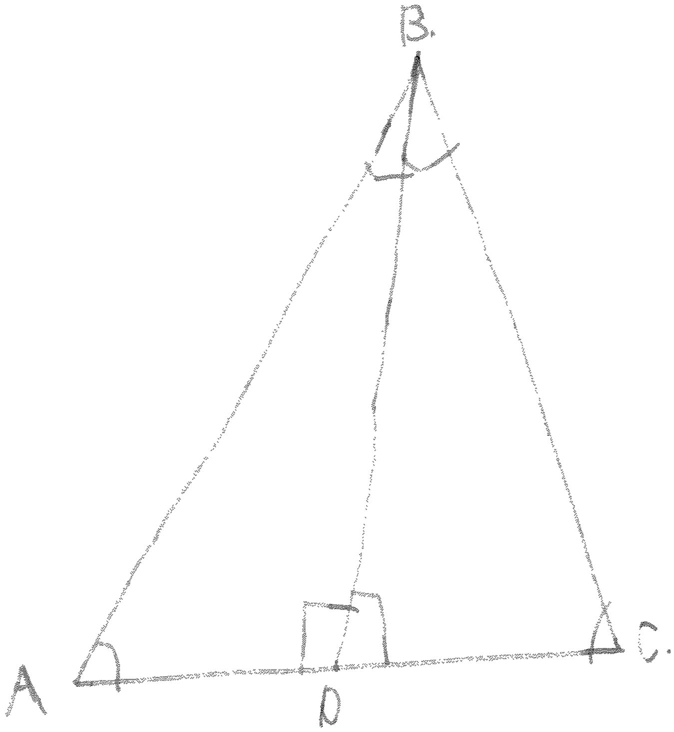
} т.к ≥ 110.

Ответ: 22 - первого т.ч, 88 второго, 22 третьего

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2.



Δ ABC должен быть равнобедренным ?
чтобы было наибольшее количество ∠ = N.

Сумма ∠ Δ ABD и ∠ Δ CBD = 360°. (+)

Предположим что ∠A = ∠B = ∠C = N = 60°,

чтобы получить 2 Δ нам нужно, провести биссектрису от одного из ∠в, к примеру ∠B

то получится всего лишь 2 = N.
предположим что ∠A = 45°, ∠C = 45°, а угол B = 90°.
То у нас получится, два угла по 90° и ~~два~~
4 угла по 45° = N.

Ответ: максимум 4∠ по 45°.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3.

Возьмем эт число за x, а сумму остальных за y.

$x+y=b$ по условию, а также было тогда и только

$y+y=b$ тогда, когда $x=0$, следовательно $y=0$.

Возьмем эт число за c, а сумму остальных за $y+x-c$.

$\begin{cases} y+x=b \\ 2y=b \end{cases}$

$y=0$, $x=0$. Следовательно все элементы в множестве

$M=0$, а $0\cdot 99=0$.

Ответ: 0.

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$$

~~$x-y=z$ т.к~~

~~$z=y$ т.к.~~ $z=y$ т.к $\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}$.

Будут равны тогда когда $y=z$.

$$\frac{y+z}{x} = \frac{2y}{x} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{2y}{x} = \frac{x}{y}+1.$$

~~$2y-x=x$~~ $2y-x=1$.

$x=1$.
$y=1$.

Ответ: ~~1~~, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5.

Мандарин.

Сначала

Мандар	75	73	73	71	71	9	7	7	7	5	3	1
Яблок	0	1	0	1	0	1	2	1	0	1	1	2

В конце останется в любом случае 3 мандарина и 1 яблоко. Яблоко добавляется только в том ~~случае~~ случае когда берут два одинаковых фрукта, пусть уже в конце останется 1 мандарин и 1 яблоко, Весь мандаринов 75, значит если их брать по два раза, а так происходит в любом случае в конце останется остаток деления 75 на 2 = 1, он будет оставаться пока все яблоки не возьмут в конце, также заметим? Когда берут по 1 яблоку и мандарину, добавляем фрукт всегда изначальный, и как бы они ни хотели забрать эти мандарины, у них не останется выбора, и они вынуждены брать яблоки, если бы они были от 75 мандарина по последним фруктам стоял бы яблоко

Ответ: ~~Мандарин~~. Мандарин.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №1

1 тип — x, 2 тип — $4x$, 3 тип — nx

тогда x — должен быть равен: 1; 11; 22.

т.к. 2 тип кратен 1 и 3 тип кратен 1 и их разность кратна 22, а все дел. 22 равны: 1, 11, 22.

1 вар $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} 1\ \text{тип} = 1 \\ 2\ \text{тип} = 4 \\ 3\ \text{тип} = \frac{4+22}{5} \end{array}\right\} < 100$$

2 вар $x=11$

$$\left.\begin{array}{l} 1\ \text{тип} = 11 \\ 2\ \text{тип} = 44 \\ 3\ \text{тип} = \frac{44+22}{5} \end{array}\right\} = 100$$

+

3 вар

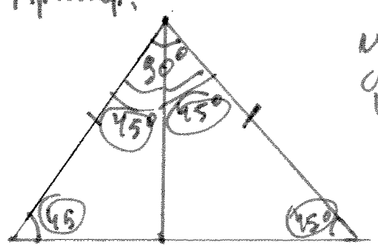
$$\left.\begin{array}{l} 1\ \text{тип} = 22 \\ 2\ \text{тип} = 88 \\ 3\ \text{тип} = \frac{88+22}{5} = 22 \end{array}\right\} > 100$$

проверим все условия и этот вариант подходит

Ответ: 1 тип = 22; 2 тип = 88; 3 тип = 22;

Задача №2

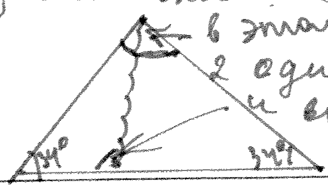
Ответ: 4 Пример:



у нас получается 4 равных угла.

+

Оценка: 5 шт. быть не может т.к. если есть такие углы они max — 34° т.к. $\frac{180}{5} = 34$.



в этом уголке не можем сделать 2 одинаковых угла и внизу т.к. там 180° и одним дел. мы можем выделить только 2 угл.

, А значит из всего этого следует, что кол-во одинаковых углов = 4.

Ответ: $N=4$.

Задача 5.

+

число 15 – нечётное.
при взятии двух один. фруктов чётность не изм.
т.к. уже берётся 2 и возв. 0 или берётся 0 и возв. 0.
при взятии двух разн. фруктов четность тоже неизм. т.к. мы берём 1 и возвращаем 1 тоесть тоже чётность не изм. получается последний фрукт это мандарин.

Задача 4.

$$\frac{x+y}{z};\quad \frac{x+z}{y};\quad \frac{y+z}{x};$$

согласитесь все числа должны быть равны т.к. если одно или два числа увеличить или уменьшить, то равенство нарушится.
И так зная что все числа равны мы можем сделать следущее

+

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{z} &= \frac{x+x}{x} = \frac{2x}{x} = \frac{2}{1} \\ \frac{x+z}{y} &= \frac{x+x}{x} = \frac{2x}{x} = \frac{2}{1}. \\ \frac{y+z}{x} &= \frac{x+x}{x} = \frac{2x}{x} = \frac{2}{1}. \end{aligned}\right\}$$

и так у нас все отношения равны, ну и значит у нас есть ответ

Ответ: $\frac{2}{1} = 2:1$.

1 способ

Задача 3.

Пусть у нас есть числа $x; x+1; x+2; \ldots x+98$.
при этом мы должны их расфасова.
$+x+x+98-(x+1+x+97) \ldots$
получается при замене любого числа у нас выходит это число в двойне тоесть если заменят x то сумма получится $\ldots -2x$ тоесть так дело идти не может, а нам надо чтобы при замене x сумма получалась 0
0 - это число которое можно получить, только если в множестве есть 0.
И, чтобы расфасовать на пары нам нужно, чтобы было нейтральное число, а нейтральным числом явияется только 0, если есть 0, то значит и произведение тоже равно 0
Ответ: 0.
~~тоесть~~ тоесть при замене например положительного числа, то мы 1 вычитаем раз и ещё раз тоесть сумма страдает дважды точно также с отриц. числами.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Дано:

$\triangle ABC$

$AB=BC=AC$

$\angle A=\angle B=\angle C=60°$

$\triangle A_1B_1C_1$

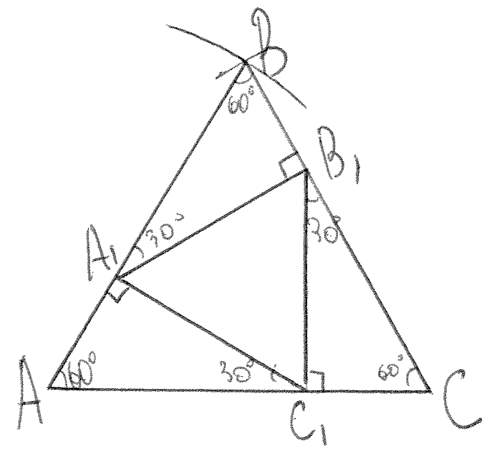
$\angle AA_1C_1=90°$

$\angle BB_1A_1=90°$

$\angle B_1C_1C=90°$

$\frac{BB_1}{B_1C}=\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{CC_1}{C_1A}$ - ?

$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}$ - ?



Решение:

1) $\angle \triangle A_1BB_1$; $\triangle C_1AA_1$; $\triangle B_1CC_1$: $\angle A=\angle B=\angle C=60°$, т.к. $\triangle ABC$ - правильный; $\angle A_1B_1B=\angle AA_1C_1=\angle B_1C_1C=90°$ $\Rightarrow$ $\angle A_1C_1A=\angle BA_1B_1=\angle C_1B_1C=180°-60°-90°=30°$.

2) $\angle \triangle A_1BB_1$; $\triangle C_1AA_1$; $\triangle B_1CC_1$: По теореме о угле в $30° \Rightarrow \frac{A_1B}{BB_1}=\frac{AC_1}{AA_1}=\frac{B_1C}{C_1C}=\frac{2}{1}$

3) Обозначим $BB_1=x \Rightarrow A_1B$ (из ②) $=2x \Rightarrow$ по теореме Пифагора $A_1B_1=\sqrt{4x^2-x^2}=\sqrt{3}x$

4) $\angle \triangle A_1B_1C_1$: $\angle A_1=\angle B_1=\angle C_1=60°$ $(180°-90°-30°) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ равносторонний, то есть правильный треугольник

5) из ④ $\Rightarrow$ $A_1B_1=A_1C_1=B_1C_1=\sqrt{3}x$; а это значит, что $BB_1=C_1C=A_1A=x$; $AC_1=A_1B=B_1C=2x$; т.к. $B_1C=A_1B=AC_1=$ $=$ ~~...~~ $\frac{\sqrt{3}x}{\sin 60°}=2x$, а по т. о угле в $30°$ $AA_1=BB_1=CC_1=x$.

6) Следовательно $\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{BB_1}{B_1C}=\frac{CC_1}{C_1A}=\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

7) Воспользуемся т. Герона: $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$.

8) $\triangle A_1B_1C_1$: $S_{A_1B_1C_1} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}x\cdot 3}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}x}{2} - \sqrt{3}\right)^3} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}x}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}x\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}x\sqrt{3}x\sqrt{3}x}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}} =$

$= \sqrt{\frac{3\cdot x^4\cdot 3\cdot 3}{4\cdot 4}} = \frac{3x^2}{4}\cdot\sqrt{3}$

9) $\triangle ABC$: $S_{ABC} = \sqrt{\frac{3x\cdot 3}{2}\cdot\left(\frac{9x}{2} - 3x\right)^3} = \sqrt{\frac{9x}{2}\cdot\frac{3x\cdot 3x\cdot 3x}{2\cdot 2\cdot 2}} = \frac{x^2\cdot 9}{4}\sqrt{3}.$

10) $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{\cancel{x^2}\cdot 9}{\cancel{4}}\cancel{\sqrt{3}}}{\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{4}}\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}.$

Ответ: $\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{AA_1}{A_1B} = \frac{CC_1}{C_1A} = \frac{1}{2}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{3}{1}.$

+

№3.

Пусть сумма всех 2015 чисел равна S, и некоторые три элемента — a, b, c.

По условию: $\underbrace{(S-a)}_{\text{сумма без элемента, когда его убрали.}} + \underbrace{(S-a)}_{\text{замена элемента суммой остальных}} = S$ — полученная сумма.

$2S - 2a = S$

$S = 2a$, то есть для всех чисел подходит данное выражение

$\begin{cases} S = 2a \\ S = 2b \\ S = 2c \end{cases} \Rightarrow$ все элементы равны между собой

$a = b = c = \ldots$

а значит $S = 2015\cdot a$, но в то же время $S = 2\cdot a$

$2015a = 2a$, то есть единственный корень, это $a = 0 \Rightarrow$ все элементы множества равны 0.

И их произведение тоже равно $0\cdot 2015 = 0$.

Ответ: 0

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Представим наш квадратный трёхчлен:

$g(x) = ax^2 + bx + c = 0.$

$D = b^2 - 4ac = 0$ (т.к. один корень)

$b^2 = 4ac.$

$x = \frac{-b}{2a}$ (по сути в задаче нам остается найти отношение b и a и тогда найдем x)

$g(1+3x) + g(2x-3) = 0.$

$a(9x^2 + 6x + 1) + b(3x+1) + c + a(4x^2 - 12x + 9) + b(2x-3) + c = 0$

$9a \cdot x^2 + 4a \cdot x^2 + 6a \cdot x + 3b \cdot x - 12a \cdot x + 2b \cdot x + a + b + 9a - 3b + 2c = 0$

$13a \cdot x^2 + x \cdot (6a + 3b - 12a + 2b) + (10a - 2b + 2c) = 0.$

$D = (5b - 6a)^2 - 52a(10a - 2b + 2c) = 0$ (т.к. и это выражение имеет лишь 1 корень)

$25b^2 - 60ab + 36a^2 = 520a^2 - 104ab + 104ac.$

$25b^2 + 44ab - 484a^2 - 104ac = 0$ – вспомним, что

$4ac = b^2$

$104ac = 26b^2$

$25b^2 + 44ab - 484a^2 - 26b^2 = 0.$

$b^2 - 44ab + 484a^2 = 0.$

Решим $f(b)$:

$D = 1936a^2 - 1936a^2 = 0.$

$b = \frac{44a}{2} \Rightarrow b = 22a$ (вот и нужное отношение)

$\begin{cases} b = 22a \\ x = \frac{-b}{2a} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-22a}{2a} = -11.$

Ответ: $x = -11$

+

№5.

Дано: a, b, c, d.

k - ?

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{c+d}{a+b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{a+d}{b+c} = \frac{b+c}{a+d} = k$$

$$\begin{cases} a+b = k(c+d) \\ c+d = k(a+b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = k(c+d) - b \\ a = \frac{c+d}{k} - b \end{cases}$$

$$k(c+d) - \cancel{b} = \frac{c+d}{k} - \cancel{b}$$

$$k^2 \cdot \cancel{(c+d)} = \cancel{(c+d)}$$

$$k^2 = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -1 \end{array}\right.$$ $k=1$ не подходит, т.к. числа разные.

$k = -1$ - ответ.

$a + b = -c - d$

$\left[\begin{array}{l} a \neq b \\ a \neq c \\ a \neq d \\ b \neq c \\ b \neq d \\ c \neq d \end{array}\right.$ вместе они не равны, правда могут быть равны некоторые из них, но не все сразу

То есть подойдут все примеры $a + b = -c - d$ в котором все не равны друг другу.

Мой пример: 0; 1; 2; -3

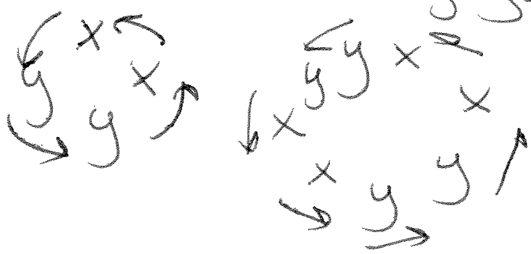
Таких четвёрок большое количество и нельзя ~~оно~~ описать все:

~~достаточно к исходному 0; 1; 2; -3 каждое увеличить на 1, а последнее на (-1)~~

Ответ: $k = -1$; (0; 1; 2; -3)

№1.

Для того, чтобы соблюдалось условие, дети должны становиться так, чтобы в любом случае уравнивалось: м,м,д; д,м,м, И в общем получиться так. Самый маленький подходящий хоровод будет таким



этот больше

То есть

число детей

будет ~~степенью 4.~~ 4·k, причем эти четыре стоят xxyy

м/м/д/д.

+

Ответ: $\boxed{k \cdot 4}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1. Решение: Пусть девочек x, а мальчиков y.

Пусть пар $М \to Д$ a (то есть девочка стоит справа от мальчика) $М \to Д = a$

Тогда пар ~~М→М и Д→~~ $М \to М = y - a$ (так как мальчиков слева от девочек a „оставшиеся" $y-a$)

Таким образом получаем:

$М \to Д = a$

$М \to М = y - a$

$Д \to Д = x - a$

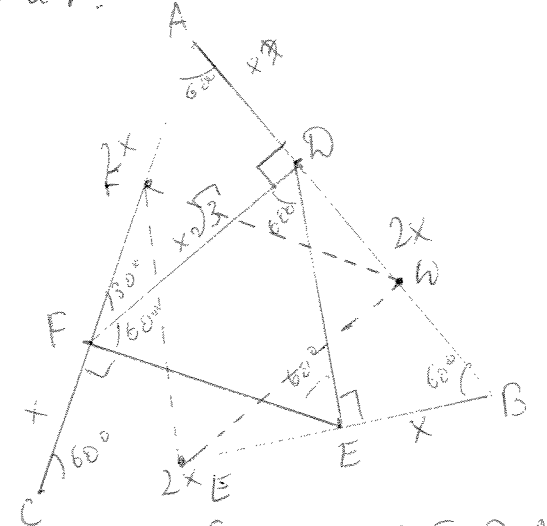
$Д \to М = a$

+

Из условия задачи $y + x - 2a = 2a$, откуда $y + x = 4a$.

Это значит, что число детей должно быть кратно 4!

задание 2. Пусть на сторонах AB, BC и ~~CD~~ AC взяты точки D, E и F.



Пусть $FD \perp AB$ (случай $DE \perp AB$ показан на рисунке в черном цвете. При решении данной задачи какая сторона ΔDEF перпендикулярна AB неважно.)

EF не может быть перпендикулярно AB.

Рассмотрим треугольник AFD

$\angle F = 30°$ ($\angle A = 60°$ $\angle D = 90°$). Угол $DFE = 60°$ ($\angle EFC = 90°$)

Действуя аналогично получаем, что DFE - равносторонний.
При этом:

$\Delta ADF = \Delta BED = \Delta CFE$

$\angle AFD = \angle BDE = \angle CEF = 30^\circ$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = BE = CF = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CE.$

Отсюда получаем, что каждая точка делит сторону в отношении $\underline{1:2}$.

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

~~$\Delta ABC \ \frac{AB}{DE} =$~~

пусть $AB = 3x$

тогда $DB = 2x$

$DE = 2x \cdot \cos 30^\circ = x\sqrt{3}$

$\frac{AB}{DE} = \sqrt{3}$

коэффициент подобия $= \sqrt{3}$

значит площади относятся как ~~1:3~~

$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = 3$

+

$\boxed{\text{Задача 3}}$ Решение: Если каждый из элементов можно заменять на сумму оставшихся, это значит, что он равен сумме всех остальных элементов

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= M_2 + M_3 + \dots + M_{2015} \\ M_2 &= M_1 + M_3 + \dots M_{2015} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} M_1 - M_2 &= M_3 + \dots M_{2015} \\ M_2 - M_1 &= M_3 + \dots M_{2015} \end{aligned} \Rightarrow \cancel{2M_1 = 2M_2}\ M_1 - M_2 = M_2 - M_1 \Rightarrow M_1 = M_2$$

Таким образом все элементы множества M равны.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ______

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ WE 43-30

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$M_1 = 2014 M_1$

Это возможно только при $M_1 = 0$

Значит произведение всех 2015 элементов равно 0

Ответ: 0

Задание 5. Решение: пусть взяты числа a, b, c и d.

$$\frac{a+b}{c+d} = k \qquad \frac{a+c}{b+d} = k$$

$$a+b = kc+kd \Rightarrow a = kc+kd-b$$
$$a+c = kb+kd \Rightarrow a = kb+kd-c$$
$$\Rightarrow kc+kd-b = kb+kd-c$$
$$kc-b = kb-c$$
$$k(c+1) = k(b+1)$$
$$b = c$$

Значит как минимум 2 числа равны.

$$\frac{a+b}{b+d} = \frac{b+d}{a+b} = k \Rightarrow (a+b)^2 = (b+d)^2$$

Это возможно в 2-х случаях:

1) $k = 1$ $\quad \frac{a+b}{b+d} = 1 \qquad \frac{a+d}{b+b} = 1$

$a+b = b+d \Rightarrow a = d$

$\cancel{a+b = b+d}$

$a+d = 2b \Rightarrow a = b.$

Но по условию задачи не все числа одинаковы

2) $k = -1$ $\quad \frac{a+d}{b+c} = -1$ (не равно 0, т.к. на 0 $(b+c=0; a=0)$ делить нельзя)

$a+d = -2b.$

Таким образом два числа из 4-х одинаковы, а другие 2 сумма других двух противоположна по знаку сумме предыдущих

Примеры: $1, 2, -1{,}5, -1{,}5$

$$\frac{1-1{,}5}{2-1{,}5} = \frac{-0{,}5}{0{,}5} = -1; \quad \frac{1+2}{-1{,}5-1{,}5} = \frac{3}{-3} = -1$$

$-1; 1, 0, -2$; и так далее

+

Ответ: $k=-1$, чисел бесконечность. – Списали?

Задание 4

Пусть $g(x)=ax^2+bx+c$

Если $g(x)$ имеет один корень, то

$b^2-4ac=0$

$x=\frac{-b}{2a}$

$g(1+3x)=a(3x+1)^2+b(3x+1)+c=a(9x^2+6x+1)+b(3x+1)+c=$

$=\underline{9ax^2}+\underline{6ax}+a+\underline{3bx}+b+c$

$g(2x-3)=a(2x-3)^2+b(2x-3)+c=a(4x^2-12x+9)+b(2x-3)+c=$

$=\underline{4ax^2}-\underline{12ax}+9a+\underline{2bx}-3b+c$

$g(1+3x)+g(2x-3)=(13ax^2)+((5b-6a)x)+(10a-2b+2c)$

Если $g(1+3x)+g(2x-3)=0$ имеет один корень, то

$(5b-6a)^2-4(13a)(10a-\cancel{6b}^{2b}+2c)=0$

$25b^2-60ab+36a^2-(52a)(10a-2b+2c)=0$

$25b^2\underline{-60ab}+36a^2-520a+\underline{104ab}-104ac=0$

$\underbrace{25b^2-100ac}_{=0}-4ac+\cancel{54ab}\,44ab-520a+36a^2=0$

$44ab-520a+36a^2+\underbrace{b^2-4ac}_{=0}=b^2$

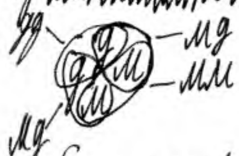
$36a^2-520a+44ab=b^2$

–

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~N1. Чтобы выполнялись условия задачи, нужно, чтобы кол-во связок мм мд и дд мд было равно. мм и мд; дд и мд было равно. Если связка мм - одна, тогда~~

N1. Чтобы выполнялись условия задачи, нужно, чтобы кол-во связок мм с дд было равно кол-ву связок мд. Тогда кол-во связок мм и дд тоже будет равно. Хоровод из минимального кол-ва человек будет состоять из 4 человек - 2 девочки и 2 мальчика.

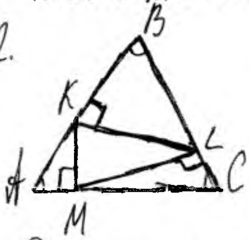


±

Если кол-во связок мм - одна, тогда кол-во связок дд - 1, а мд - 2. Кол-во людей равно кол-ву связок. Тогда сумма людей в хороводе всегда будет делиться на 4.

Ответ: любое число, делящееся на 4.

N2.



ABC - равносторонний

ΔKBL - прямоугольный

$\angle BLK = 180° - 90° - 60° = 30°$

Рассмотрим Δ-ки AKM, BLK и CML:

1) $\angle KMA = \angle LKB = \angle MLC$ (прямоуг)
2) $\angle A = \angle B = \angle C$ (по усл.) $\Rightarrow \Delta AKM \sim \Delta BLK \sim \Delta CML$

$\angle BLK = \angle AKM = \angle CML = 30°$

$\angle MKL = 180° - \angle AKM - \angle BKL = 180° - 30° - 90° = 60°$

$\angle KLM = 180° - 90° - 30° = 60°$

$\angle LMK = 180° - 90° - 30° = 60°$

$\angle MKL = \angle KLM = \angle LMK \Rightarrow \Delta MKL$ - равностор.

$MK = KL = ML \Rightarrow \Delta AKM = \Delta BLK = \Delta CML \Rightarrow AM = KB$

AM лежит напротив $\angle 30° \Rightarrow AM = \frac{1}{2}AK = KB$

$AK = 2KB \Rightarrow$ Точки делят стороны в отношении $2:1$.

$tg\angle KBL = \frac{KL}{KB}$

$tg\angle 60° = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{KL}{KB} = \sqrt{3}$

$AB = AK + KB = 2KB + KB = 3KB$

$\frac{KL}{\frac{1}{3}AB} = \sqrt{3}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7991

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ WE 43-35

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{\frac{1}{3}AB}{KL}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{AB}{KL}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$k=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KML}}=k^2=\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{9}{3}=3$$

+

~~Ответ: точка делит сторону в отношении 2:1; отношение площадей 3:1.~~

Ответ: точка делит сторону в отношении 1:2; отношение площадей 3:1.

N3. $M\{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_{2014}; a_{2015}\}$.

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2014}+a_{2015}=(a_2+\ldots+a_{2014}+a_{2015})+a_2+\ldots+a_{2015}$$

$$a_1=a_2+\ldots+a_{2015}$$

±

Значит, каждое число равно сумме всех других чисел.

Множество состоит из отриц. и полож. чисел. Если бы все числа были бы положительными, то сумма чисел, больших, чем меньшее число, не равнялось бы меньшему числу.

Пусть в множестве есть число −2. Оно равно сумме всех других чисел. Значит сумма отриц. чисел должна давать в сумме с суммой полож. чисел отрицательное число. Значит, модуль суммы отриц. чисел больше модуля полож. чисел.

Пусть в множестве есть число 2. Значит, ~~модуль~~ сумма полож. чисел с отриц. числами даёт полож. число. Следовательно, модуль полож. чисел больше модуля отриц. чисел. Но это противоречит ранее доказанному. Значит, множество M состоит из 2015 нулей. Значит, произведение равно нулю.

Ответ: 0.

N4. $g(x)=ax^2+bx+c$

$D=b^2-4ac=0$; $x=\frac{-b}{2a}$

$g(1+3x)+g(2x-3)=0$

$$(a(1+3x)^2+b(1+3x)+c)+(a(2x-3)^2+b(2x-3)+c)=0$$

① ②

$$1)\ a(1+3x)^2+b(1+3x)+c=a\left((1+3x)+\frac{b}{2a}\right)^2$$

$D=b^2-4ac=0$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x=\frac{-b}{2a}$

2) $a(2x-3)^2+b(2x-3)+c=a\left((2x-3)+\frac{b}{2a}\right)^2$

$D=b^2-4ac=0$

$x=\frac{-b}{2a}$

$a\left(1+3x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\left(2x-3+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

$\left(1+3x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\left(2x-3+\frac{b}{2a}\right)^2$

Квадраты неотрицательные. значит, они равны нулю.

$1+3x+\frac{b}{2a}=2x-3+\frac{b}{2a}=0$

$1+3x+\frac{b}{2a}=2x-3+\frac{b}{2a}$

$1+3x=2x-3$

$x=-4$

$1+3x+\frac{b}{2a}=0$

$\frac{b}{2a}=-1-3x=-1+12=11$

$-\frac{b}{2a}=-11$

Ответ: -11. +

N5. Пусть есть 4 числа:

$x, y, z, t.$

$\frac{x+y}{z+t}=\frac{z+t}{x+y}=k$

$\frac{x+y}{z+t}=k, \frac{z+t}{x+y}=\frac{1}{k}$

$k=\frac{1}{k}$

$k^2=1$

$k=\pm1$

Если $k=1$, тогда:

$\frac{x+y}{z+t}=\frac{x+t}{y+z}=\frac{x+z}{y+t}=\frac{z+t}{x+y}=\frac{y+z}{x+t}=\frac{y+t}{x+z}$

$x+y=z+t$

$x+t=y+z$

$x+z=y+t$

А это возможно, только когда все числа одинаковы. Но это противоречит условию, значит $k=-1$. Четвёрка чисел: $2, 2, -1, -3$. Все четвёрки чисел будут построены по следующему принципу:

Пусть в четвёрке есть число a. Тогда в этой четвёрке чисел есть ещё такое же число a. Остальные числа: $-a+1$ и $-a-1$.

Четвёрка чисел выглядит следующим образом:

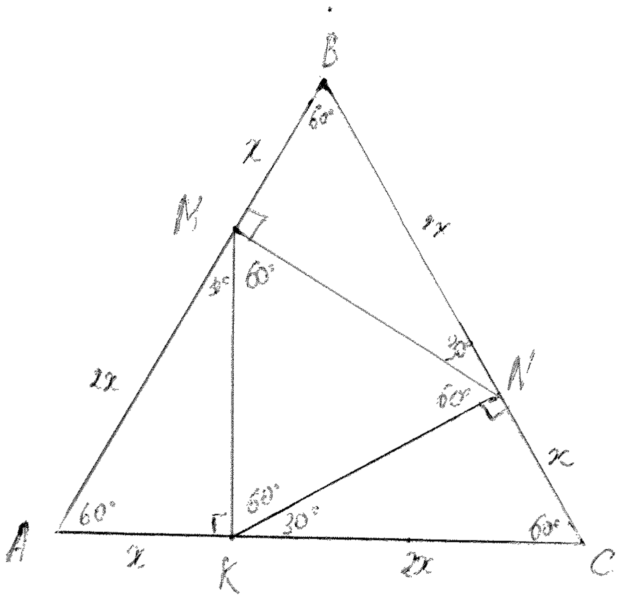
$a, a, -a+1, -a-1$, где a - любое число, кроме нуля. Кол-во данных четвёрок неограниченно.

Не все возм.

Ответ: $k=-1$; $2, 2, -1, -3$; см. выше.

∓

№2



$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

$\angle AMK = \angle CKN = \angle BNM = 30°$ => $\triangle MNK$ - равносторонний.

$MN = MK = NK$ => $\triangle AMK = \triangle BNM = \triangle CKN$.

В прям-ном $\triangle$ против угла в 30° лежит половина гипотенузы

$AM = BN = KC = 2x$

$MB = AK = NC = x$

Точки делят в отношении $\frac{2}{1}$.

$MN = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$ (по т. Пифагора)

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2\sqrt{3}}{4}$ (по формуле площади равност. $\triangle$)

$S_{MNK} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}} = \frac{\frac{9x^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{1}$

Ответ: 2 к 1; 3 к 1. +

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2015}$

Пусть $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2015}$

Заменим a_1 на $a_2 + a_3 + \dots + a_{2015}$

$a_2 + a_3 + \dots + a_{2015} + a_2 + a_3 + \dots + a_{2015} = S$

+

$a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_{2015}$

$a_2 = a_1 + a_3 + \dots + a_{2015}$

$a_1 + a_2 = a_1 + a_2 + 2(a_3 + a_4 + \dots + a_{2015}) \Rightarrow a_3 + a_4 + \dots + a_{2015} = 0$ (таким способом доказываем, что сумма любых 2013 чисел равна 0)

$a_1 = a_2 + a_3 + \dots + a_{2015}$

$a_2 = a_1 + a_3 + \dots + a_{2015}$

$\vdots$

$a_{2015} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2014}$

$a_1 + a_2 + \dots + a_{2015} = 2014(a_1 + a_2 + \dots + a_{2015}) \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{2015} = 0$

Т.к. сумма любых 2013 чисел равна 0, то

$a_1 = -a_2$

$a_1 = -a_3$

$a_1 = -a_4$

Это возможно, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_{2015} = 0 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{2015} = 0$

Ответ 0

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

a_1, a_2, a_3, a_4

$\frac{a_1+a_2}{a_3+a_4} = x \quad \frac{a_3+a_4}{a_1+a_2} = \frac{1}{x}$

Но $x = \frac{1}{x} = k \Rightarrow x = \pm 1$

Если $x = 1$, то ~~2 любых~~ сумма 2-ух любых чисел равна сумме 2-х других. А это возможно когда все 4 числа равны.

$\begin{cases} a_1+a_2=a_3+a_4 \\ a_1+a_3=a_2+a_4 \\ a_1+a_4=a_2+a_3 \end{cases}$ - возможно при $a_1=a_2=a_3=a_4$

Значит $k=-1$

Ряд чисел:

$1, 1, -1, -1.$

Если будет $\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$, что не имеет смысла

Всех возможных четверок чисел будет бесконечно, т.к. это будут числа вида: $n, n, -n, -n$, $n \neq 0$

∓

№1.

Если расположить детей в таком порядке: ММДД, то сосед справа того же пола будет ММДД 2, а другого пола ММДД. Следовательно, в хороводе будет $4n$ детей, $n \in N$.

±

№4

$g(x)=ax^2+bx+c$

Пусть p - корень

$x_1+x_2=2p=-\frac{b}{a} \Rightarrow b=-2pa$

$x_1x_2=p^2=\frac{c}{a} \Rightarrow c=p^2a$

$g(1+3x)+g(2x-3)=a(1+6x+9x^2)+b(1+3x)+c+a(4x^2-12x+9)+b(2x-3)+c=0$

$13ax^2+(5b-6a)x+10a+2c-2b=0$

$D=(5b-6a)^2-4(13a)(10a+2c-2b)=25b^2-60ab+36a^2-520a^2-$

$-104ac+104ab=-484a^2+25b^2+44ab-104ac=0$

Заменим b и c и решим уравнение относительно p.

$-484a^2+25\cdot(-2pa)^2+44a\cdot(-2pa)-104a\cdot p^2a=0$

$-484a^2+100p^2a^2-88pa^2-104p^2a^2=0$

$-4p^2a^2-88pa^2-484a^2=0 \quad |\cdot -\frac{1}{4}$

$p^2a^2+22a^2p+121a^2=0$

$D_1=121a^4-121a^2\cdot a^2=0$

$p=\frac{-11a^2}{a^2}=-11$

Ответ: $p=-11$.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

В хороводе должно быть как минимум 2 человека одного пола. Нечетное число людей в хороводе быть не может, Отношение детей разных полов должно составлять 3:1 (кроме случая, когда в хороводе 4 ребенка, так как там возможно 2 мальчика и 2 девочки). Но число детей разных полов может быть одинаковое, если внутри хоровода будет соблюдаться эта же последовательность отношения полов. Значит число детей в хороводе кратно 4.

Ответ: $\{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$

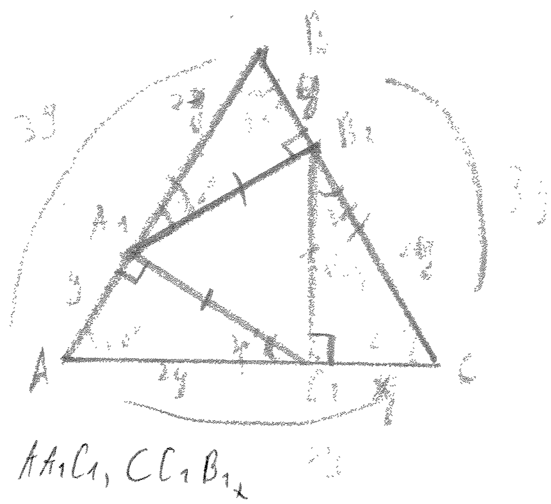
(+)

№2

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = BC = AC$
$\angle ABC = \angle BAC = \angle ACB = 60^\circ$
$A_1 \in AB$
$B_1 \in BC$
$C_1 \in AC$

$\frac{AA_1}{A_1B}$ — ?

Решение:



1) $\triangle\triangle A_1BB_1, AA_1C_1, CC_1B_1$

$\angle BA_1B_1 = \angle AC_1A_1 = \angle CB_1C_1 = 30^\circ$

Пусть $CC_1 = x$, тогда $CB_1 = 2x$ (по т. об стороне, лежащей против угла в 30°)

$AA_1 = y$, $AC_1 = 2y$

$BB_1 = z$, $A_1B = 2z$

$2z + y = 2y + x = 2x + z$

2) $\triangle\ \triangle A_1B_1C_1$

$\angle A_1B_1C_1 = \angle B_1A_1C_1 = \angle A_1C_1B_1 = 60^\circ \Rightarrow A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1$

3) $\triangle\ \triangle AA_1C_1$ и $\triangle BB_1A_1$ и $\triangle CC_1B_1$

$\angle BA_1B_1 = \angle AC_1A_1 = \angle CB_1C_1 = 30^\circ$
$\angle A_1BB_1 = \angle B_1CC_1 = \angle C_1AA_1 = 60^\circ$ $\Rightarrow \triangle BA_1B_1 \sim \triangle AC_1A_1 \sim \triangle CB_1C_1$

$$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_1B}{B_1C} = \frac{BB_1}{C_1C} = \frac{2z}{2x} = \frac{z}{x} = 1 \Rightarrow z = x = y$$
$$\frac{}{A_1C_1} \quad \frac{}{AC_1} \quad \frac{}{A_1A} \quad \frac{}{2y} \quad \frac{}{y}$$

4) $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{y}{2y} = \frac{1}{2}$

5) $\triangle\ \triangle A_1BB_1$. По т. Пифагора

$A_1B_1 = \sqrt{(2y)^2 - y^2} = \sqrt{3}\, y = B_1C_1 = A_1C_1$

6) $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $K = \frac{\sqrt{3}y}{3y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = K^2 = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{1}{2}$, $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ____________ ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ WE 43-38

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2013}, x_{2014}, x_{2015}\} \in M$

Пусть $x_{2015} = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2012} + x_{2013} + x_{2014}$

$x_{2014} = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2012} + x_{2013} + x_{2015} \Rightarrow x_{2015} = x_{2014} - x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_{2012} - x_{2013}$

$x_{2015} - x_{2015} = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2012} + x_{2013} + x_{2014} - x_{2014} + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2012} + x_{2013} = 2(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2012} + x_{2013}) = 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2012} + x_{2013} = 0$

$x_{2014} = x_{2015}$

~~Так как число элементов нечетное~~

Проделав это до конца, выясним, что $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \dots = x_{2014} = x_{2015}$ и если

$x_{2015} = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2013} + x_{2014}$, то $x_{2015} = 2014 \cdot x_{2015} \Rightarrow x_{2015} = x_{2014} = x_{2013} = \dots = x_2 = x_1 = 0$

Значит, их произведение тоже равно 0

Ответ: 0

+

№4

$g(x) = ax^2 + bx + c$

$g(3x+1) + g(2x-3) = a(3x+1)^2 + b(3x+1) + c + a(2x-3)^2 + b(2x-3) + c = a(9x^2 + 6x + 1 + 4x^2 - 12x + 9) + b(5x-2) + 2c = a(13x^2 - 6x + 10) + b(5x-2) + 2c = 0$

$D = b^2 - 4ac = 0 \quad (g(x))$

~~$D = (5x-2)^2 - 4$~~ Для того чтобы преобразовать второе уравнение к виду $ax_1^2 + bx_1 + c$

$(5x-2)^2 = (13x^2 - 6x + 10) \cdot 2$

$25x^2 - 20x + 4 = 26x^2 - 12x + 20$

$x^2 + 8x + 16 = 0$

$(x+4)^2 = 0$

$x = -4$

Ответ: $x = -4$

−

№5

Пусть даны числа a, b, c, d. $a, b, c, d \neq 0$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a+d}{b+c} = \frac{b+c}{a+d} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{c+d}{a+b} = K$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 = (c+d)^2 \\ (a+c)^2 = (b+d)^2 \\ (a+d)^2 = (b+c)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b = c+d \\ a+b = -(c+d) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a+c = b+d \\ a+c = -(b+d) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a+d = b+c \\ a+d = -(b+c) \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = c+d-b \\ a = -(c+d+b) \\ a = b+d-c \\ a = -(b+d+c) \\ a = b+c-d \\ a = -(b+c+d) \end{array}$$

$a = c + d - b = b + c - d = b + d - c = -(b+c+d)$

~~$a = 2d$, $a = 2b$, $a = 2c$ $\Rightarrow$ $c = b = d = a$~~

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b}=K$

$(c+d)^2=(a+b)^2$

$\left[\begin{array}{l} c+d=a+b \\ c+d=-(a+b) \end{array}\right.$

$K=\pm 1$

$(a+c)^2=(b+d)^2$

$a+c=b+d$

$a+c=-(b+d)$

$a=-(b+c+d)$

Так как ~~все~~ не все 4 числа одинаковые, то $K\neq 1$.

$\left.\begin{array}{l} a+b=c+d \\ a+c=b+d \\ a+d=b+c \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=c+d-b \\ c+\cancel{d}-b-b-\cancel{d}+c=0 \\ \cancel{c}+d-b+d-b-\cancel{c}=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=b \\ b=d \end{array}\right| c=b=d=a.$

Значит $K=-1$

$a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=-3$

$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b+c}{a+d}=\frac{a+d}{b+c}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{b+d}{a+c}=\frac{c+d}{a+b}=\frac{1+1}{1-3}=\frac{1+1}{1-3}=\frac{-3+1}{1+1}=\frac{-2}{2}=-1$

Ответ: $K=-1$. $a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=-3$. Таких четверок чисел бесконечно, при условии что $a+b+c=-d$ и $a=b=c$ и $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$.

+

№4

Решение:

Представим квадратный трёхчлен $g(x)$ в виде:

$g(x)=ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac=0$ (1 корень)

$b^2=4ac$

$g(1+3x)=a(1+3x)^2+b(1+3x)+c=a(1+6x+9x^2)+b(1+3x)+c=$
$=9ax^2+6ax+3bx+a+b+c$

$g(2x-3)=a(2x-3)^2+b(2x-3)+c=a(4x^2-12x+9)+b(2x-3)+c=4ax^2-12ax+2bx+9a-3bx$
$=4ax^2-12xa+9a+2bx-3b+c$

$g(1+3x)+g(2x-3)=9ax^2+6ax+3bx+a+b+c+4ax^2-12ax+2bx+9a-3b+c=13ax^2-6ax+5bx+10a-2b+2c=13ax^2+x(5b-6a)+10a-2b+2c$

$13ax^2+(5b-6a)x+10a-2b+2c=0$

$D=b^2-4ac=(5b-6a)^2-4\cdot 13a\cdot(10a-2b+2c)=25b^2-60ab+36a^2-520a^2+104ab-$
$-52a(10a-2b+2c)=25b^2-60ab+36a^2-520a^2+104ab-104ac=25b^2+44ab-484a^2-104ac=0$ (1 корень)

$25b^2=100ac$

$100ac-104ac+44ab-484a^2=0 \quad |:4$

$44ab-121a^2-ac=0$

$a(11b-121a-c)=0$

$a\neq 0$, т.к. это квадратный трёхчлен

$11b-121a-c=0$

$11b=121a+c$

$b=11a+\frac{1}{11}c$

$\left(11a+\frac{1}{11}c\right)^2=4ac$

$121a^2+2ac+\frac{1}{121}c^2=4ac$

$121a^2-2ac+\frac{1}{121}c^2=0$

$\left(11a-\frac{1}{11}c\right)^2=0$

$11a=\frac{1}{11}c \Rightarrow c=121a$

$b=11a+121a\cdot\frac{1}{11}=11a+11a=22a$

$ax^2+bx+c=ax^2+22a+121a=0$

$a(x^2+22a+121)=0$

$a\neq 0$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x^2+22x+121=0$

$D=b^2-4ac=484-484=0$

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-22}{2}=-11$

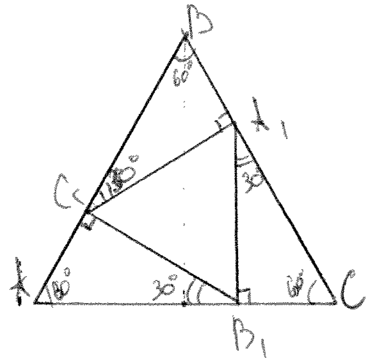
Ответ: -11

+

№2

Дано:
$\triangle ABC$ – прав.
$A_1\in BC$;
$B_1\in AC$;
$C_1\in AB$;
$B_1C_1\perp AB$ или $B_1C_1\perp AC$;
$C_1A_1\perp AB$ или $C_1A_1\perp BC$;
$A_1B_1\perp AC$ или $A_1B_1\perp BC$

Найти:
$AC_1:C_1B$; $BA_1:A_1C$;
$CB_1:B_1A$; $S_{A_1B_1C_1}:S_{ABC}$



Решение:

1) Т.к. $\triangle ABC$ – прав., то $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$

$\triangle A_1BC_1$, $\triangle AB_1C_1$, $\triangle A_1B_1C$ – прямоугольные $\Rightarrow \angle BC_1A_1=\angle AB_1C_1=\angle CA_1B_1=$
$=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

2) $\angle A_1C_1B_1=180^\circ-\angle BC_1A_1-\angle AC_1B_1=$
$=180^\circ-90^\circ-30^\circ=60^\circ$ (смежные) $\Rightarrow$

$\angle C_1A_1B_1=180^\circ-90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$\angle A_1B_1C_1=180^\circ-90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1$ – правильный $\Rightarrow A_1C_1=A_1B_1=B_1C_1$

3) из 2) $\Rightarrow \triangle A_1BC_1=\triangle AB_1C_1=\triangle A_1B_1C$ (по II признаку):

$A_1C_1=A_1B_1=B_1C_1$ (по док.)

$\angle BA_1C_1=\angle AC_1B_1=\angle A_1B_1C=90^\circ$ (по усл.)

$\angle BC_1A_1=\angle AB_1C_1=\angle CA_1B_1=30^\circ$ (по док.)

$\Rightarrow AC_1=BA_1=B_1C$; $BC_1=A_1C=AB_1$

4) A_1B лежит против угла, равного 30°, в прям. $\triangle A_1BC_1$

$\Rightarrow A_1B=\frac{1}{2}BC_1 \Rightarrow AC_1=\frac{1}{2}BC_1 \Rightarrow AC_1:C_1B=1:2=BA_1:A_1C$
$=CB_1:B_1A$ (т.к. прямоугольные треугольники равны)

5) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle B$

$S_{\triangle A_1BC_1}=\frac{1}{2}\cdot BA_1\cdot BC_1\cdot\sin\angle B$

$BA_1=\frac{1}{3}\cancel{AB}\,BC$; $BC_1=\frac{2}{3}AB$

$S_{\triangle A_1BC_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AB\cdot\frac{1}{3}BC\cdot\sin\angle B=\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle B\right)=$
$=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_1C_1}=S_{\triangle A_1B_1C}$

6) $S_{\triangle A_1B_1C_1}=S_{ABC}-S_{A_1BC_1}-S_{AB_1C_1}-S_{A_1B_1C}=S_{ABC}-\frac{6}{9}S_{ABC}=\frac{3}{9}S_{ABC}$,

т.е. $S_{A_1B_1C_1}:S_{ABC}=3:9=1:3$

Ответ: 1:2; 1:3.

+

N1

Решение:

Рассмотрим пример такой расстановки детей:

М - мальчик, Д - девочка

В хороводе всего стоят 16 детей (у 8 справа тот же пол, у 8 справа - другой пол)

Можно заметить, что в хороводе чередуется такая последовательность: ММДД

Если убрать ~~одного ребенка из хоровода~~, то нечётное количество детей из хоровода, то число детей в каждой группе невозможно будет уравнять

Если убрать двоих детей, то детей, у которых справа тот же пол будет либо больше, либо меньше

Если же убрать четверых детей, стоящих рядом в последовательности ММДД, то мы заметим, что число детей, у которых справа тот же пол, будет равным числу детей, у которых справа другой пол.

Значит в хороводе в любом случае должна быть одна или несколько последовательностей ММДД, т.е. число детей в хороводе должно делиться на 4.

Если же число детей в хороводе не будет делиться на 4, то чередование последовательностей ММДД будет нарушено и условие не будет выполняться.

Ответ: число детей в хороводе должно делиться на четыре.

N3

Решение:

Все числа множества М могут равняться нулю, условие будет выполняться, а их произведение будет равняться нулю.

Предположим, что числа множества М не равны нулю. ~~тогда~~ Сразу все числа не могут быть положительными или отрицательными, значит в множестве есть и положительные числа, и отрицательные.

1) Если мы выберем положительное число, то сумма всех 2014 остальных чисел должна быть положительной, значит сумма остальных полож. чисел по модулю больше суммы отриц. чисел по модулю.

2) Если мы выберем отрицательное число, то сумма всех остальных 2014 чисел должна быть отрицательной, значит сумма остальных отриц. чисел по модулю больше суммы положительных чисел по модулю.

Из 1) ⇒ сумма полож. чисел в множестве больше суммы отриц. чисел по модулю

Из 2) ⇒ сумма отриц. чисел в множестве по модулю больше суммы полож. чисел.

Противоречие, значит в множестве M все числа равны нулю и их произведение соответственно тоже равно нулю.

Ответ: 0.

№5

Решение:

Пусть 1-ое число будет x, 2-ое $-y$, 3-е $-z$, 4-ое $-a$

Тогда по условию задачи:

$$\frac{x+y}{z+a} = \frac{z+a}{x+y}$$

$(z+a)^2 = (x+y)^2$

$z+a = x+y \Rightarrow k=1$

$z+a = -x-y \Rightarrow k=-1$

$-z-a = x+y \Rightarrow k=-1$

$-z-a = -x-y \Rightarrow k=1$

$k = \pm 1$

Рассмотрим все варианты таких 4 чисел:

1) Все числа положительны:

Если взять два самых маленьких числа и два самых больших, то k не будет равняться 1, значит такой случай невозможен

2) Одно число отрицательно, другие положительны:

Это возможно только в случае если отриц. число по модулю больше, чем положительные и его модуль равен сумме этих полож. чисел.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ WE 43-56

Например:
$-20; 1; 2; 17$
Таких случаев можно привести бесконечное множество
3) Два полож. числа и два отриц. числа:
Можно взять самое маленькое по модулю отриц. число и самое большое полож. число и в другой группе оставшиеся числа и т.к. они не одинаковы, то такой случай невозможен (если числа будут равны по модулю, то знаменатель может быть равен нулю, что невозможно)
4) Одно полож. число и три отриц. числа:
Как во 2 случае этот случай возможен если полож. число больше, чем любое из отриц. чисел по модулю и равно их сумме по модулю.
Таких случаев можно привести бесконечное множество
5) Все числа отрицательные:
Если взять два самых маленьких числа по модулю а два самых больших по модулю, то k не будет равняться 1, значит такой случай невозможен.
Ответ: $k = \pm 1$
Пример: $-20; 1; 2; 17$.
Бесконечное множество случаев.

нет
строго
описания

±

④ $g(x) = ax^2+bx+c$

Если у него 1 корень, то $D=0 \Rightarrow b^2-4ac=0$ (1)

И тогда $x=-\frac{b}{2a}$ (2)

Тогда равенство $g(1+3x)+g(2x-3)=0$ имеет вид:

$$a(1+3x)^2+b(1+3x)+c+a(2x-3)^2+b(2x-3)+c=0$$

$$a((1+3x)^2+(2x-3)^2)+b(1+3x+2x-3)+2c=0$$

$$a(13x^2-6x+10)+b(5x-2)+2c=0$$

$$13x^2\cdot a-6ax+10a+5bx-2b+2c=0$$

$$a\cdot 13x^2+(5b-6a)\cdot x+10a-2b+2c=0$$

Данное уравнение тоже имеет 1 корень $\Rightarrow D=0$, значит:

$$(5b-6a)^2-4\cdot 13a\cdot(10a-2b+2c)=0$$

$$25b^2-60ab+36a^2-520a^2+104ab-104ac=0$$

из (1) $\Rightarrow b^2=4ac \Rightarrow 25b^2=100ac$

$$-4ac+44ab-448a^2=0$$

$$11ab-ac-112a^2=0$$

$$11b-c-112a=0 \quad (3)$$

Если 1 корень $\Rightarrow x=\frac{-5b+6a}{26a}$ (4)

Из (3) $\Rightarrow c=11b-112a$. Подставим в (1)

$$b^2-4a(11b-112a)=0$$

$$b^2-44ab+448a^2=0$$

$$b^2-44ab+484a^2-484a^2+448a^2=0$$

$$(b-22a)^2-36a^2=0$$

$$(b-22a-6a)(b-22a+6a)=0$$

$$(b-28a)(b-16a)=0 \Rightarrow b_1=28a;\ b_2=16a$$

~~Подставим~~ в (2) и в (4)

1) $\begin{cases} x_1=-\frac{28a}{2a} \\ x_1=-\frac{140a+6a}{26a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-14 \\ x_2=-5\frac{2}{13} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1=-\frac{16a}{2a}=-8 \\ x_2=\cancel{130}\ \frac{-80a+6a}{26a} \end{cases}$

Из (2) и (4) $\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{b}{2a} \\ x=\frac{-5b+6a}{26a} \end{cases} \Rightarrow -\frac{b}{2a}=\frac{-5b+6a}{26a}$

$$26b=2(6a-5b)$$

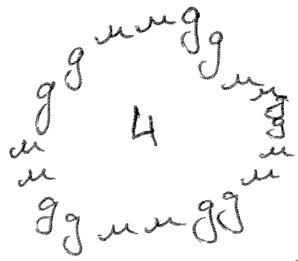
$$26b=12a-10b \Rightarrow a=3b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\frac{b}{2\cdot 3b}=-\frac{1}{6}$$

Ответ: $x=-\frac{1}{6}$

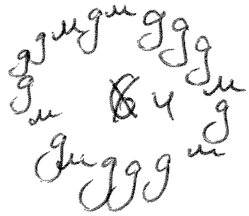
① Для начала скажем, что число детей должно быть чётным, т.к. число детей, у которых справа сосед того же пола равно числу детей, у которых сосед справа другого пола, а у одного и того же ребёнка сосед справа ~~x~~ может быть только один.

д – девочка, м – мальчик. Сначала поставим рядом 2 девочки и будем уравнивать детей из ~~раз~~ разных ~~кате~~ групп (тех, у кого справа сосед того же пола и тех, у кого другого пола)



Как видно, можно разделить хоровод на группы по 4 человека, в которых по 2 мальчика и по 2 девочки. Значит он может состоять из любого количества детей, кратного 4.

Продолжим далее, поставим рядом 3 девочки:



Здесь можно разделить на группы по ~~8~~ 4 детей.

Если будем продолжать далее, то заметим закономерность:

1) Если берём чётное количество девочек, то „ряды" из подряд идущих детей чередуются (мальчики и девочки), а если берём нечётное количество девочек, то „ряды" есть только у девочек, а после „рядов" идёт чередование

2) Я вывел такую закономерность: первое число – число детей одного пола в ряду, второе число – количество детей в группе, на которое можно разделить:

~~2-4, 3-6, 4-8, 5-12, 6-20~~

2-4, 3-4, 4-12, 5-8, 6-20... все числа ⋮ 4, а значит детей, находящихся в хороводе может быть число, которое кратно 4

Ответ: число, кратное 4.

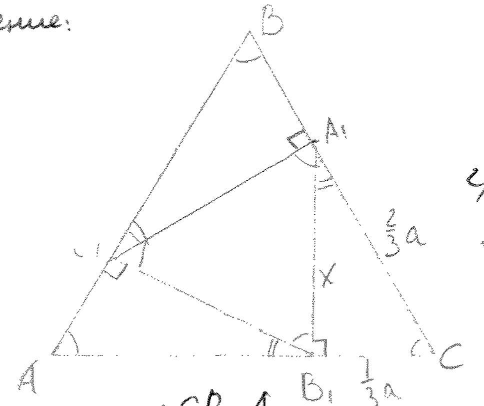
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

② Дано: $\triangle ABC$ – р/с, т. $A_1 \in BC$, т. $B_1 \in AC$, т. $C_1 \in AB$;

$A_1C_1 \perp BC$, $B_1C_1 \perp AB$, $A_1B_1 \perp AC$

Найти: 1) $\frac{A_1B}{A_1C}$, $\frac{C_1B}{AC_1}$; $\frac{AB_1}{B_1C}$; 2) $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$

Решение:



1) $\triangle ABC$ – р/с $\Rightarrow \angle A = \angle B = \angle C = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AB_1C_1 = \angle CA_1B_1 = \angle BC_1A_1 = 30°$

2) $\angle A_1C_1B_1 = \angle C_1A_1B_1 = \angle A_1B_1C_1 =$

$= 180° - 90° - 30° = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1$ – р/с

3) $\triangle BA_1C_1 = \triangle CB_1A_1 = \triangle AC_1B_1$ (по II приз), т.к.

$\angle A_1 = \angle B_1 = \angle C_1 = 90°$; $\angle B = \angle A = \angle C = 60°$; $A_1C_1 = C_1B_1 = A_1B_1$, т.к. $\triangle A_1B_1C_1$ – р/с

4) $\angle B_1A_1C = 30° \Rightarrow B_1C = \frac{1}{2}A_1C = \frac{1}{2}AB_1 \Rightarrow \frac{AB_1}{B_1C} = 2$

Остальные аналогично.

5) Пусть $AB = AC = BC = a \Rightarrow A_1C = \frac{2}{3}a$; $B_1C = \frac{1}{3}a$.

По теореме Пифагора: $x^2 = (\frac{2}{3}a)^2 - (\frac{1}{3}a)^2$

$x^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{9}a^2 = \frac{1}{3}a^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

6) $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по I приз), т.к. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{a} = k \Rightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{3}a : a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

7) ~~Площ~~ Отношение площадей равно квадрату коэффициента подобия $\Rightarrow \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{3}$.

Ответ: точки делят сторону как 2:1

$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{3}$.

+

3) Если при замене любого элемента общая сумма не меняется, то любой элемент равен сумме остальных 2014. Причём все 2015 элементов не могут быть положительными или все отрицательными. Тогда условие задачи выполнится не сможет. +

Допустим, что в этом ряду какое-то число а положительное, тогда и сумма остальных 2014 чисел — положительна. Но если же мы возьмём какое-то отрицательное число в (мы доказали, что оно будет), тогда сумма остальных 2014 чисел без „в" будет и подавно положительной, но тогда она не равна в. Противоречие, значит ни положительных, ни отрицательных чисел быть не может, а значит могут присутствовать только нули. А если присутствует хотя бы один 0, то произведение всех чисел в множестве равно 0.

Ответ. 0.

5) 1/ Если все 4 числа больше 0 или все меньше 0, то:

$\frac{a+b}{c+d}=k$ и $\cancel{\frac{a+b}{}}$ $\frac{c+d}{a+b}=k$. Если перемножить эти равенства, то: $1=k^2 \Rightarrow k=\pm1$, но т.к. все >0 или все <0, то

$k=1 \Rightarrow \frac{a+b}{c+d}=1$, $\frac{a+c}{b+d}=1$, $\frac{a+d}{b+c}=1$ $\Rightarrow \begin{cases} a+b=c+d \\ a+c=b+d \\ a+d=b+c \end{cases}$ Если сложить эти равенства, то:

$$3a+b+c+d=2b+2c+2d$$

$$3a=b+c+d \Rightarrow b=3a-c-d$$

Аналогично и с другими числами:

$3b=a+c+d$

$3c=a+b+d \Rightarrow 3c=a+3a-c-d+d \Rightarrow a=c$

$3d=a+b+c$

Аналогично можно найти, что все числа попарно равны, а значит: $a=b=c=d$, что не удовлетворяет условию

2) Если 2 числа больше нуля и 2 числа меньше нуля (Пусть $a, b>0; c, d<0$), тогда:

$k=\frac{a+b}{c+d} \Rightarrow k<0$

$k=\frac{a+b}{c+d}=\frac{c+d}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2=(c+d)^2 \Rightarrow |a+b|=|c+d| \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b=-(c+d) \Rightarrow k=-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{c+d}=-1 \\ \frac{a+c}{b+d}=-1 \\ \frac{a+d}{b+c}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a+b=-(c+d) \\ a+c=-(b+d) \\ a+d=-(b+c) \end{array}$$

3) Если 3 числа больше 0 или 3 числа меньше 0, тогда $k=-1$ аналогично со 2 пунктом. Значит всегда $k=-1$

Значит во 2 пункте числа должны быть такие, что (Пусть $a, b>0; c, d<0$)

$$\left.\begin{array}{l} b=a+3 \\ |c|=a+1 \\ |d|=a+2 \end{array}\right| - \text{условие.}$$

Причём ни одно число не может быть нулём, и не может быть чисел, таких, что $x=-y$

Например: $a=1, b=4, c=-2, d=-3$; $k=-1$

±

Ответ: $k=-1$; числа $1, 4, -2, -3$. Таких чисел может быть бесконечное количество, но они должны удовлетворять условию

т.к.

$\frac{a+b}{c+d}=-1$; $\frac{a+a+3}{-a-1-a-2}=-1$ - верно; $\frac{a+c}{b+d}=-1$; $\frac{a-a-1}{a+3-a-2}=-1$ - верно

$\frac{a-a-2}{a+3-a-1}=-1$ - верно

нет общего описания

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$$\frac{a+b}{c+d}=k \quad \frac{c+a}{b+d}=k \quad \frac{c+b}{a+d}=k$$

1) $a=kb+kd-c$

$a=kb+kc-d$

$a+c=k(b+d)$

$a+d=k(b+c)$

$c-d=kd-kc$

$$\frac{c-d}{d-c}=k=-1$$

2) $\frac{a+b}{c+d}=-1$

$a+b+c+d=0$

$a+b\neq 0 \quad c+d\neq 0$

$a+c\neq 0 \quad b+c\neq 0$

$a+d\neq 0 \quad b+d\neq 0$

Пример:

$a=5 \; b=5 \; c=-4 \; d=-6$

$\frac{5-4}{5-6}=-1 \quad \frac{5+5}{-4-6}=-1$

$\frac{5-6}{5-4}=-1 \quad \frac{-6-4}{5+5}=-1$

3) Всего таких чисел бесконечное множество - списание?

например: $a=-3 \; b=-6 \; c=4 \; d=5$; $a=-30 \; b=-60 \; c=40 \; d=50$ и т.д.

$a=5 \; b=5 \; c=-4 \; d=-6$; $a=50 \; b=50 \; c=-40 \; c=-60$ и т.д.

Ответ: $k=-1$

∓

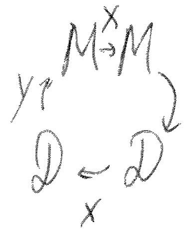
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть М - мальчик; Д - девочка; X - сосед справа того же пола; Y - сосед справа другого пола

−/+

Пример:

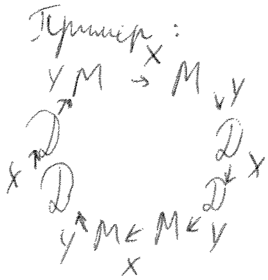


X=2
Y=2
X=Y

Чтобы выполнялось условие X=Y, надо чтобы кол-во детей было чётным, т.к. у каждого только один сосед справа, а если кол-во детей нечётное, то X и Y будут отличаться.

В хороводе может быть любое кол-во детей, самое главное, чтобы их было чётное число

Пример:

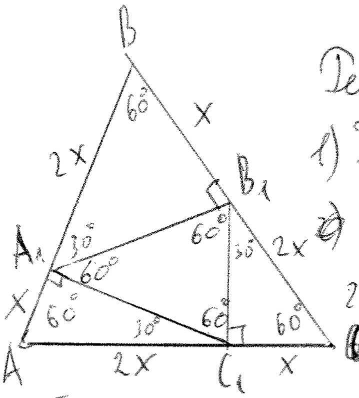


X=4
Y=4
X=Y

Ответ: в хороводе может быть любое чётное число детей.

№2

Дано
$\triangle ABC$
Найти
$AA_1 : A_1B = ?$
$S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = ?$



Решение

1) Т.к. $\triangle ABC$ правильный, то $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$

2) $AB = AC = BC$

2) $\angle A = 60^\circ$ $\angle AA_1C_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle AC_1A_1 = \angle 30^\circ$
по аналогии $\angle BAB_1 = \angle 30^\circ = \angle CB_1C_1$

3) Т.к. в прямоугольном $\triangle$ есть угол в 30°, то (пусть $AA_1 = x$)
$AC_1 = 2AA_1$ $B_1C = 2CC_1$ $A_1B = 2BB_1$ из 1 $\Rightarrow AA_1 = CC_1 = BB_1 = x$
$AC_1 = B_1C = A_1B = 2x$

4) $A_1B_1 = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3}x = A_1C_1 = B_1C_1$; т.к. (3)

5) $S_{ABC} = AC \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = 3x \cdot 3x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $S_{A_1B_1C_1} = \sqrt{3}x \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = 9x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} : 3x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 : 1$

Ответ: $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = 3 : 1$
$AA_1 : A_1B = 1:2$ $BB_1 : B_1C = 1:2$ $CC_1 : C_1A = 1:2$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Пронумеруем все элементы, как $a_1; a_2; a_3$ и т.д.

Т.к в условии сказано, что любой элемент можно заменить на сумму других, то заменим все элементы.

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2015}=2014(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2015})$

$-2013(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2015})=0$

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2015}=0$ Теперь мы можем заменить $a_2+a_3+\ldots+a_{2015}$ на a_1

$2a_1=0$ $a_1=0$ $\Rightarrow$ произведение $a_1 \cdot a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_{2015}=0$

Ответ: это произведение равно 0.

+

№4

1) $g(x)=ax^2+bx+c$ $ax^2+bx+c=0$ $D=0=b^2-4ac$ $x=\frac{-b}{2a}$

Заменим x $\frac{b^2}{2}\cancel{x}-\frac{b^2}{2a}+c=0$ $2ac-2c+c=0$ $c(2a-1)=0$

$c\neq0$ (тогда было бы 2 корня)

$a=0{,}5$ $b^2=4ac$ $x^2=2c$

2) $g(1+3x_1)+g(2x_1-3)=6{,}5x_1^2-3x_1+5x_1b-2b+2c+5=0$

$D=0=(5b-3)^2-4\cdot6{,}5(2c-2b+5)=25x^2+9+30x-26x^2-52x-130=0$

3) ~~$25x^2-48x-121=0$~~ $-x^2-22x-121=0$

$D=0$ $x=\frac{22}{-2}=-11$

$25x^2+9+30x-26x^2-52x-130=-x^2-22x-121.$

Ответ: $x=-11$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7991

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ WE 43-83

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N4

Так как g(x) имеет ровно один корень, то

$g(x)=(x-a)^2$ т.к дискриминант равен 0.

тогда

в уравнении

$(1+3x-a)^2+(2x-3-a)^2=0$

дискриминант тоже равен 0

$1+9x^2+a^2+6x-2a-6ax+4x^2+9+a^2-12x-4ax+6a=0$

$13x^2+x(-6a-6-4a)+2a^2+4a+10=0$

(1) $13x^2+x(-10a-6)+2a^2+4a+10=0$

$D=(10a+6)^2-13\cdot4(2a^2+4a+10)=$

$=100a^2+120a+36-104a^2-208a-520=0$

$-4a^2-88a-484=0$

$a^2+22a+121=0$

$(a+11)^2=0 \Rightarrow a=-11$

$\Rightarrow x=\ldots$

подставим $a=-11$ в уравнение (1) и найдем x

$13x^2+x(-10\cdot(-11)-6)+2\cdot(-11)^2+4\cdot(-11)+10=0$

$13x^2+104x+208=0$

~~$x^2+8x+16=0$~~

Неоптим. путь решения

Лист 01 из 06

№4 (продолжение)

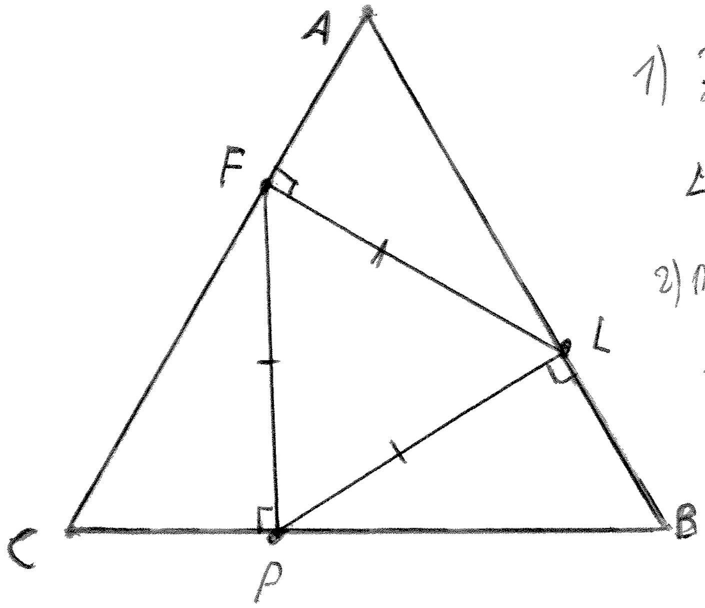
$(x+4)^2=0$

значит $x=-4$

Ответ: $x=-4$.

№2.

две ~~стороны~~ стороны образованного треугольника не могут быть перпендикулярны одной стороне исходного, тогда они будут лежать на одной прямой. Значит получается такой рисунок



1) Значит углы

$\angle AFL = \angle PLB = \angle CPF = 90^\circ$

2) т.к. $\triangle ABC$ - правильный

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$, тогда

$\angle CFP = \angle ALF = \angle LPB = 30^\circ$ и

$\angle PFL = \angle LPF = \angle FLP = 60^\circ$

значит $\triangle FPL$ - тоже правильный

3) $\angle$ $\triangle CFP$, $\triangle AFL$, $\triangle PLB$

$$\left.\begin{array}{l} FP = FL = PL \\ \angle CPF = \angle AFL = \angle PLB = 90^\circ \\ \angle CFP = \angle ALF = \angle LPB = 30^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \triangle CFP = \triangle ALF = \triangle BPL$$

по II признаку равенства

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (продолжение)

4) т.к $\triangle CFP = \triangle ALF = \triangle BPL \Rightarrow$

$AF = BL = CP$

$CF = AL = BP$

5) $\sin\angle FLA = \frac{AF}{AL} = \frac{AF}{CF} = \frac{1}{2} = \frac{BL}{AL} = \frac{CP}{BP}$

Значит $\frac{AF}{CF} = \frac{BL}{AL} = \frac{CP}{BP} = \frac{1}{2}$

6) $\triangle FLP \sim \triangle ABC$

$\sin\angle FCP = \frac{FP}{CF} = \frac{FP}{\frac{2}{3}AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$2FP = \frac{2}{\sqrt{3}} AC$

$\frac{FP}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{k}$

7) $\frac{S_{ABC}}{S_{FLP}} = k^2 = 3$

Ответ: $\frac{AF}{CF} = \frac{BL}{AL} = \frac{CP}{BP} = \frac{1}{2}$; $\frac{S_{ABC}}{S_{FLP}} = 3$

+

№3

при данном условии у нас числа

$a_1, a_2, \dots, a_{2015}$

если при замене a_1 на $a_2+a_3+\dots+a_{2015}$

$a_1+a_2 \dots +a_{2015} = (a_2+a_3+\dots+a_{2015})\cdot 2 \Rightarrow$

$a_1 = a_2+a_3+\dots+a_{2015}$

тоже самое для других чисел

$a_2 = a_1+a_3+\dots+a_{2015}$

$\vdots$

$a_{2015} = a_1+a_2+\dots+a_{2014}$

если мы сложим все эти выражения то получим

$a_1+a_2+\dots+a_{2015} = 2014\cdot(a_1+a_2+\dots+a_{2015})$

№3 (продолжение)

$2013 \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_{2015}) = 0 \Rightarrow$

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2015} = 0$

тогда

$a_1 = (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2015}) - a_1 = 0 - a_1 \Rightarrow$

$a_1 = 0$ $\cancel{= a_2 = 0}$

аналогично для других

и $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_{2015} = 0$

+

Значит

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{2015} = 0$

Ответ: произведение равно 0.

№5

4 числа - x, y, z, e

мы знаем, что

$$\begin{cases} x+y = k(z+e) & (\mathrm{I}-\mathrm{II}) \\ x+z = k(y+e) \\ x+e = k(y+z) \end{cases}$$

$y - z = k(z - y) \Rightarrow$

$$k = \frac{y-z}{z-y} = -1$$

тогда

$$\begin{cases} x+y = -z-e \\ x+z = -y-e \\ x+e = -y-z \end{cases}$$

№5 (продолжение)

сложим все 3 уравнения

$3x+y+z+e=-2z-2y-2e$

$x=-z-y-e$

то есть берем 3 произвольных числа

$+z;+y;+e;-z-y-e$ и четвертое их сумма с минусом, тогда

$z+y=k(e+z-y-e)=k(-z-y)$ $k=-1$ — верно

$z+e=k(-z-e)$ $k=-1$ — верно

$z+e=k(-z-e)$ $k=-1$ — верно

То есть система имеет бесконечное число решений

~~Ответ~~ $k=-1$.

например

$1;2;3;-6$

$1+2=k(3-6)=-1\cdot(-3)$

$1+3=k(-6+2)=-1\cdot(-4)$

$2+3=k(-6+1)=-1\cdot(-5)$

то есть подходит

Ответ: $k=-1$; например $1;2;3;-6$.

x,y,e — любые числа $z=-x-y-e$ бесконечно число четверок данных чисел

+

№1

m - число детей у которых сосед справа того же пола
n - число детей у которых сосед справа другого пола
x - количество мальчиков
y - количество девочек
тогда
$m = n$
$m+n = x+y$ $n = \frac{x+y}{2}$ $m = \frac{x+y}{2}$ значит $x+y \vdots 2$
число детей четно

Заметим, что из двух детей нельзя составить такой хоровод, а из четырех можно например
ММДД м- мальчик
Д- девочка, а дальше из таких четверок

можно образовывать хороводы где $x+y \vdots 4$ $\underbrace{ММДД...ММДД}_{n}$
из 4 человек можно сделать m-n либо 0 либо 4, либо -4
Если мы будем к четверке добавлять 2 человека, то m-n будет меняться на нечетное число и 0 мы не получим значит из $x+y \vdots 2$ но не $\vdots 4$ мы хоровод составить не сможем.
В итоге количество детей должно быть кратно 4

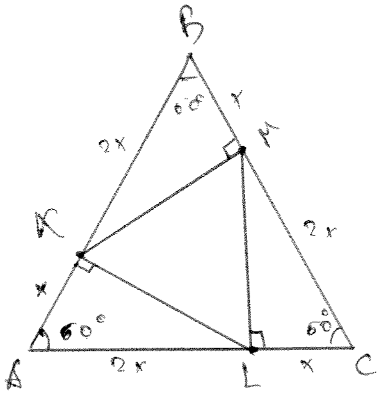
Ответ: $x+y \vdots 4$ т.е, количество детей должно было быть кратно 4.

+

№2.

Дано: ΔABC – р/с; $KL \perp AB$; $LM \perp AC$; $KM \perp BC$;

Найти: $AL:LC$; $CM:MB$; $BK:KA$; $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta KLM}$;



Решение:

1) Сумма углов $\Delta = 180°$, то

$\angle KLA = 180° - 60° - 90° = 30°$

$\angle BKM = 180° - 60° - 90° = 30°$

$\angle LMC = 180° - 60° - 90° = 30°$

2) Сторона леж. против угла в $30°$ равна $\frac{1}{2}$ гипотенузы (в прям. Δ).

Тогда: $2AK = AL$; $2BM = KB$; $2LC = MC$;

3) $\angle MKL = 180° - 90° - 30° = 60°$
$\angle MLK = 180° - 90° - 30° = 60°$
$\angle KML = 180° - 90° - 30° = 60°$ $\Rightarrow$ ΔKML – р/с; $KM = ML = KL$;

4) Отсюда: $AK = BM = LC = x$; $AL = MC = KB = 2x$;

$KL = LM = KM = 2x \cdot \sin 30° = 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}x$;

5) $\Delta ABC \sim \Delta KLM$ по 3 углам ($=60°$). Тогда:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KLM}} = k^2 = \left(\frac{AC}{KL}\right)^2 = \left(\frac{3x}{\sqrt{3}x}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 = 3,$$ т.е. $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta KLM} = 3:1$.

Ответ: Точки делят стороны в отношении $2:1$.
Отношение площадей тр-ков: $3:1$.

+

№4.

$g(x) = 0$

$x^2 + bx + c = 0.$

$D = b^2 - 4c = 0$; $b^2 = 4c$; $-0{,}5b^2 = -2c$;

Найти: корень: $\cancel{\frac{-2c}{b}} = \cancel{\frac{-0{,}5b^2}{b}} = \cancel{-0{,}5b}$ $\boxed{\frac{-b}{2}} = -0{,}5b.$

$g(1+3x) + g(2x-3) = 0.$

$(3x+1)^2 + (3x+1)b + c + (2x-3)^2 + (2x-3)b + c = 0.$

$9x^2 + 6x + 1 + 3xb + b + c + 4x^2 - 12x + 9 + 2xb - 3b + c = 0$

$13x^2 + (5b-6)x + (2c - 2b + 10) = 0$

$x^2 + \left(\frac{5b-6}{13}\right)x + \left(\frac{2c-2b+10}{13}\right) = 0$

$D = \left(\frac{5b-6}{13}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2c-2b+10}{13} = 0$; $\frac{25b^2 - 60b + 36}{169} = \frac{8c - 8b + 40}{13}$,

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ____________

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ WE 43-94

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$25b^2-60b+36=26b^2-104b+520.$

$b^2-44b+484=0.$

$\frac{D}{4}=22^2-484=484-484=0.$

$b=22.$

$-0{,}5b=-11.$

Ответ: этот корень: $x=-11.$ +

№1.

Чтобы получить такой хоровод, нужно чтобы дети стояли в таком порядке: (м - мальчик; д - девочка):

м м д д м м д д ...

Чередовались 2 мальчика через 2 девочки.

Тогда общее число детей должно быть обязательно кратно четырём.

№3.

Сумма каждого из элементов равна сумме остальных 2014, тогда:

$$\begin{cases} x_1=x_2+x_3+x_4+\ldots+x_{2015} \\ x_2=x_1+x_3+x_4+\ldots+x_{2015} \\ x_{2015}=x_1+x_2+\ldots+x_{2014} \end{cases}$$

сложим левые и правые части, получим:

$$2014(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2015})=(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2015})$$

Отсюда $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{2014}+x_{2015}=0.$

~~Тогда каждый элемент множества равен~~ нулю, а произведение элементов соответственно равно нулю.

Ответ: произведение равно нулю.

№5.

a_1, a_2, a_3, a_4 такие, что

$$\frac{a_1+a_2}{a_3+a_4}=\frac{a_1+a_3}{a_2+a_4}=\frac{a_1+a_4}{a_2+a_3}=k;$$

Тогда $k=-1$

Подойдут только числа $a, -a, b, -b$ (две пары чисел, сумма которых равна нулю).

Например: $2, -2, 1, -1$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N2.

$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$

$\Downarrow$

$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$

$3x_{n-1} = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-2}$ $(n-1 \geq 1 \Rightarrow n \geq 2)$

$\Downarrow$

$3x_n = 3x_{n-1} + x_{n-1} \Rightarrow x_n = \frac{4}{3}x_{n-1}$ => это геометрическая прогрессия. $\forall n \geq 2$

(+)

$3x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3}$

$x_k = \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \cdot x_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{x_0}{3}$ $(k \in Z; k \geq 2)$ (при $k=1$, получается $x_1 = \frac{x_0}{3}$ => верно для $k \geq 1$)

$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = x_0 + \frac{x_1 \cdot \left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{4}{3} - 1} = x_0 + \frac{\frac{x_0}{3} \cdot \left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{3}} =$

$= x_0 + x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = x_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Ответ: ~~$x_1 = \frac{x_0}{3}$; $x_k = \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$~~ $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{x_0}{3}$; $S_n = x_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

N3.

Пусть это числа a, b, c, d, e, f (именно в такой последовательности)

$\Downarrow$

$\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = A \Rightarrow a+b+c+d+e+f = 6A$

Пусть $\frac{a+b+c}{3} = x = \frac{d+e+f}{3} \Rightarrow a+b+c = d+e+f = 3x \Rightarrow$

$3x + 3x = 6A \Rightarrow x = A$

$$\begin{cases} \frac{a+b+c}{3} = A \\ \frac{b+c+d}{3} = A \\ \frac{c+d+e}{3} = A \\ \frac{d+e+f}{3} = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 3A & (1) \\ b+c+d = 3A & (2) \\ c+d+e = 3A & (3) \\ d+e+f = 3A & (4) \end{cases}$$

Из (1) и (2): $a = d$

Из (3) и (4): $c = f$

$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 3A \\ d+e+f = a+e+c = 3A \end{cases}$

$\Downarrow$

$b = e \Rightarrow$

Ряд имеет следующий вид $abcabc$. Во всех случаях три соседних числа это a, b и c. => Среднее геометрическое всегда одно и то же и равно $\sqrt[3]{abc}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХР 27-74

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Без ограничения общности скажем, что $c=1 \Rightarrow$

$a+b=3A-1 \Rightarrow b=3A-1-a$

$\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{a(3A-1-a)}=\sqrt[3]{(3A-1)a-a^2}$

$y=\sqrt[3]{x}\nearrow \Rightarrow$ Чтобы $\sqrt[3]{(3A-1)a-a^2}$ было максимальным, нужно чтобы $(3A-1)a-a^2$ было максимально, а это парабола ветвями вниз $\Rightarrow (3A-1)a-a^2$ максимально в вершине то есть при $a=\frac{-(3A-1)}{-2}=\frac{3A-1}{2}$

$\Downarrow$

$\sqrt[3]{(3A-1)a-a^2}=\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{2}-\frac{(3A-1)^2}{4}}=\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$.

+

№4.

Пусть $g(x)=mx^2+nx+p$ и имеет единственный корень $x_0 \Rightarrow g(x_0)=0$.

$m\neq 0$, т.к. тогда $g(x)$ - не квадратный трёхчлен

Пусть $m>0 \Rightarrow g(x)\geq 0\ \forall x$, т.к. имеет лишь один корень и имеет вид параболы. Пусть x_1 - корень $g(ax+b)+g(cx+d)$:

$g(ax_1+b)+g(cx_1+d)=0$

$g(ax_1+b)=-g(cx_1+d)$

Если $g(cx_1+d)>0$, то $g(ax_1+b)<0$, что невозможно, т.к. $g(x)\geq 0\ \forall x \Rightarrow$

$g(cx_1+d)=0=g(ax_1+b)$

$\Downarrow$

$cx_1+d=x_0=ax_1+b$, т.к. x_0 - единственный корень $g(x)$

$cx_1+d=ax_1+b \Rightarrow (a-c)x_1=d-b \Rightarrow x_1=\frac{d-b}{a-c}$, т.к. $a\neq c$

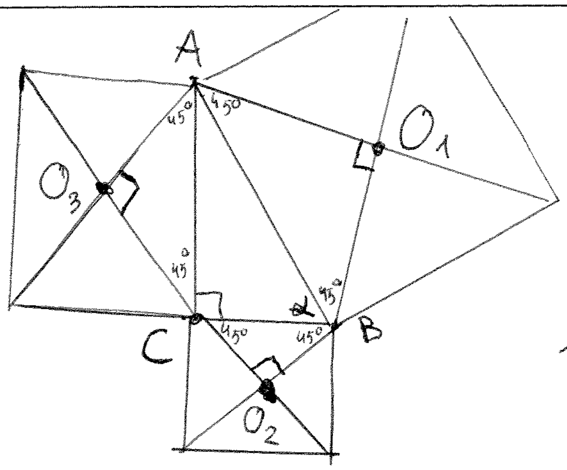
$x_0=ax_1+b=a\cdot\frac{d-b}{a-c}+b=\frac{ad-ab+ab-bc}{a-c}=\frac{ad-bc}{a-c}$

~~Ответ $\frac{ad+bc}{a+c}$~~

Если $m<0$, то $g(x)\leq 0\ \forall x$, что приводит к аналогичным рассуждениям $\Rightarrow x_0=\frac{ad-bc}{a-c}$

Ответ: $\frac{ad-bc}{a-c}$.

+



Пусть изначальный треугольник ABC, $\angle C=90^\circ$, $\angle ABC=\alpha$

Центры квадратов O_1, O_2, O_3 как на рисунке.

$\angle AO_1B=90^\circ$, как угол между диагоналями квадрата.

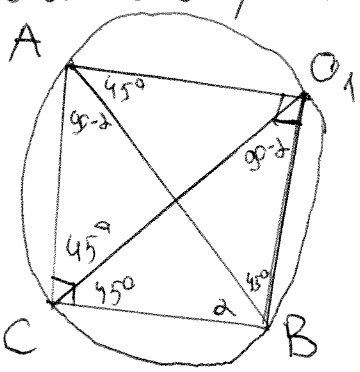
$\Downarrow$

$\angle ACB+\angle AO_1B=90^\circ+90^\circ=180^\circ \Rightarrow$

AO_1BC – вписан.

$\angle ABO_1=\angle O_1AB=45^\circ$, как угол между стороной и диагональю квадрата.

Рассмотрим AO_1BC (на рисунке он получился как квадрат, но он не квадрат):



$\angle ACO_1=\angle ABO_1$, как впис. углы опир. на одну дугу.

~~Аналогично~~: $\angle O_1CB=\angle O_1AB=45^\circ$;

$\angle CO_1B=\angle CAB=90-\alpha$

$\angle O_2CO_3=\angle O_2CB+\angle BCA+\angle ACO_3=$

$=45^\circ+90^\circ+45^\circ=180^\circ \Rightarrow C\in[O_2O_3]$

$\angle O_1CO_2=\angle O_1CB+\angle BCO_2=45^\circ+45^\circ=90^\circ \Rightarrow O_1C\perp O_2O_3$;

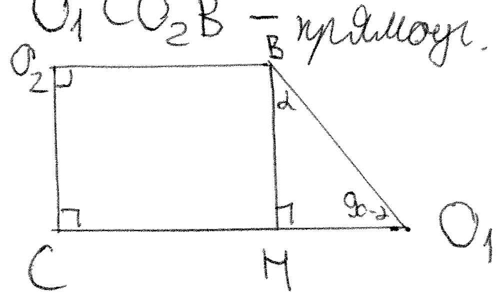
$BO_2\perp O_2O_3$, как диагонали квадрата.

$\Downarrow$

Пусть $AB=a \Rightarrow AC=a\sin\alpha$; $BC=a\cos\alpha \Rightarrow$

$O_3C=a\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt2}{2}$; $O_2C=a\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt2}{2}$, как половины диагоналей квадратов. $O_2B=O_2C=a\cos\alpha\frac{\sqrt2}{2}$

O_1CO_2B – прямоуг. трапеция, т.к. $O_1C\perp O_2O_3$ и $BO_2\perp O_2O_3$.



Опустим $BH\perp CO_1 \Rightarrow \angle HBO_1=\alpha$

$BH=O_2C=a\cos\alpha\frac{\sqrt2}{2}$

$O_1H=BH\cdot tg\alpha=a\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt2}{2}$

$CH=O_2B=a\cos\alpha\frac{\sqrt2}{2}\Rightarrow$

$CO_1=a\frac{\sqrt2}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$

Заметим, что $AB > BC$ и $AB > AC$, как гипотенуза $\Rightarrow$ Квадрат, построенный на AB – наибольший. $\Rightarrow$ Одна из аллей, построенных на третьем этапе: CO_1, вторая – O_2O_3.

$O_2O_3 = O_2C + CO_3 = a\cos\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} + a\sin\alpha \frac{\sqrt{2}}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\cos\alpha + \sin\alpha)$

$CO_1 = a\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

$\Downarrow$

+

$O_2O_3 = CO_1 \; \forall a, \alpha. \Rightarrow O_2O_3 - CO_1 = 0 \; \forall a, \alpha.$

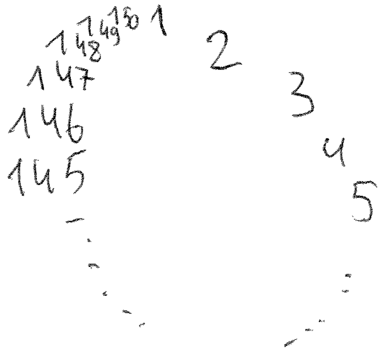
Ответ: ~~никакая из аллей третьего этапа не имее~~ обе аллеи третьего этапа имеют большую длину, т.к. они равны; при всех возможных углах α их длины не отличаются $\Rightarrow$ при всех возможных значениях α ($0° < \alpha < 90°$) длины отличаются сильнее всего (отличаются на 0).

N1.

~~Заметим, что из каждого завода должны выходить как минимум~~

Пронумеруем заводы от 1 до 150. Первый завод должен быть соединён как минимум с 147 заводами, т.к. иначе найдутся 3 завода, с которыми первый завод не соединён и следовательно четвёрка из этих 3 заводов и первого завода не будет удовлетворять условию. Аналогично с остальными заводами $\Rightarrow$ Маршрутов как минимум $\frac{150\cdot 147}{2} = 75\cdot 147$. Здесь деление на 2 обусловлено тем, что каждый маршрут подсчитывался 2 раза.

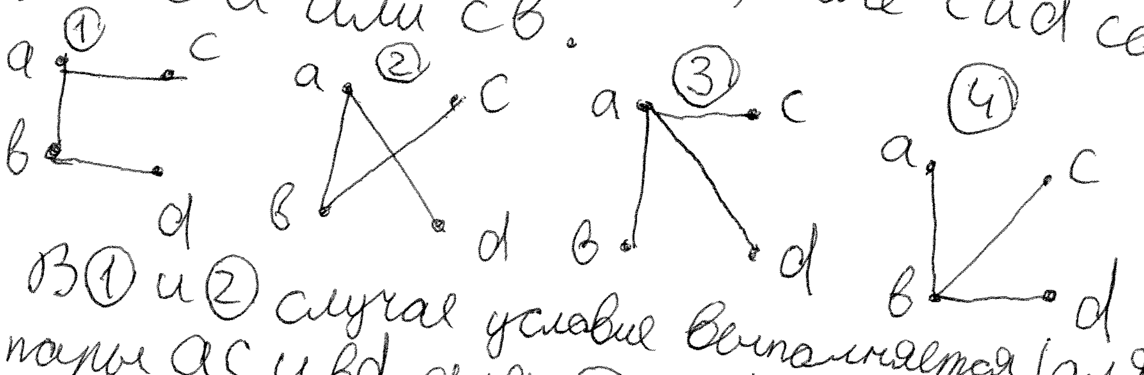
~~Прив~~ Рассмотрим следующую систему маршрутов:
Расположим заводы по кругу:



+

Соединим каждый завод со всеми кроме соседних. Тогда каждый завод будет соединён с 147 заводами и маршрутов будет $\frac{150\cdot147}{2} = 75\cdot147$ (что является минимумом)

Докажем, что условие задачи будет выполняться:
~~Ч~~ Выберем 4 ~~города~~ завода a, в, c, d. У каждого завода максимум 2 соседа ⇒ ~~с одним из трёх городов~~ ~~Без ограничен~~ каждый завод в этой четвёрке соединяется хотя бы с одним заводом из этой же четвёрки. Без ограничения общности скажем, что a соединяется с в. Если c соединяется cd, то условие выполнено, иначе c и d соединяются или с a или с в.



В 1 и 2 случае условие выполняется (для 1 это пары ac и вd, для 2: ad и вc)
В 3 случае город a – не соседний ни с одним из городов ~~a~~ в, c, d. Среди городов в, c, d есть ещё как минимум один маршрут, т.к. иначе они все являются соседями, что невозможно, т.к. ~~тогда получается что в круге все~~ в круге 150 заводов, а не 3. Пусть этот маршрут вc (без ограничения общности) ⇒ 3 случай подходит, пары ad и вc. 4 Случай аналогичен 3.
Ответ: $75\cdot147 = 11025$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №3) Дано: 6 чисел: 1, a, b, c, d, e, их среднее арифм = A. Найти max ср. геом =>

$\sqrt[3]{x_0, x_1, x_2} \to max.$

Решение:

1) Рассмотрим среднее арифметическое 6 чисел:

$A = \dfrac{1+a+b+c+d+e}{6} \Rightarrow$

$6A = 1+a+b+c+d+e \Rightarrow$

$a+b+c+d+e = 6A-1.$

2) Рассмотрим все возможные тройки представленного ряда. Пусть B - одинаковое среднее арифметическое любой тройки.

Тогда:

1) 1, a, b

$\dfrac{1+a+b}{3} = B \Rightarrow$

$1+a+b = 3B \Rightarrow$

$a+b = 3B-1$

2) a, b, c

$\dfrac{a+b+c}{3} = B \Rightarrow$

$a+b+c = 3B$

получаем:

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ a+b+1 = 3B \Rightarrow \\ \quad 1 = 3B-a-b \\ \bullet\ a+b+c = 3B \\ \quad c = 3B-a-b \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{c=1}}.$

3) b, c, d

$\dfrac{b+c+d}{3} = B$

$b+c+d = 3B$

$b+1+d = 3B$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{из п. 1:} \\ \quad a+b+1 = 3B \\ \bullet\ \text{из п. 3} \\ \quad d+b+1 = 3B \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=d}}.$

4) c, d, e

$\dfrac{c+d+e}{3} = B$

$c+d+e = 3B$

$1+d+e = 3B$

$1+a+e = 3B$

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \text{из п. 1} \\ \quad 1+a+b = 3B \\ \bullet\ \text{из п. 4} \\ \quad 1+a+e = 3B \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{b=e}}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №3. Продолжение:

Получаем новый ряд: 1, a, b, 1, a, b.

Можно заметить, что будут такие 4 тройки:

1) 1, a, b
2) a, b, 1
3) b, 1, a
4) 1, a, b

Видим, что тройки одинаковые => ср. геометрическое любой тройки = $\sqrt[3]{1ab} = \sqrt[3]{ab}$.

3) Рассмотрим, когда ср. геометрическое может быть максимальным:

$\frac{a+b+1}{3} \geq \sqrt[3]{ab}$ => что $\sqrt[3]{ab} \to$ max тогда и только тогда!, когда $\frac{a+b+1}{3} = \sqrt[3]{ab}$.

4) Вернемся к среднему арифметическому 6 исходных чисел:

$\frac{a+b+1+a+b+1}{6} = A$ =>

$\frac{2(a+b+1)}{6} = A$ =>

$\frac{a+b+1}{3} = A$

5) Вернемся к п. 3

$\frac{a+b+1}{3} = \sqrt[3]{ab}$ =>

$\sqrt[3]{ab} = A$

Ответ: A.

Не учтена связь между A и B.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №2) Дано: (x_n) – последовательность;
$(x_n) = x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$
$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$ при $n = 1, 2 \ldots$, т.е. $n \in N$
Найти x_n, S_n

+

Решение:

1) $2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n \Rightarrow$
$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$.

пусть $n = 1 \Rightarrow$ $3x_1 = x_0 \Rightarrow$ $\underline{\underline{x_1 = \frac{x_0}{3}}}$

пусть $n = 2 \Rightarrow$ $3x_2 = x_0 + x_1 = x_0 + \frac{x_0}{3} = \frac{4x_0}{3} \Rightarrow$ $\underline{\underline{x_2 = \frac{4x_0}{9}}}$

пусть $n = 3 \Rightarrow$ $3x_3 = x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} = \frac{16x_0}{9} \Rightarrow x_3 = \frac{16x_0}{27}$

пусть $n = 4 \Rightarrow$ $3x_4 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 =$
$= x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} + \frac{16x_0}{27} = \frac{64}{27}x_0$.

2) Тогда можно заметить, что
$x_n = \frac{4^{(n-1)}}{3^n} \cdot x_0$, где $n \in Z$.

проверим:

$n = 1$ $x_1 = \frac{x_0}{3}$

$n = 2$ $x_2 = \frac{4}{9}x_0$

$n = 3$ $x_3 = \frac{16}{27}x_0$

$n = 4$ $x_4 = \frac{64}{27}x_0$

сходится с тем, что получилось, считая по формуле
$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №2. Продолжение.

3) Рассмотрим сумму S_n:

$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$

$S_0 = x_0$

$S_1 = x_0 + x_1 = x_0 + \frac{x_0}{3} = \frac{4}{3} x_0$

$S_2 = x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} = \frac{16x_0}{9}$ и т.д...

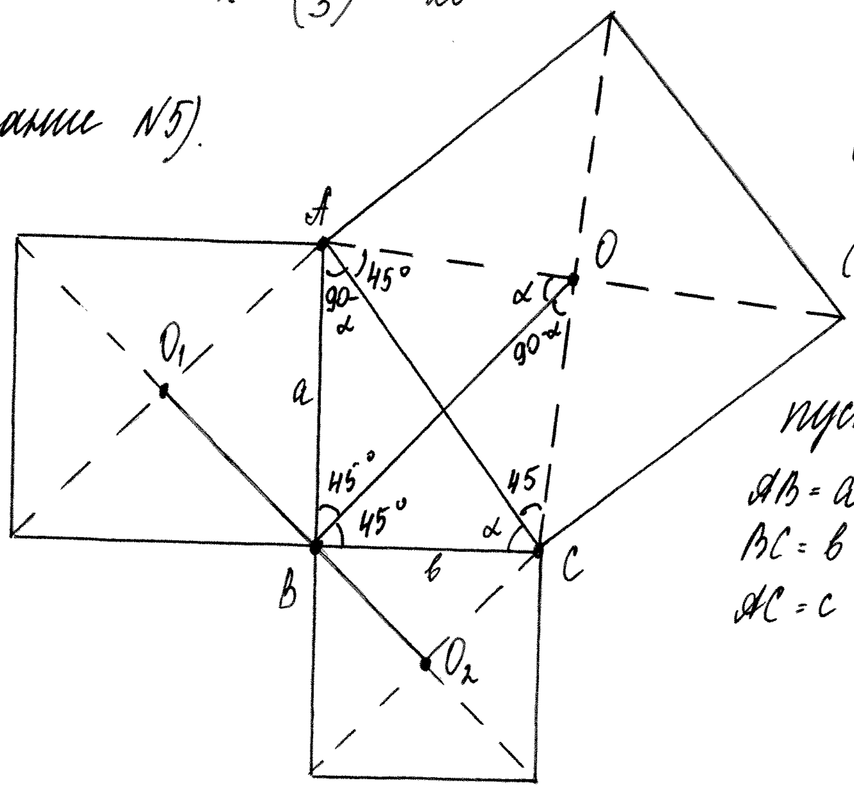
4) Формулу суммы S_n можно записать в виде:

$S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot x_0$, где $n \in Z$.

Ответ: $x_n = \frac{4^{(n-1)}}{3^n} \cdot x_0$; где $n \in N$,

$S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot x_0$, $x_0 \in R$.

Задание №5).



Сравнить O_1O_2 и BO. ($\angle\alpha = \angle BCA$)

пусть
$AB = a$
$BC = b$
$AC = c$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №5. Продолжение.

Решение:

1) Рассм. $\triangle AO_1B$: $\angle AO_1B = 90°$ (т.к. AO_1 и BO_1 – диаг. квадр) =>

$O_1B = AO_1 \Rightarrow \quad 2O_1B^2 = a^2 \Rightarrow$

$O_1B^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow O_1B = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

$\triangle BO_2C$: $\angle BO_2C = 90°$ (т.к. BO_2 и O_2C – диагон. квадрата)

$BO_2 = O_2C \Rightarrow 2BO_2^2 = b^2 =$

$BO_2^2 = \frac{b^2}{2} \Rightarrow BO_2 = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$

2) $O_1O_2 = BO_1 + O_2B = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

3) Рассмотрим $ABOC$:

$\angle B = 90°$
$\angle O = 90°$ (т.к. O – центр пер. диаг. кв) } вокруг $ABOC$ можно описать окр. =>

$\angle ACB = \angle AOB = \alpha$ (т.к. опир на 1 дугу)
$\angle BAC = \angle BOC = 90 - \alpha$ (опир на 1 дугу).

4) $\triangle AOC$: $AO = OC$ (т.к. половины диагоналей квадрата) =>
$\angle OAC = \angle OCA = 45°$

5) $\triangle BOC$: $\angle OBC = \angle OAC = 45°$ (опир на 1 дугу)
по теореме синусов:

$$\frac{OC}{\sin 45} = \frac{BO}{\sin(45+\alpha)} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BO}{\sin(45+\alpha)} \Rightarrow c = \frac{BO}{\sin(45+\alpha)} \Rightarrow$$

$$BO = c(\sin(45+\alpha)) = c\cdot(\sin 45 \cos\alpha + \cos 45\cdot \sin\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}c(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

6) Сравним O_1O_2 и BO

$\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) = \frac{\sqrt{2}}{2}c(\cos\alpha + \sin\alpha)$

$a + b = c(\cos\alpha + \sin\alpha)$ – можно возвести в квадр., знак не изм. т.к все величины > 0

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №5. Продолжение.

$(a+b)^2 = c^2(\cos\alpha+\sin\alpha)^2$

$\underbrace{a^2+b^2}_{=c^2}+2ab = c^2(\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{=1}+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha)$

$2ab+c^2 = c^2(1+2\sin\alpha\cos\alpha)$

$2ab+c^2 = c^2(1+\sin2\alpha)$

$2c^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+c^2 = c^2(1+\sin2\alpha)$

$c^2\cdot\sin2\alpha+c^2 = c^2(1+\sin2\alpha)$

$c^2(1+\sin2\alpha) = c^2(1+\sin2\alpha)$

$*\ \Delta ABC$:

$\frac{a}{c}=\sin\alpha \Rightarrow a=c\sin\alpha$

$\frac{b}{c}=\cos\alpha \Rightarrow b=c\cdot\cos\alpha$

+

Получается, что обе части равны при любом α.

Ответ: равны при любом α.

Задание №4) Дано: $g(x)$ - имеет 1 корень

$g(ax+b)+g(cx+d)$ - имеет 1 корень

найти этот корень.

Решение:

1) Пусть $g(x)=Ax^2+Bx+C$.

если он имеет один корень, то $D=0 \Rightarrow$

$D=B^2-4AC=0 \Rightarrow B^2=4AC$.

2) Рассмотрим $g(ax+b)$.

пусть $ax+b=t \Rightarrow$

$g(t)=At^2+Bt+C=0$

$D=B^2-4AC=0$ (из условия. см. п.1) $\Rightarrow$

$g(t)$ - имеет 1 корень

3) Рассмотрим $g(cx+d)$.

пусть $cx+d=p \Rightarrow$

$g(p)=Ap^2+Bp+C=0$

$D=B^2-4AC=0$ (из усл., см. п.1) $\Rightarrow$

$g(p)$ тоже имеет 1 корень

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ XP 27-76

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание №4. Продолжение.

4) Рассмотрим многочлен $g(t)+g(p)=$

$=At^2+Bt+C+Ap^2+Bp+C=0.$

• решим его относительно „t"

$D=B^2-4A(Ap^2+Bp+2C)=0$ (т.к. по усл. 1 корень) ⇒

$B^2=4AC$

$B^2=4A(Ap^2+Bp+2C)$ ⇒ $Ap^2+Bp+2C-C=0$

$Ap^2+Bp+C=0$

$p=\frac{-B}{2A}.$

• решим относительно „p"

$D=B^2-4A(At^2+Bt+2C)=0$ (т.к. по усл. 1 корень)

$\left.\begin{array}{l} B^2=4AC \\ B^2=4A(At^2+Bt+2C) \end{array}\right\} \Rightarrow$ $At^2+Bt+2C-C=0$

$At^2+Bt+C=0$

$t=\frac{-B}{2A}$

5) Получаем, что $p=t$ ⇒

Обр. замена: $ax+b=cx+d$ ⇒

$ax-cx=d-b$

$x_0=\frac{d-b}{a-c}$, $a\neq c$

Этого мало!

Ответ: $x_0\ \frac{d-b}{a-c}.$

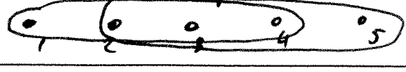
$\frac{-}{+}$

Задание №1) 1) Всего 150 городов.

Каждые 4 завода можно разбить на 2 пары, соединенные дорогой.

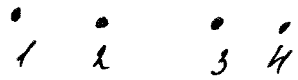
Т.е. в каждой четверке заводов будет 2 дороги.

2) 150/4 значит четверки будут как бы находить друг на друга, т.е.



Задание №1. Продолжение.

3) Рассмотрим четверки городов, в ней обязательно есть 2 пары.



Получается, что могут быть задействованы

а) 3 города

б) 4 города

меньше быть не может

Но чем меньше задействовано городов, тем меньше будет дорог $\Rightarrow$ нам нужен вариант, где в каждой 4 задействовано лишь 3 города.

4) Разобьем все города на тройки: $\frac{150}{3} = 50$ — будет 50 троек.

Как мы отметили в каждой тройке 2 дороги $\Rightarrow$ N_{min}(число дорог) $= 2 \cdot 50 = 100$

Ответ: наименьшее число дорог $N = 100$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

Дано: $\sum_{i=1}^{6} x_i = A$, ~~одии~~ один из членов равен 1

Найти: макс. ср. геом. 3-х сосед. чисел.

Решение:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

По усл-ю: $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_2+x_3+x_4}{3} \Rightarrow x_1 = x_4$;

$\frac{x_2+x_3+x_4}{3} = \frac{x_3+x_4+x_5}{3} \Rightarrow x_2 = x_5$;

$\frac{x_3+x_4+x_5}{3} = \frac{x_4+x_5+x_6}{3} \Rightarrow x_3 = x_6$.

Тогда данную послед-ость можно переписать так: $x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3$.

$\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{2(x_1+x_2+x_3)}{6} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} = A \Rightarrow x_1+x_2+x_3 = 3A$.

В полученной пос-ти получается, что ~~и~~ также равно среднее геом. любых 3-х соседних чисел.

~~И~~ Если один из членов равен 1, то два оставшиеся члена выражаются так: $x_n = 3A - 1 - x_k$.

Среднее геом. 3-х сосед. чисел равно $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$.

$x_1 x_2 x_3 = 1 \cdot x_n \cdot x_k = 1 \cdot (3A - 1 - x_k) \cdot x_k = x_k(3A-1) - x_k^2 = f(x_k)$

Максимум ф-ии $f(x_k)$ находится в точке $x_k = \frac{-(3A-1)}{-2} = \frac{3A-1}{2} \Rightarrow \max f(x_k) = \frac{(3A-1)^2}{2} - \frac{(3A-1)^2}{4} = \frac{(3A-1)^2}{4}$.

Тогда макс. знач. сред. геом. будет равно $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$.

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$.

+

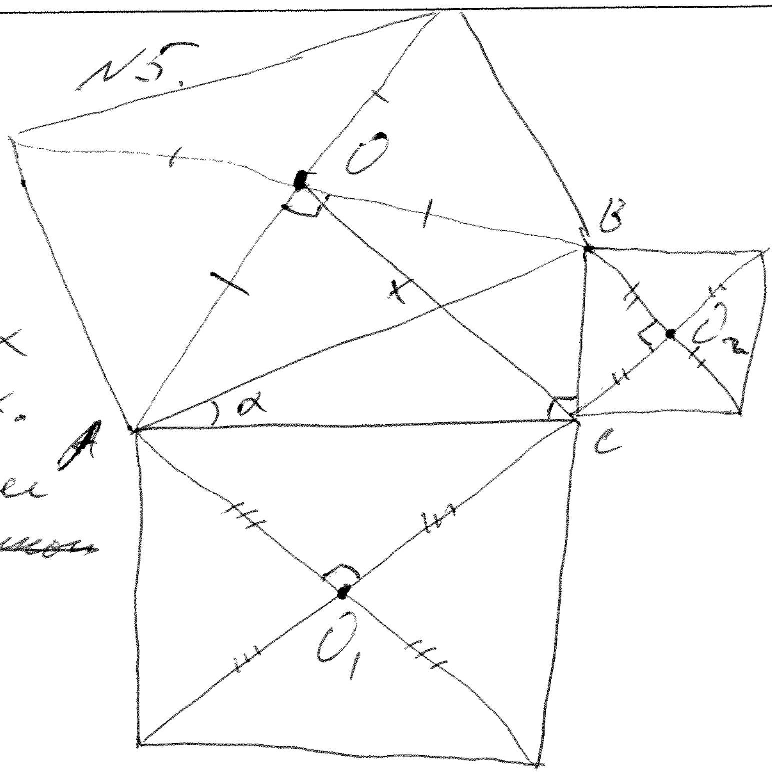
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ XP 27-88

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.



Пусть $\angle CAB = \alpha$, $AB = x$.

Тогда: $AC = x\cos\alpha$
$BC = x\sin\alpha$.

Имеем две аллеи третьего этапа ~~длиной~~ OC и O_1O_2.

Из $\triangle AO_1C$: $O_1C = \frac{AC}{\sqrt2} = \frac{x\cos\alpha}{\sqrt2}$.

Из $\triangle BO_2C$: $CO_2 = \frac{BC}{\sqrt2} = \frac{x\sin\alpha}{\sqrt2}$

$O_1O_2 = CO_2 + O_1C = \frac{x}{\sqrt2}\sin\alpha + \frac{x}{\sqrt2}\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

Из $\triangle AOB$: $AO = \frac{AB}{\sqrt2} = \frac{x}{\sqrt2}$; $\angle BAO = \frac{\pi}{4}$.

По теор. косинусов в $\triangle AOC$:

+

$$OC^2 = AO^2 + AC^2 - 2AO\cdot AC\cdot\cos OAC =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x^2\cos^2\alpha - 2\cdot\frac{x}{\sqrt2}\cdot x\cos\alpha\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= x^2\left(\frac12 + \cos^2\alpha - \sqrt2\cos\alpha\left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= x^2\left(\frac12 + \cos^2\alpha - \sqrt2\cos\alpha\,\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt2}\right) =$$
$$= x^2\left(\frac12 + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos\alpha\sin\alpha\right) = x^2\left(\frac12 + \sin\alpha\cos\alpha\right)$$

$$O_1O_2^2 = \frac{x^2}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \frac{x^2}{2}(1+\sin2\alpha) = x^2\left(\frac12 + \sin\alpha\cos\alpha\right)$$

$OC^2 = O_1O_2^2 \Rightarrow OC = O_1O_2$

Ответ: обе аллеи третьего этапа имеют одинаковую длину при всех значениях α.

№2.

Дано: $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$

$$2x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Найти: x_n; S_n.

Решение:

+

$$3x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1}$$

$n=1$: $3x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3}$.

$n=2$: $3x_2 = x_0 + x_1 = x_0 + \frac{x_0}{3} = \frac{4x_0}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4x_0}{9}$.

$n=3$: $3x_3 = x_0 + x_1 + x_2 = \frac{4x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} = \frac{16x_0}{9} \Rightarrow x_3 = \frac{16x_0}{27}$.

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{4x_0}{9}}{\frac{x_0}{3}} = \frac{4}{3}; \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{\frac{16x_0}{27}}{\frac{4x_0}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} \Rightarrow x_2^2 = x_1 x_3 \Rightarrow \{x_n\} - \text{геом. прог.}$$

$$q = \frac{4}{3}; \quad x_1 = \frac{x_0}{3}.$$

$$x_n = x_1 q^{n-1} = \frac{x_0}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{x_0}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = x_0 + \frac{x_1(q^n - 1)}{q-1} = x_0 + \frac{\frac{x_0}{3}\cdot\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{4}{3} - 1} =$$

$$= x_0\left(1 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{3}}\right) = \cancel{x_0\left(1 + \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{7}\right) = \frac{6 + \left(\frac{4}{3}\right)^n}{7} x_0}$$

$$= x_0\left(1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = x_0\left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Ответ: $x_n = x_0,\ n = 0$; $x_n = \frac{x_0}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^n,\ n = 1, 2, \dots$;

$$\cancel{S_n = x_0(\dots) = \frac{6 + \left(\frac{4}{3}\right)^n}{7} x_0.}$$

$$S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0.$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Наименьшее кол-во пар заводов можно найти, если рассматривать единственную пару со всеми возможными вариантами пар остальных 148 заводов. Пусть завода №149 и №150 – стационарная пара.) Найдём кол-во пар, которые образуют 148 других заводов. С заводом №1 можно образовать с остальными 147 заводами 147 пар. С заводом №2 можно образовать на 1 пару меньше, т.к. была посчитана пара с заводом №1 ⇒ 146 пар. С заводом №3 можно образовать на 2 пары меньше, чем с №1, т.к. уже есть пары с №1 и №2 ⇒ 145 пар. Данная последовательность из пар заводов есть арифм. прог. с разностью $d=-1$. ~~В конце, завод~~ Завод №147 образует 1 пару с заводом №148, а завод №148 уже новых пар не образует, т.к. пары с ним уже были рассмотрены с другими 147 заводами. Тогда ~~все~~ кол-во всех таких пар можно найти как сумму ар. прогрессии:

$N = S_{147} = \frac{1+147}{2}\cdot 147 = 74\cdot 147 = 10878$, а с учётом стационарной пары: $10878+1=10879$.

Ответ: 10879.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

задача 3

обозначим числа

$a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f$

по условию $\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3}$

откуда найдем $a=d \quad b=e \quad c=f$ (1)

так же по условию $\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = A$

с учетом 1.

$\frac{2a+2b+2c}{6} = A \qquad \frac{a+b+c}{3} = A$

то есть среднее арифметическое трех соседних чисел равно A

~~дев~~ среднее геометрическое трех чисел находится по формуле $\sqrt[3]{abc}$

при этом имеет место соотношение

$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$ (среднее геометрическое меньше или раво ~~то~~ среднему арифметическому) $\Rightarrow$

Максимальное значени среднего геометрическо равно A и досшигается когда $a=b=c$

а так как $a=d \quad b=e \quad c=f$

$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{bcd} = \sqrt[3]{cde} = \sqrt[3]{def}$

среди чисел есть $1 \Rightarrow a=b=c=d=e=f=1$ и

максимальное значение $\sqrt[3]{abc} = 1$ почему?

Ответ: максимальное значени среднего геометрического равно $A = 1$ при $a=b=c=d=e=f$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

задача 2.

рассмотрим x_1

по условию

$$3x_n = x_0 + x_1 \ldots + x_{n-1} \Rightarrow 3x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3}.$$

$$3x_2 = x_0 + x_1 = x_0 + \frac{x_0}{3} = \frac{4x_0}{3}. \Rightarrow x_2 = \frac{4x_0}{9}.$$

$$3x_3 = x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9}. = \frac{16x_0}{9} \Rightarrow x_3 = \frac{16x_0}{27}$$

$$3x_4 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} + \frac{16x_0}{27} = \frac{64x_0}{81}$$

+

заметим что при $n \geq 1$ числа образуют геометрическую прогрессию с первым членом $x_1 = \frac{x_0}{3}$ и знаменателем $q = \frac{4}{3}. \Rightarrow$ по формуле n члена геометр. прогрессии $x_n = x_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{x_0}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

сумма геометрической прогрессии находится по формуле

$$S = \frac{x_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1.} = \frac{\frac{x_0}{3}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{4}{3} - 1} = x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right). \Rightarrow$$

$$S_n = x_0 + S = x_0 + x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = x_0\left(1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = x_0\left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Ответ: $x_n = \frac{x_0}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

$S_n = x_0\left(\frac{4}{3}\right)^n$

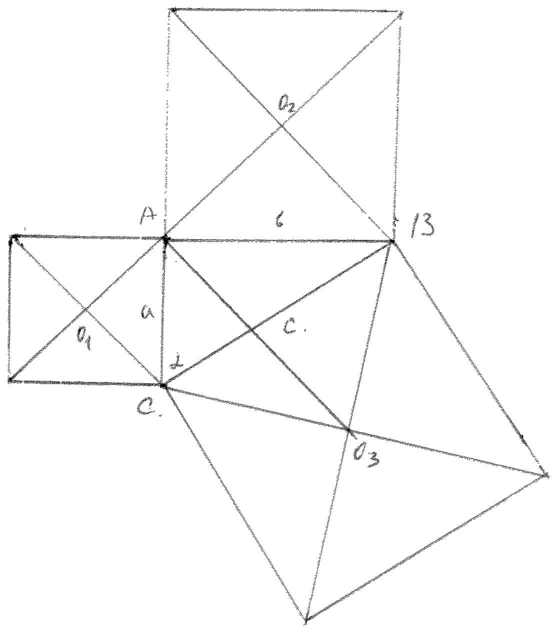
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХР 33-10

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

задача 5



Обозначим стороны треугольника a; b; c, а центры квадратов O_1; O_2; O_3. Пусть $\alpha = \angle ACB$. Прямая O_1O_2 проходит через точку A

$O_1A = \frac{a}{\sqrt2}$ (из прямоугольного треугольника ~~AB~~ AO_1C).

$AO_2 = \frac{b}{\sqrt2}$ (из прямоугольного треугольника AO_2B) =>

$O_1O_2 = AO_1 + AO_2 = \frac{a+b}{\sqrt2}$

$CO_3 = \frac{c}{\sqrt2}$ (из прямоугольного треугольника CO_3B)

$\angle BCO_3 = 45°$ (т.к. $CO_3 = BO_3$) => $\angle ACO_3 = \beta = 45 + \alpha$.

По теореме косинусов:

$a^2 + \frac{c^2}{2} - \sqrt2\, ac \cos\beta = AO_3^2$.

$\cos\beta = \cos(\alpha + 45°) = \cos\alpha \cdot \cos 45 - \sin\alpha \cdot \sin 45 = \frac{\sqrt2}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$

$\cos\alpha = \frac{a}{c}$ $\sin\alpha = \frac{b}{c}$ (из △ABC) => $\cos\beta = \frac{a-b}{c\sqrt2}$ =>

~~$AO_3^2 = a^2 + \frac{c^2}{2}$~~ - если $\beta > 90$; $\alpha > 45$ то $\cos\beta = \frac{b-a}{c\sqrt2}$

$\alpha \le 45$

$AO_3^2 = a^2 + \frac{c^2}{2} - \sqrt2\, ac \cdot \frac{a-b}{c\sqrt2} = a^2 + \frac{c^2}{2} - a^2 + ab = \frac{c^2}{2} + ab$.

$\alpha > 45$ $AO_3^2 = a^2 + \frac{c^2}{2} + \sqrt2\, ac \cdot \frac{a-b}{c\sqrt2} = 2a^2 + \frac{c^2}{2} - ab$.

$O_1O_2^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{2} = \frac{c^2+2ab}{2}$ => если $\alpha \le 45$ $O_1O_2 = AO_3$

~~если~~ если $\alpha > 45$ $b > a$ (лежит против большего угла) =>

$AO_3^2 < O_1O_2^2$

$2a^2 + \frac{c^2}{2} - ab < \frac{c^2+2ab}{2}$

$a < b$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХР 33-10

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

задача 5 (продолжение)

$AO_3^2 = a^2 + \frac{c^2}{2} - \sqrt{2}ac\frac{a-b}{c\sqrt{2}} = \frac{c^2}{2} + ab$

$O_1O_2^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{2} = \frac{c^2+2ab}{2}$ $a^2+b^2=c^2$ =>

$AO_3^2 = O_1O_2^2 \Rightarrow AO_3 = O_1O_2$ при любом $\angle$

Ответ: $AO_3 = O_1O_2$ (~~имеет рав~~ ~~ан~~ длины равны) при любом $\cancel{\angle}$ острого угле $\angle$ $AO_3 = O_1O_2$.

задача 4.

если квадратный трехчлен имеет один корень, то его можно представить в виде

$(kx+n)^2$ где $k \neq 0$

$g(x) = (kx+n)^2 \Rightarrow \cancel{g} \Rightarrow$

$g(ax+b) = (k(ax+b)+n)^2$
$g(cx+d) = (k(cx+d)+n)^2$ | $g(ax+b) + g(cx+d) = 0$

если $g(ax_1+b) = 0$
~~g(ax~~
$g(cx_1+d) = 0$

$(k(ax_1+b)+n)^2 = (k(cx_1+d)+n)^2 = 0 \Rightarrow$

$ax_1+b = cx_1+d \Rightarrow x_1 = \frac{d-b}{a-c}$

$g(x) = g(ax_1+b) = 0 \Rightarrow$

$(kx+n)^2 = (k(ax_1+b)+n)^2 \Rightarrow x = ax_1+b = \frac{a(d-b)}{a-c} + b = \frac{ad-bc}{a-c}$

Ответ: $x = \frac{ad-bc}{a-c}$

задача 1

представим, что заводы расположены в вершинах правильного 150 угольника. минимальное число дорог при котором можно выбрать 4 завода по условию равно числу сторон 150 угольника + количество четырех угольников которые можно вписать в многоуг.:

$150 + C_{150}^4 \cdot 4$?

где C_{150}^4 - количество вариантов выбора 4 точек ~~(при этом варианты $A_1B_1C_1D_1$ и $B_1A_1C_1D_1$ различны, по тем.~~

$$C_{150}^4 = \frac{150!}{(150-4)!\,4!} = \frac{150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 25 \cdot 149 \cdot 37 \cdot 147$$

$150 + \cancel{25 \cdot 149 \cdot 37 \cdot 1}\ 25 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 = 48101250$

Ответ $150 + C_{150}^4 \cdot 4 = 48101250$

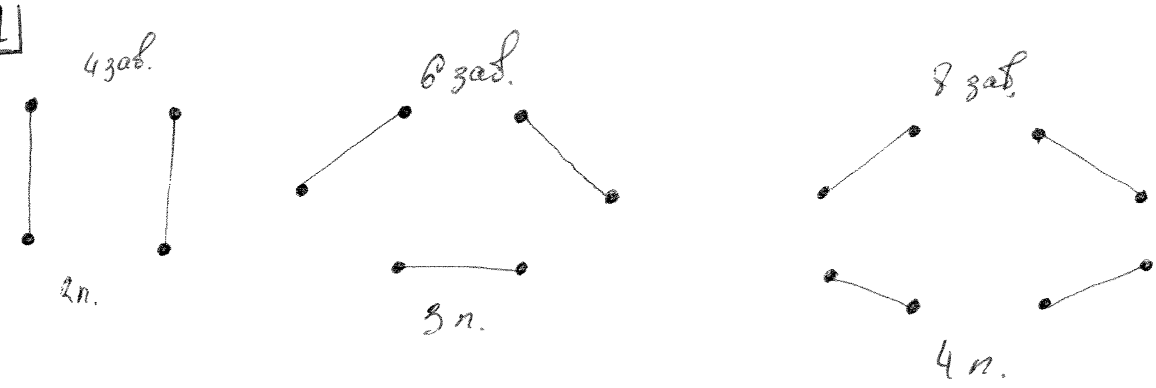
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХР 33-17

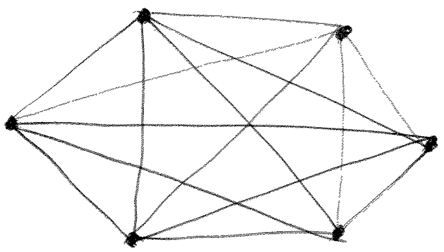
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1



при 150 заводах - буде 75 пар.

Докажем, что это число пар, найденное таким образом - минимальное.



Если существует другая сеть, соединяющих пар, то от каждого завода может исходить либо 1, либо несколько пар дорог.

(+)

Найденная сеть, соединяющих пар, имеет минимальное кол-во пар - 75

Ответ: Наименьшее число пар заводов, которые могут быть соединены автобусными маршрутами равно 75.

№2

$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n$ (по усл.)

(+)

$S_{n-1} = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$

$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$ (по усл.)

$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

① $\left.\begin{array}{l} 3x_n = S_{n-1} \\ x_n = S_n - S_{n-1} \end{array}\right\} \Rightarrow 3S_n - 3S_{n-1} = S_{n-1}$

$3S_n = 4S_{n-1}$

$S_n = \frac{4}{3}S_{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 S_{n-2} = \ldots = \left(\frac{4}{3}\right)^n S_0$

$S_0 = x_0 \Rightarrow \underline{S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0}$

② $x_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0 - \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} x_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} x_0 \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} x_0$,

где x_0 - произвольное

Ответ: $x_n = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} x_0$; $S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n x_0$

$\boxed{№3}$

Существует последовательность: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

① $\left.\begin{array}{l} \frac{x_1 + \cancel{x_2} + \cancel{x_3}}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{x_2} + \cancel{x_3} + x_4}{\cancel{3}} \Rightarrow \underline{x_1 = x_4} \\ \frac{x_2 + \cancel{x_3} + \cancel{x_4}}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{x_3} + \cancel{x_4} + x_5}{\cancel{3}} \Rightarrow x_2 = x_5 \\ \frac{x_3 + \cancel{x_4} + \cancel{x_5}}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{x_4} + \cancel{x_5} + x_6}{\cancel{3}} \Rightarrow x_3 = x_6 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3.$

②

$\frac{2(x_1 + x_2 + x_3)}{6} = A \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3A$, $x_2 = 3A - \cancel{x_3} - x_1$

③ Среднее геометрическое:

$Z = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \longrightarrow max$

Пусть $x_3 = 1$, тогда

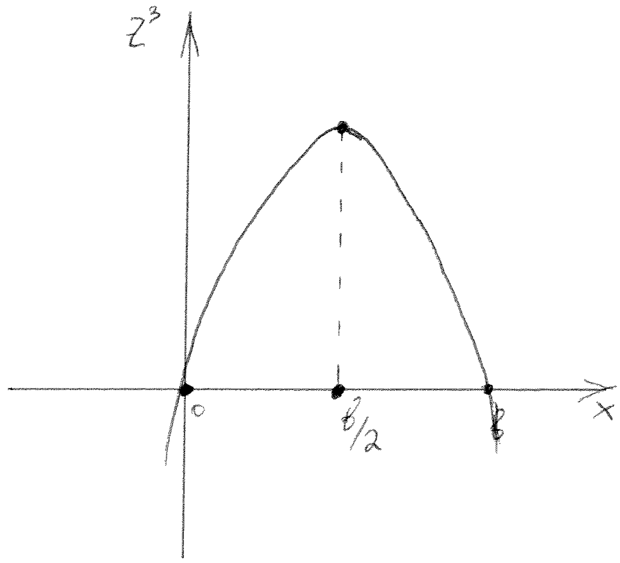
$Z = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot 1} = \sqrt[3]{x_1 \cdot (3A - 1 - x_1)}$

Пусть $(3A - 1) = 8$, тогда

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$Z = \sqrt[3]{x_1(b - x_1)} \longrightarrow \max\limits_{x_1}$

$Z^3 = x_1(b - x_1)$



$Z^3 = \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{4}$

$Z^* = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot 1} = \sqrt[3]{\frac{b^2}{4}}$

Обратная замена:

$b = 3A - 1. \Rightarrow Z^* = \sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}} = \sqrt[3]{\frac{9A^2-1}{4}}$ формула!

Ответ: Максимальное значение среднего геометрического любых трёх соседних в ряду чисел равно $\sqrt[3]{\frac{9A^2-1}{4}}$

$\boxed{№4}$

① Т.к. $g(x)$ - имеет один корень, то

$g(x) = (x-p)^2$, где p - корень.

$\frac{-}{+}$

② $g(ax+b) + g(cx+d) = (ax+b-p)^2 + (cx+d-p)^2$

Возьмём $b=0$, $c=0$, $d=0$, $a \neq 0$, тогда

$g(ax) + g(0) = (ax-p)^2 + p^2 = a^2x^2 + 2apx + p^2 + p = a^2x^2 + 2apx + 2p^2$

↘ полный квадрат.

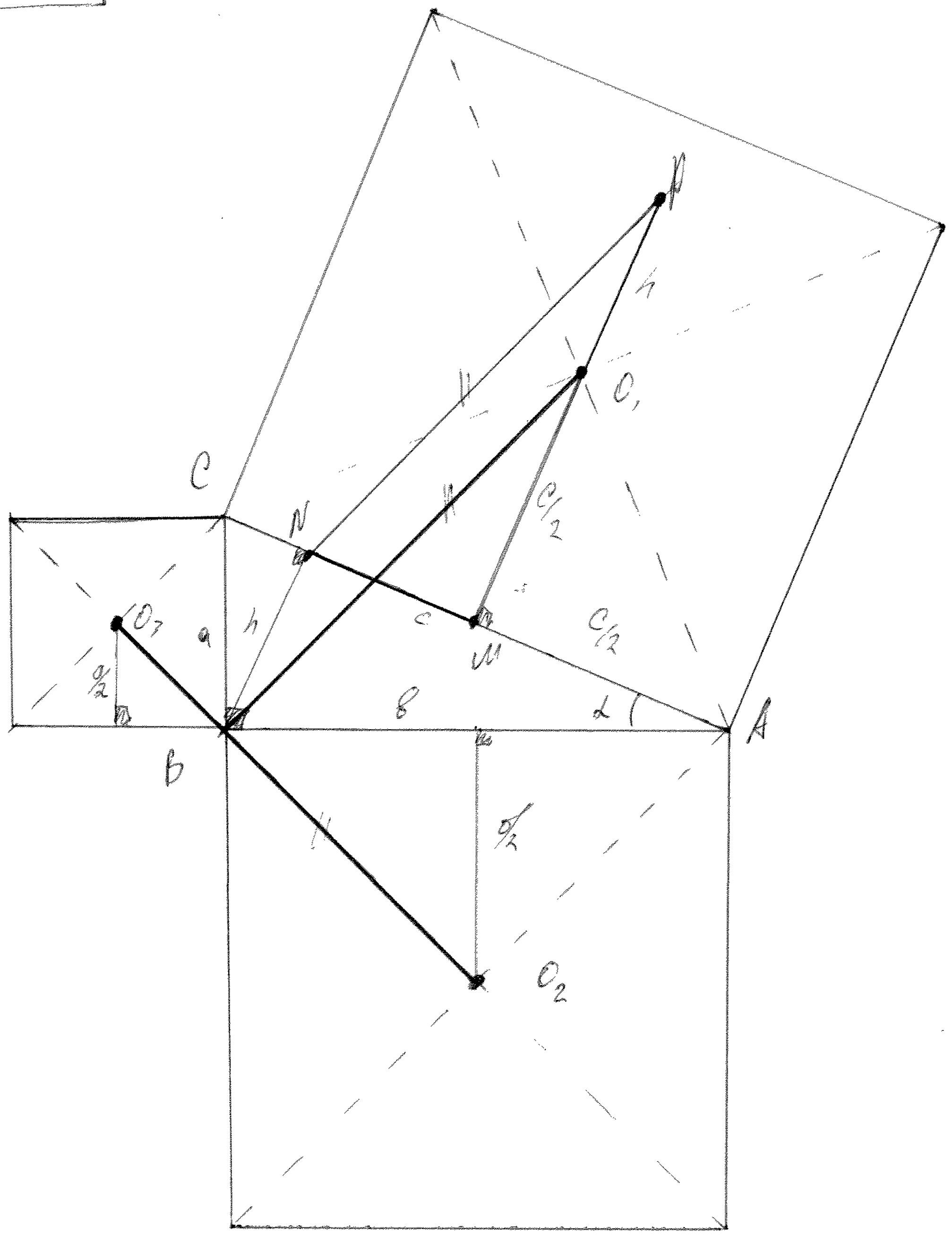
$D = a^2p^2 - 2a^2p^2 = -a^2p^2 = 0$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

т.к $a \neq 0$, то $p = 0 \Rightarrow g(x) = x^2$, а единственным корнем является $p = 0$

Ответ: 0 ?

№5



I

① $O_2O_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) = \frac{\sqrt{2}}{2}c(\cos\alpha + \sin\alpha)$

② $(O_2O_3)^2 = \underline{\frac{c^2}{2}(1+\sin 2\alpha)}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

II

① $h = c\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha \quad |\cdot 2 \div 2$

$h = \frac{c}{2}\sin 2\alpha$

② $MN' = AN - AM = b\cdot\cos\alpha - \frac{c}{2} = c\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha - \frac{c}{2} = c\cdot\cos^2\alpha - \frac{c}{2} =$

$= \frac{c}{2}(2\cos^2\alpha - 1) = \frac{c}{2}\cdot\cos 2\alpha$

③ $O_1B = NP \Rightarrow (O_1B)^2 = \left(\frac{c}{2}\cdot\cos 2\alpha\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\cdot\sin 2\alpha + \frac{c}{2}\right)^2 =$

$= \frac{c^2}{4}\cdot\cos^2 2\alpha + \frac{c^2}{4}(\sin 2\alpha + 1)^2 = \frac{c^2}{4}(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha + 1) =$

$= \frac{c^2}{4}(2 + 2\sin 2\alpha) = \frac{c^2}{2}(1 + \sin 2\alpha)$

+

Из I и ③ $\Rightarrow O_2O_3 = O_1B$, при $\forall\alpha$

Ответ: а) Никакая, они одинаковы

б) при любом.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХР 33-37

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n \Rightarrow 3x_n = \underbrace{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}}_{S_{n-1}}$

$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n$

$3x_n = S_{n-1} \quad | + x_n$

$4x_n = S_n$

+

$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$.

$x_n = \frac{1}{3}(x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1})$.

Пусть $n=1$. Тогда:

$x_1 = \frac{1}{3}x_0$

Пусть $n=2$:

$x_2 = \frac{1}{3}(x_0 + \frac{1}{3}x_0) = \frac{4}{9}x_0$.

Пусть $n=3$:

$x_3 = \frac{1}{3}(x_0 + \frac{1}{3}x_0 + \frac{4}{9}x_0) = \frac{16}{3 \cdot 9}x_0 = \frac{4^2}{3^3}x_0$.

Значит, $x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n} \cdot x_0$. Тогда $S_n = \frac{4 \cdot 4^{n-1}}{3^n} \cdot x_0 = \frac{4^n}{3^n} \cdot x_0$.

Ответ: $x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n} \cdot x_0$ (где x_0 - люб. число), $S_n = \frac{4^n}{3^n} \cdot x_0$ (где x_0 - люб. число).

№4.

$g(x)$ им. один корень.

$g(x)$ - квадр. трехчлен $\Rightarrow$ график $g(x)$ - парабола.

Т.к. $g(x)$ им. один корень, то либо ее значения всегда неотрицательны, либо всегда неположительны.

Тогда: $F(x) = g(ax+b) + g(cx+d)$ - всегда либо неотриц., либо неполож.; и в том, и в другом случае будет иметь один корень (в т. $F(x)=0$). Найдем его.

$g(ax+b) + g(cx+d) = 0$

одинак. знаков

Тогда равенство достигается при $g(ax+b) = g(cx+d) = 0$.

Пусть $g(x)=0$ в т. x_0. Тогда нужно, чтобы:

$\begin{cases} ax+b = x_0 \\ cx+d = x_0 \end{cases} \Rightarrow ax+b = cx+d$

$ax - cx = d - b$

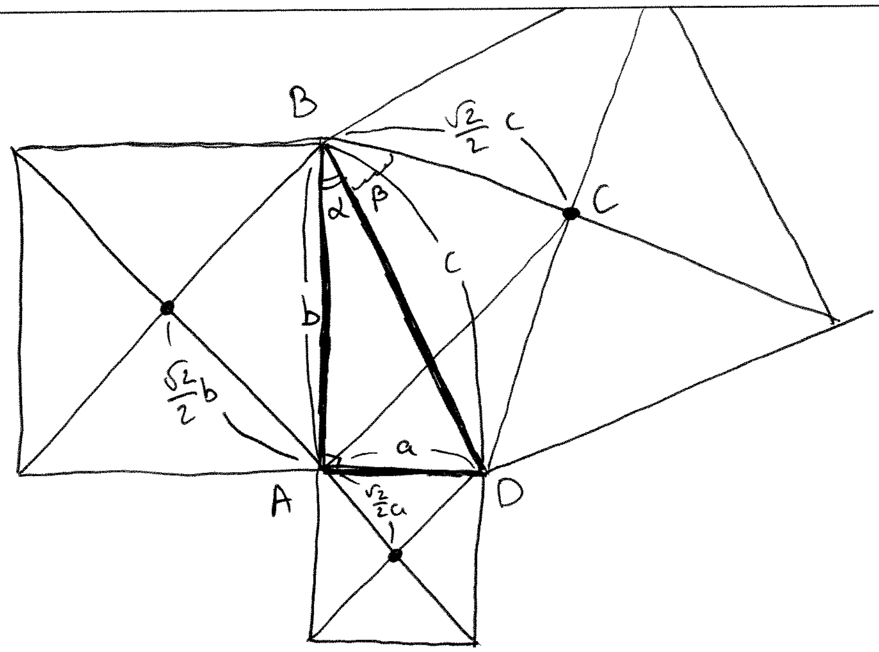
$(a-c)x = d-b \; | : (a-c)$ - не ноль по условию, где $a \neq c$

$x = \frac{d-b}{a-c}$.

Ответ: $\frac{d-b}{a-c}$; $a \neq c$.

+

№5



Пусть меньший катет будет a, больший — b, c — гипотенуза; n — ~~прямая~~ отрезок, соединяющий центры наименьших квадратов, l — отрезок, соединяющий прямой угол треугольника и центр большего квадрата.

Тогда для n справедливо: $n=\frac{\sqrt2}{2}b+\frac{\sqrt2}{2}a=\frac{\sqrt2}{2}(a+b)$.

($\frac{\sqrt2}{2}a$ и $\frac{\sqrt2}{2}b$ — длины половин диагоналей квадратов).

Заметим, что $\angle\beta=45^\circ$ (т.к. это угол ~~при~~ в квадрате, образованный диагональю и стороной). Рассмотрим $\triangle ABC$ (см. рисунок). $AB=b$, $BC=\frac{\sqrt2}{2}c$, $AC=l$.

$\angle ABC=\alpha+45^\circ$. Тогда по теореме косинусов:

$l^2=b^2+\frac{2}{4}c^2-2\cdot b\cdot\frac{\sqrt2}{2}c\cos(45^\circ+\alpha)$. Пусть $45^\circ+\alpha<90^\circ$.

$l^2=b^2+\frac12c^2-\sqrt2bc(\underbrace{\cos45^\circ}_{=\frac{\sqrt2}{2}}\cos\alpha-\underbrace{\sin45^\circ}_{=\frac{\sqrt2}{2}}\sin\alpha)$

$l^2=b^2+\frac12c^2-bc\cos\alpha+bc\sin\alpha$.

В прямоуг. треуг. ABD $\sin\alpha=\frac{a}{c}$, $\cos\alpha=\frac{b}{c}$. Подставим в уравнение. Получим:

$l^2=\cancel{b^2}+\frac12c^2-\cancel{b\cancel{c}\cdot\frac{b}{\cancel{c}}}+b\cancel{c}\cdot\frac{a}{\cancel{c}}$ ← Правильно

$l^2=\frac12c^2+ab \quad |\times2$

$2l^2=c^2+2ab$

Заметим, что $c^2=a^2+b^2$ по теор. Пифагора.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$2l^2 = a^2+b^2+2ab$

$2l^2 = (a+b)^2$

$l^2 = \frac{(a+b)^2}{2}$

$l = \frac{|a+b|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}|a+b|}{2}$ ← Правильно.

Тогда при $\alpha < 45^\circ$ $n = l$.

Сравним n и l.

$n \vee l$

$\frac{\sqrt{2}(a+b)}{2} < \frac{\sqrt{2}|a+b|}{2}$, при $b < 0$ или $a < 0$, $\frac{\sqrt{2}(a+b)}{2} = \frac{\sqrt{2}|a+b|}{2}$ при $a \geq 0, b \geq 0$

Таким образом, чем ~~больше~~ меньше $|a-b|$, тем заметнее разница, т.е. чем меньше $|\sin\alpha \cdot c - \cos\alpha \cdot c|$ (но не при $\sin\alpha = \cos\alpha$). Значит, разница заметна при угле, приблизительно (а не точно!) равном 45°.

Рассмотрим случай, когда $45^\circ + \alpha = 90^\circ$.

Тогда $l = c$.

$n = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}$

?

Сравним n и l.

$l \vee n$

$c \vee \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2} \quad (\cdot)^2$

$c^2 \vee \frac{a^2+2ab+b^2}{2}$

$a^2+b^2 \vee \frac{a^2+2ab+b^2}{2} \quad | \times 2$

$2a^2+2b^2 \vee a^2+b^2+2ab \quad | -(a^2+b^2)$

$a^2+b^2 \vee 2ab \quad | : ab$

$\frac{a^2+b^2}{ab} \vee 2$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

$l > n$

При $\alpha = 45^\circ$ достигается наибольшее различие длин.

Рассмотрим случай, когда $45^\circ + \alpha > 90^\circ$.

Тогда:

$l^2 = b^2 + \frac{2}{4}c^2 + \sqrt{2}\,bc(\underbrace{\cos45^\circ}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}}\cos\alpha - \underbrace{\sin45^\circ}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\alpha)$

$\ell^2 = b^2 + \frac{1}{2}c^2 + bc\cos\alpha - bc\sin\alpha$

$\ell^2 = b^2 + \frac{1}{2}c^2 + bc\cdot\frac{b}{c} - b\cancel{c}\cdot\frac{a}{\cancel{c}}$

$\ell^2 = 2b^2 + \frac{1}{2}c^2 - ab \quad | \times 2$

$2\ell^2 = 4b^2 + c^2 - 2ab$

$2\ell^2 = 4b^2 + a^2 + b^2 - 2ab$

$2\ell^2 = 5b^2 + a^2 - 2ab$

$\ell = \sqrt{\frac{5b^2 - 2ab + a^2}{2}}$.

$\boxed{\text{Ответ: первая аллея имеет большую длину. При } \alpha = 45°.}$

+

№3.

Пусть будут числа a, b, c, d, e, f.

$\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3}$ – по усл.

$a = d$. Аналогично $b = e$, $c = f$.

$\frac{a+b+c+a+b+c}{6} = A$

Пусть $c = 1$ (любое число a, b или c может им быть). Тогда:

$\frac{2a+2b+2}{6} = A$

$\frac{a+b+1}{3} = A$

$a + b = 3A - 1$.

Рассмотрим функцию $f(a) = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot 1}$.

$f(a) = \sqrt[3]{a(3A-1-a)}$

Найдем нули функции:

$f'(a) = \frac{-2(3A-1-2a)}{3\sqrt[3]{a(3A-1-a)}} = 0 \Rightarrow 3A-1-2a = 0$

$a = \frac{3A-1}{2}$.

$\overset{-}{}\;0\;\overset{+}{}\;\frac{3A-1}{2}\;\overset{-}{}\;3A-1\;\overset{+\text{зн.ф.}}{}\; a$ (пол. пр.)

Допустим, $3A - 1 > 0$

Тогда $\frac{3A-1}{2}$ – макс. $f(a)$.

$f\left(\frac{3A-1}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{3A-1}{2}\left(3A-1-\frac{3A-1}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{(3A-1)(3A-1)}{4}}$.

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$.

+

№ 3.

Среднее любых трёх соседних равны, значит, суммы любых трёх соседних равны. Тогда числа стоящие через 2 равны.

a b c d

общие

+

Значит, если первые 3 числа - это a, в и с, то ряд имеет вид a, в, с, a, в, с.

~~Значит, что сумма любых трех соседних равна a+в+с.~~

~~Тогда среднее любых~~

Тогда среднее геометрическое любых трёх чисел (а значит, и максимальное) равно $\sqrt[3]{abc}$.

Порядок чисел не важен ⇒ можно не умаляя общности утверждать, что $a=1$.

$A=\frac{2(1+b+c)}{6}=\frac{1}{3}(b+c)+\frac{1}{3}$

$b+c=3\left(A-\frac{1}{3}\right)$ - число постоянное.

При постоянной сумме произведение будет максимальным при равенстве чисел, то есть $b=c$.

$2b=3\left(A-\frac{1}{3}\right)$

$b^2=\frac{(2b)^2}{4}=\frac{9\left(A-\frac{1}{3}\right)^2}{4}=\left(\frac{3\left(A-\frac{1}{3}\right)}{2}\right)^2=\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2$

$\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{b^2}=\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Ответ: $\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

№ 2.

$2x_n=x_0+\ldots+x_{n-1}-x_n$

+

$3x_n=x_0+\ldots+x_{n-1}$

$x_n=\frac{x_0+\ldots+x_{n-1}}{3}$.

Пусть $x_0=a$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x_1 = \frac{a}{3}$

$x_2 = \frac{3a}{3} + \frac{a}{3} = \frac{4a}{3}$

$x_3 = \frac{9a}{9} + \frac{3a}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16a}{9}$

$x_4 = \frac{27a}{27} + \frac{9a}{27} + \frac{12a}{27} + \frac{16a}{27} = \frac{64a}{27}$

Можно заметить, что при $n \geq 1$ $x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n} a$.

Вспомним формулу суммы геометрической прогрессии с базой b и шагом q: $S = b\frac{q^n-1}{q-1}$

Тогда $S_n = a + \frac{a}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{4}{3} - 1} = a + \frac{a}{3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3}} = a + a\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) =$

$= a\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

$x_{n+1} = \frac{S_n}{3} = a \cdot \frac{4^n}{3^{n-1}}$ (теперь доказано, что не только члены до x_4 являются членами геометрической прогрессии, а и все последующие).

№ 1.

Если для какого-то завода есть другие 3, с которыми он не соединён, то эту четвёрку на соединённые пары разбить нельзя. Тогда каждый соединён со всеми, кроме двух (по меньшей мере). А этой оценки достаточно. (±)

Соединим сначала каждый с каждым, а потом удалим „лишние" маршруты. Всего маршрутов $\frac{150 \cdot 149}{2} = 75 \cdot 149$

Нужно удалить так, чтобы из каждого выходило на 2 меньше: $(150 \cdot 2)$, но каждый маршрут посчитан 2 раза, то есть нужно вычеркнуть ровно 150. ?

$75 \cdot 149 - 150 = 75 \cdot 149 - 75 \cdot 2 = \boxed{75 \cdot 147}$

№ 4.

$g(x)$ имеет 1 корень, то есть имеет вид $m(x-n)^2$. (∓)

Тогда $g(ax+b) + g(cx+d) = m(ax+b-n)^2 - m(cx+d-n)^2 =$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$= m\left((ax+b-n)^2-(cx+d-n)^2 = m\left((a+c)x+(b+d)-2n\right)\left((a-c)x+\right.\right.$
$\left.+(b-d)\right) = (a^2-c^2)x^2+(a+c)(b-d)x+(b^2-d^2)+(a-c)(b+d)x-$
$-2n(a-c)x-2n(b-d).$

Это квадратный трёхчлен, который, очевидно, можно представить в виде:

$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$, „отбросить" это слагаемое, т. к. $D=0$, и выразить корень.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Последовательность $x_0, x_1 \dots x_n$

такое что: $2x_n = x_0 + x_1 + x_2 \dots + x_{n-1} - x_n \Rightarrow$

$$3x_n = x_0 + x_1 \dots + x_{n-1} \quad (1)$$

1) Все числа последовательности равны 0: выполняется условие (1) и

$x_n = 0$; $S_n = 0$

+

2) не равны 0 $\Rightarrow$ $3x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3}$

$3x_2 = x_0 + x_1 = \frac{4x_0}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{4x_0}{9}$

$3x_3 = x_0 + x_1 + x_2 \Rightarrow x_3 = \frac{16x_0}{27}$

$x_4 = \frac{64x_0}{81}$, $x_5 = \frac{256}{243}x_0$ и т.д.

получается, что все члены последовательности, начиная с $n=1$ различаются на $\frac{4}{3}$

$x_0 = x_0$; $x_1 = \frac{4^0 \cdot x_0}{3^1}$; $x_2 = \frac{4^1 \cdot x_0}{3^2}$ и т.д. $\Rightarrow$

x_n - член последовательности $= \frac{x_0}{3}\left(\frac{4}{3}^{n-1}\right) = \frac{4^{n-1}}{3^n} \cdot x_0$

Сумма n членов: $S_n = x_0 + x_1 + \dots x_n$; раньше было получено, что сумма $n-1$ членов больше в 3 раза чем x_n - член. $\Rightarrow$

$$S_n = 4 \cdot x_n = \frac{4^n}{3^n} \cdot x_0$$

Ответ: $S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot x_0$; $x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n} \cdot x_0$; x_0 - любое

или $x_n = 0$, $S_n = 0$

№3.

Шесть чисел: a, b, c, d, e, f

$a+b+c = b+c+d = c+d+e = d+e+f$

$\frac{a+b+c+d+e+f}{6} = A$

+

Пусть $a = 1$ (не имеет значения какое число именно)

тогда:

$a + \cancel{b+c} = \cancel{b+c}+d \Rightarrow d = a = 1$

$b + \cancel{c+d} = \cancel{d+e+f}$ $\cancel{c+d}+e \Rightarrow b = e$

$c = f$

пусть числа:

$b = e = x$

$c = f = y$

$a = d = 1$

$\Rightarrow 1, x, y, 1, x, y$

Среднее геометрическое модуля 3 чисел соседних =

$\sqrt[3]{x\cdot y\cdot 1} = \sqrt[3]{xy}$ | $\frac{x+y+1+x+y+1}{6} = A \Rightarrow x+y=3A-1$

Задача сведена к нахождению чисел x, y таких что

$x+y=3A-1$

и $x\cdot y$ – максимальное.

Чтобы $x\cdot y$ было максимально, нужно брать такие числа ~~x=y~~ $x=y$, $\Rightarrow$

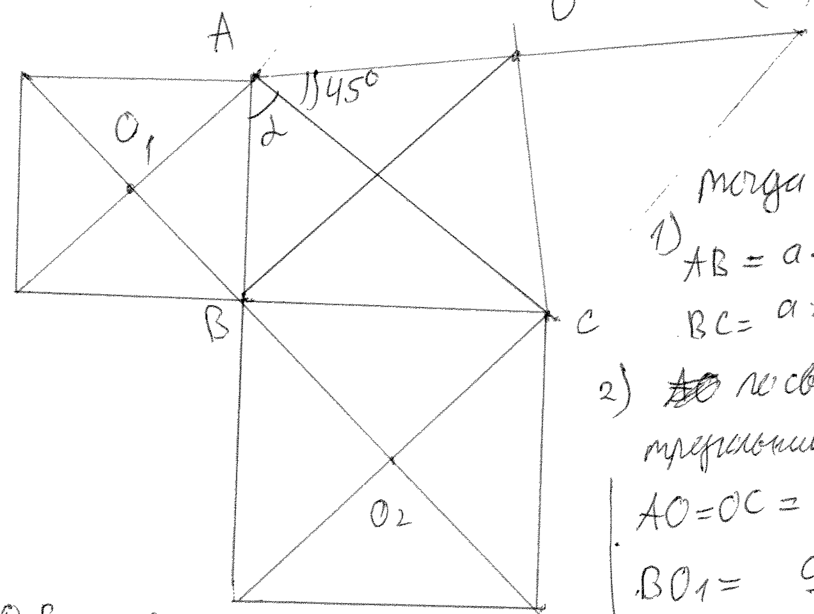
Например: $x+y=8$, $x\cdot y \Rightarrow max$

$x=\frac{8}{2}=y \Rightarrow x\cdot y=16$ – это наибольшая возможная сумма $\Rightarrow$

$x=\frac{3A-1}{2}$, $y=\frac{3A-1}{2}$; тогда:

$\sqrt[3]{x\cdot y} = \frac{|3A-1|}{2}$ Ответ: $\frac{|3A-1|}{2}$?

$\sqrt{5}$



Пусть: $AC=a$, $\angle BAC=\alpha$

тогда:

1) $AB = a\cdot\cos\alpha$, $BC = a\sin\alpha$

2) ~~AO~~ по свойству равнобедренных треугольников прямоугольных:

$AO=OC=\frac{a}{\sqrt{2}}$

$BO_1=\frac{a\cdot\cos\alpha}{\sqrt{2}}$

$BO_2=\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sqrt{2}}$

3) O_1B и BO_2 – лежат на одной прямой т.к. это биссектрисы вертикальных углов 90°

4) $O_1O_2=\frac{a\cdot\cos\alpha}{\sqrt{2}}+\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}(\cos\alpha+\sin\alpha)$

5) в $\triangle BAO$:

$\cos\angle BAO=\cos(\alpha+45)=\cos45\cos\alpha-\sin45\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$

AC – наибольшая сторона $\Rightarrow$ квадрат с AC – с наибольшей стороной $\Rightarrow$ наибольший квадрат

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

6) по т. Косинусов

$OB^2 = \cos^2\alpha a^2 + \frac{a^2}{2} - 2\cdot\cos\alpha\cdot a\cdot\frac{a}{\sqrt2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha) =$

$= \cos^2\alpha\cdot a^2 + \frac{a^2}{2} - \cos\alpha\, a^2(\cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{a^2}{2} + \cos\alpha\sin\alpha\cdot a^2$

$OB = a\sqrt{\frac12 + \cos\alpha\sin\alpha}$

7) $OB \ ? \ O_1O_2$

$a\sqrt{\frac12 + \sin\alpha\cos\alpha} \ ? \ a\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt2} \ \Big|\ {}^2$

$\frac12 + \sin\alpha\cos\alpha \ ? \ \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}{2} \ \Big|\cdot 2$

+

$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow$

$OB = O_1O_2$

При любых значениях угла α $OB = O_1O_2$

Ответ: Эти аллеи одинаковы. Различия не зависят от угла α.

№4.

$a \neq c$ | пусть $g(x) = Ax^2 + Bx + C$, если 1 корень тогда $x = -\frac{B}{2A}$?

$g(x)$ – 1 корень

$g(ax+b) + g(cx+d)$ – 1 корень

$g(ax+b) + g(cx+d) = 0$ } 2 параболы, с ветками в разные стороны имеют 1 решение $\Rightarrow$ их вершины совпадают.

$g(ax+b) = g(cx+d) \Rightarrow$

$g(ax+b) = A(ax+b)^2 + B(ax+b) + C = A\cdot a^2x^2 + 2A\cdot a\cdot b\cdot x + A\cdot b^2 + B\cdot ax + Bb + C =$

$= Aa^2\cdot x^2 + x(2A\cdot ab + B\cdot a) + Bb + C + A\cdot b^2$ +

аналогично для $g(cx+d)$, по всё c – $\Rightarrow$

вершины равны $\Rightarrow -\frac{2Aab + Ba}{2Aa^2} = -\frac{2A\cdot cd + B\cdot c}{2A\cdot c^2} \Rightarrow$

$c^2(2A\cdot ab + Ba) = a^2(2Acd + Bc)$

$2A\cdot c^2ab + B\cdot c^2\cdot a = 2Aa^2cd + Ba^2c$

$2A\cdot ac(cb - ad) = B\cdot ac(a-c)$

$A = \frac{B(a-c)}{2(cb-ad)} \Rightarrow \frac{-B}{2A} = \frac{-B}{\frac{2B(a-c)}{2(cb-ad)}} = \frac{+ad - cb}{a-c}$

Ответ: значение $= \frac{(ad-cb)}{a-c}$, $a \neq c$

№1.

Пусть некоторый завод ~~город~~ A не соединён маршрутами ~~дорогами~~ с заводами ~~городами~~ B, C и D. Тогда в четвёрке A, B, C, D не будет выполняться условие (нельзя разбить четвёрку на пары так, чтобы в паре с заводом ~~городом~~ A оказался завод, соединённый с ним ~~маршрутом~~). ⇒ Каждый завод может не быть соединённым не более чем с двумя другими заводами;

(+)

2) Если завод не соединён с двумя другими, то они должны быть соединены между собой (Иначе в четвёрке, содержащей эти три завода разбиение на пары невозможно).

Из 1) следует, что из каждого завода выходит не менее 147 маршрутов (всего кроме него ещё 149 заводов, 149 − 2 = 147).

Возможна ситуация, когда из каждого завода выходит ровно 147 маршрутов. Очевидно, что в этом случае количество маршрутов минимально. Пример:

~~1-ый завод соединён со всеми кроме ~~149-го и 150-го~~ 3-го и 4-го~~

~~2-ой завод соединён со всеми кроме 4-го и 5-го~~

~~3-ий завод соединён со всеми кроме 5-го и 6-го~~

~~...~~

~~148-ой завод соединён со всеми кроме 150-го и 1-го~~

1-ый завод соединён со всеми кроме 2-го и 150-го

2-ой завод соединён со всеми кроме 1-го и 3-го

3-ий завод соединён со всеми кроме 2-го и 4-го

...

150-ый завод соединён со всеми кроме 149-го и 1-го

150 заводов, из каждого выходит по 147 маршрутов, каждый маршрут имеет два конца ⇒ всего маршрутов $\frac{150 \cdot 147}{2} = 11025$

№1 (продолжение)

Ответ: 11025 маршрутов (т.е. пар заводов, соединённых маршрутами).

$$\begin{array}{r} \times 147 \\ 75 \\ \hline + 735 \\ 1029 \\ \hline 11025 \end{array}$$

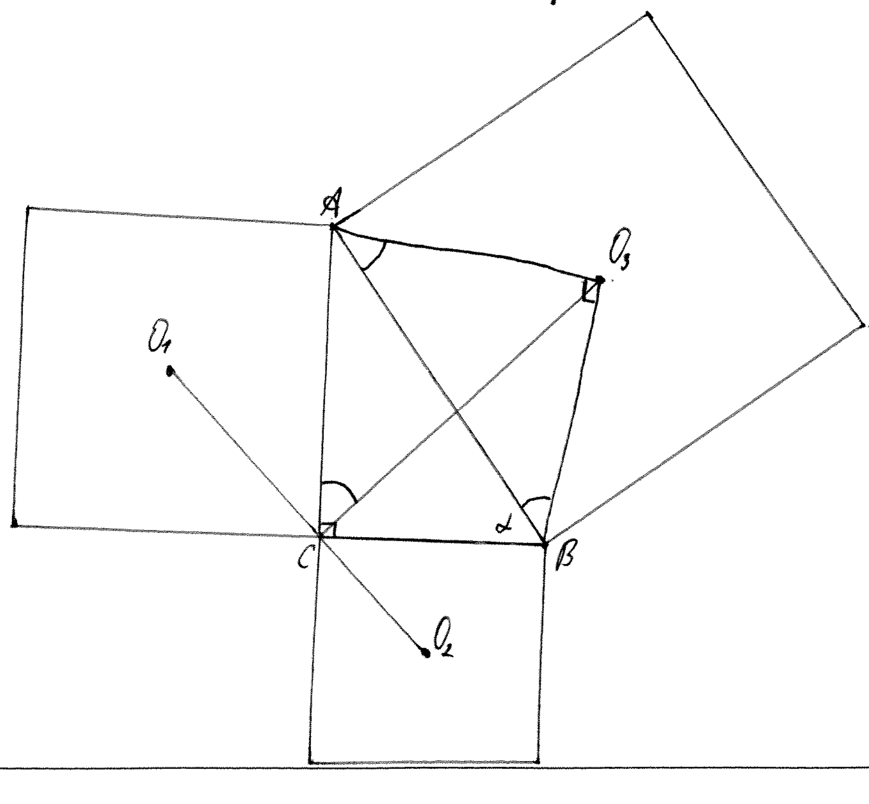
№2.

$2x_n = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n \iff 3x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}$ (+)

При этом $3x_{n-1} = x_0 + x_1 + \dots + x_{n-2}$ (при $n \geq 2$) $\Rightarrow 3x_n = 3x_{n-1} + x_{n-1} = 4x_{n-1}$ $\Rightarrow x_n = \frac{4}{3}x_{n-1}$, $2x_1 = x_0 - x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3}$. Таким образом, числовая последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — геометрическая прогрессия, $x_1 = \frac{x_0}{3}$, знаменатель прогрессии равен $q = \frac{4}{3} \Rightarrow x_n = x_1 \cdot q^{n-1} =$
$= \frac{x_0}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, где $n = 1, 2 \dots$ Сумма $S'_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n =$
$= \frac{x_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{x_0}{3}\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{4}{3} - 1} = x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) \Rightarrow S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n =$
$= S'_n + x_0 = x_0 + x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot x_0$.

Ответ: $x_n = \frac{x_0}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, $S_n = x_0\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

№5.



ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 (продолжение).

Обозначим точки буквами так, как показано на рисунке.

Пусть $\angle ABC = \alpha$.

Стороны ~~треугольника~~ квадратов равны сторонам треугольника $ABC \Rightarrow$ наибольший квадрат — тот, который построен на гипотенузе AB (т.к. гипотенуза всегда больше катета). O_1, O_2, O_3 — центры квадратов (см.рис) $\Rightarrow$ необходимо сравнить отрезки O_1O_2 и O_3C.

$\angle O_1CA = 45^\circ$ т.к. O_1A принадлежит диагонали квадрата с центром O_1. Аналогично $\angle O_2CB = 45^\circ \Rightarrow \angle O_1CO_2 = \angle O_1CA + \angle ACB + \angle BCO_2 = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow C \in O_1O_2 \Rightarrow O_1O_2 = O_1C + CO_2$. Диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше его стороны, O_1C — половина диагонали квадрата $\Rightarrow$ $O_1C = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = \frac{1}{\sqrt{2}}AC$. Аналогично $O_2C = \frac{1}{\sqrt{2}}BC \Rightarrow O_1O_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(AC+BC)$.

$BC = AC \cdot ctg\alpha \Rightarrow O_1O_2 = \frac{AC}{\sqrt{2}}(1 + ctg\alpha)$

$\angle ACB + \angle AO_3B = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow BCAO_3$ — вписанный в окружность четырёхугольник $\Rightarrow \angle ACO_3 = \angle ABO_3$ как опирающиеся на одну дугу вписанные углы. Т.к. O_3B лежит на диагонали квадрата, то $\angle O_3BA = 45^\circ$

$\angle CO_3A = \angle ABC = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

$\angle BAC = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle CAO_3 = \angle BAC + \angle BAO_3 = 90^\circ - \alpha + 45^\circ = 135^\circ - \alpha$

По теореме синусов в $\triangle CAO_3$:

$$\frac{CO_3}{\sin\angle CAO_3} = \frac{AC}{\sin\angle AO_3C} \Rightarrow CO_3 = \frac{AC \cdot \sin\angle CAO_3}{\sin\angle AO_3C} = AC \cdot \frac{\sin(135^\circ - \alpha)}{\sin\alpha} =$$

$$= AC \cdot \frac{\sin 135^\circ \cdot \cos\alpha - \cos 135^\circ \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha} = AC\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}AC\left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$O_1O_2 = \frac{AC}{\sqrt{2}}(1 + ctg\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}AC\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}AC\left(\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$\Rightarrow O_1O_2 = CO_3$ при всех значениях α (по смыслу задачи $\alpha \in (0; 90^\circ)$).

Ответ: $O_1O_2 = CO_3$ при всех значениях α, подходящих по смыслу задачи.

№3.

Пусть записанные числа равны a, b, c, d, e и g (именно в таком порядке). Тогда по условию $\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+g}{3}$,

$\frac{a+b+c+d+e+g}{6} = A \Rightarrow 2A = \frac{a+b+c}{3} + \frac{d+e+g}{3} = 2\cdot\frac{a+b+c}{3} \Rightarrow$

$\frac{a+b+c}{3} = A$ (Использовалось, что $\frac{a+b+c}{3} = \frac{d+e+g}{3}$).

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} \Rightarrow a=d$$

$$\frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} \Rightarrow b=e$$

$$\frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+g}{3} \Rightarrow c=g$$

$\Rightarrow$ Записанная последовательность чисел принимает вид $a, b, c, a, b, c \Rightarrow$ если взять любые три соседние числа, то получится набор $a, b, c. \Rightarrow$ Среднее геометрическое любых трёх соседних чисел равно $\sqrt[3]{abc}$.

По условию, одно из чисел равно 1. Пусть $a=0$. Тогда $\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{bc}$. $\frac{a+b+c}{3} = A \Leftrightarrow \frac{1+b+c}{3} = A \Leftrightarrow$ $b+c = 3A-1 \Rightarrow b = 3A-1-c$. Если $\sqrt[3]{bc}$ максимален, то bc максимально, $bc = b(3A-1-b) = (3A-1)b - b^2$. Возьмём производную, получим $(3A-1) - 2b \Rightarrow$ максимум bc достигается при $b = \frac{3A-1}{2}$ (производная равна 0) $\Rightarrow bc = \frac{3A-1}{2}\left(3A-1-\frac{3A-1}{2}\right) = \left(\frac{3A-1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt[3]{bc} = \sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$. ~~Ответ~~

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХР 73-99

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение).

Очевидно, что если $a\neq 1$, а вместо этого $b=1$ или $c=1$ то результат не изменится.

Ответ: максимальное значение среднего геометрического трёх соседних чисел равно $\sqrt[2]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$

№4.

Пусть $g(x)$ — приведённый многочлен (если нет, то можно поделить его на его старший коэффициент — полученный многочлен будет удовлетворять всем тем же условиям). Пусть $g(x)=x^2+px+q$. Пусть его корень равен x_1. Тогда по теореме Виетта $p=-2x_1$, $q=x_1^2 \Rightarrow g(x)=x^2-2x_1x+x_1^2$.

Тогда $g(ax+b)+g(cx+d)=(ax+b)^2-2x_1(ax+b)+x_1^2+(cx+d)^2-$
$-2x_1(cx+d)+x_1^2=a^2x^2+2abx+b^2-2ax_1x-2x_1b+x_1^2+c^2x^2+2cdx+$
$+d^2-2cx_1x-2x_1d+x_1^2=(a^2+c^2)x^2+(2ab-2ax_1+2cd-2cx_1)x+$
$+(2x_1^2+b^2+d^2-2x_1b-2x_1d)$ Неоптим. путь реш-я

Т.к. по условию этот квадратный трёхчлен имеет ровно один корень, то его дискриминант равен 0 (сразу поделим дискриминант на 4):

$(ab-ax_1+cd-cx_1)^2-(a^2+c^2)(2x_1^2+b^2+d^2-2x_1b-2x_1d)=0$

$a^2b^2+a^2x_1^2+c^2d^2+c^2x_1^2-2a^2bx_1+2abcd-2abcx_1-2acdx_1+2acx_1^2-c^2dx_1-$
$-2a^2x_1^2-a^2b^2-a^2d^2+2a^2bx_1+2a^2dx_1-2c^2x_1^2-c^2b^2-c^2d^2+$
$+2c^2bx_1+2c^2dx_1=0$

$(ac-a^2-c^2)x_1^2+x_1(-2a^2b-2abc-2acd-2c^2d+2a^2b+2a^2d+2c^2b+$
$+2c^2d)+(c^2d^2+a^2b^2+2abcd-a^2b^2-a^2d^2-c^2b^2-c^2d^2)=0$

$(ac-a^2-c^2)x_1^2+x_1(-2abc-2acd+2a^2d+2c^2b)+(2abcd-a^2d^2-c^2b^2)=0$

№4 (продолжение)

Получилось квадратное уравнение. ~~Из этого под~~ Дискриминант ~~его Х будет~~ (сразу поделим его на 4):

$$D/4 = \cancel{abc+acd} (a^2d+c^2b-abc-acd)^2-(ac-a^2-c^2)(2abcd-a^2d^2-c^2b^2) = a^4d^2+c^4b^2+a^2b^2c^2+a^2c^2d^2+2a^2c^2bd-2a^3bcd-2a^3cd^2-2ab^2c^3-2abc^3d+2a^2bc^2d-2a^2bc^2d+a^3cd^2+ac^3b^2+2a^3bcd-a^4d^2-a^2b^2c^2+2abc^3d-a^2c^2d^2-c^4b^2=0$$

(Зачёркнутые - значит сократились).

Как видно, получилось $D=0 \Rightarrow$

$$x_1=\frac{abc+acd-a^2d-c^2b}{ac-a^2-c^2}$$

Ответ: $\frac{abc+acd-a^2d-c^2b}{ac-a^2-c^2}$.

ошибки в преобразов-ях

$\mp$

1. Дано:

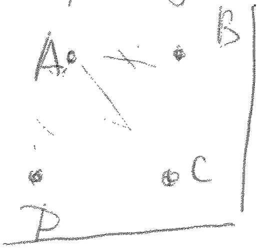
Всего - 150 заводов.

4 любые завода - в них между какими-то 2умя парами в каждой ходят автобус.

min кол-во пар, соединенные автобус маршрутами - ?

Решение:

Возьмем какой-то завод A. По принципу Дирихле наименьшее кол-во маршрутов с ним - 147.



Для завода A существует еще 149 заводов. Если найдутся какие-то 3 завода, у которых нет автобуса до завода A, это будет противоречить условию. Пусть это заводы B, C, D. Если составить 4-ку заводов A, B, C, D для A не найдется подходящей пары. ⇒ max кол-во заводов не соединенных маршрутом с A - 2. ⇒ +

$$k = \underbrace{\frac{150}{2}}_{\text{кол-во пар заводов}}\underbrace{(149-2)}_{\text{кол-во маршрутов для каждого завода}} = 75\cdot 147 = 11025.$$

k - кол-во маршрутов.

150 - кол-во заводов

[для каждого завода логика такая же, как для завода A]

Ответ: $k = \frac{N}{2}(N-1-2) = 11025$ маршрутов. (N - кол-во заводов)

2. Дано:

$x_0, x_1, ..., x_n, x_{n+1}$

$2x_n = x_0 + x_1 + ... + x_{n-1} - x_n$

для всех $n = 1, 2, ...$

x_n - ?

$S_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$ - ?

Решение:

$$2x_n = \underbrace{x_0 + x_1 + ... + x_{n-1}}_{S_{n-1}} - x_n$$

$\Downarrow$ +

$$3x_n = S_{n-1}.$$

$$S_n = S_{n-1} + x_n = 3x_n + x_n = 4x_n. \rightarrow$$

т.к. $\begin{cases} 3x_n = S_{n-1} \\ S_n = 4x_n \end{cases}$, то $x_n = \frac{S_{n-1}}{3} = \frac{4x_{n-1}}{3}$

Аналогично: $x_{n-1} = \frac{S_{n-2}}{3} = \frac{4x_{n-2}}{3} \Rightarrow$

$x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^2 x_{n-2} \Rightarrow x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot x_1 \Rightarrow$

$S_n = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} x_1$

Ответ: $x_n = \frac{S_{n-1}}{3} = \frac{4x_{n-1}}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot x_1$;

$S_n = 4x_n = 4 \cdot \frac{4}{3} x_{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} x_1$.

3. Дано:
6 чисел записаны в ряд.
Среди них есть 1.
Три сосед. числа — одинаковое ср. арифм.
max ср. геом. — ?
если $\sum_{\text{чисел}} = A$.

Решение:
6 чисел:
a, b, c, d, e, f.

+

По усл.:
$\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3}$

$\Downarrow$

$a+b+c = b+c+d = c+d+e = d+e+f$

$\Downarrow$ $a = d$, $\Downarrow$ $b = e$, $\Downarrow$ $c = f$.

Можем записать:
a, b, c, a, b, c.

I. $a = 1$
1, b, c, 1, b, c
Пусть ср. геометрич. — g, тогда
$g = \sqrt[3]{1 \cdot b \cdot c} = \sqrt[3]{bc}$
Примеч.: любые три соседних числа 1, b и c.

II. $b = 1$
a 1 c a 1 c
$g = \sqrt[3]{ac}$

III. $c = 1$
a b 1 a b 1
$g = \sqrt[3]{ab}$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Случай № I:

$1+b+c=3A$, т.к. $\frac{1+b+c+1+b+c}{6}=A$

$2(1+b+c)=6A$

⇓

$b+c=3A-1$;

$b=3A-1-c \Rightarrow g=\sqrt[3]{c\cdot(3A-1-c)}=\sqrt[3]{bc}$

ОДЗ: $bc\geq 0$

$g'=\frac{(3A-1-2c)}{3\sqrt{c(3A-1-c)}}$. $g'(c)=0$ при $c=0$, $c=3A-1$, $c=\frac{3A-1}{2}$.

1) ~~т.к.~~ $3A-1\geq 0$

ОДЗ: $c(3A-1-c)>0$

$g'(x)$: $\varnothing$ 0 + $\frac{3A-1}{2}$ − $3A-1$ $\varnothing$ → c

$g(x)$: ↗ ↘

$g\left(\frac{3A-1}{2}\right)$ — вос max.

2) $3A-1<0$.

ОДЗ: $c(3A-1-c)>0$

$g'(x)$: $\varnothing$ $3A-1$ + $\frac{3A-1}{2}$ − 0 $\varnothing$ → c

$g(x)$: ↗ ↘

$g\left(\frac{3A-1}{2}\right)$ — вос max

$\Rightarrow g_{max}\left(\frac{3A-1}{2}\right)=\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$ $\left(c=\frac{3A-1}{2};\ g=\sqrt{c(3A-1-c)}.\right)$

Ответ: $g_{max}=\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{2}}$?, при ср. арифметич. всех чисел A.

Для пунктов II и III аналогично.

5. Дано:

$\triangle ABC$, $\angle C=90°$

$O_1O_2=p$

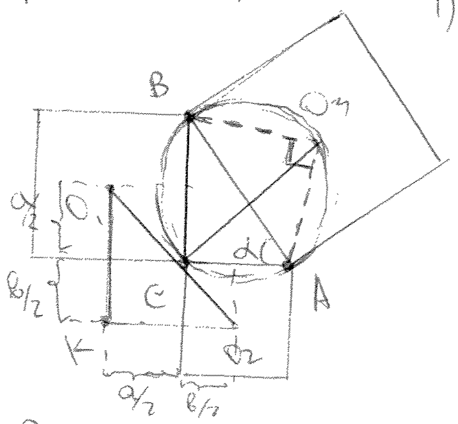
$CO_3=q$

$\angle BAC=\alpha$

$p\vee q$ — ?

α — ?

Решение:



1) Построим треугольник KO_1O_2. Пусть $O_1K\parallel BC$ и ⇒ сторонам квадрата a $KO_2\parallel AC$ и ⇒ ~~той~~ другим сторонам квадратов ⇒ $\angle O_1KO_2=90°$.

Продолжение на стр. 4.

№5. Начало на странице 3

Пусть $AB = c$

$AC = b = c\cdot\cos\alpha$

$CB = a = c\cdot\sin\alpha$

$O_1K = \frac{a}{2}+\frac{b}{2}$, $O_2K = \frac{a}{2}+\frac{b}{2}$ аналогич., т.к. $(O_1K \parallel BC)\perp AC$, а $(O_2K \parallel AC \perp BC)$. и т. O_1 и т. O_2 – центры квадратов со сторонами a и b. =>

$$O_1K = O_2K = \left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2}$$

$$O_1O_2 = O_1K\cdot\sqrt{2} = \frac{c\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$ – равнобедр. прямоуг. треугольник.

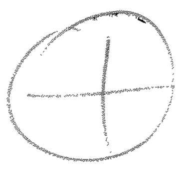
г). $\angle AO_3B = 90^\circ$, т.к. O_3 – ц. квадрата, а диагонали квадрата перпендикулярны.

AB – диаметр окр, описанной около $\triangle ABC$, $\angle AO_3B$ – опир. на AB => около AO_3BC можно опис. окр. (2 прямых угла опир. на диаметр. окружности) =>

$\angle O_3CA = \angle O_3CB = 45^\circ$, т.к. $AO_3 = BO_3 = \frac{c\sqrt{2}}{2}$ – половинки диагоналей квадрата со стороной c.

По т. косинусов из $\triangle ACO_3$ и $\triangle BCO_3$:

$$\begin{cases} AO_3^2 = CA^2 + CO_3^2 - 2CA\cdot CO_3\cdot\cos 45^\circ \\ BO_3^2 = BA^2 + CO_3^2 - 2BA\cdot CO_3\cdot\cos 45^\circ \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{c^2}{2} = c^2\cos^2\alpha + z^2 - 2c\cos\alpha\cdot z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{c^2}{2} = c^2\sin^2\alpha + z^2 - 2c\sin\alpha\, z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ – складываем

$$c^2 = c^2\underbrace{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}_{1} + 2z^2 - cz\cancel{\sin\alpha}\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

$$2z = c\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$$

$$CO_3 = z = \frac{c\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha).$$

Ответ: $p = q = CO_3 = O_1O_2 = \frac{c\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$, где c – гипотенуза $\triangle ABC$ при $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$. (Длины отрезков третьего этапа равны при всех α (допустимых)).

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ XP 83-29

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. Дано:
$g(x)$ — квадратный трёхчлен.
имеет 1 корень $= t$.
$g(ax+b)+g(cx+d)$;
$a \neq c$; имеет 1 корень.

t — ?

Решение:
Пусть $g(x) = qx^2+px+r$,
тогда
$g(ax+b)+g(cx+d) =$
$= q((ax+b)^2+(cx+d)^2)+p(ax+b+cx+d)+$
$+2r$.

Условие ~~один~~ совпадения корней многочлена:
$D=0$ для $g(x)$
$D = p^2-4qr \Rightarrow$
$p^2 = 4qr$

Раскладываем $g(ax+b)+g(cx+d)$:

$$q(a^2x^2+c^2x^2)+p(ax+cx)+q(2abx+2cdx)+q(b^2+d^2)+p(b+d)+2r=0.$$

$$D = (p(a+c)+2q(ab+cd))^2-4q(a^2+c^2)(q(b^2+d^2)+p(b+d)+2r) = 0$$

По теореме Виета $t = \pm\sqrt{\frac{r}{q}} = \frac{1}{2}\frac{p}{q}$ $\left(\begin{matrix} t_1 \cdot t_2 = \frac{r}{q} \\ t_1+t_2 = -\frac{p}{q} \\ t_1 = t_2 = t. \end{matrix}\right)$

Также по т. Виета

~~т.к. полный квадрат.~~

$$~~t_2 = \pm\sqrt{\frac{2r}{q(a^2+c^2)}} = -\frac{1}{2}\frac{p(a+c)+2q(ab+cd)}{q(a^2+c^2)}~~$$

$$~~\pm\sqrt{\frac{r}{q}}\cdot\sqrt{\frac{2}{a^2+c^2}} = -\frac{1}{2}\frac{p(a+c)+2q(ab+cd)}{q(a^2+c^2)}~~$$

$$~~t = \sqrt{\frac{r}{q}} = \mp\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{p(a+c)+2q(ab+cd)}{q\sqrt{a^2+c^2}}.~~$$

~~$\frac{p}{q}<0$ $t=\sqrt{\frac{r}{q}}$~~ ~~$\frac{p}{q}>0$ $t=-\sqrt{\frac{r}{q}}$~~

~~Ответ: при $\frac{p}{q}<0$ $t = -\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{(p(a+c)+2q(ab+cd))}{q\sqrt{a^2+c^2}}$~~

~~при $\frac{p}{q}>0$ $t = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{p(a+c)+2q(ab+cd)}{q\sqrt{a^2+c^2}}$~~

Продолжение на листе 6

$$t_2 = \pm\sqrt{\frac{2r+p(b+d)+q(b^2+d^2)}{q(a^2+c^2)}} = -\frac{1}{2}\frac{p(a+c)+2q(ab+cd)}{q(a^2+c^2)}$$

$$\cancel{2\frac{r}{q}+\frac{p}{q}}\quad 2\frac{r}{q(a^2+c^2)}+\frac{p}{q}\left(\frac{b+d}{a^2+c^2}\right)+\frac{b^2+d^2}{a^2+c^2}=\frac{1}{4}\frac{p^2}{q^2}\left(\frac{a+c}{a^2+c^2}\right)+\frac{(ab+cd)}{a^2+c^2}$$

Домножим на (a^2+c^2)

$$2\frac{r}{q}+\frac{p}{q}(b+d)+b^2+d^2=\frac{1}{4}\frac{p^2}{q^2}(a+c)+ab+cd$$

$$\frac{r}{q}=t^2;\quad \frac{p}{q}=-2t$$

$$2t^2-2t(b+d)+b^2+d^2+t^2(a+c)-ab-cd=0$$

$$t^2(2-(a+c))-2t(b+d)+b^2+d^2-ab-cd=0.$$

$$D/4=b^2+d^2-(2-(a+c))(b^2+d^2-ab-cd)$$

$$t_{1,2}=\frac{(b+d)\pm\sqrt{(2-(a+c))(b^2+d^2-ab-cd)}}{2-(a+c)}$$

т.к. $t_1=t_2$ $D=0 \Rightarrow t=\dfrac{b+d}{2-a-c}$

Ответ:

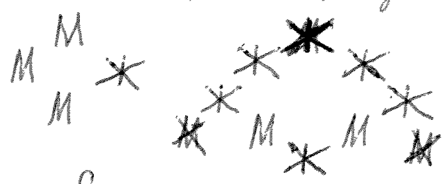
$$t=\frac{b+d}{2-a-c}$$

№1.

Исходя из условия задачи можно с уверенностью сказать, что число детей в хороводе чётно (m(сосед справа противоположного пола) = m(сосед справа того же пола)). ~~Также так как~~ Если в хоровод, состоящий из лиц одного пола, добавить лицо другого пола, то m(сосед справа прот. пола) = 2. Следовательно, для выполнения условия кол-во детей должно быть ~~в~~ кратно 4. Минимальное подходящее натуральное число: 4.

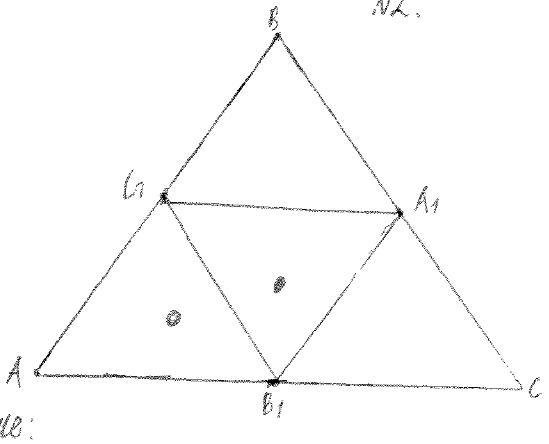
±

Для выполнения условия достаточно взять мальчиков и девочек в отношении 3:1 и выстроить их так, что лица, взятые в недостатке, не находились рядом друг с другом.



Ответ: любое число, кратное 4.

№2.



Дано:
$A_1B_1 \parallel AB$
$A_1C_1 \parallel AC$
$B_1C_1 \parallel BC$

Найти: $\frac{AB_1}{B_1C}$; $\frac{AC_1}{BC_1}$; $\frac{BA_1}{CA_1}$; $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$; $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}$

Решение:

1. $A_1C_1 \parallel AB_1 \Rightarrow \angle A_1C_1B_1 = \angle AB_1C_1$
   $A_1C_1 \parallel B_1C \Rightarrow \angle C_1A_1B_1 = \angle CB_1A_1$
2. $A_1B_1 \parallel BC_1 \Rightarrow \angle B_1A_1C_1 = \angle BC_1A_1$
   $A_1B_1 \parallel AC_1 \Rightarrow \angle A_1B_1C_1 = \angle AC_1B_1$
3. $B_1C_1 \parallel CA_1 \Rightarrow \angle C_1B_1A_1 = \angle CA_1B_1$
   $B_1C_1 \parallel BA_1 \Rightarrow \angle B_1C_1A_1 = \angle BA_1C_1$
4. $\left.\begin{array}{l}\angle AB_1C_1 = \angle A_1C_1B_1\\ \angle AC_1B_1 = \angle A_1B_1C_1\\ B_1C_1 \text{ - общая}\end{array}\right\} \triangle AB_1C_1 = \triangle A_1C_1B_1$

   $\left.\begin{array}{l}\angle BC_1A_1 = \angle B_1A_1C_1\\ \angle BA_1C_1 = \angle B_1C_1A_1\\ A_1C_1 \text{ - общая}\end{array}\right\} \triangle A_1C_1B_1 = \triangle C_1A_1B$

   $\left.\begin{array}{l}\angle CA_1B_1 = \angle C_1B_1A_1\\ \angle CB_1A_1 = \angle C_1A_1B_1\\ A_1B_1 \text{ - общая}\end{array}\right\} \triangle A_1C_1B_1 = \triangle B_1CA_1$

Это неверно

$\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 = \triangle AC_1B_1 = \triangle B_1A_1C = \triangle C_1BA_1 \Rightarrow A_1C_1 = AB_1 = B_1C$,
$A_1B_1 = AC_1 = BC_1$,
$B_1C_1 = A_1B = A_1C$

$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{1}{2}$; $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{A_1B}{A_1C} = 1$; $\frac{A_1B_1}{AB} =$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7991

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ YA 89-37

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. $\angle A = \angle A_1 \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 4$

Ответ: $\frac{AB_1}{B_1C} = 1$; $\frac{BC_1}{AC_1} = 1$; $\frac{A_1B}{A_1C} = 1$; $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = 4$.

−

№3.

Т.к. сумма при перестановке из условия не меняется, любой элемент множества M удовлетворяет условию $x_m = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_m$. Пусть $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Тогда $x_i = S - x_i$.

Если сложить ~~все числа~~ возможные уравнения вида $x_i = S - x_i$, то получим такое уравнение: $S = nS - S$, т.е. $S = 2015S - S$; $2S = 2015S$; т.е. $S = 0$. Следовательно $x_i = 0 - x_i = -x_i \Rightarrow x_i = 0$. Множество M состоит из нулей.

Тогда произведение элементов множества равно 0.

Ответ: 0.

+

№4.

$g(x) = ax^2 + bx + c = 0$ или $x^2 + px + q = 0$, при $\frac{p}{2} = \sqrt{q}$, если $p \geq 0$ и $\frac{p}{2} = -\sqrt{q}$, если $p < 0$.

$x^2 + 2ax + a^2 = 0$; $a = -x$. ~~$a = -x$~~

$(1+3x)^2 + 2a(1+3x) + a^2 + (2x-3)^2 + 2a(2x-3) + a^2 = 0$

$9x^2 + 6x + 1 + 2a + 6ax + a^2 + 4x^2 - 12x + 9 + 4ax - 6a + a^2 = 0$

$13x^2 - 6x + 10ax - 4a + 2a^2 + 10 = 0$

~~$13x^2 - 6x - 10x^2 + 4x + 2x^2 + 10 = 0$~~

~~$5x^2 - 2x + 10 = 0$~~

$13x^2 + (10a - 6)x + (2a^2 - 4a + 10) = 0$

$\frac{(10a-6)^2}{4 \cdot 13} = 2a^2 - 4a + 10$

$25a^2 - 30a + 9 = 26a^2 - 52a + 130$

$a^2 - 22a + 121 = 0$

$a = 11$

$x = -11$

Ответ: -11.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Т.к. k - отношение суммы любых двух чисел к двум другим, то $\frac{a+b}{c+d}=k=\frac{c+d}{a+b}$, т.е $k=\frac{1}{k}$

$k=\frac{1}{k}$

$k^2=1$

$\left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-1 \end{array}\right.$

Если $k=1$, то все числа равны между собой, чего не может быть. Следовательно $k=-1$

Тогда $a+b=-c-d$; $a+c=-b-d$ => $a+a+b+c=-b-c-2d$ => $a=-b-c-d$; т.е

$x_i=-S+x_i$ => $S=0$.

Таким образом, единственным ограничением по значениям чисел является то, что их сумма равна 0, но ~~2 числа~~ никаких 2 числа не должны быть противоположными ($x=-y$), иначе если их сумма будет в знаменателе, то произойдёт деление на ноль

Количество вариаций четвёрки чисел бесконечно.

Пример: $a=0$; $b=3$; $c=-10$; $d=7$ $(0+3+7-10=0)$

$\frac{0+3}{7-10}=-1=\frac{7-10}{0+3}$

$\frac{0-10}{3+7}=-1=\frac{3+7}{0-10}$

$\frac{0+7}{3-10}=-1=\frac{3-10}{0+7}$

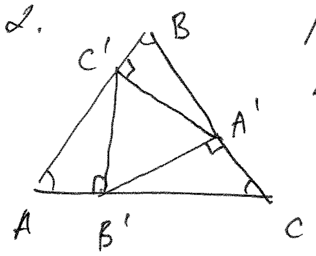
+

Ответ. $k=-1$; $(0;3;7;-10)$; $A\{a,b,c,d\in\mathbb{Q} \mid a+b+c+d=0; a\neq b; a\neq c; a\neq d; b\neq c; b\neq d; c\neq d\}$;

$m(A)=\infty$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2.



Пусть A', B', C' – взятые точки; не умаляя общности $A'B' \perp BC$, $B'C' \perp AC$, $A'C' \perp AB$

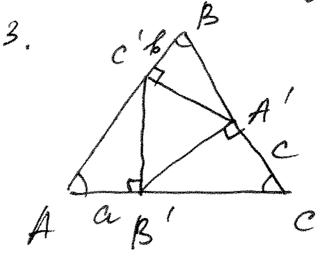
1. $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ (т.к. $\triangle ABC$ – р/с)

2. $\triangle BC'A'$ – п/у $\angle BC'A' = 90^\circ \Rightarrow \angle C'A'B = 30^\circ$ $(=180-90-60)$ по сумме углов $\triangle$

$\triangle AB'C'$ – п/у $\angle AB'C' = 90^\circ \Rightarrow \angle AC'B' = 30^\circ$ по сумме углов $\triangle$

$\triangle CA'B'$ – п/у $\angle CA'B' = 90^\circ \Rightarrow \angle CB'A' = 30^\circ$ по сумме углов $\triangle$

3.



Пусть $BC' = b$ $AB' = a$ $CA' = c$, тогда

$C'A' = b \cdot tg\angle B = b\sqrt{3}$; $A'B' = c \cdot tg\angle C = c\sqrt{3}$; $B'C' = a \cdot tg\angle A = a\sqrt{3}$

$\angle A = \angle B = \angle C \Rightarrow tg\angle A = tg\angle B = tg\angle C$

$\angle C'A'B' = 180 - \angle B'A'C - \angle C'A'B = 60^\circ$

$\angle C'B'A' = 180 - \angle C'B'A - \angle A'B'C = 60$

$\angle B'C'A' = 180 - \angle B'C'A - \angle A'C'B = 60^\circ$

$\triangle A'B'C'$ – р/с $\Rightarrow A'C' = A'B' = B'C'$

$\Rightarrow b = a = c$

4. $A'B = 2b$ $(= BC'/\cos\angle B$ из $\triangle BC'A')$

$B'C = 2c$ $(= A'C/\cos\angle C$ из $\triangle CA'B')$

$AC' = 2a$ $(= AB'/\cos\angle A$ из $\triangle AB'C')$

$\Rightarrow \frac{AB'}{B'C} = \frac{a}{2c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$ $\frac{CA'}{BA'} = \frac{c}{2b} = \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}$

$\frac{BC'}{AC'} = \frac{b}{2a} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$

5. $S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \cancel{9c^2}\ 3b \cdot 3c \cdot \sin 60 = 9c^2 \sin 60$

$S_{A'B'C'} = A'C' \cdot B'C' \sin\angle A'C'B' = b\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \sin 60 = 3c^2 \sin 60$

$\cancel{AC'}$ $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{9c^2 \sin 60}{3c^2 \sin 60} = 3$

Ответ: $\frac{1}{2}$; 3

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ – числа у М.

По условию $S = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2015}) - 2a_i$, для $1 \le i \le 2015$

$2(a_1 + \dots + a_{2015}) - 2a_i = 2(a_1 + \dots + a_{2015}) - 2a_j$

$\Rightarrow a_i = a_j$

+

Пусть все числа равны a

По условию $a_1 + \dots + a_{2015} = 2(a_1 + \dots + a_{2015}) - 2a_i$

$\Rightarrow 2015a = 2 \cdot 2015a - 2a$

$2015 = 2 \cdot 2014$ при $a \neq 0$ ~~тело~~ не может быть

$\Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ все числа равны $0 \Rightarrow$ произведение равно 0

Ответ: 0

~~4.1~~ 5.

Пусть имеются числа a, b, c, d

По условию:

$\frac{a+b}{c+d} = k \Rightarrow \frac{c+d}{a+b} = \frac{1}{k} = k \Rightarrow k = \left[\begin{array}{l}1 \\ -1\end{array}\right.$

· если $k = 1$

$\begin{array}{l} a+b = c+d \\ a+c = b+d \end{array} \Rightarrow a = d$

Аналогично можно док-ть, что $a = b = c = d$, что противоречит условию $\Rightarrow k \neq 1$

$\Rightarrow k = -1$

Пример $-1, 2, 3, -4$

$\frac{-1+2}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1$ $\qquad \frac{-1-4}{2+3} = -1$

$\frac{-1+3}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$ $\Rightarrow$ Остальные будут $\frac{-1}{1} = -1$ обратные к этим.

$-a, a+1, a+2, -a-3$: a любое $\Rightarrow$ четверок бесконечное кол-во

$\frac{-a+a+1}{a+2-a-3} = \frac{1}{-1} = -1$ $\qquad \frac{-a-a-3}{a+1+a+2} = \frac{-3}{3} = -1$

Остальные обратные к этим $\Rightarrow$ равны -1

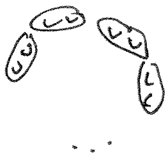
$\frac{-a+a+2}{a+1-a-3} = \frac{2}{-2} = -1$

Не общий случай

±

1. Пусть n детей.

1. n - четно. Пусть каждый ребенок говорит, 'да', если справа стоит ребенок того же пола, 'нет' — другого, тогда если n - нечет ⇒ всех говоривших нечетно ⇒ 'да' и 'нет' не могло быть поровну.

2. 

Разобьем детей на пары, тогда внутри каждой пары

±

$n \vdots 4$ Пример

$\overset{+}{м}\overset{-}{м}\ \overset{+}{д}\overset{-}{д}\ \overset{+}{м}\overset{-}{м}\ дд \dots \overset{+}{д}\overset{-}{д}$

Ответ: любое число $\vdots 4$.

4. $g(x) = x^2+bx+c$ 1 корень ⇒ $b^2=4c$

$g(1+3x)+g(2x-3) = 1+9x^2+6x+4x^2+9-12x+b(5x-2)+2c=0$

$13x^2+(5b-6)x+2c-2b+10=0$

$D = 25b^2+36-60b-4\cdot13(2c-2b+10)=0$ т.к. 1 корень

$25\cdot4c+36-60b-104c+104b-520=0$

$-4c-484+44b=0$

$11b-c-121=0$ $c=11(b-11)$

$b^2=44(b-11)$ $b^2-44b+44\cdot11=0$

$x=-\frac{b}{2}$ $(b-22)^2=0$ $b=22 \Rightarrow c=121$

$x=-11$

Ответ: -11

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3. Обозначим как S сумму всех 2015 чисел множества M. Сами числа обозначим как $x_1, x_2, x_3 \dots x_{2015}$.

$S = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2015}$.

Если заменяют элемент x_1, то сумма остальных 2014 чисел равна $S - x_1$. Зная, что при замене любого элемента множества M на сумму остальных 2014 элементов из M сумма всех 2015 эл-ов не изменится, имеем:

$$S = \underbrace{(S - x_1)}_{\text{замена элемента } x_1} + (x_2 + x_3 + \dots x_{2015}) = (x_2 + x_3 + \dots x_{2015}) + (x_2 + x_3 + \dots x_{2015}) =$$
$$= 2 \cdot (S - x_1).$$

Аналогичным образом $S = 2 \cdot (S - x_2) = 2 \cdot (S - x_3)$ и так далее.

Тогда $2015 \cdot S$ мы можем представить как:

$$2015 \cdot S = 2 \cdot (S - x_1) + 2 \cdot (S - x_2) + 2(S - x_3) + \dots 2(S - x_{2015}) =$$
$$= 2\left((S - x_1) + (S - x_2) + \dots + (S - x_{2015})\right) = 2 \cdot (2015 S - (x_1 + x_2 + \dots$$
$$\dots + x_{2015})) = 2 \cdot (2015 S - S) = 2 \cdot 2014 S.$$

(+)

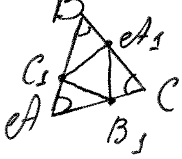
Таким образом $2015 S = 2 \cdot 2014 S \Rightarrow S = 0$.

$S = 2 \cdot (S - x_1)$; $S = 0 \Rightarrow 0 = 2 \cdot (0 - x_1)$

$0 - x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$, а значит произведение всех чисел множества M $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots x_{2015})$ будет равно 0. (Так как один из множителей равен 0.)

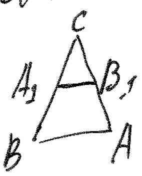
Ответ: произведение всех 2015 элементов множества M равно 0.

№2. ~~Сначала посмотрим, к каким сторонам исходного треугольника~~ Пусть $\triangle ABC$ — исходный правильный (значит, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$; $AB = BC = AC$) треугольник, а точки A_1, B_1, C_1 — взятые точки (при этом $A_1 \in BC$; $B_1 \in AC$; $C_1 \in AB$). Тогда $\triangle A_1B_1C_1$ — новый полученный треугольник. Значит, нам нужно найти: $\frac{AC_1}{C_1B}$; $\frac{BA_1}{A_1C}$; $\frac{CB_1}{AB}$; $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}}$.

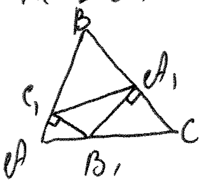


Решение:

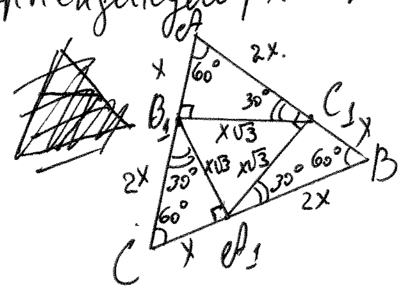
Сначала рассмотрим, к каким сторонам $\triangle ABC$ может быть перпендикулярна сторона $\triangle A_1B_1C_1$.



~~Если сторо~~ Сторона $\triangle A_1B_1C_1$ не может быть перпенд-на двум сторонам $\triangle AB$, т.к. иначе, например, если $A_1B_1 \perp CB$ и $A_1B_1 \perp AC$, то в $\triangle A_1CB_1$ $\angle CA_1B_1 = 90^\circ$ и $\angle CB_1A_1 = 90^\circ$, но тогда $\angle A_1CB_1 + \angle CB_1A_1 + \angle B_1A_1C = 180^\circ + \angle A_1CB_1 > 180^\circ$, чего быть не может, значит сторона $\triangle A_1B_1C$ может быть перпенд-на только 1 сторо-не $\triangle ABC$.



Предположим, что $A_1B_1 \perp BC$; $B_1C_1 \perp AB$, то есть к стороне AC нет ~~от~~ стороны $\triangle A_1B_1C_1$, которая к ней перпендикулярна. Но тогда сторона A_1C_1 должна быть перпенд-на либо к BC, либо к AB. ~~Но если~~ ~~так,~~ то Если $A_1C_1 \perp BC$, то $A_1C_1 \perp BC$ и $A_1B_1 \perp BC$, и из точки A_1 выходят 2 прямые, перпендикулярные ~~каждой~~ стороне $\triangle ABC$ BC, чего быть не может. Значит, каждой стороне $\triangle ABC$ перпендикулярна ровно 1 сторона $\triangle A_1B_1C_1$.



Рассмотрим $\triangle AC_1B_1$: $\angle A = 60^\circ$, т.к. $\triangle ABC$ - правильный. $\angle AB_1C_1 = 90^\circ$, т.к. $B_1C_1 \perp AC$. Значит, зная, что сумма углов любого треугольника $= 180^\circ$, имеем: $\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle A - \angle AB_1C_1 = 30^\circ$. Аналогично с треуг-ми $\triangle C_1BA_1$ и A_1CB_1 получим, что $\angle C_1A_1B = 30^\circ$ и $\angle CB_1A_1 = 30^\circ$.

По теореме о прямоуг. треуг. с ~~$\angle = 30^\circ$~~ углом $= 30^\circ$, в $\triangle AB_1C_1$ $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{1}{2}$. Поэтому пусть $AB_1 = x$, а $AC_1 = 2x$.

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$: $\angle B_1A_1C_1 = 180^\circ - \angle CA_1B_1 - \angle C_1A_1B = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Т.к. $\angle AB_1C_1 = \angle BC_1A_1 = 90^\circ$ и $\angle AC_1B_1 = \angle A_1B_1C = 30^\circ$, то аналогично $\angle A_1B_1C_1 = \angle B_1C_1A_1 = 60^\circ = \angle B_1A_1C_1$, (все углы также равны 60°) а значит $\triangle A_1B_1C_1$ — правильный, и все его стороны равны ($A_1B_1 = B_1C_1 = A_1C_1$). $\triangle AC_1B_1$, $\triangle BA_1C_1$ и $\triangle CB_1A_1$ подобны по 2 углам ($\angle B = \angle A = \angle C$ и $\angle BA_1C_1 = \angle CB_1A_1 = \angle AC_1B_1$), и значит $B_1C_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = AC_1 : BA_1 : CB_1 = AB_1 : C_1B : A_1C$, и так как $B_1C_1 = C_1A_1 = A_1B_1$, имеем, что $AB_1 = C_1B = A_1C = x$; ~~$AC_1 = 2x$~~

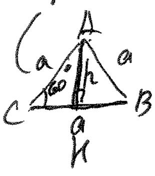
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7991 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ YA 89-98

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

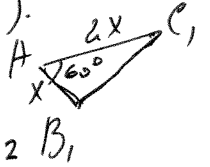
~~$AC_1 = BA$~~ $AC_1 = BA_1 = CB_1 = 2x$. Значит, $\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$ и в таком отношении делит каждая из взятых точек сторону исходного треугольника.

Формула для площади правильного треуг-ка: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треуг-ка.



(пусть $\triangle ABC$ — правильный. Тогда $S_\triangle = \frac{a \cdot h}{2}$, где a — ~~вы~~ сторона треуг-ка, а h — высота к этой стороне. (AK — высота, CB — основание). $\triangle AKC$ — прямоуг., $\angle C = 60°$ т.к. $\triangle ABC$ — правильный, ⇒ $h = AC \cdot \sin 60° = a \cdot \sin 60° = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$; значит, $S_\triangle = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$).

Найдём сторону $\triangle A_1B_1C_1$ (все его стороны равны, поэтому достаточно одной стороны).



$\angle A = 60°$; $AC_1 = 2x$; ~~$\angle C_1B_1A = 30° = \angle C_1B_1$~~ $\angle C_1B_1A = 90°$ ⇒ по т. Пифагора $AC_1^2 = C_1B_1^2 + AB_1^2$

$(2x)^2 = C_1B_1^2 + x^2$

$4x^2 = C_1B_1^2 + x^2$

$C_1B_1^2 = 3x^2 \Rightarrow C_1B_1 = x \cdot \sqrt{3}$. По формуле для нахождения S прав. треуг-ка находим, что $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{(x \cdot \sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

$AB = AC_1 + C_1B = 3x$ — сторона $\triangle ABC \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{(3x)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Тогда $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \cancel{\frac{x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{9x^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{x^2 \cdot 3}{9x^2} = \frac{1}{3}} =$

$= \frac{9x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} : \frac{x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{9x^2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4}{4 \cdot x^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$.

Ответ: каждая из взятых точек делит сторону исходного треуг-ка в отношении $\frac{1}{2}$ и отношение площади исходного треугольника к площади полученного равно $\frac{3}{1}$.

+

№1. У ребёнка такого хоровода сосед справа может быть только либо того же пола, либо другого пола.

Пусть k — число детей, у которых сосед справа — того же пола. По условию это число равно количеству детей, у которых сосед справа — другого пола, значит кол-во детей, у которых сосед справа другого пола так же равно k. У каждого из детей есть сосед справа и он один (т. к. это хоровод), значит общее количество детей равно 2k.

Лист 03 из 05

Значит, число детей чётно.
~~В~~ Если хоровод из 2 детей, то условия не выполняются.
Если из 4, то могут стоять только таким образом:

(обозначения!
⌒ – дети с соседом одного пола
⌒ м – дети с соседом разного пола
д – девочка / м – мальчик)

м д д м д д м м

Докажем, что $k \vdots 2$.
Рассмотрим, какие варианты возможны на „цепи" из 5 детей
(5й ребёнок может „замыкать" круг / цепочку, являясь 1м в данном расположении детей):

№ расположения	1р.	2р.	3 ребёнок	4 реб.	5 р.	Кол-во детей с пр. соседом того же пола	Кол-во с соседом другого пола
	д	д	д	д	д	~~4~~	0
1	д	д	д	д	д	3	1
2	м	д	д	д	д	2	2
3	д	м	д	д	д	1	3
4	д	м	м д	м	м	0	4
5	д	м	д	м	д		

← возможны и другие вар-ты, но будут и такие же

(тут „д" – девочки могут быть „м" – мальчиками, при этом „м" быть „д", т.к. на подсчёт кол-ва детей такого же / другого пола это не влияет.)
Мы видим, что чтобы „уравновесить" кол-во детей с разного и такого же пола соседями, нужна соответствующая другая „четвёрка" (№1 – №4; №2 – №4; №3).
То есть, например: №1 №1 – №4: №4

д д д д д м д м м

~~$k:$~~ $(2k \vdots 4)$. (Если использовать только вар-ты №1, 2, 4, 5, то $2k \vdots 8$)

Если использовать только №3, то $2k \vdots 4$, не обязательно $2k \vdots 8$.
Например:

д д м м д д м м

или

~~д м д д д м д д м~~

д м д д м д д м д д

д м д д д м д д м д д

Ответ: число, большее или равное 4 и кратное 4.

№5. Пусть это числа a, b, c и f. (некоторые, но не все, могут быть одинаковы). Тогда $\frac{a+b}{c+f} = \cancel{b+c}\ \frac{c+f}{a+b}$. $(a+b)^2 = (c+f)^2 \Rightarrow \cancel{a+b = c+f} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{a+b}{c+f}\right)^2 = \cancel{k} = 1$. ~~Пусть $a+b = c+f = x$. Тогда~~: $\Rightarrow k = \pm 1$.

$\cancel{\frac{a+b}{c+f} = \frac{c+f}{a+b} = k = 1;\ \frac{a+b}{c+f} + \frac{c+f}{a+b} = 2.}$

$\cancel{\frac{a+b}{c+f} + \frac{c+f}{a+b} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{2x^2}{xy} = \frac{2x}{y} = (a+b)^2 + (c+f)^2}$

Например: 2 3 −1 −4

$\frac{2+3}{-1-4} = \frac{5}{-5} = -1$; $\frac{2-1}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1$; $\frac{2-4}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$ (остальное — те же пропорции, но перевёрнутые).

~~Если $k=1$, то пусть $a+b=c+f=x$; $b+c=a+f=y$.~~

~~a+~~ ~~a b c f~~

$\cancel{\frac{a+b}{c+f} = \frac{a+f}{y}}$; $\cancel{\frac{x}{c+f} = \frac{x-b+f}{y}}$; $\cancel{\frac{x}{c+f} = \frac{x-b+f}{y}}$; $\frac{x}{x-f} = \cancel{\frac{x-b+f}{y}}$;

$\cancel{xy = (x-f)(x-b+f)}$ $k \neq 1$, так как иначе $a+b=c+f$ (и т.д.).

$\frac{a+b}{c+f} = \frac{b+c}{a+f} = \frac{a+f}{b+c}$; $a+b=b+c$, $a=c$ все числа должны быть одинаковы.

Значит, $k=-1$. $b+c=-a-f$ $(c=-a-f-b)$.

$a+b=-c-f$; $b+c=-a-f$.

То есть такие ~~пары~~ четвёрки чисел, где:

$$\begin{cases} |a+b| = |c+f| \\ |b+c| = |a+f| \end{cases}$$

$\cancel{|b+(-a-f-b)| = |a+f|}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УЙ 35-28

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Пусть x_1 установок I-го типа; x_2 – II го; x_3 – III го; $q = \frac{x_3}{x_1}$; $x_1, x_2, x_3, q \in N$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 < 200 \\ x_2 = 4x_1 \\ x_3 = qx_1 \\ 5x_3 - 99 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_1 + qx_1 < 200 \quad (2) \\ 5qx_1 - 99 = 4x_1 \quad (1) \end{cases}$$

(+)

(1) $\cancel{x_1(5+q)}$ $x_1(5q-4) = 99$

$5q-4$ может равняться: $\begin{cases} 1; 3; 9; 11; 33; 99 \\ 1, 6, 11, 21, 16 \ldots \end{cases} \Leftrightarrow 5q-4 = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} q = 3 \\ q = 1 \end{array}\right.$

1) $q = 3 \Leftrightarrow 5q - 4 = 11 \Rightarrow x_1 = 9$.

2) $q = 1 \Rightarrow 5q - 4 = 1 \Rightarrow x_1 = 99$.

(2) $9 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 3 < 200$ (верно) ~~особый случай~~!

(2) $99 + 99 \cdot 4 + 99 > 200$ (неверно)

$q = 3 \Rightarrow x_1 = 9 \Rightarrow x_2 = 9 \cdot 4 = 36;\ x_3 = 9 \cdot 3 = 27$

Ответ: ~~9; 36; 27~~ 9 установок I-го типа; 36 – II-го и 27 III-го.

2. Дано:

$\triangle ABC$

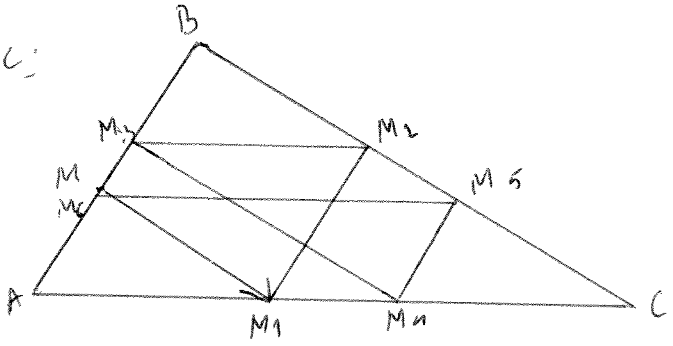
$MM_1 \parallel BC$, $M \in AB$, $M_1 \in AC$;

$M_1M_2 \parallel AB$, $M_2 \in BC$,

$M_2M_3 \parallel AC$, $M_3 \in AB$

Найти:

M; равняние на M, ?



(+)

Решение:

$\left.\begin{array}{l} MM_1 \parallel BC \\ M_1M_2 \parallel AB \end{array}\right| \xRightarrow{\text{опр.}} MM_1M_2B$ - пар-м $\xRightarrow{\text{св. опр.}} MB = M_1M_2$

анал. $AM_3 = M_1M_2$; MM_3 - общ $\Rightarrow AM = M_3B$.

особый случай!

анал. $BM_2 = M_5C$; $AM_1 = M_4C$; $BM_3 = AM_6 \Rightarrow AM_6 = AM \Rightarrow$ $M_3B = AM$

M; ~~может~~ M_3B вернуться в M, только или ? кратно 3; 6 направлений, потому что за 3 хода такие можно и пройти, как на картинке $M_6 = AM$

Ответ: да, за 6 ~~ходов~~ действий.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УЙ 35-28

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. Возьмём 1 число в ряду и обозначим его за X, тогда т.к. при его замене на сумму всех остальных чисел, сумма всех чисел не поменялась, значит сумма всех оставшихся чисел в ряду тоже X, значит сумма чисел во всем ряду $-2X$. Возьмём другое число X_1 и аналогично заметим, что сумма всех чисел в ряду $-2X_1$, отсюда $2x=2x_1$, значит $X=X_1$. если проделать аналогичную операцию с остальными 999 числами, то получится что все числа в ряду $-X$, значит сумма всех чисел в ряду равняется $1001x$, значит $2x=1001x$, значит $X=0$, значит произведение всех чисел в ряду -0.

Ответ: 0.

№4.

$a=\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x} \Leftrightarrow \frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}; \frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}; \frac{x+y}{z}=\frac{y+z}{x} \Leftrightarrow$

$xy+y^2=xz+z^2; \; x^2+xz=y^2+yz; \; x^2+yx=yz+z^2 \Leftrightarrow x(y-z)=z^2-y^2; z(x-y)=y^2-x^2;$

$y(x-z)=z^2-x^2 \Leftrightarrow x(y-z)=(z-y)(z+y); z(x-y)=(y-x)(x+y); y(x-z)=(z-x)(z+x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=z \; (1) \\ x=-(y+z) \; (2) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=y \; (3) \\ z=-(x+y) \; (4) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} z=x \; (5) \\ y=-(x+z) \; (6) \end{array}\right. \end{cases}$

Если верно (2) или (4), или (6), то $a=-1$ (например $x=-2; y=z=1$).

Если верно (1) и (5) и (3) одновременно, то $a=2$ (например $x=y=z=1$)

Ответ: $-1; 2$.

№5.

Обозначим апельсины числом $+1$, а яблоки -1, тогда изначально сумма чисел на всех фруктах навка $13-3=10$. При замене одновременно 4-х фруктов на противоположные сумма всех чисел на фруктах изменяется на число, кратное четырём, значит, сколько бы операций не проделала Вика, у неё сумма чисел на всех фруктах будет иметь остаток при делении на 4, равный остатку при делении на 4 10-и, то есть, равный двум. Но в конце она должна получить во всех 4-х вазах одновременно одинаковые фрукты, значит в конце сумма чисел на всех фруктах будет делиться на 4, значит т.к. мы можем получить сумму, которая при делении на 4 даёт остаток 2, это невозможно.

Ответ: нет, не могла.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть x_1 - количество установок первого типа, x_2 - количество установок второго типа, x_3 - третьего типа. Отсюда по условию задачи:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 200 \\ 4x_1=x_2 \\ x_3 \vdots x_1 \\ 5x_3-99=x_2 \end{cases}$$

Отсюда следует, что $5x_3-99=4x_1$

$5x_3=99+4x_1$

$4x_1$ - чётное число, т.к. оно кратно двум.

$(99+4x_1)$ - нечётное $\Rightarrow 5x_3$ - нечётное $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_3$ - нечётное

x_1 тоже нечётное, т.к. $x_3 \vdots x_1$.

$5x_3 \vdots 5$, т.к. $5 \vdots 5 \Rightarrow (99+4x_1)\vdots 5$, т.е. это число оканчивается либо на 0, либо на 5, т.е. $4x_1$ оканчивается либо на 1, либо на 6. $4x_1$ не может оканчиваться на 1, т.к. $4x_1$ - чётное число. Значит, оно оканчивается на 6. Отсюда x_1 оканчивается либо на 4, либо на 9, но x_1 - нечётное $\Rightarrow x_1$ заканчивается только на 9.

Если $x_1=9$, то $5x_3=135 \Rightarrow x_3=27$ ($x_3 \vdots x_1$ - удовлетворяет условию задачи). $x_2=36$.

Остальные числа не удовлетворяют условиям задачи (если $x_1=19$ или $x_2=29$, то $x_3 \not\vdots x_1$, а если $x_1\ge 39$, то $(x_1+x_2+x_3)>200$).

Ответ: завод изготовил 9 установок первого типа, 36 - второго, 27 - третьего.

№4

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$$

$$\begin{aligned} z(x+z)&=y(x+y) \quad (1)\\ z(y+z)&=x(x+y)\\ y(y+z)&=x(x+z)\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} xz+z^2&=xy+y^2\\ yz+z^2&=x^2+xy\\ y^2+yz&=x^2+xz\end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} z^2-y^2+xz-xy&=0\\ z^2-x^2+yz-xy&=0\\ y^2-x^2+yz-xz&=0\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}(z-y)(z+y)+x(z-y)&=0\\ (z-x)(z+x)+y(z-x)&=0\\ (y-x)(y+x)+z(y-x)&=0\end{aligned} \Rightarrow$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$(z-y)(x+y+z)=0$

$\Rightarrow (z-x)(y+z+x)=0 \Rightarrow$

$(y-x)(y+x+z)=0$

$\left[\begin{array}{l} z=y \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} z=x \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y=x \\ x+y+z=0 \end{array}\right.$

Если $x+y+z=0$, то:

$z(x+z)=y(x+y)$ (1)

$z(0-y)=y(0-z)$

$0-zy=0-zy$, т.е. это равенство будет выполняться при любых x, y, z.

Пусть $x=1$, $y=7$, $z=-8$, тогда:

$\frac{1+7}{-8}=\frac{1-8}{7}=\frac{7-8}{1}=-1$

Если $x=y=z$, то данные отношения принимают одинаковые значение, равное 2. Но, видимо, они не должны быть равны, что непонятно из условия.

Ответ: -1 (если $x \neq y \neq z$).

№3

Выберем два любых числа из множества M. Пусть это будут x и y. Тогда:

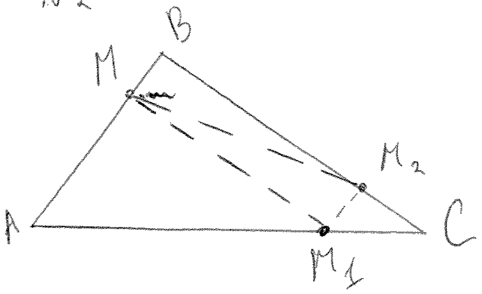
Сумма всех элементов M без y (включая x) равна y, а сумма всех элементов M без x (включая y) равна x, т.е. ~~x_1+a_1+~~ $\underbrace{M_1+M_2+M_3+\ldots+x}_{\text{все элементы, кроме}}=y$;

$\underbrace{M_1+M_2+M_3+\ldots+y}_{\text{все элементы, кроме } x}=x$. Отсюда $y-x=x-y \Rightarrow x=y$.

Но так будет для всех чисел множества, т.е. в множестве все числа одинаковы. Но сумма 999 одинаковых элементов M без x и y равна 0, т.е. все элементы M равны 0. Отсюда их произведеше равно 0.

Ответ: 0.

№2



Покажем, что число шагов кратно 3.

Допустим, точка M вернётся в исходное положение через 3 шага.

Пусть $AM=x$; $MB=y$. По теореме о пропорциональных отрезках:

$\cancel{AM : M_1}$ $AM : AM_1 = MB : M_1C$;

$x : ax = y : ay$

$AM_1 : BM_2 = M_1C : M_2C$

$ax : bx = ay : by$

$M_2C : AM = \cancel{MB : M_2B}\ M_2B : MB$

$by : x = bx : y$

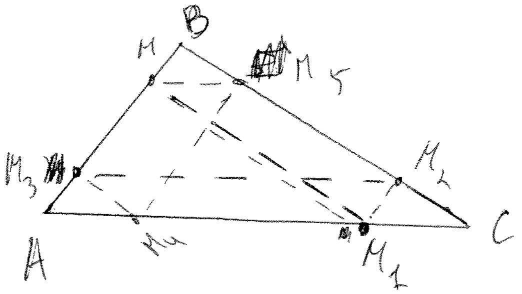
$bx^2 = by^2$

$x^2 = y^2$

$x = y$, т.к. $\cancel{x>0}$ $x>0$ и $y>0$.

Т.е. такое возможно только, когда M - середина AB, т.е. MM_1 и M_1M_2 и M_2M — средние линии треугольника ABC. Но нам ничего не сказано по этому поводу, поэтому этот вариант подходит.

Допустим, точка M вернётся в исходное положение через 6 шагов.



По теореме о пропорциональных отрезках:

$AM : AM_1 = MB : M_1C$

$x : ax = y : ay$

$AM_1 : BM_2 = M_1C : M_2C$

$ax : bx = ay : by$

$BM_2 : M_3B = M_2C : M_3A$

$bx : cx = by : cy$

$AM_3 : AM_4 = M_3B : M_4C$

$cy : dy = cx : dx$

$AM_4 : BM_5 = M_4C : M_5C$

$dy : ey = dx : ex$

$AM : M_5C = MB : BM_5$

$x : ex = y : ey$

$1 : e = 1 : e$

общий случай!

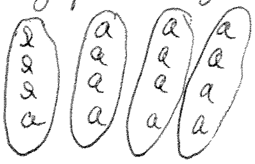
Это будет выполняться всегда, противоречий нет => за 6 шагов точка M вернётся в исходное положение.

Ответ: 6 шагов верно.

№5

Возможны три различных варианта первоначального расклада: 3 яблока в одной вазе, 2 яблока в одной вазе, а другое яблоко в другой вазе, все яблоки в разных вазах.

Разберём случай с 3 яблоками в одной вазе:



~~Абстрагируемся от того что у нас~~ Забудем, что у нас есть яблоки и апельсины и нам надо получить в вазах только яблоки или только апельсины. Пусть в первой вазе 3 фрукта одного вида и 1 фрукт другого. В остальных вазах 4 фрукта одного вида. Нам надо получить во всех вазах 4 фрукта одного вида. По сути, в ~~вазах~~ первой вазе нечётное число фруктов одного вида и нечётное число фруктов другого вида.

Из этого нам надо получить все чётные.

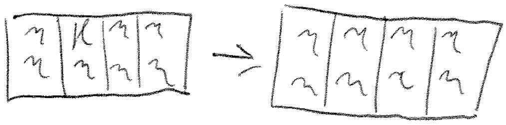
~~За ход~~ За ход мы можем либо в первой вазе сделать ч и ч, но тогда в ~~другой~~ их вазах станет н и н, либо, по сути, ничего не поменять, т.е. понятно, что в данном варианте решить задачу невозможно.

В варианте с яблоками в разных корзинах ничего не меняется.

Меняются местами только н и ч.

Т.е. этот вариант тоже отбрасываем.

В варианте с 2 яблоками в одной корзине тоже ничего не меняется.



Точно так же, как и в предыдущих случаях, ничего не получится, потому что у нас в вазах разные чётности, а надо получить одни и те же. Этот вариант тоже отбрасываем. Ответ: нет, не могла

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

(+)

Пусть установок 1 типа x, 3 типа y, тогда 2 типа $4x$. Зная, что $x+4x+y \leq 200$, а $5y=4x+99$, составим и решим систему уравнений $(x;y \in N)$

$$\begin{cases} 5y=4x+99 \\ 5x+y \leq 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+5y=99 \,/\times(-1) \\ 5x+y \leq 200 \,/\times 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$+\begin{cases} 4x-5y=-99 \\ 25x+5y \leq 1000 \end{cases}$$

$29x \leq 901.$

$x \leq 31\frac{3}{29}$

Т.к. $x \in N$, то $x \leq 31.$

$5x+y \leq 200$ $\quad y \leq 200-31\cdot 5$ $\quad y \leq 45.$

Т.к. $5y=4x+99$, то $4x+99$ кратно 5.

А значит, что $4x$ оканчивается на 1 или 6.

Т.е: $4x$ может равняться:

1) $16; x=4$ 2) $36; x=9$ 3) $56; x=14$ 4) $76; x=19$

5) $96; x=24$ 6) $116, x=29.$

1) Пусть $x=4$; $4x=16.$

$5y=4x+99.$

$5y=16+99$

$5y=115$

$y=23.$

23 некратно 4

неверно

2) Пусть $x=9$, $4x=36.$

$5y=4x+99$

$5y=36+99$

$5y=135$

$y=27.$

27 кратно 9

верно.

3) Пусть $x=14$ $4x=56$.

$5y=4x+99$.

$5y=56+99$

$5y=155$

$y=31$

31 некратно 14. неверно

4) Пусть $x=19$ $4x=76$.

$5y=76+99$

$5y=175$

$y=35$

35 некратно 19. неверно

5) Пусть $x=24$ $4x=96$.

$5y=4x+99$

$5y=96+99$

$5y=195$

$y=39$

39 некратно 24 неверно

6) Пусть $x=29$. $4x=116$.

$5y=4x+99$

$5y=116+99$

$5y=215$

$y=43$.

43 не кратно 29 неверно

Ответ: 9 установок первого типа, 36 установок второго и 27 установок третьего.

№3.

1) Множество M состоит из 1001 числа $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_{1001}$.

2) Пусть мы заменим число a_{1001} на сумму $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{1000}$.

У нас должно получиться, что:

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{1001} = 2(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{1000})$

но это возможно только в том случае, если:

$a_{1001}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{1000}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) Но тогда при замене числа a_1 на сумму:

$a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{1001}$ у нас должно получиться:

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{1001}=2(a_2+a_3+a_4+a_5+\ldots+a_{1001})$

4) $a_{1001}=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{1000}$. (из пункта 2)

$a_1=a_{1001}+a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{1000}$ (из пункта 3)

Т.Е. $a_1=a_{1001}$.

5) При дальнейшем рассмотрении вариантов мы узнаем, что:

$a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{1001}$.

Пусть $a_1=a_2=a_3=\ldots=a_{1001}=x$.

Тогда:

$1001x=2(1000x)$

$1001x=2000x$

$x=0$.

⊕

Значит все числа множества M равны 0.

Т.Е. их произведение равно 0.

Ответ: 0.

№4.

1) $\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$.

$(x+y)y = (x+z)z$.

$xy + y^2 = xz + z^2 \,/ : x$.

$y + \frac{y^2}{x} = z + \frac{z^2}{x}$. $\Rightarrow$ $y = z$.

$\frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$

$(x+z)x = (y+z)y$.

$x^2 + xz = y^2 + zy \,/ : z$.

$x + \frac{x^2}{z} = y + \frac{y^2}{z}$. $\Rightarrow$ $x = y$

2) $x = y$
$y = z$ $\Rightarrow$ $x = y = z$.

3) $\frac{x+x}{x} = \frac{2x}{x} = 2$.

Ответ: 2.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УЙ 35-47

№5.

1) Пусть в какой-то вазе 3 яблока и 1 апельсин, а в остальных вазах 4 апельсина. Тогда Саша заменяет в этой вазе (в которой 3 яблока и 1 апельсин) апельсин на яблоко. В вазе становится 4 яблока. В остальных вазах то 4 яблока, которое он меняет на яблоки. Итого получаем, что во всех вазах только яблоки.

НЕТ, это сделать она не может!

2) Пусть в какой-то вазе 2 яблока и 2 апельсина, в другой вазе 1 яблоко и 3 апельсина, а в оставшихся двух 4 апельсина. В этом случае Саша не может получить одинаковые фрукты во всех вазах, т.к. в вазе с 2 апельсинами и 2 яблоками всегда останется хотя бы 1 апельсин ~~и~~ хотя бы 1 яблоко.

3) В трех вазах 1 яблоко и 3 апельсина, в другой вазе четыре апельсина, Тогда в каждой из трех ваз с одним яблоком Саша заменит яблоко на апельсин. Тогда во всех вазах будут апельсины.

Ответ: ~~да, можно.~~

—

№2.

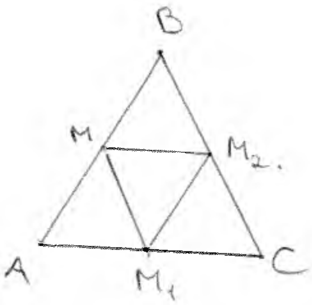
Через определенное кол-во шагов точка M окажется в исходном положении.

Минимальное кол-во шагов 3.

7

Это возможно в равностороннем или равнобедренном треугольнике. Путь, по которому прошла точка M, будет разделять треугольник на 4 равных между собой треугольника.

не все случаи!



$MM_1 \parallel BC$ $M_1M_2 \parallel AB$ $MM_2 \parallel AC$.

Ответ: 3 шага

№1. Пусть 1-й, 2-й и 3-й тип равен x, y и z соответственно, тогда $x+y+z \le 200$. Также $\begin{cases} 4x=y \\ z=xn, \text{ где } n\in N \ (n=\frac{z}{x}, \text{т.к. } z \vdots x) \\ 5z-y=99 \end{cases}$

±

$\begin{cases} 4x=y \\ z=xn \\ 5xn-4x=99 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x=y \\ z=xn \\ x(5n-4)=99 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\frac{99n}{5n-4} \\ y=\frac{396}{5n-4} \\ x=\frac{99}{5n-4} \end{cases}$ $\begin{matrix} z\in N \\ y\in N \\ x\in N \end{matrix}$

Подставим в первое равенство:

$\frac{99n}{5n-4}+\frac{396}{5n-4}+\frac{99}{5n-4}=\frac{99(n+5)}{5n-4}\le 200$

Причём $\frac{99(n+5)}{5n-4}\in N$, т.к. ~~x~~ количество деталей всегда N число.

Для того, чтобы $\frac{99(n+5)}{5n-4}\in N$, надо чтобы $(99\times(n+5)) \vdots (5n-4)$

Пусть $(n+5)$ и $(5n-4)$ имеют общие делители так, что $(5n-4)$ можно сократить, но это невозможно, т.к. при любых n у них разные чётности. Отсюда, если условие верное $99 \vdots (5n-4)$

Число $(5n-4)$ оканчивается либо на 1, либо на 6 $(..5-4=..1; ..0-4=..6)$

Тогда $\left[\begin{matrix} 5n-4=11 \\ 5n-4=3 \\ 5n-4=99 \\ 5n-4=9 \\ 5n-4=33 \end{matrix}\right.$ → невозможно

т.е. $5n=15$

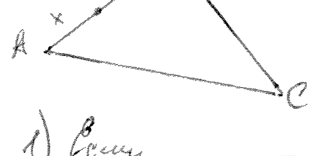
$n=3$.

почему?

Отсюда $\begin{cases} x=\frac{99}{5\cdot 3-4} \\ y=4x \\ z=3x \end{cases}$ $\begin{cases} x=9 \\ y=36 \\ z=27 \end{cases}$ – единственное решение

Ответ: 9 деталей 1-го типа; 36 деталей второго типа; 27 деталей 3-го типа.

№2.



Представим отношение $\frac{AM}{MB}$, как $\frac{x}{y}$. +

Рассмотрим 2 случая:

I) Пусть $\frac{x}{y}=1$, т.е. ~~$\frac{AM}{MB}$~~ $AM=MB$.

1) Если мы будем проводить прямые, проходя через середину одной из сторон, параллельно одной стороны середину 2 стороны (получая среднюю линию треугольника),

2) Отсюда через 3 шага точка M окажется в исходном положении (Причём треугольник разделится 3-мя средними линиями на 3 равновеликих треугольника)

II Пусть $\frac{x}{y} \neq 1$ и $x \geq 1$; $y \geq 2$.

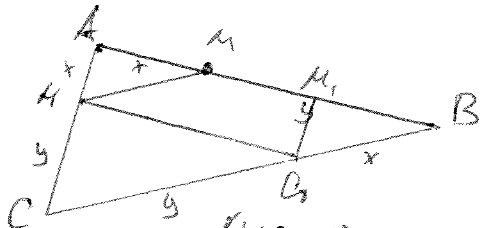
1) Чтобы было проще предположим, что каждое пересечение пути точки M на AC = H, на BC = G, на AB = M_1

2) Рассмотрим путь точки по шагам:

а) (В начале $\frac{AM}{MB} = \frac{x}{y}$)

1. $\frac{AH}{HC} = \frac{x}{y}$
2. $\frac{BG}{GC} = \frac{x}{y}$
3. $\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{y}{x}$

} По теореме Фалеса

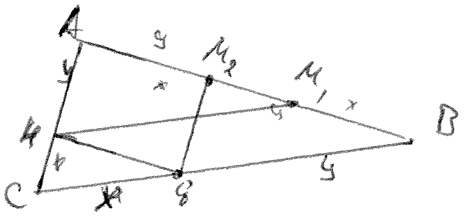


(прямой угол получился случайно)

б) (В начале $\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{y}{x}$)

4. $\frac{AH}{HC} = \frac{y}{x}$
5. $\frac{BG}{GC} = \frac{y}{x}$
6. $\frac{AM_2}{M_2B} = \frac{x}{y}$

} По теореме Фалеса



Отсюда видно, что на 6-м шаге $M_2 \equiv M$

Ответ: Если AM = MB, то вернётся в исходное положение через 3 шага. В остальных случаях — через 6 шагов.

№3. $a_1 + a_2 + \ldots + a_{1001} = (a_2 + a_3 + \ldots + a_{1001}) + a_2 + \ldots a_{1001} = (a_1 + a_3 + \ldots a_{1001}) + a_1 + a_{1001} = \ldots$

Рассмотрим похожее на M множество M_1, которое состоит из 3 чисел и с таким же условием. Имеем:

$a + b + c = 2b + 2c = 2a + 2c = 2a + 2b$.

Такое возможно лишь при $a + b + c = 0$, т.е. либо $a = b = c = 0$, либо

$\left[\begin{array}{l} a = -(b+c) \\ b = -(a+c) \\ c = -(a+b) \end{array}\right.$

Рассмотрим случай $a = -(b+c)$; тогда, чтобы было верно $2b + 2c$, надо $b = -c$. Отсюда $b + c = 0$, т.е. $a = 0$; Также, чтобы $2a + 2c = 2a + 2b = 0$, надо, чтобы $b = c$ и $c = 0$.

~~Отсюда имеем~~ Аналогично и с $b = -(a+c)$ и с $c = -(a+b)$.

Отсюда имеем, что в любом случае $a = b = c = 0$, а значит произведение всех членов множества $= 0$.

Также как в M_1, происходит и в M.

Ответ: произведение $= 0$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4. $\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$

$\frac{x+y}{z}-\frac{x+z}{y}=\frac{x(y-z)+(y-z)(y+z)}{zy}=\frac{(y-z)(x+y+z)}{zy}=0$

Значит $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=z\\x+y+z=0\end{array}\right.\\z\neq0\\y\neq0\end{cases}$ Аналогично можно обнаружить, что $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=z\\x+y+z=0\end{array}\right.\\x\neq0\\z\neq0\end{cases}$ и $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=y\\x+y+z=0\end{array}\right.\\x\neq0\\y\neq0\end{cases}$

Рассмотрим 3 случая:

I) $y=z=x$ и $x+y+z\neq0$

Если $y=z=x$, то каждое отношение можно представить, как $\frac{2x}{x}=2$

II) Выполняется лишь 1-о равенство типа $a=b$ и $x+y+z=0$

Например только $y=z$, т.е. $z\neq x$ и $y\neq x$. Тогда $x=-2y=-2z$

Изначальные отношения примут вид

$\frac{-2y+y}{y}=-1$; $\frac{-2z+z}{z}=-1$; $\cancel{\frac{y+z}{-(y+z)}}$ $\frac{y+z}{-y}=-1$.

Т.е. всегда -1. (случаи с $x=z$ или $x=y$ аналогичны)

III $x+y+z=0$, а $y\neq z\neq x$.

Тогда либо $x=-(y+z)$, либо $y=-(x+z)$, либо $z=-(x+y)$.

Пусть $x=-(y+z)$, тогда $\frac{y-y-z}{z}=-1$; $\frac{z-y-z}{y}=-1$; $\frac{y+z}{-(y+z)}=-1$.

Аналогично и с $y=-(x+z)$ и с $z=-(x+y)$

Ответ: Если $x=y=z$, то ~~отн~~ значение $=2$;
иначе $=-1$.

±

№5. Нам нужно, чтобы во всех вазах было и яблоко или и апельсина.
А - апельсин, Я - яблоко.

Рассмотрим три случая:

I. Все Я в 1-й вазе. Если эту вазу мы выполним для условия, т.е. в ней будет 4 Я, то в других вазах появится по 1-му А.
Так будет повторяться бесконечно

II. 2 Я в 1-й вазе, 1 Я в другой. ?
Если мы будем менять по 1-му фрукту, то получим примерно как в I.

III. В 3-х вазах по 1-й Я.
Этот случай ~~похож~~ ~~не~~ конец I.

Отсюда Ответ: нет, Вася не сможет получить то, что хотел.

∓

Отв. не обоснован

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УФ 36-28

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

		было	конкретный случай (стало)
I тип		x	x
II тип	в 4 р. б.	4x	4x+22
III тип		y	5y

Пусть x уст-было I типа; y уст-было III типа

Тогда 4x уст-было II типа;

4x+22 уст- стало II типа

5y уст. - стало III типа.

y кратно x

(+)

Мы можем составить таблицу: ($5y = 4x+22$, по условию)

4x+22	5y	4x	x	y	y кратно x
30	30	8	4	6	–
40	40	18	–	8	–
50	50	28	7	10	–
60	60	38	–	12	–
70	70	48	12	14	–
80	80	58	–	16	–
90	90	68	17	18	–
2) 110	110	88	22	22	+
130	130	108	27	26	
150	150	128	32	30	
170	170	148	37	34	

1) В столбце 4x+22 мы будем рассматривать числа, кот-ые делятся на 10, т.к.:

① Чтобы эти числа равнялись 5y они должны делиться и на 10 и на 5

② Числа, кот-ые ~~не~~ не дел. на 10, но делятся на 5 ~~на 5~~ (55, 105 и др.) мы рассматр. не будем, т.к. при вычетании из них 22 (чтоб найти 4x) они будут кончаться 3, а ab3 не делиться на 4

2) Как мы видим числа, кратные 4 при вычетании 22 - 30; 50; 70; 90 и т.д. ⇒ мы можем не рассматр. числа, кратные 20

3) Как мы видим, 22 кратно 22 ⇒ $x = 22 \Rightarrow 4x = 88 \Rightarrow y = 22$

4) Дальше мы можем не рассматривать, т.к. уже привели ответ на вопрос.

Ответ: 22 - I типа; 88 - II типа; 22 - III типа

№3.

1 - первое число;

99 - 99-ое число.

По условию: $99 = 1 + 2 + \ldots + 97 + 98$

(+)

Рассмотрим пример:

① Допустим M состоит не из 99, а из 4 чисел:

$a; b; c; d$

Тогда $a+b+c+d = a+b+c+d$

Заменим d на $a+b+c$: $a+b+c+d = a+b+c+a+b+c$

$a+b+c+d = 2(a+b+c)$, т.е. $a+b+c+d = 2($всё $(a+b+c+d)$ без $d)$

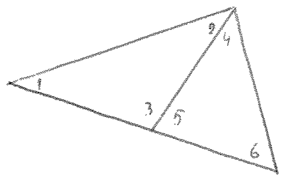
⇓

$1+2+\ldots+98+99 = 2($всё − любое$)$

Т.к. выкинуть мы можем только 99 раз (каждую один раз) то произведение равно: $2 \cdot 99 = 198$

Ответ: 198

№2.



+

$\angle 3 \neq \angle 6$, $\angle 3 \neq \angle 4$ } т.к. $\angle 3$ - вертикальн. для треугольника, в кот-ом находятся $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$

$\angle 5 \neq \angle 2$, $\angle 5 \neq \angle 1$ } т.к. $\angle 5$ - вертикальн. для треуг., в кот-ом находятся $\angle 3$, $\angle 1$ и $\angle 2$

1) Допустим $N=6$, т.е. все 6 углов равные, т.е. $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5=\angle 6$. Такого быть не может, т.к. в треуг. с углами 1; 2; 3, кажд. угол будет равен $60°$ (т.к. сумма углов треуг равна $180°$, а $180:3=60$) $\Rightarrow \angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5=\angle 6=60$, но углы 3 и 5 смежн, и $3+5=180°$, а углы $3+5=120°$ $\Rightarrow N \neq 6$

~~2) Допустим $N=5$, т.е. 5 углов равны, В эту пятёрку равных войдёт или $\angle 3$ или $\angle 5$ или оба сразу. Если $N=5$, то в Δ с угл. 1; 2; 3, кажд. угол $=60°$ или в Δ с угл. 4, 5, 6 - кажд. угол равен $60°$~~

2) Допустим $N=5$, т.е. 5 углов равны ~~$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5$~~, но т.к. $\angle 3 \neq \angle 6$; $\angle 3 \neq \angle 4$, $\angle 5 \neq \angle 2$; $\angle 5 \neq \angle 1$, то $N \neq 5$, т.к. 3 и 5 - смежные, и если например $\angle 4, 5$ и 6 или $\angle 1, 2$ и $3 = 60°$, то треугольник не получиться построить N.

3) Допустим $N=4$, тогда выгодно взять равные $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 4$ и $\angle 6$, т.к. они находятся в одном треугольн, и их легко найти: $180:4=45°$. Тогда $\angle 5=\angle 3=90°$ (т.к. сумма углов треугольника равна $180°$) $\Rightarrow N=4$

Ответ: 4.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

м - мандарин; я - яблоко

Действия с фруктами:

-2 м $+1$ я

-2 я $+1$ я, т.е. -1 я

-1 м -1 я $+1$ м, т.е. -1 я.

Т.к. с самого начала было 15 м, и судя по всем действиям с фруктами нельзя будет забирать нечетн. число мандаринов, то в вазе останется один мандарин (все яблоки можно забрать)

Отв.: мандарин.

±

№4.

В черновике

−

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 1221

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УФ 36-37

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Обозначим яблоки яб., а мандарины – м.

Если гость брал 2 мандарина, то в вазе фруктов:

x – 2 м. + 1 яб (x – кол-во фруктов в вазе (сначала)

Если гость брал 2 яблока:

x – 2 яб. + 1 яб. = x – 1 яб.

Если гость брал 1 мандарин и одно яблоко:

x – 1 м. – 1 яб + 1 м. = x – 1 яб

Таким образом, кол-во мандаринов могло только уменьшаться, а кол-во яблок – уменьшаться или прибавляться. Допустим, ~~в кон~~ через нек-рое время в вазе осталось 2 мандарина и 2 яблока. Попытаемся уменьшить кол-во яблок, чтобы остался 1 мандарин (т.к. увеличить кол-во мандаринов у нас не получится):

допустим, гость взял 1 мандарин и 1 яблоко несколько раз. Тогда после 1-го раза у нас получится 2 мандарина и 1 яблоко (2 м. + 2 яб. – 1 м. – 1 яб. + 1 м. = 2 м. + 1 яб.), после 2-го – 2 мандарина и 0 яблок (2 м. + 1 яб. – 1 м. – 1 яб. + 1 м. = 2 м.). Тогда гостю придётся взять 2 мандарина, и в вазе останется 1 яблоко. Т.е. какое бы кол-во яблок и мандаринов в вазе не было, в ней всё равно останется яблоко, т.к. если в конце останется 2 мандарина, то мама положит в вазу яблоко, после того, как гость возьмёт их. Если все гости будут брать только мандарины, то в конце получится 1 мандарин и 6 яблок (13 м. – 2 м. + 1 яб. – 2 м. + 1 яб. – 2 м. + 1 яб – 2 м. + 1 яб. – 2 м. + 1 яб. – 2 м. + 1 яб. = 1 м. + 6 яб). Гость будет брать разные фрукты, пока в вазе не останется 1 м. и 1 яб. Тогда гость возьмёт их, и в вазе останется 1 мандарин.

Ответ: в вазе может остаться 1 мандарин, если в конце в вазе будут лежать 1 мандарин и 1 яблоко. Во всех остальных случаях в вазе будет лежать яблоко.

№3.

Допустим, есть другое множество чисел N, в котором 3 числа, ~~если~~ Но при замене любого числа на сумму остальных сумма всех 3 чисел будет такой же, как в начале.

Допустим, все ~~числ~~ числа различны. ~~например, 1, 2 и 3.~~ Тогда ~~их сумма будет равна 6.~~ при замене меньшего из них на сумму остальных, это число станет больше, т.к. найдутся числа, которые будут больше него (как минимум прежнего своего значения при одно число). При замене одного числа на сумму остальных сумма всех чисел не будет меньше при условии, что каждое число равно сумме остальных. Так получится, если все числа в множестве равны нулю. Действительно, $0=0+0$, $0+0+0=0$. То же самое относится ко множеству чисел М. Все числа в нём равны нулю. Значит, и произведение всех чисел этого множества равно нулю ($0\cdot0\cdot0\cdot\ldots\cdot0\cdot0=0$).

Ответ: ноль.

№4.

Если $x\neq y\neq z$, а $z\neq x$, то среди x, y и z найдётся наименьшее число, которое в сумме с другим будет меньше, чем сумма двух чисел, которые больше наименьшего. Если ~~$x=y\neq z$, или $x=z\neq y$~~ два числа равны, и ~~одно~~ любое из них меньше третьего, то сумма этих двух чисел будет меньше, чем сумма одного из этих чисел и другого числа (которое наибольшее). Значит, $x=y=z$. Пусть $x=y=z=a$.

Тогда $\frac{x+y}{z}=\cancel{\frac{a+a}{a}}\ \frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}=\frac{a+a}{a}=\frac{2a}{a}=2$. Т.е. при любом значении a, то есть x, y и z $\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}=2$ (При условии, что $x=z=y\neq0$, т.к. при делении на ноль эти выражения не имеют значения).

Ответ: два (при условии, что $x=y=z\neq0$).

№2.

Чтобы получилось как можно большее кол-во одинаковых углов, надо, чтобы углы при основании треугольника были равны, т.е. треугольник будет равнобедренный. Чтобы получить ещё большее кол-во одинаковых углов, надо, чтобы отрезок, делящий треугольник на две части, был биссектрисой угла, противолежащего основанию треугольника, и половина этого угла была равна углам при основании треугольника.

Пусть x° угол при основании этого равнобедренного треугольника.

Тогда $2x^\circ$ – угол, противолежащий основанию этого треугольника.

Так как сумма всех углов этого треугольника равна 180°, то можно составить уравнение:

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УФ 36-37

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$2x+x+x=180$

$4x=180 \mid :4$

$x=45$

$45°$ – угол при основании этого равнобедренного треугольника.

$45\cdot 2=90°$

$90°$ – угол, противолежащий основанию этого треугольника.

Т.к. ничто не противоречит условию задачи, то такой треугольник существует, и в двух получившихся треугольниках будет 4 одинаковых угла.

Если допустить, что два получившихся треугольника будут равносторонними, то есть каждый угол этих треугольников будет равен $60°$, то получится, что сумма всех углов первоначального треугольника будет $240°$ ($60°+$ ~~такого~~ $2\cdot 60°+60°=120°+120°=240°$), а такого быть не может, т.к. сумма всех углов ~~пре~~ любого треугольника равна $180°$, т.е. такого треугольника не существует. ⇒ наибольшее ~~кол~~-во одинаковых углов в этих двух треугольниках – четыре.

Ответ: $N_{max}=4$.

№1.

I – ? уст.

II в 4 раза б. – 8 уст.

III – ? уст.

Пусть x (уст.) – 1-го типа изготовил завод, y (уст.) – 3-его типа изготовил завод.

Тогда $4x$ (уст.) – 2-го типа изготовил завод.

Так как если бы установок третьего типа изготовили в пять раз больше, то их бы было на 22 больше установок 2-го типа, то можно составить уравнение:

$$5y=4x+22$$

Т.к. число установок любого типа – натуральное число, то выражение $4x+22$ должно оканчиваться на 0 или на 5. ~~Б~~ Тогда выражение $4x$ должно оканчиваться на 8 или на 3 ~~(5-2=3, 10-2=8)~~ (5-2=3, 10-2=8). $4x$ не может оканчиваться на 3, т.к. 4 – чётное число, и любое число, умноженное на ~~чётное~~ чётное число, будет чётным, а 3 – нечётное число.

~~Если x=2, то y=~~ $y=(4x+22):5$.

Если $x=2$, то $y=(4\cdot 2+22):5=30:5=6$,

Если $x=7$, то $y=(7\cdot 4+22):5=50:5=10$,

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

если $x=12$, то $y=(12\cdot4+22):5=(48+22):5=70:5=14$ и т.д.
Выпишем значения x и y:
$x=2,\ y=6;$
$x=7,\ y=10;$
$x=12,\ y=14.$
Заметим, что $x=z+10\cdot a$, где $z=2$ или 7, а любое натуральное число или 0, а $y=2+4b$, где b – натуральное число.
Таким образом, мы можем продолжить ряд:
$x=17,\ y=18;$
$x=22;\ y=22;$
$x=27;\ y=26$ и т.д.
x не может быть более y, ~~поэтому~~ т.к. $5y=22+4x$.
Поэтому все значения x и y, где $x>y$ – неверные. Также не верны значения x и y: 7 и 10; 12 и 14; 17 и 18, т.к. в этом случае y не кратно x. Осталось два значения x и y: $x=2$ и $y=6$; $x=22$; $y=22$. Первое значение x и y будет неверным, т.к. в этом случае завод изготовил меньше 100 установок, что противоречит условию задачи ($2+2\cdot4+6=$ $=2+8+6=16$; $16<100$). Значит, $x=22$; $y=22$.
Т.к. в этом случае ничто не противоречит задаче ($22:22$; $22+4\cdot22=110=22\cdot5$), то завод изготовил 22 установки первого типа, 88 второго ($4\cdot22=88$) и 22 установки 3-го типа.
Ответ: 22; 88 и 22.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УФ36-70

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

I шина ?
II шина ? в 4 раза б — в 5 раз б, по на 22 б } >100
III шина ? кратно

Пусть x установок – сделали I шина
Тогда $4x$ установок – сделали II шина
Допустим, что x установок – сделали III шина, так как 1 кратно 1 и всем числам
Так как всего установок сделали больше ($>$) 100, то можно составить уравнение:

$$x + 4x + x = >100$$

$$6x = >100$$

$$6x = \text{от } 102 \text{ до } 150$$

(чтобы число >100 делилось на 6 без остатка, мы можем выделить рамки от 102 установок до 150, так как $100 < 102$; 150 ...

$$x = \text{от } 17 \text{ до } 25$$

1. Допустим, что $\overset{\text{I шина}}{x = 17}$, тогда $\overset{\text{II шина}}{4x = 68}$, а установок III шина $68 + 22 = 90$, $90 : 5 = 18$; 18 не кратно 17.

2. Из 1) мы можем вынести, что x должен быть >17.

3. Допустим, что $\overset{\text{I шина}}{x = 18}$, тогда $\overset{\text{II шина}}{4x = 72}$, а установок III шина $72 + 22 = 94$; $94 : 5 = 18\frac{4}{5}$; $18\frac{4}{5}$ не кратно 18.

+

4. Из 3) мы можем вынести что, когда $\overset{\text{I шина}}{x}$ увеличивается на 1, то установки II шина и III шина увеличиваются на 4 штуки, значит, нам нужно взять такое значение x, при котором установок III шина „если бы" было кратно 5

5. Вычисляем к 90 кратно 5 = 110. $\overset{\text{I шина}}{x = 22}$, $\overset{\text{II шина}}{4x = 88}$, III шина = ~~110~~ $5 = 22$. $110 - 88 = 22$ – верно по условию. (III шин) 22 кратно (I) шину 22 – верно по условию, значит установок I шина = 22, II шина = 88, III шина = 22; $22 + 88 + 22 > 100$.

Ответ: I шин = 22 установки; II шин = 88 установок; III шин = 22 установки

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

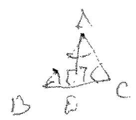
ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УФ 36-70

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Дано: △ABC, △ABD, △ADC, AD делит △ABC.

Найти: наибольшее кол-во равных углов

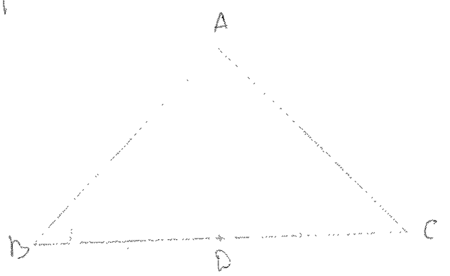


Решение:

1) В △ABD и △ADC могут быть все 6 равных углов, если △ABD и △ADC - равносторонние и △ABD = △ADC (AB = AC; AD = AC; BD = DC, но т.к. △ABD и △ADC - равносторонние, то соединить их в 1 △ (один треугольник) не получится, для этого нужно, чтобы 1 сторона являлась от другой.

2) Если △ABD ≠ △ADC и являются равнобедренными (BD = AD = DC), то AD - биссектриса, медиана, высота - в лучшем случае. И т.к. ABD = △ADC и они равнобедренные, то углы при основании равны, т.е. ∠B = ∠C = ∠BAD = ∠CAD, ∠ADB = ∠ADC = 90°, в таком случае, они не равны другим 4-ём углам.

3) То есть наибольшее значение одинаковых углов в разрезанном △ = 4.



Ответ: 4 угла.

№4.

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} \quad | \cdot (x \cdot y \cdot z)$$

$$\frac{(x+y)\cdot x\cdot y\cdot z}{z} = \frac{(x+z)\cdot x\cdot y\cdot z}{y} = \frac{(y+z)\cdot x\cdot y\cdot z}{x}$$

$$(x+y)\cdot x\cdot y = (x+z)\cdot x\cdot z = (y+z)\cdot y\cdot z$$

$$(x^2+xy)\cdot y = (x^2+xz)\cdot z = (y^2+yz)\cdot z$$

$$x^2y + xy^2 = x^2z + xz^2 = y^2z + yz^2$$

Так как в обоих равенствах есть общие множители и при умножении с неодинаковыми ⇒ равенство всё равно верно, то можно сказать, что $(x = y = z) \in R$ (любое число)

Тогда, если $x = y = z = 1$, например, то $\frac{x+y}{z} = \frac{1+1}{1} = 2$, а если $x = y = z = 150$,

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

то $\frac{x+\cancel{y}}{\cancel{y}} = \frac{150+150}{150} = 2$, т.е. отношения принимают одинаковое значение равное 2.

Ответ: 2.

№ 5.

Всего 15 мандаринов

− 2 мандарина = + 1 яблоко

− 2 яблока = + 1 яблоко

− 1 мандарин и − 1 яблоко = + 1 мандарин

(+)

1) Мандаринов всего нечетное число, то их и не может стать столько, чтобы число было бы четным, так как если снять 2 мандарина от общей суммы, то прибавится яблоко (число мандаринов нечетное), если снять 2 яблока, то прибавится 1 яблоко (число мандаринов нечетное), если снять 1 яблоко и 1 мандарин, то прибавится 1 мандарин (число мандаринов нечетное, т.к. получается, что мы сняли только 1 яблоко).

2) Значит в конце останется либо сразу 1 мандарин, либо будет 1 яблоко и 1 мандарин, но когда их снимем, то останется 1 мандарин, всё равно.

Ответ: 1 мандарин.

№ 3.

(−)

$M = \{1 ... 99\}$

Каждый элемент M должен быть равен сумме всех других элементов, но если один элемент будет больше других, то условие не будет выполняться, а если один элемент будет меньше всех других, то условие опять не будет выполняться. То есть каждый элемент должен быть равен остальным, но условие в таком случае не будет выполняться, поэтому такой вариант неверный.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УФ 36-91

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

I тип x

II тип $4x$

III тип $y-5x$

Пусть x установок I типа изготовили

y установок изготовили всего

Тогда $4x$ установок II типа изготовили.

$y-x-4x=y-5x$ установок III типа изготовили

Т.к. если бы установок III типа изготовили в 5 раз больше, то их было бы на 22 больше чем II типа, то можно составить уравнение:

$5(y-5x)=4x+22$

$5y-25x=4x+22$

$5y=4x+25x+22$

$5y=29x+22 \quad |:5$

$y=5{,}8x+4{,}4$

~~Т.к. изготовили установок больше 100, то~~ $\cancel{5{,}8x+4{,}4>100}$

$\cancel{5{,}8x>100-4{,}4}$

$\cancel{5{,}8x>95{,}6 \quad |\cdot 10}$

$\cancel{58x>956 \quad |:58}$

$\cancel{x>16}$

Т.к. кол-во установок II типа кратно кол-ву установок I, то

$\frac{5{,}8x+4{,}4-5x}{x}$ - целое число

$\frac{0{,}8x+4{,}4}{x}$ - целое число

$0{,}8+\frac{4{,}4}{x}$ - целое число

минимальным значением x здесь будет 22.

Получим: $y=5{,}8\cdot 22+4{,}4$

$y=127{,}6+4{,}4$

$y=132$

22 установки первого типа изготовили

$4\cdot 22=88$ установок II типа изготовили

$132-22-88=22$ установки III типа изготовили.

Ответ: 22 установки первого типа; 88 установок II типа; 22 установки III типа.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

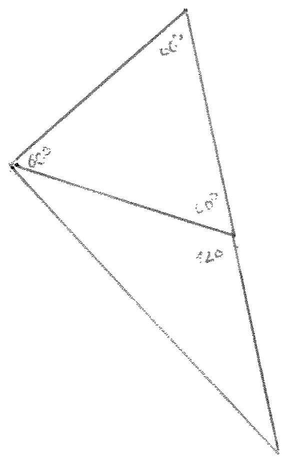
Больше всего равных углов можно получить в равностороннем треугольнике

Попробуем пристроить к нему ещё 1 треугольник

Получим треугольник в котором 1 угол равен $180-60=120°$

⇓

сумма других углов равна $60°$, то есть подстроить ещё один угол равный $60°$ не получится $\Rightarrow$ здесь $N=3$



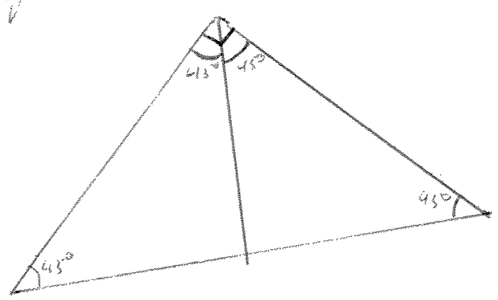
Ещё равные углы есть в равнобедренном треугольнике.

Начертим прямоугольный равнобедренный треугольник

Проведём биссектрису прямого угла

Получим 4 угла равных $45° \Rightarrow N=4$

$N=5;\ 6$ — ?



Ответ: $N=4$.

№4

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$$

Т.к. происходит деление на каждое из чисел, то $x\neq0,\ y\neq0,\ z\neq0$ и

скорее всего значение отношений равно 1 или −1

⇓

$$|x|+|y|=|z| \text{ и } x+y=-|z|$$

Пусть $x=1$

Тогда за y возьмём следующее целое число $2 \Rightarrow y=2$

Тогда $1+2=-|z|$

$z=-3$

Получим $\frac{1+2}{-3}=-1$

$\frac{1-3}{2}=-1$

$\frac{2-3}{1}=-1$

Ответ: −1.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

чтобы найти решение этой задачи удобно найти какую-нибудь закономерность например если ~~у нас есть~~ мы берём два мандарина мама кладёт 1 яблоко, затем мы берём 1 мандарин и 1 яблоко, получим уменьшение кол-ва мандаринов на 2 при таком же кол-во яблок

~~Пусть~~ Построим таблицу, и будем в ней использовать вышеуказанную закономерность

(+)

№ операции	мандарины	яблоки
1	15	0
2	13	1
3	13	0
4	11	1
5	11	0
6	9	1
7	9	0
8	7	1
9	7	0
10	5	1
11	5	0
12	3	1
13	3	0
14	1	1
15	1	0

Получим, что остался 1 мандарин

Ответ: остался 1 мандарин

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Рассмотрим небольшое множество N, состоящее из трёх чисел a, b и c.

При замене элемента получаем ту же сумму, то

$$\left.\begin{aligned} a+b+c &= a+b+a+b = 2(a+b) \\ a+b+c &= a+c+a+c = 2(a+c) \\ a+b+c &= b+c+b+c = 2(b+c) \end{aligned}\right| \Rightarrow 2(a+b) = 2(a+c) = 2(b+c) \quad |:2$$

$a+b = a+c = b+c$, такое возможно, только если $a=b=c$

⇓

$$\left.\begin{aligned} a+b+c &= a+a+a = 3a \\ a+b+c &= a+b+a+b = a+a+a+a = 4a \end{aligned}\right| \Rightarrow 3a = 4a, \quad a = 0,$$

значит $a=b=c=0$.

Следовательно в ~~числах~~ множестве M каждый элемент будет равен 0, то есть и произведение равно 0.

Ответ: 0.

№1. Пусть число установок первого типа = a
второго – b
третьего – c, тогда

$b = 4a;\ a+b+c \le 200;\ c \vdots a.$

$5c = b+99 = 4a+99;\ c = ka$, где $k \in N$.

$5ka = 4a+99$

$a(5k-4) = 99;\ 99 = 1\cdot 99 = 3\cdot 33 = 9\cdot 11$

Если $a = 1$, то $k \notin N$
$a = 99$, то $k = 1$
$a = 3$, то $k \notin N$
$a = 33$, то $k \notin N$
$a = 9$, то $k = 3$
$a = 11$, то $k \notin N$

Если $a = 99$, то $b = 396$ и $c = 99 \Rightarrow$
$a+b+c \not\le 200$
Если $a = 9$, то $b = 36$; $c = 27$.
$a+b+c \le 200$ – верно
$a = 4b$ – верно
$c \vdots a$ – верно.
$5c = 99+b$ – верно.

Ответ: Перого типа 9 уст.
второго 36 уст
третьего 27 уст.

(+)

№4. $\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$; $xy+y^2 = zx+z^2$

$x(y-z) = (z-y)(z+y)$

$x(y-z) - (z-y)(z+y) = 0$

$(x+z+y)(y-z) = 0.\ (1)$

$x = -z-y$ или $y = z$

$x^2+zx = y^2+zy$

$(x-y)(x+y) = z(y-x)$

$(x-y)(x+y+z) = 0\ (2)$

$x = y$ или $x = -y-z$.

$x^2+yx = yz+z^2$

$(x-z)(x+z) = y(z-x)$

$(x-z)(x+z+y) = 0\ (3)$.

$x = z$ или $x = -z-y$.

Из (1) и (2):

$(x+z+y)(y-z-x+y) = 0.\ (1,2)$

Из (1,2) и (3)

$(x+z+y)(y-z-x+y-x+z) = 0$

$(x+z+y)(2y-2x) = 0$

$(x+z+y)(y-x) = 0 \Rightarrow x = -z-y$ или $x = y$.

(+)

Итак, либо $x=y=z$, тогда: $\frac{x+y}{z}=2$; $\frac{y+z}{x}=2$; $\frac{x+z}{y}=2$.

либо $x=-y-z$, тогда: $\frac{x+y}{z}=\frac{-y-z+y}{z}=-1$

Ответ: 2; -1

$\frac{y+z}{x}=\frac{y+z}{-(y+z)}=-1$.

$\frac{x+z}{y}=\frac{-y-z+z}{y}=-1$.

5. Обозначим апельсины как 1, яблоки как 0.
Чтобы во всех 4-ех вазах одновременно имели одинаковые фрукты нужно, чтобы сумма апельсинов (т. е. 1) или яблок (т. е. 0) была четной (либо ~~все~~ 16 апельсинов - 16 - четное, либо 16 яблок 0 - четное.).
Рассмотрим сумму, вначале и как она изменяется при действиях Саши.
1. Вначале сумма нечетна.
2. Всевозможные расстановки фруктов в вазе
1111; 1110; 1100; 1000; 0000 (порядок фруктов не важен)
3. При замене всех фруктов на противоположные в одной вазе, четность суммы в вазе не меняется ⟹ не меняется и четность всей суммы
4. При замене одного фрукта ~~на~~ из каждой вазы, четность вазы меняется, т. к. четность меняется у суммы всех ваз, то ~~он~~ четность всей суммы не меняется.
Итак, ~~сумм~~ четность всей суммы не меняется, а т.к. вначале сумма - нечетна ⟹ Саша не сможет получить во всех 4 вазах одинаковые фрукты

+

3. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1001}$ – числа в множестве М.

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{1001}$ (сумма всех элементов).

Заменим a_1 на сумму остальных чисел и найдем сумму данного множества:

$a_2+a_3+\ldots+a_{1001}+a_2+a_3+\ldots+a_{1001} = 2(a_2+a_3+\ldots+a_{1001}) = S'$

По условию $S=S'$, т.е.

$a_1+a_2+\ldots+a_{1001} = 2(a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{1001})$.

По аналогии, заменяя другие числа

$S=2(a_1+a_3+\ldots+a_{1001})$

$S=2(a_1+a_2+a_4+\ldots+a_{1001})$

$\vdots$

$S=2(a_1+a_2+\ldots+a_{1000})$.

±

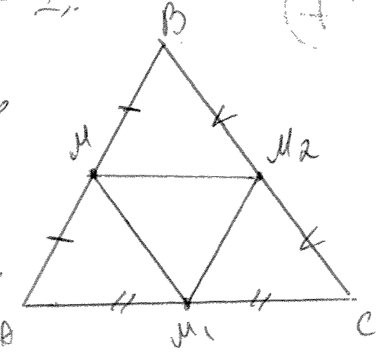
Из этих равенств видно, что:

$a_1=a_2=\ldots=a_{1001}=a$.

Тогда ~~$S=1001a$, а $S'=$~~ т.к. сумма не меняется, то число, заменяемое на сумму других, равно сумме других, иначе: $a=1000a$, откуда $a=0$ ⟹ произведение всех чисел равно 0.

Ответ: 0.

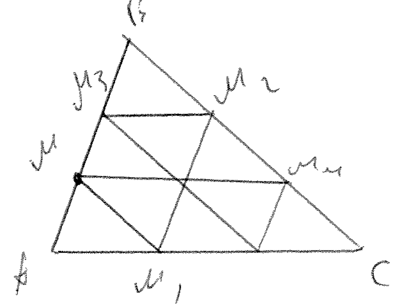
2. Рассмотрим случай когда $\frac{AM}{BM}=1$, тогда при перемещении М на AC (на рис точка M_1) $\frac{AM_1}{M_1C}=1$ (по теореме Фалеса) и $\frac{BM_2}{M_2C}=1$ ⟹ обобщу.



М и M_2 – ~~средние~~ середины AB и BC ⟹ $MM_2 \parallel AC$ ⟹ понадобилось 3 хода

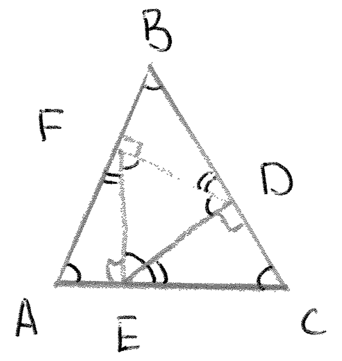
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если же $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$, то каждую сторону необходимо разрезать на 3 равные части, а не на 2 (как в случае, где $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$), т.е. сделать две точки на каждой из сторон, чтобы прийти в конце к ~~то~~ исходному месту, а из первого рассмотренного случая понятно, что чтобы сделать по точке на каждой из сторон нужно 3 шага $\Rightarrow$ для двух точек (для случая $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$) надо $2 \cdot 3 = 6$ шагов



{Доказательство того, что можно прийти всегда в исходное место: ~~каждый новый шаг делит~~ При каждом шаге, прямая будет отсекать на стороне отрезки пропорциональные отрезкам, полученным при предыдущем ходе, следовательно через определенное кол-во ходов (когда сторона на которой исходное место будет разделена на m частей, если $\frac{n}{m}$ - отношение в котором делится отрезки ~~п~~ точкой M в исходном месте }. Для того чтобы сделать ~~…~~ m частей нужно сделать $m-1$ точку, т.к. одна точка делается за 3 хода, то $m-1$ точку на данной стороне сделают за $3(m-1)$ ход.}.

№2.



Дано:
$ABCD$ - правильный треугольник
$ED \perp BC$; $FE \perp AC$; $DF \perp AB$.
Найти:
$EC : EA$; $BD : DC$; $AF : BF$
$\frac{S_{ABC}}{S_{DFE}} = ?$

Решение:
т.к. ABC - правильный тр-к, то $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$
$AC = AB = BC$.
ΔAFE; ΔBDF; ΔEDC - прямоугольные
$\angle AFE = \angle FDB = \angle CED = 180° - 90° - 60° = 30°$
(т.к. $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$, $\angle CDE = \angle AEF = \angle BFD = 90°$, а сумма углов тр-ка - 180)
Найдем углы образованного тр-ка ($\angle E$; $\angle F$; $\angle D$):
$\angle BFD + \angle AFE + \angle E = 180°$ (смежные)
$\angle BDF + \angle CDE + \angle D = 180°$ (смежные)
$\angle AEF + \angle CED + \angle E = 180°$ (смежные) $\Rightarrow$
$\angle F = \angle D = \angle E = 180° - 90° - 360° = 360°$ $\Rightarrow$
треугольник FDE - правильный ($EF = FD = DE$) $\Rightarrow$
$\Delta AFE = \Delta BDF = \Delta EDC$ (по катету и острому углу)
Коэффициент подобия треугольников ABC и FDE в квадрате равен отношению площадей:
$$\left(\frac{AC}{DE}\right)^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{DFE}} = \left(\frac{AE + EC}{DE}\right)^2 = \frac{(DC + EC)^2}{DE^2}$$

$\angle CED = 30°$ (катет, лежащий против угла в 30° равен половине гипотенузы)

$DC = \frac{1}{2} EC$

По теореме Пифагора:

$DC^2 + DE^2 = EC^2$

$DE^2 = EC^2 - DC^2$

$\frac{S_{ABC}}{S_{DFE}} = \frac{(DC + EC)^2}{EC^2 - DC^2} = \frac{(1{,}5 EC)^2}{EC^2 - \frac{1}{4} EC^2} = \frac{2{,}25 \cdot \cancel{EC^2}}{0{,}75 \cancel{EC^2}} =$

$= \frac{2{,}25}{0{,}75} = 3$

т.к. $DC = \frac{1}{2} EC = \frac{1}{2} BD$ (т.к. тр-ки равны)

$\frac{BD}{DC} = \frac{EC}{EA} = \frac{AF}{BF} = \frac{BD}{\frac{1}{2} BD} = 2$

Ответ: 3 - отношение площадей; точки делят стороны в отношении 2 : 1

+

N5.

Дано: $a; b; c; d$

По условию $\frac{a+b}{c+d} = k$, тогда $\frac{c+d}{a+b} = \frac{1}{k}$,

но по условию задачи, сумма любых 2-х чисел, делённая на сумму других 2-х чисел $= k$, т.е.

$\frac{c+d}{a+b}$ - тоже k => следует, что $k = \frac{1}{k}$ =>

=> $k = \pm 1$. Рассмотрим сами числа:

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

По условию задачи: два числа, или три равны, а остальные два, или четвертое — не равно им.
Рассмотрим оба варианта:

1) $a = b$ 2) $a = b = c \neq d$
$c \neq d$
$a \neq c$
$a \neq d$

1) $\frac{a+b}{c+d} = 1 \Rightarrow 2a = c+d$

или

$\frac{a+b}{c+d} = -1 \Rightarrow 2a = -c-d$

~~или~~

$\frac{a+d}{b+c} = 1 \Rightarrow c = d$ - не подходит

или

$\frac{a+d}{b+c} = -1 \Rightarrow d = -c$

Первый вариант ($k \neq 1$) не подходит (или $k = -1$)

Если $k = -1$ $((a=b);(c \neq d);(a \neq c);(a \neq d))$;

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = -1 \\ \frac{a+d}{b+c} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = -c-d \\ d = -c \end{cases} ; \quad 2a = 0 \Rightarrow a = 0$$

;

$a = 0$; $b = 0$
$d = -c$

два числа — 0, другие два числа противоположны (например: 0; 0; +3; -3)
Возможно ∞ вариантов

Не соотв уем.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) $a = b = c \neq d$

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = 1 \\ \cancel{\frac{a+b}{c+d} = 1} \end{cases} \Rightarrow$$ $d = a$ – не подходит ($k \neq 1$) по усл.

или

$\frac{a+b}{c+d} = -1 \Rightarrow$

$-d = 3a$ (т.е. в -3 раза больше (и $d < 0$)

например: $(1; 1; 1; -3)$

возможно бесконечность вариантов.

Ответ: $k = -1$;

Пример: $1; 1; 1; -3$ или $0; 0; +1; -1$;

Описание: три числа равные, а четвертое в -3 раза больше одного из них или 2 числа равны 0, а другие два схожи по модулю, но с разными знаками. Бесконечность.

не обяз. сдавать

№3.

Дано:

$M = \{a; b; c; d; \dots n\}$

$m(M) = 2015$

$a + b + c + d \dots + n = (b + c + d \dots + n) + b + c + d \dots + n$: Замена: $a + \dots + n = M$

$a + (M - a) = 2b + 2c + 2d \dots + 2n =$

$= 2(M - a)$

$a = M - a$

$2a = a + b + c + d \dots + n \Rightarrow$

$2c = a + b + c + d \dots + n$ (таким же образом)

$2d = a + b + c + d \dots + n \Rightarrow$

$a = b = c = d \dots = n$

$2015a = (2014a) + 2014a \Rightarrow 2013a = 0 \Rightarrow a = b = c \ldots = 0$

$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdots n = 0$ Ответ: 0

№4.

Дано: $g(x)$

$g(1+3x) + g(2x-3) = 0$

$g(x) = ax^2 + bx + c$

$D = 0 = b^2 - 4ac$

$x = \frac{-b}{2a}$

$a(1+3x)^2 + b(1+3x) + c + a(2x-3)^2 + b(2x-3) + c = 0$

$b^2 - 4ac = 0$

$b = \sqrt{4ac} = 2\sqrt{ac}$

$x = \frac{-2\sqrt{ac}}{2a} = \frac{-\sqrt{c}}{\sqrt{a}} = -\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

$a + 6ax + 9ax^2 + 2\sqrt{ac} + 3 \cdot 2\sqrt{ac}x + c + 4ax^2 - 12ax + 9a +$
$+ 4\sqrt{ac}x - 6\sqrt{ac} + c = 0$

$10a - 6ax + 13ax^2 + 4\sqrt{ac} + 10\sqrt{ac}x + 2c = 0$

$a(10 - 6x + 13x^2) + \sqrt{ac}(4 + 10x) + 2c = 0$

—

Дано:

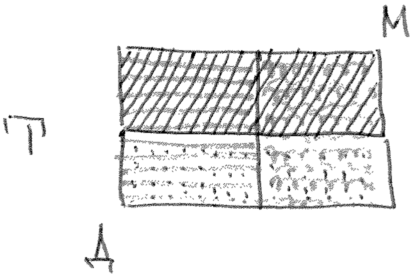
М = {мальчики} $m(Т) = m(Др.)$

Д = {девочки} М - не пересекается с Д, а Т - не пересекается с Др.

Т = {сосед справа - того же пола}

Др. = {сосед справа - другого пола}

(т.е. $m(М \cup Д) = 0$, $m(Т \cup Др) = 0$)



Заметим, что:

$m(М) + m(Д) = m(Т) + m(Др.)$

И т.к. $m(Т) = m(Др.)$, то

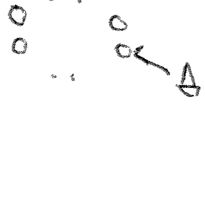
$m(М \cap Т) = m(М \cap Др)$

$m(Д \cap Т) = m(Д \cap Др)$.

$m(М) + m(Д) = 2m(Т)$, т.е. кол-во детей — чётное (мальчиков и девочек по нечетному кол-ву, или обоих по четному)

Если их будет ~~по~~ нечетному кол-ву, то: ~~На~~ т.к. на каждого ребенка действует одно высказывание, кол-во высказываний будет: чётное + нечётное = нечётное, но у нас по усл. Т = Др (мальчиков и девочек должно быть по чётному кол-ву!)

Примеры:



Ответ: любое чётное число (кроме 2, т.к. $m(М) > 1$, и $m(Д) > 1$), начиная от 4 и через каждые 4

Кратное 4.

№1

В любом хороводе, идя ~~по кругу~~ НАПРАВО, после встречи мальчика, у которого сосед справа — девочка, мы обязательно (~~увидим девочку~~) потом увидим девочку, чей сосед справа — мальчик => мы увидим одинаковое кол-во мальчиков, у которых сосед — девочка, и девочек, у которых сосед — мальчик => число детей, у которых сосед справа другого пола, делится на 2.

Т.к число детей с правым соседом того же пола равно кол-ву детей, у которых сосед справа не того же пола, то общее число детей делится на 4 $(2x+2x=4x \vdots 4)$ => число детей должно делиться на 4. Вот как построить такой хоровод:

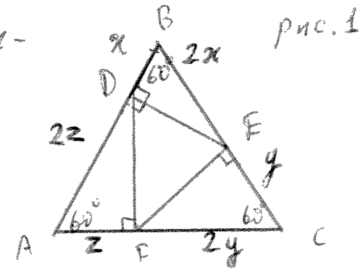
$M_1 \to M_2 \to Д_3 \to Д_4 \to M_5 \to M_6 \to Д_7 \to Д_8 \to M_9 \to M_{10} \to \dots \to Д_{4n-1} \to Д_{4n} \to M_1$.

1) 2 человека одного пола 2) затем 2 человека другого пола 3) повторять шаблон

в данном хороводе $4n$ человек, n — нат число, в нем $2n$ ~~соседей~~ человек, у которых сосед справа того же пола и $2n$ человек, у которых сосед справа другого пола.

Ответ: число людей — любое число, делящееся на 4.

№2



2 стороны треуг. не могут быть перпендикулярны одной линии, т.к тогда бы они были параллельны => к каждой стороне исходного Δ перпендикулярна ровно 1 сторона нового Δ; назовём исходный треуг. ABC, а точки нового D, E и F так, что $D \in AB$, $E \in BC$, $F \in AC$. получаем, что $DF \perp AC$, $FE \perp BC$, $ED \perp BA$. т.к $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$ (по условию) и так же $\angle BDF = \angle FEC = \angle AFD = 90°$ (по усл.), то $\triangle DBE \sim \triangle ECF \sim \triangle ADF$ и каждый из них — прямоугольный треуг. с углом $60°$ => $\frac{AF}{AD} = \frac{BD}{DF} = \frac{EC}{CF} = \cos 60° = \frac{1}{2}$ => обозначим стороны так, как показано на рисунке. Теперь докажем, что $x = y = z$:

Предположим обратное — есть число, меньше 2-х других или число больше 2-х других (назовём наиб. число a, наименьшее число c) ~~...~~

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7791 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УН 94-40

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$ ~~по условию $\triangle ABC$ равносторонний~~ по условию $\triangle ABC$ равносторонний $\Rightarrow$

$\Rightarrow a + 2b = b + 2c = c + 2a$ или $a + 2c = c + 2b = b + 2a$, но т.к. b и c взаимозаменяемы, то можно рассмотреть только 1 уравнение.

$\begin{cases} a+2b = b+2c \\ b+2c = c+2a \\ c+2a = a+2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 2c \\ b+c = 2a \\ c+a = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{a+b}{2}; \\ b = \frac{a+c}{2}; \\ a = \frac{b+c}{2}; \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} 1) a > b \Rightarrow \frac{b+c}{2} > b \\ 2) a > c \Rightarrow \frac{b+c}{2} > c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b+c > 2b \\ b+c > 2c \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} c > b \\ b > c \end{cases} \rightarrow$ противоречие.

2) $\begin{cases} c < a; \\ c < b, \end{cases}$ ~~Аналогично рассуждая получаем, что~~ Из рассуждений выше мы получили, что $\begin{cases} c = \frac{a+b}{2} \\ b = \frac{a+c}{2} \\ a = \frac{c+b}{2} \end{cases}$,

а так как $\left.\begin{matrix} 1) c < a \Rightarrow \frac{a+b}{2} < a \\ 2) c < b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a+b > 2a \\ a+b > 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > a \\ a > b \end{cases} \rightarrow$ противоречие

Вывод – $x = y = z \Rightarrow \triangle ADF = \triangle BDE = \triangle ECF$.

Обозначим длину стороны $\triangle ABC$ за m, тогда $S_{ADF} = \frac{AF \cdot FD}{2} =$

$= \frac{z \cdot (\sin 60° \cdot 2z)}{2} = \frac{z \cdot \sqrt{3} \cdot 2z}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2} z^2$. $\begin{cases} x + 2z = m \\ x = y = z \end{cases} \Rightarrow \{ 3x = m \Rightarrow x = \frac{1}{3} m \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ADF} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{m}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}\, m^2}{2 \cdot 9} = \frac{m^2\sqrt{3}}{18}$. т.к. $\triangle ADF = \triangle BDF = \triangle ECF$, то и их S равны $\Rightarrow$

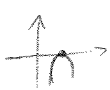
$\Rightarrow S_{DEF} = S_{ABC} - 3 \cdot \left(\frac{m^2\sqrt{3}}{18}\right) = \frac{\sqrt{3}\, m^2}{4} - \frac{m^2\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}\, m^2 - 2\sqrt{3}\, m^2}{12} = \frac{\sqrt{3}\, m^2}{12}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{\sqrt{3}\, m^2 \cdot 12}{4 \cdot \sqrt{3}\, m^2} = 3$

Ответ: 3

+

№4

Уравнение $g(x)$ имеет только 1 корень $\Rightarrow$ график будет примерно таким: , или , т.е. ~~все вершины~~ при любом x $g(x)$ одного знака $\Rightarrow g(1+3x)$ и $g(2x-3)$ тоже одного знака, но по условию $g(1+3x) = -g(2x-3)$ имеет 1 решение $\Rightarrow g(1+3x) = g(2x-3) = 0$

оба этих ~~уравнения~~ функции будут равны если $1 + 3x = 2x - 3 \Rightarrow 1 + x = -3$

$x = -4$

Ответ: $x = -4$.

—

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7791

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УН 94-40

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Заменим каждое число суммой 2014 других чисел, по условию сумма не изменится => новая сумма состоит из суммы 2014 прошлых сумм => $2014S = S$ => $S = 0$

+

Обозначим n-ное число в сумме числом a_n. по условию $a_n = S - a_n$, а т.к $S=0$, то $a_n = -a_n$ => $a_n = 0$ => все числа $=0$. => их произведение $=0$.

Ответ: 0.

~~№~~ №5

Назовем эти числа a, b, c и d; $\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = k \\ \frac{c+d}{a+b} = k \end{cases}$ => $\begin{cases} ~~\text{}~~ \\ a+b = k(c+d) \\ c+d = k(a+b) \end{cases}$ =>

=> $(a+b) = k^2(a+b)$ => $k^2 = 1$ => $k = \pm 1$

$a+b$ или $c+d \neq 0$ т.к. тогда нельзя было бы определить k

если $k=1$, то $\begin{cases} a+b = c+d \\ a+c = b+d \end{cases}$ => $\{(a+b)-(a+c) = (c+d)-(b+d)$ => $b-c = c-b$ =>

=> $c=b$ => любые 2 числа равны => все 4 числа равны -> противоречие.

если $k=-1$, то существует бесконечно много решений:

~~x_1 x_2 x_3 $-3x$~~ первое число x, второе x, третье тоже x, а четвертое $= -3x$. получаем: $\begin{cases} \frac{x+x}{x-3x} = \frac{2x}{-2x} = -1 \\ \frac{x-3x}{x+x} = \frac{-2x}{2x} = -1 \end{cases}$ (x не должен быть $=0$)

Примеры: 1, 1, 1, −3; 5, 5, 5, −15;

не все вар-ты описаны

±

Лист 03 из 03

N 1

Пусть x – это кол-во установок I типа, y – II типа, z – III типа.
Тогда их сумма будет больше 100.

$x+y+z>100$

По условию установок II типа больше установок I типа в 4 раза.

$y=4x$

Число установок III типа кратно числу остановок I типа.

$z \vdots x$

Если бы о установок III типа изготовили в 5 раз больше, то их стало бы ~~больше, чем установок~~ на 22 больше, чем установок II типа.

$5z=y+22$

Решение:

Допустим $z:x=n$

Тогда $z=xn$.

$5xn=y+22$

$5xn=4x+22$

$5xn-4x=22$

$x(5n-4)=22$

22 должно нацело делиться на $(5n-4)$, а делители этого числа 1, 2, 11, 22.

$5n-4=1$	$5n-4=2$	$5n-4=11$	$5n-4=22$
$5n=5$	$5n=6$	$5n=15$	$5n=26$
$n=1$	$n=1,2$	$n=3$	$n=5,2$
подходит	не подходит	подходит	не подходит

Получается, что $n=1$ или $n=3$.

$x=22:(5n-4)$

$x=22:(5\cdot1-4)$
$x=22$
$y=4x=88$
$z=xn=22$

$x=22:(5\cdot3-4)$
$x=2$
$y=4x=8$
$z=xn=6$

Из условия $x+y+z>100$, следует, что $n=3$, потому что

$22+88+22=132$, а $132>100$, и $2+8+6=16$, что не больше 100.

Ответ: Завод изготовил 22 установки I типа, 88 установок II типа и 22 установки III типа.

№2

Треугольник, который мы разрежем, должен иметь углы со значениями α, α и 2α. Мы возьмём именно эти значения для облегчения задачи. Раз есть два одинаковых угла, то треугольник равнобедренный.

Теперь проведём биссектрису, делящую угол со значением 2α напополам. Треугольник равнобедренный, поэтому биссектриса, проведённая к основанию, является и медианой, и высотой. Тогда мы получим два равных меж собой треугольника, у которых углы равны α, α и $90°$. То есть всего у нас получается 4 равных угла, значит, самое наибольшее значение N равно 4.

Ответ: ~~N = 4.~~ Самое наибольшее значение N равно 4.

№3

Произведение всех элементов множества M равно 0.

Доказательство:

При замене любого числа суммой остальных 98 чисел множества M должно быть условие, что все 99 элементов должны быть в парах, которые относятся друг к другу как $1:-1$, т.е. одно число из пары должен быть в противопоставлении с другим числом, как отрицательное.

Но из 99 элементов при объединение в пары останется одно число, и чтобы не нарушить построение множества ~~числа~~ M, оно должно быть не положительным и не отрицательным, то есть нулём.

Произведение любых множеств чисел и 0 всегда равно 0.

Ответ: Произведение всех 99 элементов множества M равно 0.

№4

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Решим эти отношения.

$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y}$ $\quad$ $\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x}$ $\quad$ $\frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$

$y(x+y) = z(x+z)$ $\quad$ $x(x+y) = z(y+z)$ $\quad$ $x(x+z) = y(y+z)$

$y^2+xy = z^2+zx$ $\quad$ $x^2+xy = z^2+yz$ $\quad$ $x^2+xz = y^2+yz$

~~Из этих~~ Из этих равенств следует, что:

$\cancel{x^2+xz = x^2+xy}$

$x^2+xz = x^2+xy$ $\quad$ $y^2+xy = y^2+zy$

$x(x+z) = x(x+y)$ $\quad$ $y(y+x) = y(y+z)$

$x+z = x+y$ $\quad$ $y+x = y+z$

$z = y$ $\quad$ $x = z$

$x = y = z$

Теперь возможно два случая:

I. $x=y=z=0$, тогда значение отношений не имеет смысла;

II. $x=y=z\neq 0$, тогда значение отношений равно 2;

Ответ: Значение отношений либо не имеет смысла, либо равно 2.

№ 5

Допустим все гости брали два одинаковых фрукта: сначала по 2 мандарина, а потом, если в вазе останется один мандарин или вообще не останется, по 2 яблока.

15м → 13м, 1я → 11м, 2я → 9м, 3я → 7м, 4я → 5м, 5я → 3м, 6я → 1м, 7я → 1м, 6я → 1м, 5я → 1м, 4я → 1м, 3я → 1м, 2я → 1м, 1я

В конце остаётся только два разных фрукта, следовательно, когда их кто-то из гостей возьмёт, то мама положит туда мандарин.

Ответ: В вазе останется один мандарин.

№2.

1) преобразуем $2X_n = X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1} - X_n$, $n = 1; 2; \ldots$

$3X_n = X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1}$.

2) пусть $n = 1$.

$3X_1 = X_0$

$X_1 = \frac{X_0}{3}$.

пусть $n = 2$.

$3X_2 = X_0 + X_1$

$3X_2 = X_0 + \frac{X_0}{3} = \frac{4}{3}X_0$.

$X_2 = \frac{4}{9}X_0$.

пусть $n = 3$

$3X_3 = X_0 + X_1 + X_2$

$3X_3 = X_0 + \frac{X_0}{3} + \frac{4}{9}X_0 = \frac{16}{9}X_0$.

$X_3 = \frac{16}{27}X_0$.

+

пусть $n = 4$.

$3X_4 = X_0 + X_1 + X_2 + X_3$.

$3X_4 = X_0 + \frac{X_0}{3} + \frac{4}{9}X_0 + \frac{16}{27}X_0 = \frac{64}{27}X_0 \Rightarrow X_4 = \frac{64}{81}X_0$

3) $\frac{X_2}{X_1} = \frac{4X_0 \cdot 3}{9X_0} = \frac{4}{3}$; $\frac{X_3}{X_2} = \frac{16X_0 \cdot 9}{27 \cdot 4X_0} = \frac{4}{3}$.

$\frac{X_4}{X_3} = \frac{64X_0 \cdot 27}{81 \cdot 16X_0} = \frac{4}{3} \Rightarrow$ видим закономерность $\Rightarrow$

$\Rightarrow X_1, X_2, \ldots X_{n-1}, X_n$ — геометрическая прогрессия, где $X_1 = \frac{X_0}{3}$, $q = \frac{4}{3}$.

4) использ. формулу геометрич. прогрессии.

$X_n = X_1 \cdot q^{n-1}$.

$\underbrace{X_n = \frac{X_0}{3} \cdot q^{n-1}}$, где $n = 1; 2; \ldots$

формула любого члена задан. последоват.

5) $S_n = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = S_{1-n}$ (сум. геометрич. последов.).

$S_{1-n} = \frac{X_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{X_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{3\left(\frac{4}{3} - 1\right)} = X_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)$

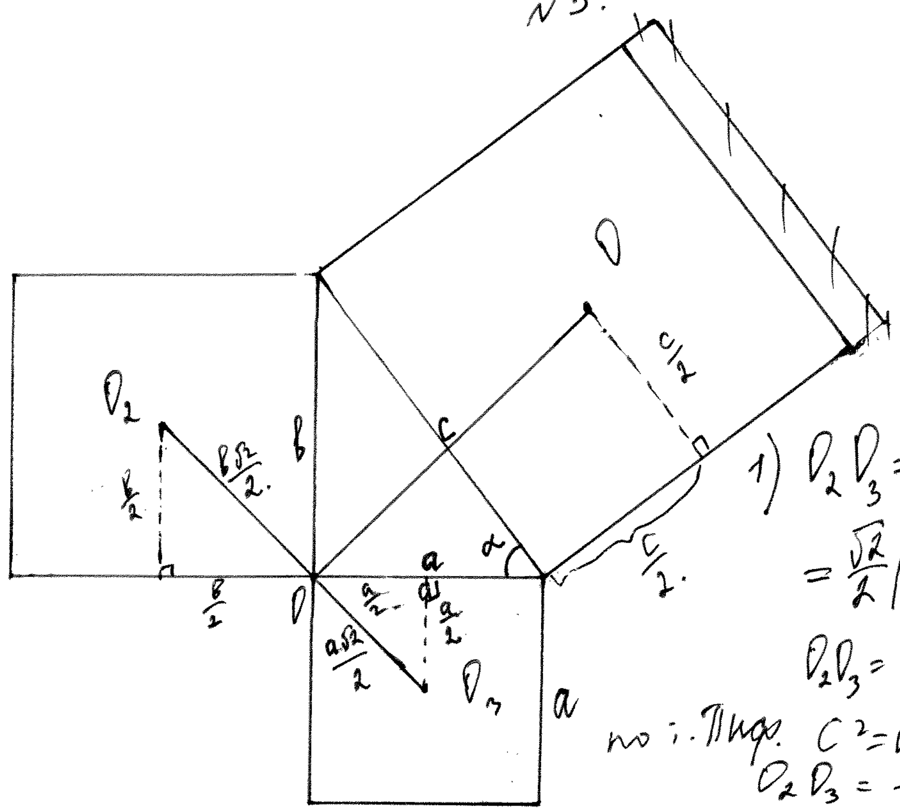
$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = X_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)$.

$$S_n = x_0 + x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = x_0\left(1+\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = \underbrace{x_0\left(\frac{4}{3}\right)^n}_{\text{сумма заданной последовательн.}}$$

Ответ: $x_n = \frac{x_0}{3}\cdot q^{n-1}$.

$S_n = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

№5.

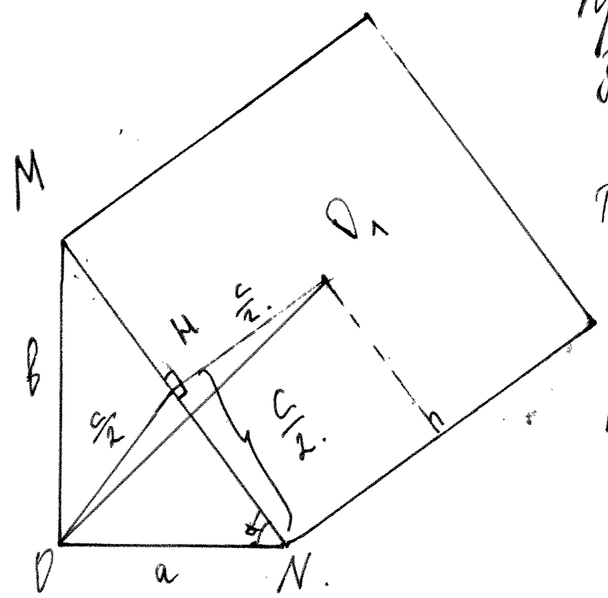


1) $D_2D_3 = \frac{b\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

$D_2D_3^2 = \frac{2}{4}(a+b)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{2}$

по т. Пиф. $c^2 = a^2+b^2 \Rightarrow$
$D_2D_3^2 = \frac{c^2+2ab}{2}$.

2)



провед. $D_1H \perp$-но гипотенузе c

$D_1H = \frac{c}{2}$

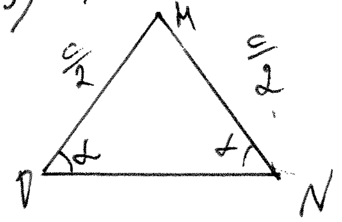
т.к. кв-т $MN = HN = \frac{c}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в прямоуг. Δ-ке DMN. DH-медиана $\Rightarrow$

по т. о медиане, провед. к гипотенузе $DH = \frac{c}{2}$.

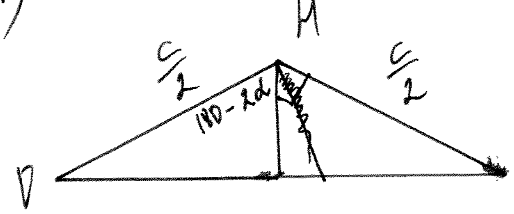
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) $\triangle DMN$ – равнобед. ($DM = MN = \frac{c}{2}$).



$\angle DMN = 180 - 2\alpha$.

4)



$\angle DMD_1 = 180 - 2\alpha + 90 = 270 - 2\alpha$.

по т. cos.

$DD_1^2 = DM^2 + MD_1^2 - 2 \cdot DM \cdot MD_1 \cos\angle DMD_1$

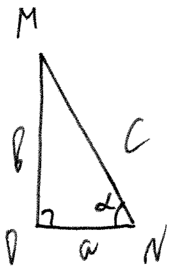
$DD_1^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)$

$DD_1^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} \sin 2\alpha$.

$DD_1^2 = \frac{c^2}{2}(1 + \sin 2\alpha)$.

+

5)



$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

$\sin\alpha = \frac{b}{c}$ $\cos\alpha = \frac{a}{c}$.

$\sin 2\alpha = \frac{2b \cdot a}{c \cdot c} = \frac{2ab}{c^2}$.

$DD_1^2 = \frac{c^2}{2}\left(1 + \frac{2ab}{c^2}\right) = \frac{\cancel{c^2}(c^2+2ab)}{2\,\cancel{c^2}} = \frac{c^2+2ab}{2}$.

6) $DD_1^2 = \frac{c^2+2ab}{2}$, $D_2D_3^2 = \frac{c^2+2ab}{2}$ $\Rightarrow DD_1 = D_2D_3 \Rightarrow$ аллеи третьего этапа им. одинакв. длину, и это не зависит от значения угла α.

Ответ: аллеи имеют одинаковую длину.

№3.

1) ∃ дан ряд $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

найдём средн. арифм. 3-х любых соседних членов:

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_2+x_3+x_4}{3} = \frac{x_3+x_4+x_5}{3} = \frac{x_4+x_5+x_6}{3}$$

- $x_1 + \cancel{x_2} + \cancel{x_3} = \cancel{x_2} + \cancel{x_3} + x_4$

  $x_1 = x_4$

- $x_2 + \cancel{x_3} + \cancel{x_4} = \cancel{x_3} + \cancel{x_4} + x_5$

  $x_2 = x_5$.

- $x_3 + \cancel{x_4} + \cancel{x_5} = \cancel{x_4} + \cancel{x_5} + x_6$.

  $x_3 = x_6$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

2) Следовательно, послед. имеет вид.
$x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3$. Исходя из условия, 2 члена всегда равны 1.

Т.к. послед. $x_1, x_2, x_3, x_1, x_2, x_3 \Rightarrow$ средн. геометрич. любых соседних 3-х чисел равно $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$.

$\exists$ $x_3 = 1 \Rightarrow$ ср. геом. $\sqrt[3]{x_1 x_2 \cdot 1} = \sqrt[3]{x_1 x_2}$.

3) Ср. арифм. послед. $\frac{2x_1+2x_2+2x_3}{6} = \frac{2x_1+2x_2+2}{6} = A$.

$\frac{x_1+x_2+1}{3} = A \Rightarrow x_1+x_2 = 3A-1$.

4) чтобы ср. геом. было наиб. $x_1 x_2$ должно быть наиб. $\Rightarrow$ ~~Клихх~~

~~Д~~ ~~В инкайтати~~ $x_1 = x_2 = \frac{3A-1}{2}$.

Ср. геом. 3-х $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$.

~~Д А-ча. БД Кахалы максимальная~~ 3-х чис.

Ответ: max. знач. сред. геом. 3-х чис.
$\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

1) по условию
$3X_n = X_0+X_1+...+X_{n-1}$, $\Rightarrow X_n = \left(\frac{X_0+X_1+...+X_{n-1}}{3}\right)$
пусть 0-ой член последовательности $=X_0$;
2) Рассмотрим $n=1,2,...$
$3X_1 = X_0 \Rightarrow X_1 = \frac{X_0}{3}$
$3X_2 = X_0+X_1 = \frac{4X_0}{3} \Rightarrow X_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{X_0}{3}$
$3X_3 = X_0+X_1+X_2 = X_0+\frac{X_0}{3}+\frac{4}{9}X_0 \Rightarrow X_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{X_0}{3}$
$3X_4 = \frac{64}{27}X_0 \Rightarrow X_4 = \left(\frac{4}{3}\right)^3\frac{X_0}{3}$ (1)
Нетрудно заметить, что
при $n\geq 1$, числов. послед. → геометрическая прогрессия
при $n=1$, $X_1 = \frac{X_0}{3}\cdot q^{n-1}$, где $q=\frac{4}{3}$

при $n=2$ $X_2 = \frac{X_0}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{2-1} = \frac{X_0}{3}\cdot\frac{4}{3}$,
значит при $n=n$
$$X_n = \left(\frac{X_0}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$
3) Числов. последовательность:
$X_0;\ \frac{X_0}{3};\ \frac{X_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^1;\ \frac{X_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^2;...;\ \cancel{\frac{X_0}{3}^{n-1}}\ \frac{X_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$
1-ый 2-ой 3-ий n-ый
4) $S_n = X_0+X_1+...+X_n$, заменим X_n из (1) $\Rightarrow$
$S_n = (X_0+X_1+...X_{n-1}) + \left(\frac{X_0+X_1+...+X_{n-1}}{3}\right) = \frac{4}{3}\underbrace{\left(X_0+X_1+...+X_{n-1}\right)}_{3X_n} = 4X_n$
Значит $S_n = 4\cdot X_n = \frac{4}{3}X_0\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = X_0\left(\frac{4}{3}\right)^n$
Ответ: Числов. послед.
$X_0;\ \frac{X_0}{3};\ \frac{X_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^1...;\ \frac{X_0}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$
$S_n = X_0\left(\frac{4}{3}\right)^n$;

№3

1) Пусть Даны 6 [illegible] чисел: a, b, c, d, e, f,
одно из них $=1$, какое именно нам неизвестно,
но по условию арифм. прогрессии равны (3х любых чисел),
значит и суммы равны
abcdef $a+b+c = b+c+d \Rightarrow a=d$, перепишем 6 чисел
$d=a$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭА 23-16

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$a\,b\,c\,a\,e\,f$ $\quad a+b+c = c+a+e \Rightarrow b=e$

$a\,b\,c\,a\,b\,f$ $\quad a+b+c = a+b+f \Rightarrow c=f$

$a\,b\,c\,a\,b\,c$, нетрудно заметить, что любое из этих чисел может $=1$, т.к. ср. геометрическое $= \sqrt[3]{abc}$

Пусть $c=1$.
Тогда, по условию $\frac{a+b+1+a+b+1}{6} = A \Rightarrow (a+b+1) = 3A$

$$a+b = 3A-1 \Rightarrow$$
$$b = \underbrace{(3A-1)}_{k} - a$$
$$b = k-a$$

Тогда ср. геометрическое

$max = \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{ab} \Rightarrow max^3 = a(k-a) \Rightarrow$

$$-a^2+ka-max^3=0$$

Ур-ие параболы, где max значение в вершине, что нам и нужно

$D=0$

$k^2-4max^3=0 \Rightarrow$

$$max^3 = \frac{(3A-1)^2}{4}$$

$$max = \sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$$

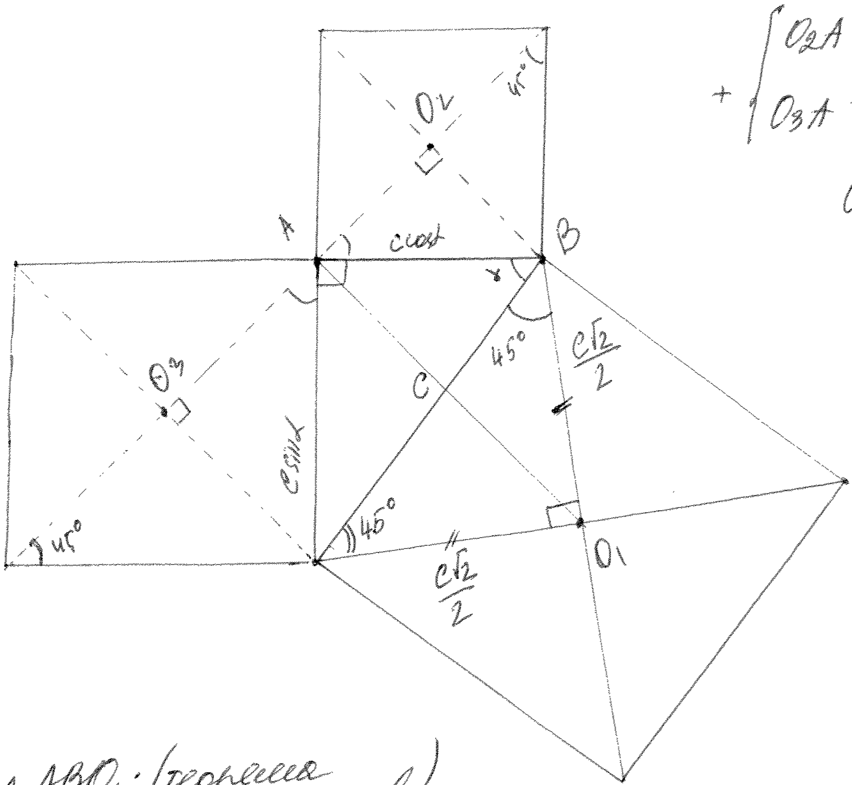
Ответ: $max = \sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$

+

Лист 02 из 04

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5



1) O_2O_3 – на одной прямой

$$+\begin{cases} O_2A = \frac{c\cos\alpha}{\sqrt{2}} \\ O_3A = \frac{c\sin\alpha}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$O_2O_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}c(\sin\alpha+\cos\alpha) =$

$c(\sin(\alpha+45°))$

$O_2O_3 = c\cdot\sin(\alpha+45°)$

2) $\triangle ABO_1$: (теорема косинусов)

$$AO_1^2 = (c\cos\alpha)^2 + \left(c\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\cdot c\,\frac{\cos(\alpha+45°)}{\cos\alpha}\cdot c\frac{\sqrt{2}}{2} = c^2\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{2}-\cos(\alpha+45°)\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\right)$$

$$AO_1 = c\sqrt{\cos^2\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45°)+\frac{1}{2}}$$

$$\cos^2\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)+\frac{1}{2}$$

$$AO_1 = \cancel{c\sqrt{\sin^2\alpha+\frac{1}{2}}} = c\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}}$$

3) Сравнение $O_2O_3^2$ и AO_1^2

$c^2\sin^2(\alpha+45°)$ $\quad$ $c^2\left(\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)$, т.к. α острый $\Rightarrow$ $\alpha\in(0;90)$

$\sin(\alpha+45°)\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$

$\sin^2(\alpha+45°)\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.

$\sin\alpha\cos\alpha\in(0;\frac{1}{2})$

$\left(\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.

В зависимости от угла α меняются и значения $\sin(\alpha+45°)$ $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$,

но на самом деле, если рассматривать разные углы α ($30°$ $60°$; $0°$; $90°$; $45°$) $\Rightarrow$ значения $O_2O_3^2 = OA_1^2$,

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 продолжение

На основании этого можно сделать вывод, что $O_2O_3^2 = OA_1^2 \Rightarrow O_2O_3 = O_1A$, поэтому они равны по длине всегда

Ответ: $O_2O_3 = OA_1$, при $\angle \in (0°; 90°)$

$\frac{-}{+}$

№4

1) если $g(x) \to 1$ корень то

$$a_1x^2 + b_1x + c = 0$$

$$D = 0 \Rightarrow b_1^2 - 4a_1c_1 = 0$$

$$b_1^2 = 4a_1c_1$$

2) $g(\underbrace{ax+b}_{t_1}) = a_1t_1^2 + b_1t_1 + c \to 1$ корень (т.к. $b_1; a_1; c_1$)

$g(\underbrace{cx+d}_{t_2}) = a_1t_2^2 + b_1t_2 + c \to 1$ корень (аналогично)

если $g(ax+b)$, $g(cx+d) \to 1$ решение, при том они должны совпадать, иначе решений у $g(t_1) + g(t_2)$ не будет, а это возможно, при $t_1 = t_2$

$$ax + b = cx + d \Rightarrow$$

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

Это не док.

Ответ: $x = \frac{d-b}{a-c}$, $a \neq c$.

$\frac{-}{+}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Всего пар заводов $\frac{150\cdot151}{2}$.

(−)

В ~~2х~~ каждой четвертке минимум $\cancel{\frac{150}{4}}\cancel{2}$ 2 маршрута.

Минимальное число маршрутов $= \frac{150}{4}\cdot 2 = \frac{150}{2}$

Тогда число пар заводов $= \frac{150\cdot151}{2} : \frac{150}{2} = 151$

Ответ: 151

2. $3x_n = x_0 + \ldots + x_{n-1} = S_n - x_n$

$S_n = 4x_n$

$x_0 + x_1 = S_1 = 4x_1$

$x_0 = 3x_1$

$x_1 = \frac{1}{3}x_0$

$x_0 + x_1 + x_2 = S_2 = 4x_2$

$x_0 + x_1 = 3x_2$

$\frac{4}{3}x_0 = 3x_2$

$x_2 = \frac{1}{3}x_0\cdot\frac{4}{3}$

(+)

$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = S_3 = 4x_3$

$x_0 + x_1 + x_2 = 3x_3$

$\frac{16}{9}x_0 = 3x_3$

$x_3 = \frac{1}{3}x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2$

Последовательность: $x_0,\ \frac{1}{3}x_0,\ \frac{1}{3}x_0\cdot\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\ldots$

то $x_n = \frac{1}{3}x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, где $n = 1, 2, \ldots$

$S_n = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Ответ: $x_n = \frac{1}{3}x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

$S_n = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$

3. Пусть эти числа $a_1 \ldots a_6$

по условию $\frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{a_2+a_3+a_4}{3} = \frac{a_3+a_4+a_5}{3} = \frac{a_4+a_5+a_6}{3}$,

$\frac{a_1+\ldots+a_6}{6} = A \Rightarrow a_1+\ldots+a_6 = 6A$

$a_1+a_2+a_3 = a_2+a_3+a_4 \Rightarrow a_1 = a_4$. Аналогично:

$a_2 = a_5$

$a_3 = a_6$

Последовательность чисел принимает вид

$a_1\ a_2\ a_3\ a_1\ a_2\ a_3$. В каждой тройке одно из чисел

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

равно единице.

$a_1+a_2+a_3+a_1+a_2+a_3=6A$

$a_1+a_2+a_3=3A$

Пусть $a_3=1$

$a_1+a_2=3A-1$

$a_2=3A-1-a_1$

Среднее геометрическое $=\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot a_3}=\sqrt{a_1\cdot a_2}=\sqrt{a_1(3A-1-a_1)}=$

$=\sqrt{-a_1^2+a_1(3A-1)}$

Функция $y=-a_1^2+(3A-1)a_1$ принимает наибольшее значение при $a_1=\frac{3A-1}{2}$

Максимальное значение среднего геометрического равно $\sqrt{-\frac{(3A-1)^2}{4}+\frac{(3A-1)^2}{2}}=\sqrt{\frac{(3A-1)^2}{4}}=\left|\frac{3A-1}{2}\right|$

Ответ: $\left|\frac{3A-1}{2}\right|$

$\mp$

4. $g(x)=ax^2+bx+c=0$

$D=b^2-4ac=0$ $\quad x_1=-\frac{b}{2a}$

$b^2=4ac$

$g(ax+b)+g(cx+d)=a((ax+b)^2+(cx+d)^2)+$

$+b(ax+b+(cx+d))+2c$

$(ax+b)^2+(cx+d)^2=(ax+b+cx+d)^2-2(ax+b)(cx+d)$

$a(ax+b+cx+d)^2+b(ax+b+cx+d)+2(c-$

$-a(ax+b)(cx+d))=0$

$\cancel{b^2}$ $ax+b=m$; $cx+d=n$:

$a(ax+b+\frac{b}{2a})^2+a(cx+d+\frac{b}{2a})^2=0 \quad |:a$

$(m-x_1)^2+(n-x_1)^2=0 \Rightarrow m-x_1=n-x_1=0 \Rightarrow m=n=x_1$

$ax_2+b=cx_2+d=(a-c)x_2=d-b \Rightarrow x_2=\frac{d-b}{a-c}$

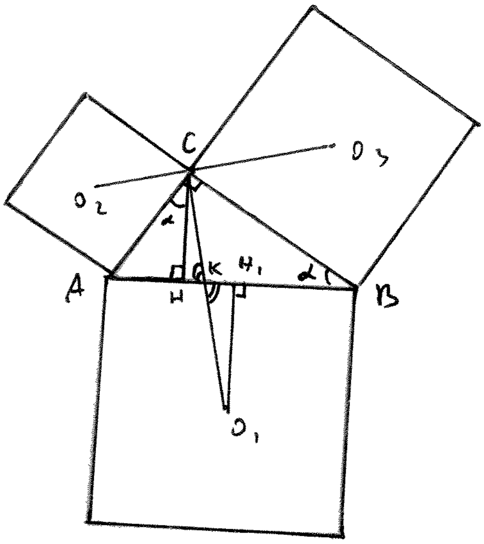
$x_1=ax_2+b=\frac{(d-b)a}{a-c}+b=cx_2+d=\frac{c(d-b)}{a-c}+d$

Ответ: $x=\frac{a(d-b)}{a-c}+b=\frac{c(d-b)}{a-c}+d$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5.



Пусть $AB = c$, то

$AC = (\sin\alpha)c$

$BC = (\cos\alpha)c$

$O_2C = \dfrac{\sin\alpha\cdot c}{\sqrt2}$

$O_3C = \dfrac{\cos\alpha\cdot c}{\sqrt2}$

$O_2O_3 = \dfrac{c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt2}$

$CH = \dfrac{AC\cdot CB}{AB} = \dfrac{\sin 2\alpha\cdot c}{2}$

$O_1H_1 = \dfrac{c}{2}$

$\triangle CHK \sim \triangle O_1H_1K$

$\dfrac{CH}{O_1H_1} = \dfrac{HK}{H_1K}$, $HK + H_1K = c - \dfrac{c}{2} - \sin^2\alpha\cdot c = c\left(\dfrac12 - \sin^2\alpha\right)$

$\dfrac{HK}{H_1K} = \dfrac{\sin2\alpha\cdot\cancel{c}}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{c}} = \sin2\alpha$

$H_1K + H_1K\cdot\sin2\alpha = c\left(\dfrac12 - \sin^2\alpha\right)$

$H_1K = \dfrac{c\left(\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2}\right)}{\sin^2\alpha} = \dfrac{c\cdot\cos2\alpha}{2\sin2\alpha} = \dfrac{c}{2}\cdot ctg\,2\alpha$

$HK = \dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{\cos2\alpha}{\cancel{\sin2\alpha}}\cdot\cancel{\sin2\alpha} = \dfrac{c}{2}\cdot\cos2\alpha$

$CK = \sqrt{(\sin2\alpha)^2\cdot\dfrac{c^2}{4} + \dfrac{c^2}{4}\cdot(\cos2\alpha)^2} = \sqrt{\dfrac{c^2}{4}} = \dfrac{c}{2}$

$O_1K = \sqrt{\left(\dfrac{c}{2}\cdot ctg\,2\alpha\right)^2 + \left(\dfrac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{c^2}{4}\cdot(ctg\,2\alpha+1)} = \dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin2\alpha}$

$CO_1 = \dfrac{c}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sin2\alpha}\right)$ $\alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$

$O_2O_3 = \dfrac{c}{2}\cdot\sqrt2(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$CO_1 \geq O_2O_3$ ~~$(CO_1 = O_2O_3$ при $\alpha = 45^\circ)$~~ $(CO_1 = O_2O_3$ при $\alpha = 45^\circ)$

Длины различаются сильнее всего при $\alpha = 30^\circ$

Ответ: 1 аллель имеет большую длину;

длины различаются сильнее всего при $\alpha=30^\circ$.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭА 23-33

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Если автобусные маршруты есть между всеми заводами, то условие выполняется. +
Предположим тогда, что есть и заводы, которые не соединены между собой. Тогда 2 оставшихся завода в группе из 4 должны быть соединены с каждым из заводов этой пары, т.е. каждый завод должен быть соединен со всеми оставшимися, кроме ~~одного~~ двух (со 147-мью заводами), иначе, если этот завод не соединён с тремя заводами, то эти 4 завода не попадут под условие, т.е. каждый из 150-ти заводов соединён с 147-мью другими, т.е. число пар заводов, соединённых автобусными маршрутами: $\geq \frac{150 \cdot 147}{2} = 147 \cdot 75 = 11025$

Ответ: 11025 пар.

2. $2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n \Rightarrow 3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} \Rightarrow$

$x_n = \frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 + \ldots + \frac{1}{3}x_{n-1}$;

$x_{n-1} = \frac{1}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1 + \ldots + \frac{1}{3}x_{n-2}$ $\Big| \Rightarrow x_n = x_{n-1} + \frac{1}{3}x_{n-1} = \frac{4}{3}x_{n-1}$

+

$x_1 = \frac{1}{3}x_0$;

$x_n = \frac{4}{3}x_{n-1} \Rightarrow$ представленная последовательность, начиная с x_1 является геометрической прогрессией $\Rightarrow$ $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} x_1 \Rightarrow x_n = \frac{1}{3}x_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

$S_n = x_0 + S_{n\,г.пр} = x_0 + \frac{x_1\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{4}{3}-1} = x_0 + \frac{\frac{1}{3}x_0\left(\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{3}} =$

$= x_0\left(1 + \left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right) = x_0\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Ответ: $x_n = \frac{1}{3}x_0 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$; $S_n = x_0\left(\frac{4}{3}\right)^n$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. Пусть в ряду записаны числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, тогда: $\frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{a_2+a_3+a_4}{3} = \frac{a_3+a_4+a_5}{3} = \frac{a_4+a_5+a_6}{3} \Rightarrow$

$a_1+a_2+a_3 = a_2+a_3+a_4 \Rightarrow a_1 = a_4$

$a_2+a_3+a_4 = a_3+a_4+a_5 \Rightarrow a_2 = a_5$

$a_3+a_4+a_5 = a_4+a_5+a_6 \Rightarrow a_3 = a_6$

$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6} = A \Rightarrow \frac{2(a_1+a_2+a_3)}{6} = A \Rightarrow$

$a_1+a_2+a_3 = 3A$

Среднее геометрическое любых трёх соседних чисел равно: $\sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} = b$

пусть $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 + a_3 = 3A-1 \Rightarrow$

b максимально при максимальном $a_2a_3 \Rightarrow$

$a_2 = a_3 = \frac{3A-1}{2} \Rightarrow$

$b = \sqrt[3]{1 \cdot a_2 \cdot a_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2} = \left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Ответ: $\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

+

4. $g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$; корень 1 $\Rightarrow D=0 \Rightarrow$

$b_1^2 - 4a_1c_1 = 0 \Rightarrow b_1^2 = 4a_1c_1 \Rightarrow x = \frac{-b_1}{2a_1}$

$g(ax+b) + g(cx+d)$; 1 корень $\Rightarrow D=0$

$g(ax+b) + g(cx+d) = a_1(ax+b)^2 + b_1(ax+b) + c_1 + a_1(cx+d)^2 + b_1(cx+d) + c_1 = a_1(a^2+c^2)x^2 + (a_1(2ab+2cd) + b_1(a+c))x + 2c_1 \Rightarrow$

Ход решения неоптимален

$4a_1(a^2+c^2) \cdot 2c_1 = (a_1(2ab+2cd) + b_1(a+c))^2$

$2b_1^2(a^2+c^2) = a_1^2(2ab+2cd)^2 + 2a_1b_1(a+c)(2ab+2cd) + b^2(a+c)^2$

$b_1^2(a-c)^2 = a_1^2(2ab+2cd)^2 + 2a_1b_1(a+c)(2ab+2cd) \,\Big|\, \cdot \frac{1}{a_1^2}$

$\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2(a-c)^2 + 2\frac{b_1}{a_1}(a+c)(2ab+2cd) + (2ab+2cd)^2 = 0$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

т.к. корень один =>

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{-2(a+c)(2ab+2cd)}{(a-c)^2}$$

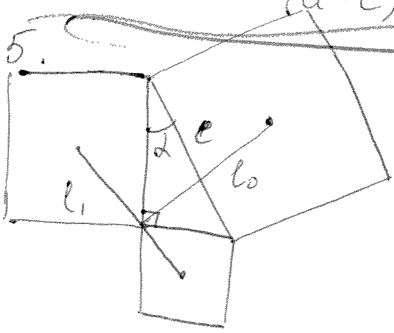
Искомый корень : $x = \frac{-b_1}{2a_1}$ =>

$$x = \frac{-(-2)(a+c)(2ab+2cd)}{2(a-c)^2} = \frac{(a+c)(2ab+2cd)}{\cancel{2}(a-c)^2}$$

Ответ: $\frac{(a+c)(2ab+2cd)}{(a-c)^2}$

+

5.



Пусть c – ~~диаго~~ гипотенуза п/у △ =>

$$l_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2}c(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

l_0 – диагональ вписанного четырёхугольника (вписанного в ту же окр., что и п/у △) =>

$l_0 \cdot c = a \cdot \frac{\sqrt{2}c}{2} + b \cdot \frac{\sqrt{2}c}{2}$??

$l_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}c(\sin\alpha + \cos\alpha)$ => $l_0 = l_1$ =>

обе аллеи третьего этапа равны

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. 1) Допустим есть 2 таких завода, которые не соединены автобусными маршрутами. Тогда при выборе остальных 2-х заводов не будет выполняться условие, т.е. будет только одна пара заводов, между которой ходит автобус => 2) Рассмотрим случай, когда есть завод, не соединенный автобусными маршрутами. Тогда среди остальных 3-х заводов есть 1 завод соединенный друг с 2-мя остальными заводами => Найдем число таких пар $-\frac{149!}{146!\cdot 3!}=\frac{147\cdot 149\cdot 148}{2\cdot 3}=1133.38$ пар

(+) ?

3) Рассмотрим последний случай, который ~~то~~ существует такая пара заводов, ~~не~~ которые соединены только между собой. Тогда остается посчитать кол-во оставшихся пар $-\frac{148!}{146!\cdot 2!}=\frac{147\cdot 148}{2}=10778$ пар.

Других таких пар не будет существовать, т.к. ~~др~~ будут случаи, где среди 4 заводов будет только одна пара.

В остальных случаях (без ограничений) будет больше пар, т.к. остальных ограничений не существует => Наименьшая $10778+1=10779$ пар.

Ответ: 10779 пар.

№2. По условию существует соотношение:

$2x_n=x_0+x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+\cancel{x_n}$, т.е. $3x_n=x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$ при $n=1,2,\ldots$

(+)

Рассм. ~~на~~ случай для $n-1$

$3x_{n-1}=x_0+x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}$, тогда $3x_n=3x_{n-1}+x_{n-1}=4x_{n-1}$ => $x_n=\frac{4}{3}x_{n-1}$, при $n=1,2\ldots$ => $q=\frac{4}{3}$ – это шаг последовательности

Рассмотрим соотношение для $n=1$

$3x_1=x_0$; $x_1=\frac{x_0}{3}$. Так как это последовательность, то $x_1=\frac{x_0}{3}$ должно различаться на шаг последовательности $q=\frac{4}{3}$, но это соотношение не удовлетворяет всем остальным последовательным числам => Не выполняется ~~но~~ при $x_0\neq 0$.

?

Тогда рассмотрим эту последовательность при $x=0$.

Все члены будут равняться 0: $x_0=x_1=\ldots=x_n=0$ =>

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ___________

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭА 23-39

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$

Ответ: Все члены равны 0 и их сумма равна 0.

3. Пусть в ряд записаны числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
Среди них есть число 1. Изобразим этот ряд:

$x_1\ x_2\ 1\ x_3\ x_4\ x_5$. По условию среднее арифм. любых 3 соседних чисел имеет одинаковое значение, т.е. Пусть это значение $= B$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 1 = 3B \\ x_2 + 1 + x_3 = 3B \\ x_4 + x_3 + x_5 = 3B \\ 1 + x_3 + x_1 = 3B \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Приравнивая по очереди уравнения приходим к тому, что $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$, $x_5 = 1$. $\Rightarrow$

$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 1}{6} = A$; $2x_1 + 2x_2 + 2 = 6A$; $x_1 + x_2 + 1 = 3A$.

$x_1 + x_2 = 3A - 1$.

Наибольшее среднее геометрическое 3-х любых соседних чисел будет при наибольшем произведении x_1 и x_2: $\sqrt[3]{1 \cdot x_1 \cdot x_2}$

Пусть $x_1 = \frac{3A-1}{2} + b$, $x_2 = \frac{3A-1}{2} - b \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4} - b^2}$ – среднее геометрическое, где b – разница между x_1 и x_2 $\Rightarrow$ чтобы было наибольшее среднее геометрическое разница между x_1 и x_2 должна быть наименьшей т.е. равняться 0 $\Rightarrow$

$x_1 = x_2 \Rightarrow$ Наибольшее среднее геометрическое: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

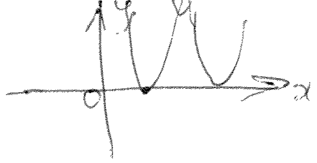
Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$ 1+

4. $g(x) = m^2x^2 + 2mnx + n^2 = (mx+n)^2$ – дан квадратный трехчлен, где $m, n \neq 0$. $x = -\frac{n}{m}$ – единственный корень

$g(ax+b) + g(cx+d)$ тоже имеет ровно один корень.

$g(ax+b)$ – квадратный трехчлен имеет ровно один корень, т.к $g(x)$ имеет один корень $\Rightarrow$ аналогично $g(cx+d)$ имеет 1 корень.

Изобразим их графики на координатной плоскости:



Из графика видно, что их сумма (общий график) будет выше оси OX $\Rightarrow$ не имеет корней, если $ax+b \neq cx+d \Rightarrow ax+b = cx+d$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Значит: $\left[\begin{array}{l} x=ax+b \\ x=cx+d \end{array}\right.$ 1) $x=ax+b$, $x(1-a)=b$

$x=\frac{b}{1-a}$

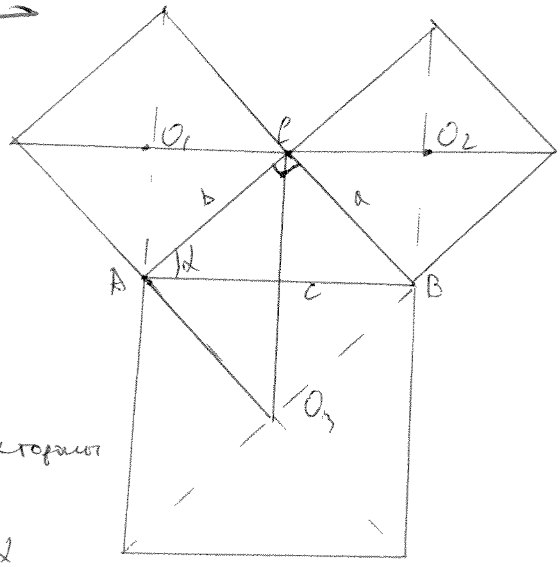
2) $x=cx+d$, $x(1-c)=d$; $x=\frac{d}{1-c}$, где $\frac{bd}{1-c}=\frac{b}{1-a}$, $(a\neq c)$

~~Ответ. $\frac{b}{1-a}$; $\frac{d}{1-c}$~~

5. 1) ΔAO_1C – прямоугольный, р/б

по т. Пифагора $2O_1C^2=AC^2$

$O_1C=\sqrt{\frac{b^2}{2}}=\frac{b}{\sqrt{2}}$



Аналогично BO_2C: $CO_2=\frac{a}{\sqrt{2}}$

O_1, O_2, O_3 – центры квадратов; a, b, c – стороны квадрата ⇒

Длина $O_1O_2=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, где $a=c\cdot\sin\alpha$

2) В ΔACO_3: по т. косинусов: $CO_3^2=AC^2+AO_3^2-2AC\cdot AO_3\cdot\cos(AO_3$

$\angle O_3AC=45°$, т.к. ΔAO_3B – р/б ⇒ $CO_3^2=b^2+\frac{c^2}{2}-2\cdot b\cdot\frac{c}{\sqrt{2}}\cdot\cos(\alpha+45°)=$

$b^2+\frac{c^2}{2}-bc\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)$

3) Сравним длины O_1O_2 и CO_3

$\frac{c\cdot\sin\alpha+b}{\sqrt{2}} \vee \sqrt{b^2+\frac{c^2}{2}-bc\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)}$; Возведем в квадрат.

$\frac{c^2\cdot\sin^2\alpha+2bc\sin\alpha+b^2}{2} \vee b^2+\frac{c^2}{2}-bc(\cos\alpha-\sin\alpha)$; $|\times 2$.

$c^2\cdot\sin^2\alpha\cancel{+2bc\sin\alpha}+b^2 \vee 2b^2+c^2-2bc\cos\alpha\cancel{+2bc\sin\alpha}$; $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ ⇒

$c(c\sin^2\alpha+2b\cos\alpha)\vee b^2+c^2$; $a^2+2b^2\vee b^2+c^2$; $a^2+b^2\vee c^2$ ⇒

по т. Пифагора: $a^2+b^2=c^2$ ⇒ длины $O_1O_2=CO_3$ ⇒

При любом α в $(0°; 90°)$ длины $O_1O_2=CO_3$ ⇒

Ответ: Они равны; они не различаются при изменении α.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2.1) Рассмотрим элементы под номерами (n-1) и n и выведем рекуррентную формулу.

$2x_{n-1} = x_0+x_1+\ldots+x_{n-2}-x_{n-1} \Leftrightarrow x_0+x_1+\ldots+x_{n-2} = 3x_{n-1}$

$2x_n = x_0+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}-x_n \Leftrightarrow 3x_n = x_0+x_1+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}$

Заменим $(x_0+x_1+\ldots+x_{n-2})$ на $3x_{n-1} \Rightarrow 3x_n = 3x_{n-1}+x_{n-1} = 4x_{n-1} \Rightarrow$

$\boxed{x_n = \frac{4}{3}\cdot x_{n-1}}$, т.е. ~~для в~~ искомая последовательность является геометрической с первым членом x_1 и ~~частным~~ делителем $\frac{4}{3}$.

+

2) Запишем формулу для x_1: $2x_1 = x_0 - x_1 \Leftrightarrow \boxed{x_1 = \frac{x_0}{3}}$

3) n-ный член искомой последоват. вычисляется по формуле:

$x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\cdot x_1 = \frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^{n-1}\cdot 3} = \frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^n} \Rightarrow \boxed{x_n = \frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^n}}$, где $n\geq 2, n\in N$

4) $S_n = x_0+x_1+\ldots+x_n = x_0 + S_{геом.n}$

~~$S_{геом.n} = в$~~ $S_{геом.n} = x_1\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n-1}{\frac{4}{3}-1} = \frac{x_0}{\cancel{3}}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n-1}{\cancel{1/3}} = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n - x_0 \Rightarrow$

$S_n = x_0 + S_{геом.n} = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n \cancel{-x_0} \cancel{+x_0} = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n \Rightarrow \boxed{S_n = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n}$

Ответ: $x_1 = \frac{x_0}{3}$; $x_n = \frac{4^{n-1}\cdot x_0}{3^n}$, где $n\in N, n\geq 2$; $S_n = x_0\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

3.1) Пусть это числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \Rightarrow$

$a_1+a_2+a_3 = a_2+a_3+a_4 = a_3+a_4+a_5 = a_4+a_5+a_6$

Рассматривая 1 и 2 часть: $a_1 = a_4$

Рассматривая 2 и 3 часть: $a_2 = a_5$, т.е. 4,5,6 числа повторяют 1,2,3 числа

Рассматривая 3 и 4 часть: $a_3 = a_6$

$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6} = A \Rightarrow a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 2(a_1+a_2+a_3) = 6A \Rightarrow$

$a_1+a_2+a_3 = 3A \Rightarrow \frac{a_1+a_2+a_3}{3} = A$

2) Пусть $a_i + a_k + a_e = 3A$, где $i,k,e = \{1,2,3\}$, $i\neq k\neq e$ и $a_i = 1 \Rightarrow$

$1+a_k+a_e = 3A \Leftrightarrow a_k+a_e = 3A-1$ и $\frac{a_k+a_e}{2} = \frac{3A-1}{2} \Rightarrow$

Среднее арифм. двух чисел, не равных 1 из 1 тройки чисел равно $\frac{3A-1}{2}$

3) ~~Любое среднее геом. включает в себя единицу~~

Любые 3 подряд идущих числа состоят из единицы и двух чисел, равных a_k и $a_e \Rightarrow A_{геом} = \sqrt[3]{1\cdot a_k\cdot a_e}$

По неравенству о средних: $A_{геом} \leq A_{арифм} \Rightarrow A_{геом.макс} = A_{арифм} = A$

Ответ: A

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

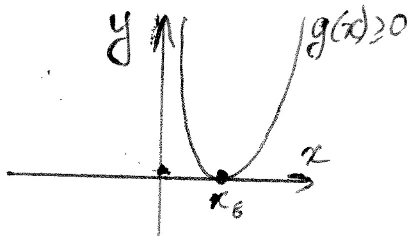
Вариант: ____________

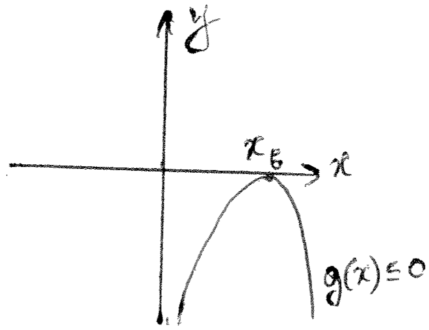
ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭА 23-410

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. 1) Пусть x_1 - корень $g(ax+b)+g(cx+d) \Rightarrow g(ax_1+b)+g(cx_1+d)=0 \Leftrightarrow$
$g(ax_1+b) = -g(cx_1+d)$, т.е. числа $g(ax_1+b)$ и $g(cx_1+d)$ равны по модулю, но имеют разные знаки

2) $g(x)$ имеет 1 корень $\Rightarrow g(x) \geq 0$ или $g(x) \leq 0$





3) Из п. 2 следует, что нет таких чисел (ax_1+b) и (cx_1+d), не равных 0, что $g(ax_1+b) = -g(cx_1+d) \Rightarrow$ ~~$ax_1+b=cx_1+d$~~

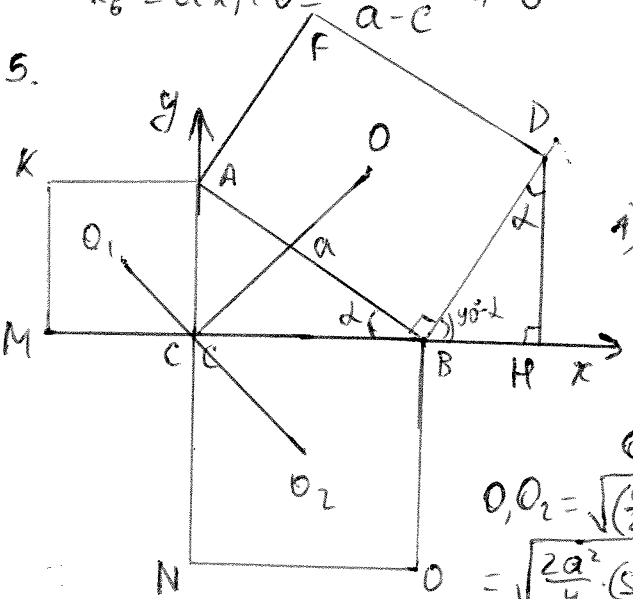
$$\begin{cases} g(ax_1+b)=g(cx_1+d)=0 \\ ax_1+b=cx_1+d=x_в \end{cases}, \text{ где } x_в \text{ - корень } g(x)=0$$

$ax_1+b=cx_1+d \Rightarrow x_1(a-c)=d-b \Rightarrow x_1=\dfrac{d-b}{a-c}$

$x_в = ax_1+b = \dfrac{a(d-b)}{a-c}+b$ Ответ: $\dfrac{a(d-b)}{a-c}+b$.

+

5.



Пусть $AB=a$, $\angle ABC=\alpha$.
Введем сист. координат с центром в C.

1) $AC=a\sin\alpha$, $BC=a\cos\alpha$
O_1 - ~~сер.~~ центр квадрата ACMK $\Rightarrow$
$O_1\left(-\dfrac{a\sin\alpha}{2}; \dfrac{a\sin\alpha}{2}\right)$ (т.к. MC = AC)
O_2 - центр квадрата BONC $\Rightarrow$
$O_2\left(\dfrac{a\cos\alpha}{2}; -\dfrac{a\cos\alpha}{2}\right)$

$O_1O_2=\sqrt{\left(\frac{a}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)^2+\left(\frac{a}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)^2} = \dfrac{a\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt{2}}$

+

2) Опустим из D: $DH \perp x \Rightarrow D(CH; DH)$
$CH = BC+BH$, $\angle ABD=90° \Rightarrow \angle DBH = 90°-\alpha \Rightarrow \angle BDH=\alpha \Rightarrow DH = a\cos\alpha$, $BH = a\sin\alpha$

$D(a(\cos\alpha+\sin\alpha); a\cos\alpha)$, $A(0; a\sin\alpha)$. O - середина AD $\Rightarrow$
$O\left(\dfrac{a(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2}; \dfrac{a(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2}\right) \Rightarrow OC=\sqrt{\frac{2a^2}{4}\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)^2} = \dfrac{a(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$OC = O_1O_2$

Ответ: эти длины равны, при любом $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ разность их длин = 0.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

1) $2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$

$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} \Rightarrow x_n = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}}{3}$

Найдем члены последовательности.

$x_1 = \frac{x_0}{3}$; $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{3} = \frac{x_0 + \frac{x_0}{3}}{3} = \frac{4x_0}{9}$;

$x_3 = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3} = \frac{x_0 + \frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9}}{3} = \frac{16x_0}{27}$; $x_4 = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{64x_0}{81}$

Отсюда видно, что ~~...~~ $x_n = \frac{4^{n-1}x_0}{3^n}$.

+

2) $S_n = x_0 + \underbrace{\frac{x_0}{3} + \frac{4x_0}{9} + \frac{16x_0}{27} + \ldots + \frac{4^{n-1}x_0}{3^n}}_{S_1}$

~~геом. пр~~ Сумма членов геом. прогрессии, в которой $q = \frac{4}{3}$, $m = n-1$, $b_1 = \frac{x_0}{3}$, $b_m = \frac{4^m x_0}{3^{m+1}} = \frac{4^{n-1}x_0}{3^n}$

$S_1 = \frac{b_m \cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{\frac{4^{n-1}}{3^n}x_0 - \frac{x_0}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}}x_0 - x_0 = x_0\left(\frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} - 1\right)$.

Получаем: $S_n = x_0 + S_1 = x_0 + x_0\left(\frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} - 1\right) = x_0 \cdot \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}}$.

Т.к. последовательность начинается с нулевого члена, то $S_n = x_0 \cdot \frac{4^n}{3^n}$.

Ответ: $x_n = \frac{4^{n-1}x_0}{3^n}$; $S_n = x_0 \cdot \frac{4^n}{3^n}$.

№3

Пусть числа равны x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6, и записаны они в том же порядке. Т.к. любые три соседних числа имеют одинак. среднее арифметическое, получаем систему:

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭА 23-83

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} \frac{x_2+x_3+x_4}{3} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} & \Rightarrow x_1 = x_4 \\ \frac{x_2+x_3+x_4}{3} = \frac{x_3+x_4+x_5}{3} & \Rightarrow x_2 = x_5 \\ \frac{x_3+x_4+x_5}{3} = \frac{x_4+x_5+x_6}{3} & \Rightarrow x_3 = x_6 \end{cases}$$

⇒ Ряд чисел примет вид: $x_1\ x_2\ x_3\ x_1\ x_2\ x_3$

Т.к. среди чисел есть единица, то мы видим, что среди них есть две единицы. Т.к. все числа равнозначны, то неважно какое именно из них равно 1. Пусть $x_1 = 1$. Тогда получим: $1\ x_2\ x_3\ 1\ x_2\ x_3$.

Их среднее арифметическое: $\frac{2x_2+2x_3+2}{6} = A$

$\Rightarrow x_2 + x_2 = 3A - 1 \Rightarrow x_3 = 3A - 1 - x_2$.

Среднее геометрическое любых трех соседних.

$G = \sqrt[3]{1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \sqrt[3]{x_2(3A-1-x_2)} = \sqrt[3]{-x_2^2 + x_2(3A-1)}$.

Значение G будет max при $f(x) = -x_2^2 + x_2(3A-1) = max$.

График функции $f(x)$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз $\Rightarrow f_{max} = y$ вершины.

$x_B = -\frac{3A-1}{-2} = \frac{3A-1}{2}$; $y_B = -\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2 + \frac{(3A-1)^2}{2} = \frac{(3A-1)^2}{4}$.

Получаем: $G_{max} = \sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2} = \left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Ответ: $\left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭН 23-83

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$g(ax+b)+g(cx+d)=(ax+b-x_0)^2+(cx+d-x_0)^2$

$(ax+b-x_0)^2+(cx+d-x_0)^2=0$ – имеет 1 корень $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ система: $\begin{cases} ax+b-x_0=0 \\ cx+d-x_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{x_0-b}{a} \\ x=\frac{x_0-d}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_0-b}{a}=\frac{x_0-d}{c}$

$cx_0-bc=ax_0-ad \Rightarrow x_0=\frac{bc-ad}{c-a}$

Ответ: $\frac{bc-ad}{c-a}$

+

№5

Расстояние от центра большого кв-та до прямого угла: $t=h+\frac{c}{2}=\frac{ab}{c}+\frac{c}{2}$ расст. между центрами других квадратов: $p=\frac{b\sqrt{2}}{2}+\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$\frac{ab}{c}+\frac{c}{2} \vee \frac{b\sqrt{2}}{2}+\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\frac{2ab+c^2}{2c} \vee \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} \vee \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2}$

$\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \vee \sqrt{2}(a+b) \quad | : (a+b)>0$

$a+b \vee \sqrt{2a^2+2b^2}$

$a^2+2ab+b^2 \vee 2a^2+2b^2$

$-a^2+2ab-b^2 \vee 0$

$-(a-b)^2 \vee 0$

$-(a-b)^2<0 \Rightarrow$ ~~расст.~~ $t>p$.

Ответ: аллея центра большего квадрата

+

Лист 03 из 03

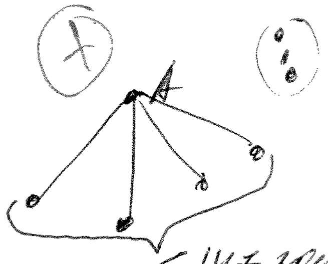
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭА 32-33

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 Докажем, что любой завод соединен автобусными маршрутами не менее чем с 147 остальными заводами:

Допустим это не так, тогда какой-то завод соединен дорогами меньше чем с 147 остальными заводами. Тогда по принципу Дирихле найдутся 3 таких завода, которые не соединены дорогами с каким-то заводом A:



Значит, даже если между собой эти заводы соединены дорогами, то их все (3 завода и A) все равно нельзя разбить на пары, т.к. ~~они не соед~~ ни один из них не соединен дорогой с заводом A. противоречие

Значит ни для одного завода не ~~ра~~ найдется 3 других завода, которые не соединены дорогами с данным заводом.

Т.е. каждый завод не соединен максимум с 2-мя, а значит соединен минимум с ~~всеми~~ 147-ю $(150-1-2=147)$. Если каждый завод соединен минимум с 147 остальными, то минимальное число дорог между заводами: $\frac{147\cdot150}{2}=11025$ Ответ: 11025

№3. Допустим записаны числа:

a, b, c, d, e, f.

Т.к. любые 3 соседние из них имеют одинаковое ср. арифметическое, то:

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{b+c+d}{3} \Rightarrow a=d.$$

(продолжение №3)

$\frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3} \Rightarrow b=e$

$\frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3} \Rightarrow c=f.$

Значит в данных чисел записаны вот так: a, b, c, a, b, e.

Значит любые 3 соседних числа будут иметь одинаковое среднее геометрическое.

т.е. ср. геомет. $= \sqrt[3]{abe}$

т.к. среди чисел есть единица, то, не теряя общности рассуждения, предположим, что $e=1$.

$\Rightarrow$ ср. геометр. $= \sqrt[3]{ab}$

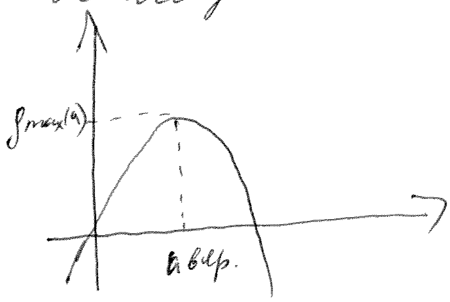
по усл-ю: $\frac{a+b+e+a+b+e}{6} = A \Rightarrow \frac{a+b+e}{3} = A.$

т.к. $e=1$, то $\frac{a+b+1}{3} = A \Rightarrow a+b=3A-1 \Rightarrow b=(3A-1-a)$

ср. геометр. $= \sqrt[3]{a(3A-1-a)}$; ~~т.к.~~

пусть $f(a) = \sqrt[3]{a(3A-1-a)}$, т.к. кубический корень не меняет возрастание и убывание функции, то $f_{max}(a) = \sqrt[3]{g_{max}(a)}$, где $g(a) = a(3A-1-a)$

$g(a) = -a^2 + a(3A-1)$, график $g(a)$ примерно выглядит вот так (т.к. при a^2 коэф. <0)



$a_{вер.} = \frac{-(3A-1)}{-2} = \frac{3A-1}{2}$

$g_{max}(a_{вер.}) = -\frac{(3A-1)^2}{4} + \frac{(3A-1)^2}{2} = \frac{(3A-1)^2}{4}$

$\Rightarrow f_{max}(a) = \sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

т.е. максимальное значение среднего геометрического $= \left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

Ответ: максимальное среднее геометрическое $= \left(\frac{3A-1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4. пусть $g(x)=(px-t)^2$, где его корень $x_0=\frac{t}{p}$.

тогда: $g(ax+b)+g(cx+d)=(p(ax+b)-t)^2+(p(cx+d)-t)^2=0$.

~~т.к. 1) $a=0$, тогда~~

заметим, что $(p(ax+b)-t)^2\geq 0$

$(p(cx+d)-t)^2\geq 0$, значит

$(p(ax+b)-t)^2+(p(cx+d)-t)^2=0$ только при

$\begin{cases} p(ax+b)-t=0 \\ p(cx+d)-t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} ax+b=\frac{t}{p} \\ cx+d=\frac{t}{p} \end{cases}$

1) если $a=0$, то

$x_0=b=\frac{t}{p} \Rightarrow cx+d=\frac{t}{p}=b \Rightarrow cx=b-d$

$x=\frac{b-d}{c}$ $(c\neq 0$, т.к. $a\neq c)$

2) если $c=0$, то

$x_0=\frac{t}{p}=d \Rightarrow x=\frac{d-b}{a}$ $(a\neq 0$, т.к. $a\neq c)$

3) т.к. $a\neq c$, то не может быть такого случая, что $a=c=0$. Значит $a\neq c\neq 0$.

$\begin{cases} ax+b=\frac{t}{p} \\ cx+d=\frac{t}{p} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax=\frac{t}{p}-b \\ cx=\frac{t}{p}-d \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{t-bp}{ap} \\ x=\frac{t-dp}{pc} \end{cases}$

$\frac{t-bp}{a\cancel{p}}=\frac{t-dp}{\cancel{p}c} \Rightarrow tc-bpc=at-dap$

$tc-at=bpc-dpa$

$t(c-a)=p(bc-ad)$

$\frac{t}{p}=\frac{(bc-ad)}{c-a}$ (т.к. $c\neq a$) $\Rightarrow x_0=\frac{bc-ad}{c-a}$.

Ответ: 1) $a=0$, то $x_0=b$; 2) $c=0$ $x_0=d$

3) $a\neq 0$ $c\neq 0$ $x_0=\frac{bc-ad}{c-a}$. — это верно

±

№2. $2x_n=x_0+\ldots+x_{n-1}-x_n \Rightarrow$

$3x_n=x_0+\ldots+x_{n-1}=S_{n-1}$.

$4x_n=x_0+\ldots+x_{n-1}+x_n=S_n$.

Докажем, что $x_n=\frac{4^{n-1}}{3^n}x_0$ по индукции:

(продолжение №2)

База: т.к. по усл-ю что выполн. для $n \in N$, то при $n=1$:

$$3x_1 = x_0 \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{3} = \frac{4^{1-1}}{3^1} x_0 \text{ чтд}$$

переход: допустим, что ур-е выполняется для всех ~~x_k~~, до k-го x, докажем что и для x_{k+1}:

$x_k = \frac{4^{k-1}}{3^k} x_0$; пользуясь условием для любого x_n: $3x_n = S_{n-1}$.

$4x_n = S_n$. (+)

тогда: $\left.\begin{array}{l} 3x_{k+1} = S_k \\ 4x_k = S_k \end{array}\right\} \Rightarrow 3x_{k+1} = 4x_k$.

$$3x_{k+1} = 4 \cdot \frac{4^{k-1}}{3^k} \cdot x_0.$$

$$x_{k+1} = \frac{4^{(k+1)-1}}{3^{k+1}} \cdot x_0 \text{ чтд.}$$

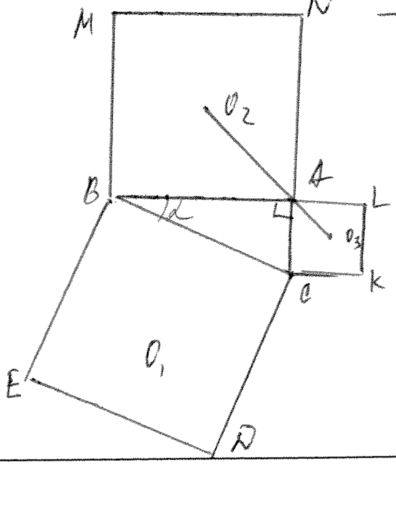
т.е. каждый член x_n такой последовательности имеет вид:

$$x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n} x_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{x_0}{4}.$$

тогда $S_n = 4x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \frac{x_0}{4} \cdot 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot x_0$.

Ответ: $x_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{x_0}{4}$; $S_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot x_0$.

№5 Решение.



Дано: $\angle\alpha$.
ΔABC – прямоуг.
$BCDE$, $ACKL$, $ABMN$ – квадраты.
O_1, O_3, O_2 – центры соотв. квадратов $BCDE$, $ACKL$, $ABMN$.

Найти: AO_1 ? O_2O_3

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

не теряя общности рассуждения пусть $\angle ABC = \alpha$, $BC = a \Rightarrow$

$AB = a\cos\alpha$

$AC = a\sin\alpha$

$O_2O_3 = O_2A + AO_3$.

O_2 - центр $MNAB \Rightarrow O_2A = \frac{1}{2}MA$, MA диагональ квадрата со стороной $a\cos\alpha \Rightarrow MA = \sqrt{2}\,a\cos\alpha$. $\Rightarrow O_2A = \frac{\sqrt{2}}{2}a\cos\alpha$; аналогично:

O_3 - центр $ACKL \Rightarrow O_3A = \frac{1}{2}AK$, AK - диаг. квадрата со стороной $a\sin\alpha \Rightarrow AK = \sqrt{2}\,a\sin\alpha \Rightarrow$ $O_3A = \frac{\sqrt{2}}{2}a\sin\alpha$. $\Rightarrow O_2O_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}a(\sin\alpha + \cos\alpha)$

Рассмотрим четырехугольник ABO_1C:

$\angle BAC$ - прямой по усл, $\angle BO_1C = 90°$ т.к. O_1 - т. пересеч. диагоналей BD и EC в квадрате $BCDE$. $\Rightarrow$ вокруг ABO_1C можно описать окружность $\Rightarrow$ по т. Птолемея:

$AO_1 \cdot BC = O_1C \cdot AB + BO_1 \cdot AC$ (произв. диагон. впис. четырехуг-ка равно сумме произв-й противолежащих сторон)

~~$BO_1 = \frac{1}{2}BD$~~ т.к. $BCDE$ - квадрат и O_1 - центр, то $BO_1 = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}EC = O_1C$

BD и EC - равные диагонали в квадрате со стороной a. $\Rightarrow BD = EC = \sqrt{2}a$. $\Rightarrow BO_1 = O_1C = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. $\Rightarrow$

$AO_1 \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot a\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot a\cos\alpha$ (т.к. очевидно $a \neq 0$), то

$AO_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}a(\sin\alpha + \cos\alpha) = O_2O_3$. значит $AO_1 = O_2O_3$ и их длины ~~друг~~ равны при любом угле α.

<u>Ответ:</u> $AO_1 = O_2O_3$; ~~их длин~~ разница их длин не зависит от угла α.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭА 32-45

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

1) Поскольку среди каждых 4 заводов есть две пары, между которыми есть сообщение, то каждый из заводов соединён автобусным маршрутом хотя бы со 147 другими заводами. Иначе, в четвёрке, включающей завод и другие три завода, с которыми он не соединён, условие не выполняется.

2) Рассмотрим граф, вершинами которого являются заводы, рёбра его соединяют те вершины, которые не имеют сообщения друг между другом. Из 1) следует, что степень каждой вершины не больше 2. Тогда условие задачи эквивалентно следующему: среди любых 4 вершин есть две пары, не соединённые рёбрами, или каждую четвёрку вершин можно разбить на две пары, не соединённые рёбрами.

(+)

Занумеруем вершины графа $A_1, A_2 \ldots A_{150}$. Соединим рёбрами пары вершин ~~A_1 и A_2, A_2 и A_3~~, A_i и A_{i+1}, где $i = [1, 2 \ldots 149]$, и пару A_{150} и A_1. Тогда степень каждой вершины максимально возможна (более 150 рёбер быть не может). Докажем, что этот граф удовлетворяет условию. Действительно, какую четвёрку рёбер мы бы не взяли, каждая из вершин соединена не более, чем с 2. Если есть две „соседние" вершины (A_i и A_{i+1}), то сопоставим им в пары две другие вершины, среди которых нет вершины, соединённой сразу с 2 этими вершинами (по построению графа). Если соседних „вершин нет, то возможно рандомное разбиение. Что и требовалось доказать)

3) Таким образом, кол-во автобусных маршрутов равно $\frac{147 \cdot 150}{2} = 11025$ (равно кол-ву пар.

Ответ: 11025

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$2x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} - x_n$

$3x_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-2} + x_{n-1}$ $\quad \Big\} \; x_1 = \frac{x_0}{3}$

$\ldots = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-2}$

(+)

$3x_n = 4x_{n-1}$

$x_n = \frac{4}{3} x_{n-1}$

$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{4}{3}$, значит, данная последовательность (не считая x_0) является геометрической с первым членом $b = x_1 = \frac{x_0}{3}$ и знаменателем $q = \frac{4}{3}$, тогда

$x_n = bq^{n-1} = \frac{4^{n-1} x_0}{3^n}$

$S_n = \underbrace{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}}_{3x_n} + x_n = 4x_n = \frac{4^n}{3^n} x_0.$

Ответ: $x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n} x_0$; $S_n = \frac{4^n}{3^n} x_0$.

№3.

Пусть в ряд записаны числа a, b, c, d, e, f.

По условию $\frac{a+b+c}{3} = \frac{b+c+d}{3}$, значит, $a = d$. Аналогично из $\frac{b+c+d}{3} = \frac{c+d+e}{3}$ и $\frac{c+d+e}{3} = \frac{d+e+f}{3}$ $b = e$, $c = f$, то есть в ряд записаны числа

a, b, c, a, b, c. Заметим, что в таком случае равны и средние геометрические каждых трёх соседних чисел. $\frac{a+b+c+a+b+c}{6} = A$, значит, $\frac{a+b+c}{3} = A$.

Из неравенства о средних:

$A = \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. 1) Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b = c$. Т.к. среди чисел есть 1, то $a = b = c = A = \sqrt[3]{abc} = 1$.

2) Пусть $A \neq 1$. Не теряя общности, пусть $c = 1$,

$b = 3A - a - 1$ (из $\frac{a+b+c}{3} = A$), $a > a$, тогда

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{3Aa-a^2-a} = \sqrt[3]{f(a)}$

$f(a) = 3Aa-a^2-a$. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вниз, значит, максимальное значение функция принимает в вершине. $a_0 = \frac{-(3A-1)}{-2} = \frac{3A-1}{2}$

$f(a_0) = -\frac{(3A-1)^2}{4} + \frac{(3A-1)(3A-1)}{2} = (3A-1)^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{(3A-1)^2}{4}$

Таким образом, максимальное значение среднего геометрического любых трёх соседних чисел равно $\sqrt[3]{f(a_0)} = \sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$ (при $A=1$ тоже верно)

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$ +

№4. Поскольку $g(x)$ – квадратный трёхчлен, имеющий один корень, то $g(x) = (x-x_0)^2 = x^2-2xx_0+x_0^2$.

$g(ax+b) = (ax+b)^2 - 2(ax+b)x_0 + x_0^2$

$+$

$g(cx+d) = (cx+d)^2 - 2(cx+d)x_0 + x_0^2$

$x^2(a^2+c^2) + x(2ab+2cd-2ax_0-2cx_0) + b^2+d^2-2bx_0-2dx_0+2x_0^2$

$(a^2+c^2)x^2 + 2(a(b-x_0)+c(d-x_0))x + (b-x_0)^2+(d-x_0)^2 = 0$

Полученное уравнение также имеет один корень, значит, дискриминант равен 0.

$\frac{D}{2} = (a(b-x_0)+c(d-x_0))^2 - (a^2+c^2)((b-x_0)^2+(d-x_0)^2) =$

$a^2(b-x_0)^2 + 2ac(b-x_0)(d-x_0) + c^2(d-x_0)^2 - a^2(b-x_0)^2 -$

$- a^2(d-x_0)^2 - c^2(b-x_0)^2 - c(d-x_0)^2 = -(a(d-x_0)-c(b-x_0))^2 = 0$

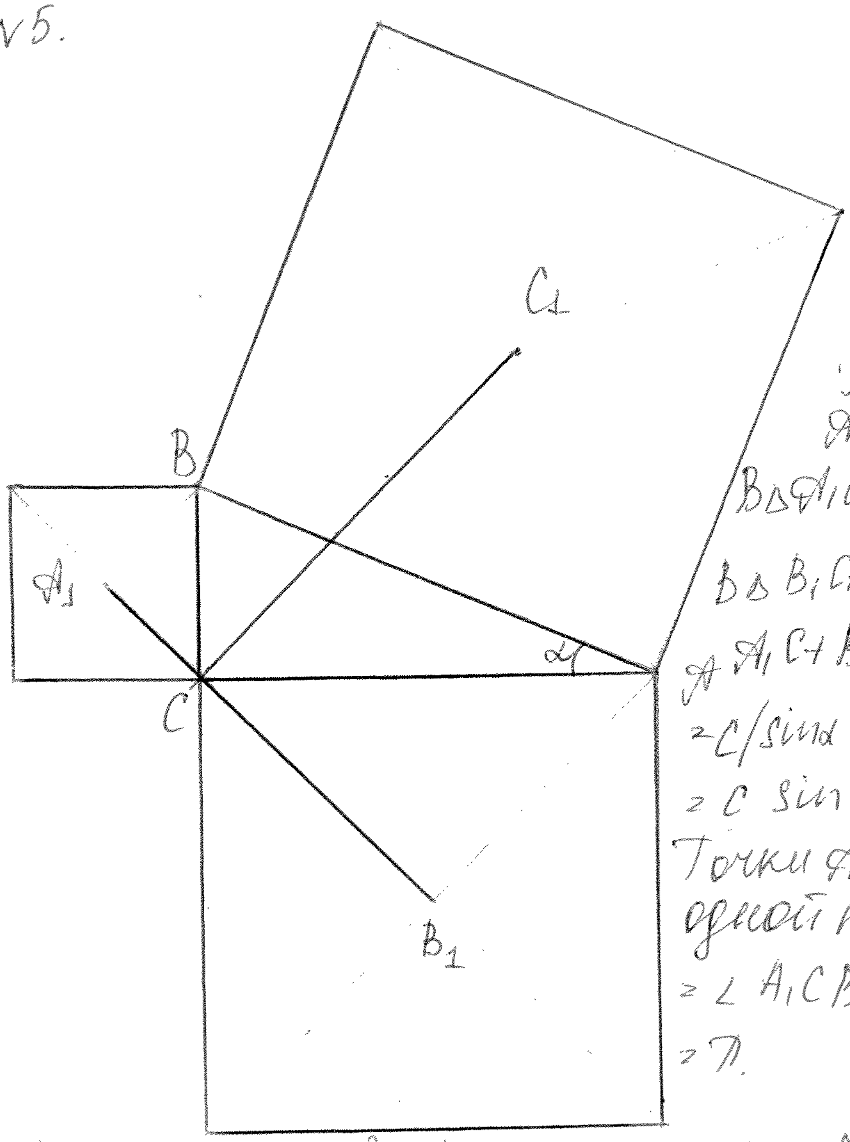
$a(d-x_0) - c(b-x_0) = 0$

$ad - bc = ax_0 - cx_0$. Т.к. $a \neq c$, то

$x_0 = \frac{ad-bc}{a-c}$

Ответ: $x_0 = \frac{ad-bc}{a-c}$ +

№5.



Один из углов $\triangle ABC$ равен α, пусть это будет меньший угол $\angle CAB$

Пусть $AB = c$, тогда $AC = c\cos\alpha$, $BC = c\sin\alpha$.

В $\triangle A_1CB$: $A_1C = \frac{BC}{\sqrt2} = \frac{1}{\sqrt2}\sin\alpha\cdot c$

В $\triangle B_1CA$: $B_1C = \frac{AC}{\sqrt2} = \frac{1}{\sqrt2}\cos\alpha\cdot c$

$A_1C + B_1C = c\left(\frac{1}{\sqrt2}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt2}\cos\alpha\right) = c\left(\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha\right) = c\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = A_1B_1$

Точки A_1, C, B_1 лежат на одной прямой, т.к. $\angle A_1CB_1 = \angle A_1CB + \angle BCA + \angle ACB_1 = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} = \pi$.

По неравенству Птолемея для четырёхугольника $BCAC_1$:

для любого?

$CC_1\cdot BA \le BC\cdot C_1A + BC_1\cdot AC$

$CC_1\cdot c \le \frac{c^2}{\sqrt2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$CC_1 \le c\left(\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha\right) = c\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = A_1B_1$,

т.е. $CC_1 \le A_1B_1$ (равенство достигается при $\alpha = 45°$)

Ответ: $CC_1 \le A_1B_1$.

+

Задача №1.

Пронумеруем заводы от 1 до 150. Предположим, какое наименьшее кол-во маршрутов может выходить из каждого города. Рассмотрим на пару 1. ~~Из~~ Среди оставшихся 149 выберем ~~где~~ два, с которыми 1 не соединен. Не теряя общности, считаем, что это 2 и 3 (если же таких городов нет, то первый ~~завод~~ завод соединен со 149 заводами). Заметим, что 3 и 2 соединены маршрутом, иначе бы не выполнялось условие задачи. Тогда в эту тройку 1, 2, 3 будем поочередно помещать оставшиеся заводы с 4 по 150. Тогда для выполнения условия задачи необходимо, чтобы 1 был соединен с каждым из 4 по 150. Тогда из 1 выходит как минимум 147 маршрутов. Т.к. вместо 1 может быть любой другой ~~город~~ завод, то из каждого ~~города~~ завода выходит 147 маршрутов. Т.к. один маршрут соединяет 2 завода, то всего их $\frac{150\cdot 147}{2} = 11025$.

Пример: расположим заводы по кругу и соединим каждый со всеми кроме двух соседних.

Ответ: 11025 – наим.?

Задача №4

Т.к. $g(x)$ не имеет корней, то ее график может выглядеть одним из след. образов.

Во всяком случае все значения $g(x)$ либо >0, либо одного знака, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} g(x)\ge 0 \\ g(x)\le 0 \end{array}\right.$$ на всем промежутке при $x\in(-\infty, +\infty)$.

Пусть ветви ~~параболы~~ параболы направлены вверх, т.е. коэффициент при старшем члене $g(x)$ больше 0.

Тогда $g(ax+b)\ge 0$ и $g(cx+d)\ge 0 \Rightarrow$

$g(ax+b)+g(cx+d)\ge 0$, а т.к. $g(ax+b)+g(cx+d)=0$, то это только в случае, если $g(ax+b)=0$ и $g(cx+d)=0$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭА 32-76

Мы знаем, что $f(x)=0$, только при одном единственном x. Значит $ax+b=cx+d$

$ax-cx=d-b$

$x=\frac{d-b}{a-c}$

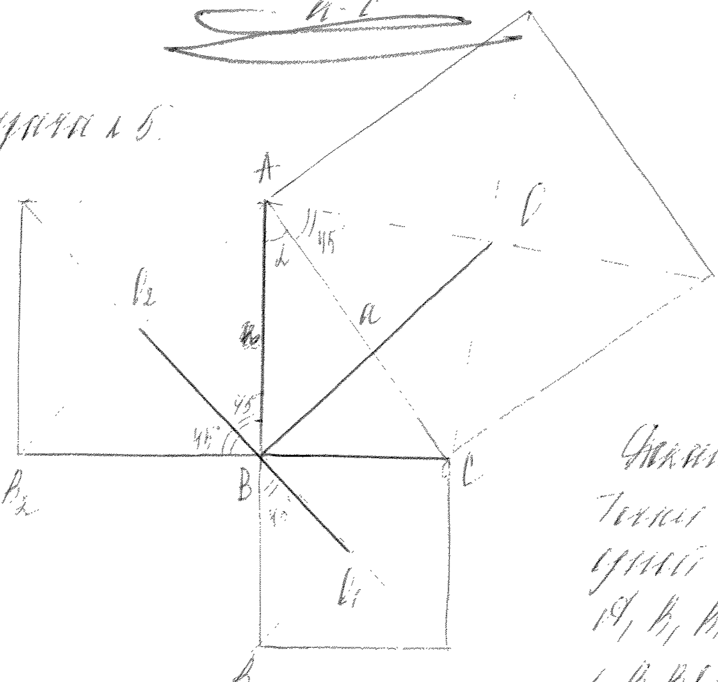
Этого мало!

7

В первом случае $g(x)\le 0$ на всей прямой при $x\in(-\infty;+\infty)$ аналогичные рассуждения.

Ответ: $x=\frac{d-b}{a-c}$.

Задача №5.



Пусть $\angle BAC=\alpha$ и $AC=a$ $\Rightarrow BC=a\cdot\sin\alpha$, $AB=a\cos\alpha$.

Построим т. C_1 и т. C_2 (C_1, C_2 - центры квадратов, построенных на катетах).

Докажем, что $B\in C_2C_1$.

Точки B_2, B, C лежат на одной прямой и точки A, B, B_1.

$\angle A_1BC_1=45^\circ$ и $\angle ABC_2=45^\circ$ (угол между диагональю и стороной в квадрате). Значит, C_1, B, C_2 лежат на одной прямой.

$C_1B=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt2}$ ($\triangle BCC_1$ - прямоуг. $BC=a\sin\alpha$, $\angle C_1BC=45^\circ$)

$C_2B=\frac{a\cos\alpha}{\sqrt2}$ ($\triangle AC_2B$ - прямоуг. $AB=a\cos\alpha$, $\angle C_2AB=45^\circ$)

$C_1C_2=\frac{a(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sqrt2}=a\sqrt{\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{2}}=a\sqrt{\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{2}}=a\sqrt{0{,}5+\sin\alpha\cos\alpha}$

$AO=\frac{a}{\sqrt2}$ ($\triangle AOC$ - прямоуг. $AC=a$, $\angle CAC=45^\circ$).

По т. косинусов.

$BO^2=a^2\cos^2\alpha+\frac{a^2}{2}-\sqrt2\cdot a^2\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45^\circ)=$

$=a^2(\cos^2\alpha+0{,}5-\sqrt2\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45^\circ))$

$BO=a\sqrt{\cos^2\alpha+0{,}5-\sqrt2\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+45^\circ)}=$

$=a\sqrt{\cos^2\alpha+0{,}5-\sqrt2\cos\alpha\cdot(\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt2}{2}-\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt2}{2})}=a\sqrt{0{,}5+\cos\alpha\sin\alpha}$

Вариант: 7111

ЭА 32-76

$4l_2 = a\sqrt{45+\dots}$ [illegible]
$l_1 = a\sqrt{45+\dots}$ [illegible] $\Rightarrow l_1 l_2 = l_1$ [illegible]

Значит, длины третьих этапов имеют одинаковую длину. При любом x они будут одинаковы.

Ответ: длины третьих этапов имеют одинаковую длину. Их длины не различаются при любом x.

Задача №3

Пусть числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Т.к. среднее трёх соседних чисел имеет одинаковое среднее арифметическое, то:

$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \frac{a_2+a_3+a_4}{3} = \frac{a_3+a_4+a_5}{3} = \frac{a_4+a_5+a_6}{3}$ Отсюда:

$a_1 = a_4 \quad a_5 = a_2 \quad a_3 = a_6$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 6A \Rightarrow a_1+a_2+a_3 = 3A$

Заметим, что все средние геометрические любых трёх последовательных чисел равны (т.к. $a_1 = a_4$, $a_2 = a_5$, $a_3 = a_6$).

$\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = \sqrt[3]{a_2 a_3 a_4} = \sqrt[3]{a_3 a_4 a_5} = \sqrt[3]{a_4 a_5 a_6}$.

По неравенству о средних мы знаем, что среднее арифметическое больше или равно среднего геометрического значения:

$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} \Rightarrow$ чтобы $\sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ был максимальным, нужно чтобы $\frac{a_1+a_2+a_3}{3} = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} = A$. Заметим, что равенство возможно, когда $a_1 = a_2 = a_3$. А т.к. одно из чисел 1 $\Rightarrow$ все числа равны 1 $\Rightarrow A = 1$.

~~Ответ: 1~~

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭА 32-76

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №1 (продолжение)

$a_1+a_2+a_3=3A$ Мы знаем, что одно из чисел равно 1. Пусть $a_3=1$ (какое из чисел неважно, т.к. это не влияет на их расположение) тогда

$a_1+a_2=3A-1$.

По нер-ву о средних

$\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{3A-1}{2}\geq\sqrt[2]{a_1a_2}\Rightarrow\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2\geq a_1a_2$ Домножим

обе части на a_3 $(a_3=1)$: $\frac{(3A-1)^2}{4}\geq a_1a_2a_3\Rightarrow$

$\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}\geq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$, а $\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ – среднее геометрическое.

Значит ~~ее максимальное~~ значение $\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$

Ответ: $\sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2}$ +

Задача №2

$2x_n=x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}-x_n\Rightarrow 3x_n=x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}$

$x_1=\frac{x_0}{3}=\frac{x_0(3+1)^0}{3^1}$ (+)

$x_2=\frac{x_1+x_0}{3}=\frac{3x_0+x_0}{3^2}=\frac{(3+1)^1x_0}{3^2}$

$x_3=\frac{x_0+x_1+x_2}{3}=\frac{3^2x_0+3x_0+3x_0+x_0}{3^3}=\frac{3^2x_0+2\cdot3x_0+x_0}{3^3}=\frac{x_0(3+1)^2}{3^3}$

$x_4=\frac{x_0+x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{3^3x_0+3^2x_0+3^2x_0+3x_0+3^2x_0+3x_0+3x_0+x_0}{3^4}=$

$=\frac{3^3x_0+3\cdot3^2x_0+3x_0+x_0}{3^4}=\frac{x_0(3+1)^3}{3^4}$

Значит $x_n=\frac{x_0(3+1)^{n-1}}{3^n}=\frac{4^{n-1}x_0}{3^n}$

Докажем это:

$3x_{n+1}=x_1+\ldots+x_n$ $3x_n=x_1+\ldots x_{n-1}$

$3x_{n+1}-3x_n=x_n$ ~~следует отсюда~~ что $3x_{n+1}=4x_n$

По нашей формуле: $3\cdot x_{n+1}=\frac{4^nx_0}{3^n}$ $4x_n=\frac{4^{n}x_0}{3^n}\Rightarrow$

$\frac{4^nx_0}{3^n}=\frac{4^nx_0}{3^n}$ чтд.

По усл. $3x_n=x_0+\ldots+x_{n-1}=S_{n-1}\Rightarrow S_n=3x_{n+1}=3\cdot\frac{4^nx_0}{3^{n+1}}=\frac{4^nx_0}{3^n}$

Ответ: $x_n=\frac{4^{n-1}x_0}{3^n}$ $S_n=\frac{4^nx_0}{3^n}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$3x_n = x_0 + x_1 + .. + x_{n-1}$

$x_n = \frac{x_0 + x_1 + ... + x_{n-1}}{3}$

$x_1 = \frac{x_0}{3}$; $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{3} = \frac{4}{9}x_0$; $x_3 = \frac{x_0 + x_1 + x_2}{3} = \frac{16}{27}x_0$

$x_4 = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{64}{81}x_0$ и т.д. (+)

$\Rightarrow x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n}x_0$

$x_n = \frac{4}{3}x_{n-1}$, $n \geq 2$ геометр. прогрессия $q = \frac{4}{3}$

$S_n = x_0 + x_1 + . + x_n = x_0 + \underbrace{(x_1 + x_2 + .. + x_n)}_{\text{геом прогр.}} = x_0 + \frac{x_1(\frac{4}{3}^n - 1)}{\frac{4}{3} - 1} =$

$= x_0 + \frac{\frac{x_0}{3}((\frac{4}{3})^n - 1)}{\frac{1}{3}} = x_0(1 + (\frac{4}{3})^n - 1) = x_0(\frac{4}{3})^n$

Ответ: $x_n = (\frac{4}{3})^n \cdot \frac{x_0}{4}$; $S_n = x_0 \cdot (\frac{4}{3})^n$

№3 Т.к. ср. арифм. всех чисел равно $A \Rightarrow$ сумма всех чисел $= 6A$

Т.к. ср. арифм. $\forall$ 3 чисел равны $\Rightarrow$

$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{x_4 + x_5 + x_6}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 = 3A$

$x_2 + x_3 + x_4 = 3A \Rightarrow x_4 = x_1$

$x_3 + x_4 + x_5 = 3A \Rightarrow x_5 = x_2$ $\Rightarrow x_3 = x_6$

$\Rightarrow a, b, c, a, b, c$

ср. геометр. $\forall$ 3 соседних чисел равно $K = \sqrt[3]{abc}$

т.к. среди них есть 1 и сумма $= 3A \Rightarrow K = \sqrt[3]{1 \cdot b(3A - b - 1)} =$

$= \sqrt[3]{3Ab - b^2 - b} = \sqrt[3]{-b^2 + (3A-1)b} \to max$

$b_{max} = \frac{1 - 3A}{-2} = \frac{3A - 1}{2}$

$K_{max} = \sqrt[3]{-(\frac{3A-1}{2})^2 + (3A-1)(\frac{3A-1}{2})} =$

$= \sqrt[3]{(3A-1)^2(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2})} = \sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

Ответ: $K_{max} = \sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$g(x)=(x-x_0)^2$

$g(ax+b)+g(cx+d)=(ax+b-x_0)^2+(cx+d-x_0)^2$

По условию $(ax+b-x_0)^2+(cx+d-x_0)^2=0$ имеет один корень

$\Rightarrow$ система $\begin{cases} ax+b-x_0=0 \\ cx+d-x_0=0 \end{cases}$ имеет одно решение

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{x_0-b}{a} \\ x=\frac{x_0-d}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{x_0-b}{a}=\frac{x_0-d}{c}$

$cx_0-bc=ax_0-ad$

$(c-a)x_0=bc-ad$

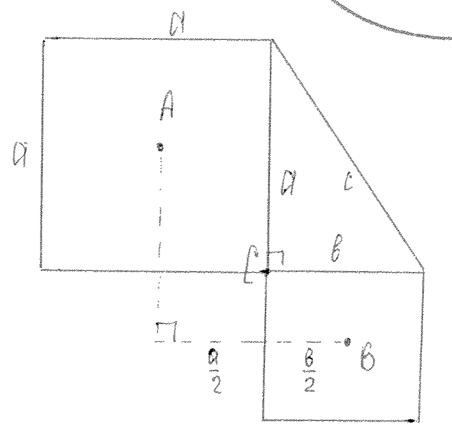
$x_0=\frac{bc-ad}{c-a}$

Ответ: $x_0=\frac{bc-ad}{c-a}$

+

№5

1)

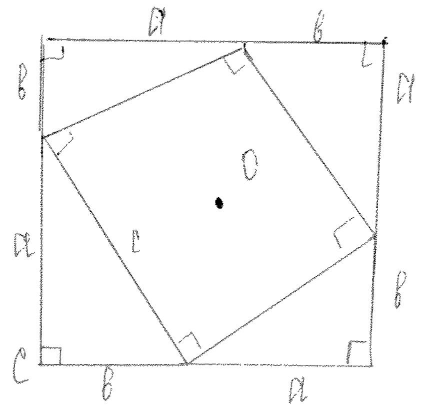


$AB^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

$AB=\frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{2}$

+

2)



$2OC=(a+b)\cdot\sqrt{2}$

$OC=\frac{(a+b)}{2}\cdot\sqrt{2}$

$\Rightarrow AB=OC=\frac{a+b}{2}\cdot\sqrt{2}$

Ответ: аллеи третьего этапа равны всегда, независимо от угла α.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Рассмотрим ∀ 4 завода

$\underbrace{X_1 \quad X_2}_{\text{соединены}} \qquad \underbrace{X_3 \quad X_4}$

Если добавить пятый завод, то

$\underbrace{X_1 \quad X_2} \quad \underbrace{X_3 \quad X_5}$

или $\underbrace{X_1 \quad X_2} \quad \underbrace{X_4 \quad X_5}$

или $\underbrace{X_3 \quad X_4} \quad \underbrace{X_2 \quad X_5}$

или $\underbrace{X_3 \quad X_4} \quad \underbrace{X_1 \quad X_5}$

+

Получилось, что каждый из четырех выбранных заводов соединён с пятым.

Аналогично, каждый завод соединен с остальными

Получается

$$\left\{\begin{array}{ll} 1\text{-й} & 149 \text{ пар} \\ 2\text{-й} & 148 \text{ пар} \\ \ldots & \\ 149\text{-й} & 1 \text{ пара} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{всего } \frac{149+1}{2}\cdot 149 = \frac{150}{2}\cdot 149 = 75\cdot 149 = 11175 \text{ пар}$$

Ответ: 11175

№1.

$\text{I} = x$

$\text{II} = 4x$

$\text{III} = \frac{4x+22}{5}$

$\frac{4x+22}{5} = \left(\frac{4}{5}x + 4\frac{2}{5}\right)$ - установок III типа

$\left(x + 4x + \frac{4}{5}x + 4\frac{2}{5}\right) > 100$

$\left(5\frac{4}{5}x + 4\frac{2}{5}\right) > 100$

Поскольку число установок целое, то x должен быть таким, что $(5\frac{4}{5}x)$ будет смешанной дробью с „3" в числителе. Значит нужно, числитель $(1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5})$ и 5 в знаменателе. Значит нужно, чтобы $\frac{(4 \cdot x)}{5}$ давало в остатке 3, такое возможно, если в $(4 \cdot x)$ последняя цифра „3" или „8" $(5+3=8)$, но „3" не может быть, так как $(4 \cdot x)$ может быть только чётным. Чтобы в $(4 \cdot x)$ последняя цифра была „8", нужно чтобы последняя цифра „x" была „2" $(2 \cdot 4 = 8)$ или „7" $(7 \cdot 4 = 28)$. Если $x = 7$, то ... Минимальное подходящее число, при котором $\left(5\frac{4}{5}x + 4\frac{2}{5}\right) > 100$ - это „22". $(5\frac{4}{5} \cdot 22 + 4\frac{2}{5} = 110 + 17\frac{3}{5} + 4\frac{2}{5} = 132)$ $132 > 100$. Тогда установок первого типа: „22", второго типа: $(4 \cdot 22 = 88)$, установок третьего типа: $\left(\frac{4 \cdot 22 + 22}{5} = 22\right)$, $(22; 22)$.

Ответ: 22 установки I типа, 88 установок II типа и 22 установки III типа.

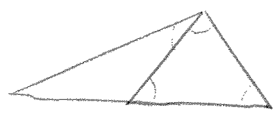
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

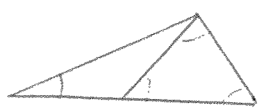
Чтобы углы между основанием большого треугольника и линией, делящей его ~~пополам~~ на две части были равны, то они должны, получается, быть 90° (180°:2=90°), но в треугольнике может быть только один угол 90°, значит для наибольшего N будем брать ~~треугольники~~ равные углы меньше, чем 90°.

Если один из треугольников равносторонний, то у него ~~по~~ 3 угла по 60°.

(+)

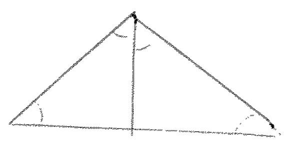


или



Угол, смежный с углом 60° между ~~линией~~ отрезком, делящим треугольник на 2 и одной из его сторон равен 120° (180°-60°=120°), значит в другом треугольнике может быть только 1 угол, равный 60°, так как (60°+60°+120° ≠ 180°). Итого 4 равных угла.

Если отрезок, делящий треугольник на 2, является биссектрисой, то это может быть либо треугольник из I варианта, либо такой:



Наибольшее кол-во углов, равных между собой получится, если большой треугольник равнобедренный. Тогда биссектриса - высота и углы между отрезком, общим для треугольников и основанием будут по 90°. 4 угла равны, если большой треугольник ещё и прямоугольный, они равны 45°. В остальных случаях равных углов будет меньше. Ответ: 4.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭВ82-81

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$$

Выразим x через z и y.

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}$$

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{z}=\frac{x}{y}+\frac{z}{y}$$

$$\frac{x}{z}-\frac{x}{y}=\frac{z}{y}-\frac{y}{z}$$

$$\frac{x(z-y)}{zy}=\frac{z^2-y^2}{zy}$$

$$x=\frac{z^2-y^2}{y-z}$$

$$x=\frac{(z-y)(z+y)}{y-z}$$

$$x=\frac{-(y-z)(z+y)}{(y-z)}$$

$$x=-(z+y)$$

$$x=-y-z$$

Подставим в $\frac{y+z}{x}$

$$\frac{y+z}{x}=\frac{y+z}{-(y+z)}=-1$$

Ответ: -1.

1

№5.

Один ждать взял два мандарина, мама положила 1 яблоко. Получилось: 13 мандаринов и 1 яблоко. (15-2=3)
„13"- нечётное число, если берут 2 мандарина, то и количество останется нечётным, т.к. если из нечёт. вычесть чёт, то будет нечётное число.
Если брать 1 мандарин и 1 яблоко, то в вазу положат ещё 1 мандарин, и их количество останется неизменным,
Чтобы убрать все мандарины, нужно брать их по 2. количество таких операций не зависит от того сколько раз брали 1 мандарин и 1 яблоко, так как при этой их кол-во не изменяется. Их будет 13:2= =6. Но останется 1 мандарин в вазе, так как ~~13 - нечётное~~ кол-во мандаринов всегда нечётное.

Ответ: мандарин.

№3.

Такое возможно, только если все числа из М равны 0. Тогда произведение всех 99 элементов равно 0.

Ответ: 0.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2.

$$2x_n=\sum_{i=0}^{n-1}x_i-x_n$$

$$3x_n=\sum_{i=0}^{n-1}x_i$$

$$x_n=\frac{\sum_{i=0}^{n-1}x_i}{3}$$

Рассмотрим первые члены посл.: $sum(k)=\sum_{i=0}^{k}x_i$

x_0

$$x_1=\frac{x_0}{3}$$

$$x_2=\frac{x_0+x_1}{3}=\frac{x_0}{3}+\frac{x_1}{3}=\frac{x_0}{3}+\frac{x_0}{9}$$

Рассмотрим k член последовательности

$$x_k=\frac{sum(k-1)}{3}$$

(+)

$$x_{k+1}=\frac{sum(k)}{3}=\frac{sum(k-1)+x_k}{3}=\frac{sum(k-1)}{3}+\frac{sum(k-1)}{9}=\frac{4\,sum(k-1)}{9}$$

$$x_{k+2}=\frac{sum(k+1)}{3}=\frac{sum(k-1)+x_k+x_{k+1}}{3}=\frac{sum(k-1)}{3}+\frac{sum(k-1)}{9}+\cancel{sum(k-}$$

$$+\frac{4\,sum(k-1)}{9\cdot 3}=\frac{4}{9}sum(k-1)+\frac{4\,sum(k-1)}{9\cdot 3}=\frac{4\,sum(k-1)}{9}\cdot\frac{4}{3}=x_{k+1}\cdot\frac{4}{3}$$

$\Downarrow$

$$x_n=x_{n-1}\cdot\frac{4}{3},\ n>1$$

$$x_n=\frac{x_0}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}\ \cancel{n>1}$$

Ответ: $x_n=\frac{x_0}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

3. $a;b;c;d;e;f$

$$\begin{cases}\frac{a+b+c}{3}=\frac{b+c+d}{3}=\frac{c+d+e}{3}=\frac{d+e+f}{3}=k\\ \frac{a+b+c+d+e+f}{6}=A\end{cases}$$

$$\frac{a+b+c}{3}=k$$

$$\frac{d+e+f}{3}=k$$

$$A=\frac{a+b+c+d+e+f}{6}=\frac{a+b+c}{6}+\frac{d+e+f}{6}=\frac{a+b+c}{3\cdot 2}+\frac{d+e+f}{3\cdot 2}=\frac{k}{2}+\frac{k}{2}=k$$

$A=k$ ~~[illegible]~~

~~Заметим т.к. в ряду есть единица~~

Возьмём бесконечный ряд чисел, где на каком-то месте будет стоять 1

$* * 1 * * * *$, пусть, справа от неё будут стоять a, b и c

$\ldots 1; a, b; c$, тогда $\frac{1+b+a}{3}=k$ $\frac{a+b+c}{3}=k$ $\frac{a+b+1}{3}=\frac{a+b+c}{3}$ $c=1$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Аналогично происходит с каждым последующим числом.
тогда в ряду будут периодически повторятся 1; a; b

Наш ряд из 5 чисел может являться подотрезком бесконечного ряда, и любые 3 числа в нём будут 1; a; b

тогда $\begin{cases} q=\sqrt[3]{1\cdot a\cdot b} \\ \frac{1+a+b}{3}=k=A \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} q=\sqrt[3]{a\cdot b} \\ 3A-1=a+b \end{matrix}$

~~для произведение~~ нам нужно максимальное q

$S=3A-1$

$a+b=S \quad b=S-a$

$a\cdot b$ макс

$a\cdot(S-a)$ макс

$-a^2+aS$ макс

$-a^2+aS$ парабола с ветв. вниз максимум достигается в верш. параболы

$a_B=\frac{-S}{-2}=\frac{S}{2}$

$a\cdot b$ будет макс, если $a=\frac{S}{2}$, тогда

$b=S-\frac{S}{2}=\frac{S}{2}$

$q=\sqrt[3]{a\cdot b}=\sqrt[3]{\left(\frac{S}{2}\right)^2}=\sqrt[3]{\frac{S^2}{4}}=\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

Ответ. $q=\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$ +

5. a, b, c, d

$\begin{cases} \frac{a+b}{c+d}=k \\ \frac{c+d}{a+b}=k \end{cases} \Rightarrow (a+b)^2=(c+d)^2 \Rightarrow (a+b)=\pm(c+d)$

$\begin{cases} \frac{b+c}{a+d}=k \\ \frac{a+d}{b+c}=k \end{cases} \Rightarrow (a+d)^2=(b+c)^2 \Rightarrow (a+d)=\pm(b+c)$

$\begin{cases} \frac{a+c}{b+d}=k \\ \frac{b+d}{a+c}=k \end{cases} \Rightarrow a+c=\pm(b+d)$

① Рассмотрим пол. случай

$\begin{cases} a+b=c+d \\ a+d=b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-c=d-b \\ a-c=b-d \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow d-b=b-d$

$2b=2d$

$b=d$

$a+b=c+b$

$a=c$

$a+c=b+d$

$2a=2b$

$a=b=c=d$, что противоречит усл.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) Рассмотрим отриц. случаи

$$\begin{cases} a+b=-c-d \\ a+d=-b-c \\ a+c=-b-d \end{cases}$$

~~a+c=-d-b~~

~~a+d=-b-b-c~~

~~a+c=-b-~~ ~~a+d=-b-~~

$a=-b-c-d$

$b=-a-c-d$

$c=-a-b-d$

$d=-a-b-c$

$$k=\frac{a+b}{c+d}=\frac{-b-c-d+b}{c+d}=\frac{-c-d}{c+d}=-1$$

Чтобы условие удовлетворялось нам нужны 3 любые числа и четвёртое равное их сумме со знаком минус

Пример: $a=8$

$b=4$

$c=-3$

$d=-a-b-c=-9$

Таких четвёрок бесконечное кол-во.

$k=-1$

Ответ: $k=-1$; Кол-во таких четвёрок бесконечно много

~~a=~~ 8; 4; -3; -9

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭU59-91

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

При $n=1$

$2x_1 = x_0 - x_1$

$3x_1 = x_0$

$x_1 = \frac{1}{3}x_0$

При $n=k$

$2x_k = x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} - x_k$

$\boxed{3x_k = x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1}}$

$x_k = \frac{1}{3}(x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1})$

~~При n=k+1~~

При $n = k+1$ (+)

$$2x_{k+1} = x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k - x_{k+1}$$

$$3x_{k+1} = x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_k$$

$$3x_{k+1} = 3x_k + x_k$$

$$x_{k+1} = \frac{4x_k}{3}$$

Таким образом для любого $n \geq 1$:

$$x_n = \frac{4x_{n-1}}{3}$$

Заметим, что последовательность x_n, для $n=1,2\ldots$, образует геометрическую прогрессию. Тогда,

$$x_n = x_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}x_0 \cdot \frac{4^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{4^{n-1}}{3^n}x_0$$

Ответ: $x_n = \frac{4^{n-1}}{3^n}x_0$.

№3.

Дан ряд чисел: a, b, c, d, e, f.

$$\begin{cases} \frac{a+b+c+d+e+f}{6} = A \\ \frac{a+b+c}{3} = \frac{d+e+f}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{a+b+c+d+e+f}{6} = A \\ a+b+c = d+e+f \end{cases}$$

$$\frac{a+b+c+a+b+c}{6} = A \qquad \frac{a+b+c}{3} = A \qquad (a+b+c = 3A)$$

Мы знаем что в ряду есть 1, тогда:

а) Пусть единица стоит на первом месте:

1 b c d e f

Тогда: $\boxed{b+c = 3A-1}$ (из первой тройки чисел) $(c+1 = 3A-b$ из I$)$

$b+c+d = 3A$ $\quad 3A-1 = 3A-d$, тогда $d=1$

$c+d+e = 3A$, $d=1$; $c+1 = 3A-e$, тогда $e=b$

$b+1 = 3A - c$ (из I)

$d+e+f = 3A \quad 1+b+f = 3A \quad 1+b = 3A - f$, тогда $f = c$

Таким образом у нас получится ряд:

1 b c 1 b c

б) рассмотрев все остальные случаи расположения „1", можно аналогично убедиться для каждого случая, что любая тройка соседних чисел состоит из 1, некого числа x и некого числа y.

Пусть у нас есть тройка чисел x y 1, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} x+y+1 = 3A \\ \sqrt[3]{x\cdot y\cdot 1} = max \text{ (максимальна)} \end{cases}$$

Пусть $max_1 = max^3$

$$\begin{cases} x+y+1 = 3A \\ x\cdot y\cdot 1 = max_1 \end{cases} \quad \{x+y = 3A-1\}$$

Допустим, что при $x=y=\frac{3A-1}{2}$ значение $x\cdot y\cdot 1$ не максимально.

$$\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2 < max_1$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 < x\cdot y$$

$$x^2+2xy+y^2 < 4x\cdot y$$

$$x^2-2xy+y^2 < 0$$

$(x-y)^2 < 0$, $(x-y)^2$ – всегда неотрицательно $\Rightarrow (x-y)^2 \geq 0$. Мы получили противоречие $\Rightarrow$ при $x=y=\frac{3A-1}{2}$ значение max_1 – максим. $\Rightarrow$ и значение max тоже. Найдём max.

$$max = \sqrt[3]{max_1} = \sqrt[3]{\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(9A^2-6A+1)}$$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{1}{4}(9A^2-6A+1)}$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Даны 4 числа: a, b, c, d.

$k = \frac{a+b}{c+d}$, а также $k = \frac{c+d}{a+b}$

$\frac{a+b}{c+d} = \frac{1}{\frac{a+b}{c+d}}$, след. $k = \frac{1}{k}$ $k^2 = 1$ $k = \pm 1$

1). $k = 1$, тогда

$$\begin{cases} \frac{a+b}{c+d} = 1 \\ \frac{a+c}{b+d} = 1 \\ \frac{b+c}{a+d} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b = c+d \ (1) \\ a+c = b+d \ (2) \\ b+c = a+d \ (3) \end{cases} \quad \begin{cases} a-d = c-b \\ a-d = b-c \\ b+c = a+d \end{cases} \Rightarrow c-b = b-c;\ 2b = 2c;\ \boxed{c = b}$$

~~Также~~ Если $c = b$, то из 1 => $a+b = c+d$ $a+b = b+d$ => $\boxed{a = d}$

из 3 => $b+c = a+d$ $b+b = a+a$ => $a = b$ => $a = d = b = c$, что противоречит условию => $k \neq 1$.

2). $k = -1$

$$\begin{cases} a+b = -c-d \\ a+c = -b-d \\ b+c = -a-d \end{cases} \quad \begin{cases} a+c = -b-d \\ a+c = -b-d \\ b+c = -a-d \end{cases} \quad \begin{cases} a+c = -b-d \\ b+c = -a-d \end{cases} \quad \begin{cases} c+b = -a-d \\ c+b = -a-d \end{cases}$$

$$\left\{ \boxed{c+b = -a-d} \right.$$

Мы свели условие задачи к более простому. Чтобы числа ~~одна~~ удовлетворили условию, нужно, чтобы сумма двух чисел являлась суммой двух других с обратным знаком. Таких ч-ок бесконечно много.

Пример четверки: 8; -11, 7; -1

Ответ: $k = -1$; четверок бесконечно много.

№4.

$g(x) = x^2 + ax + b$ имеет один корень $\Rightarrow D = 0 \Rightarrow a^2 - 4b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a^2 = 4b}$ $\boxed{b = \frac{a^2}{4}}$

$g(x^5+2x-1) + g(x^5+3x+1) = 0$ – имеет один корень

$g(x^5+2x-1) = -g(x^5+3x+1)$ (*)

~~Многочлен $g(x^5+2x-1)$ может равняться 0, при одном~~

$g(x^5+2x-1) = 0$ – имеет один корень ;

$g(x^5+3x+1) = 0$ – имеет один корень } т.к. $g(x)$ – имеет один корень.

Предположим, что ~~единственный корень~~ корень * существует при $g(x^5+2x-1) = g(x^5+3x+1) = 0$. Тогда:

$g(x^5+2x-1) = 0$

$x^5+2x-1 = \frac{-a}{2}$

$g(x^5+3x+1) = 0$

$x^5+3x+1 = \frac{-a}{2}$

$\cancel{x^5} + 2x - 1 = \cancel{x^5} + 3x + 1$

$-x = 2$

$\boxed{x = -2}$ это верно

Мы получили корень, по условию он единственный.

~~Найдём x_1~~ Пусть $x_1 = x^5 + 2x + 1$

$x_1 = -32 - 4 + 1 = -35$

Подставим в $g(x)$:

$g(x_1) = x_1^2 + ax_1 + b$

$x_1^2 + ax_1 + b = 0$

$35^2 - 35a + \frac{a^2}{4} = 0$

$(35 - \frac{1}{2}a)^2 = 0$

$35 = \frac{1}{2}a$

$\boxed{a = 17{,}5}$

арифм. погрешности

$b = \frac{a^2}{4} = \frac{306{,}25}{4} = 76\frac{225}{400}$

Ответ: $17{,}5$; $76\frac{9}{16}$

I

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯС15-69

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

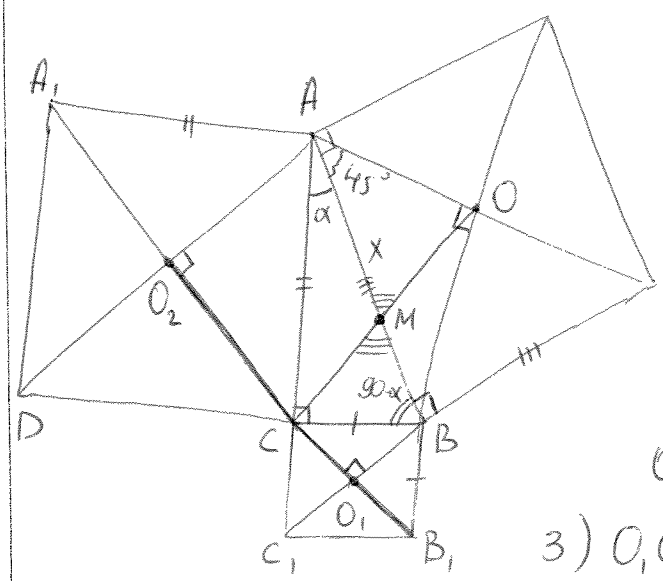
1) Для того, чтобы в случайно выбранной четверке две пары заводов были соединены маршрутами, нужно соединить заводы попарно. Всего пар 75.

7

2) Т.к. $\frac{150}{4} = 37\frac{1}{2}$, то существует одна не задействованная в четверке пара ⇒ её можно оставить без маршрута. ⇒ Кол-во пар, соед. автобусными маршрутами равно 74

Ответ: 74

№5



1) Пусть $AB = x$, тогда $BC = x \cdot \sin\alpha$, а $AC = x \cdot \cos\alpha$

2) Рассмотрим квадраты A_1ACD и CBB_1C_1:

$O_2C = \frac{1}{2}A_1C = \frac{\sqrt{2}}{2}x\cos\alpha$

Аналогично:

$O_1C = \frac{\sqrt{2}}{2}x\sin\alpha$

3) $O_1O_2 = O_2C + O_1C = x\sin(\alpha + 45°)$

4) При любом угле α, CM-биссектриса прямого угла $\angle BCA \Rightarrow MC \perp O_2B$?

5) $AO_2 \perp O_2O_1$, $OC \perp O_2O_1$, $BO_1 \perp O_2O_1 \Rightarrow AO_2 \parallel OC \parallel O_1B$

6) Рассмотрим трапецию AO_2O_1B

$S = \frac{AO_2 + O_1B}{2} \cdot O_2O_1$ и $S = \frac{CM + O_2A}{2} \cdot O_2C + \frac{CM + O_1B}{2} \cdot CO_1$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯС15-69

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{(AO_2+O_1B)}{2}\cdot O_2O_1=\frac{(CM+O_2A)}{2}\cdot O_2C+\frac{(CM+O_1B)}{2}\cdot CO_1$$

$$(AO_2+O_1B)\cdot O_2O_1=CM(O_2C+CO_1)+O_2C\cdot O_2A+O_1B\cdot CO_1$$

$$CM=\frac{(AO_2+O_1B)\cdot O_2O_1-O_2C\cdot O_2A-O_1B\cdot CO_1}{O_2O_1}$$

$$CM=O_2O_1-\frac{O_2C\cdot O_2A+O_1B\cdot CO_1}{O_2O_1}$$

$$CM=X\sin(\alpha+45^\circ)-\frac{X^2\cos^2\alpha+X^2\sin^2\alpha}{2X\sin(\alpha+45^\circ)}$$

$$CM=X\sin(\alpha+45^\circ)-\frac{X}{2\sin(\alpha+45^\circ)}$$

±

7) Из $\triangle CMB$: $\angle CMB=180-45^\circ-90^\circ+\alpha=45^\circ+\alpha$

8) Из $\triangle AMO$ по теореме синусов

$$\frac{OM}{\sin\angle MAO}=\frac{AO}{\sin\angle AMO}\Rightarrow OM=\frac{\sqrt2}{2}X\cdot\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{\sin(45^\circ+\alpha)}=\frac{X}{2\sin(45^\circ+\alpha)}$$

9) $OC=CM+MO=X\sin(\alpha+45^\circ)=O_1O_2$ ⇑

⇓

Длины двух аллей одинаковы при любом значении угла α.

№3

1) Т.к. любые три соседних числа имеют одинаковое ср. арифметич., то их суммы равны $\Rightarrow$ ряд будет выглядеть так: abcabc

$$A=\frac{2a+2b+2c}{6}=\frac{a+b+c}{3}$$

2) Пусть ~~b~~ $a=1$, тогда среднее геометрич. $\sqrt[3]{abc}$ равно $\sqrt[3]{bc}$

$$A=\frac{c+b+1}{3}\Rightarrow c=3A-1-b$$

$$\begin{cases}c=3A-1-b,\\ \sqrt[3]{bc};\end{cases}\Rightarrow\sqrt[3]{b((3A-1)-b)}\Rightarrow$$

найдем макс. знач. функции $f(b)=-b^2+(3A-1)b$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯС15-69

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$f(b) = -b^2 + (3A-1)b$ – квадратичная, график – парабола, ветви вниз, т.к. старш. коэффициент -1. $\Rightarrow$ Принимает наиб. знач. в вершине

$b_B = +\frac{3A-1}{2} \Rightarrow f(b) = -\left(\frac{3A-1}{2}\right)^2 + (3A-1)\left(\frac{3A-1}{2}\right) = \frac{(3A-1)^2}{4}$

$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$ (+)

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{(3A-1)^2}{4}}$

№2

Для кол-ва членов $k = 2$ (a, b)

$\begin{cases} 3a = b \\ 3b = a \end{cases} \Rightarrow 3(a+b) = a+b \Rightarrow (a+b) = 0$

$k=3$: a, b, c $\begin{cases} 3a = b+c, \\ 3b = a+c, \\ 3c = a+b; \end{cases}$ $3(a+b+c) = 2(a+b+c)$

$a+b+c=0$

$k=4$ a,b,c,d $\begin{cases} 3a = b+c+d, \\ 3b = a+c+d, \\ 3c = a+b+d, \\ 3d = a+b+c; \end{cases}$ $3(a+b+c+d) = 3(a+b+c+d)$

$k=5$ a,b,c,d,f $\begin{cases} 3a = b+c+d+f, \\ 3b = a+c+d+f, \\ 3c = a+b+d+f, \\ 3d = a+b+c+f, \\ 3f = a+b+c+d; \end{cases}$ $3(a+b+c+d+f) = 4(a+b+c+d+f)$

$a+b+c+d+f=0$

Каждый член последовательности равен 0. $S_n = 0$

№4

$g(x) = ax^2+bx+c$. т.к. 1 корень, то $g(x) = A(x-x_0)^2$

$g(ax+b) = A(ax+b-x_0)^2$

$g(cx+d) = A(cx+d-x_0)^2$

$\Downarrow$

$g(ax+b)+g(cx+d) = A(ax+b-x_0)^2 + A(cx+d-x_0)^2 =$

$= A\left((ax+b)^2 - 2(ax+b)x_0 + x_0^2 + (cx+d)^2 - 2(cx+d)x_0 + x_0^2\right) =$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$= A(a^2x^2+2axb+b^2-2axx_0+x_0^2+c^2x^2+2cxd+d^2-2cxx_0-$
$-2dx_0+x_0^2) = A((a^2+c^2)x^2+(2ab-2ax_0+2cd-2cx_0)x+$
$+(b^2-2bx_0+x_0^2+d^2-2dx_0+x_0^2)) = \cancel{A((a^2+c^2}$

$A((a^2+c^2)x^2+(2ab-2ax_0+2cd-2cx_0)x+((b-x_0)^2+$
$+(d-x_0)^2$. Один корень $\Rightarrow D=0$

$D=(2ab+2cd-2ax_0-2cx_0)^2-4(a^2+c^2)((b-x_0)^2+(d-x_0)^2)=0$

$(ab+cd-ax_0-cx_0)^2-(a^2+c^2)((b-x_0)^2+(d-x_0)^2)=0,$

$(a(b-x_0)+c(d-x_0))^2-(a^2+c^2)((b-x_0)^2+(d-x_0)^2)=0,$

$\cancel{a^2(b-x_0)^2}+2ac(b-x_0)(d-x_0)+\cancel{c^2(d-x_0)^2}-\cancel{a^2(b-x_0)^2}-a^2(d-x_0)^2-$
$-c^2(b-x_0)^2-\cancel{c(d-x_0)^2}=0,$

$-a^2(d-x_0)^2+2ac(b-x_0)(d-x_0)-c^2(b-x_0)^2=0,$

$(a(d-x_0)-c(b-x_0))^2=0,$

$a(d-x_0)-c(b-x_0)=0,$

$ad-ax_0-cb+cx_0=0$

$x_0(c-a)+ad-cb=0$

$x_0=\dfrac{cb-ad}{c-a}$

Ответ: $\dfrac{cb-ad}{c-a}$

+

Задача 1.

Есть 3 типа установок. Обознач. за x 1-ый тип, тогда

1-ый x установок

2-ой $4x$ установок

3-ий y, $y \vdots x$.

По условию $5y = 4x+99$. При этом всего установок ≤ 200

$$\begin{cases} 5y = 4x+99, \\ x+4x+y \leq 200; \end{cases} \begin{cases} y = \frac{4x+99}{5} \\ 5x+y \leq 200 \end{cases}$$

+

$$5x + \frac{4x+99}{5} \leq 200$$

$$\frac{25x+4x+99}{5} \leq 200$$

$$29x+99 \leq 1000$$

$$29x \leq 901.$$

Заметим, что число установок должно быть целым.

$29x \leq 901$

$y = \frac{4x+99}{5}$.

max x который подходит к первому выраж 31.

$29 \cdot 31 = 899$, тогда $y = \frac{4 \cdot 31+99}{5} = \frac{223}{5}$ – не цел. число. ⇒

⇒ x должен иметь на конце 1 или 6 и $x < 31$.

Таким требованиям соотв. только $x = \{4, 9, 14, 19, 24, 29\}$,

но подходит только $x = 9$. $y = \frac{4 \cdot 9+99}{5} = 27$, $27 \vdots 9$.

$x = 9$; $4x = 36$; $y = 27$. почему?

Ответ: 1) 9 уст., 2) 36 уст., 3) 27 уст.

Задача 4.

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} = ?$$

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y}$$

$$y(x+y) = z(x+z)$$

$$xy+y^2 = xz+z^2$$

$$xy - xz = z^2 - y^2$$

$$x(y-z) = (z-y)(z+y)$$

$$-x(z-y) = (z-y)(z+y)$$

$$-x = z+y, \text{ при } z-y \neq 0$$

$$\frac{y+z}{x} = \frac{y+z}{-z-y}$$

$(x = -z-y)$

$$\frac{y+z}{-z-y} = \frac{y+z}{-(y+z)} = -1, \text{ при } y+z \neq 0$$

Значение отнош. $= -1$, при чём

$z-y \neq 0$; $z+y \neq 0$; $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$;

$x - z \neq 0$; $x + z \neq 0$;

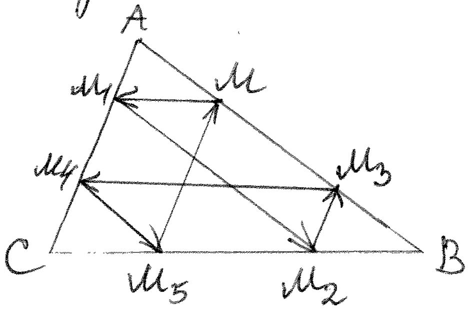
$x - y \neq 0$; $x+y \neq 0$.

Ответ: -1.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2.



Точка M возвращается в свою изнач. положение через 6 шагов. Т.к. двигается параллельно сторон $\triangle ABC$.

Ответ: верно, за 6 шагов.

решений

Задача 5.

Забирая из 4 ваз по одному фрукту или из 1 вазы по 4 фрукта мы можем изменить число фруктов ~~на нечёт. число~~ только на чет. число — на $1 \cdot 4 = 4$.

А изнач. в вазах нечёт. число ап. и ябл., прибавляя или отнимая из нечёт числа чётное нельзя получ. чётное.

$1 + 4 = 5$

нечёт + чет = нечёт.

Значит Саша не могла получить $4 \cdot 4 = 16$ ябл. или апельсинов, т.к. 16 — чёт.

Ответ: не могла.

Задача 3.

Чтобы после замены сумма всех 1001 элемента не изменилась, сумма любых 1000 элементов из 1001 должна быть $= 0$. Это достигается только когда все элементы — число 0. Тогда при замене любого числа на сумму всех остал. (0) $\sum$ 1001 элем. $= \underset{1001\ \text{число}}{0} + \underset{1\ \text{число}}{0} = 0$

Произвед. всех элем. $= 0 \cdot 1001 = 0$.

Ответ: 0.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯF 11-21

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Есть.

I у -

II у - ?; 14р б

III у - ?;

Если бы.

15р б, то на 99 б } < 200.

(+)

Пусть I у было x, тогда II у было $4x$, а III у - yx. Значит $5yx = 4x+99$. Зная что в сумме их меньше 200, составим и решим систему уравнений.

$$\begin{cases} x+4x+yx \le 200 \\ 5yx = 4x+99 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{99}{5y-4} \\ \frac{99(5+y)}{5y-4} < 200 \end{cases}$$

$$\frac{200(5y-4)}{99(5+y)} > 1.$$

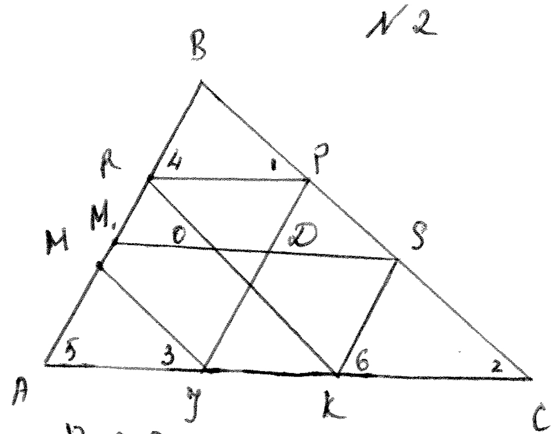
$$\begin{cases} y > \frac{1295}{1901} \\ x = \frac{99}{5y-4} \end{cases}$$

т.к. кол-во установок ~~четное~~ целое число, то $5y-4$ является делителем 99. ⇒ 1) $5y-4=3$; $y=\frac{7}{5}$; $x=33$, но xy тоже целое число ⇒ искл. 2) $5y-4=9$; $y=\frac{13}{5}$; $x=11$, но xy - целое ⇒ искл. 3) $5y-4=33$; $y=\frac{37}{5}$; $x=3$, но xy - целое ⇒ искл. 4) $5y-4=11$; $y=3$; $x=9$. - подходит $3>\frac{1295}{1901}$. 5) $5y-4=1$; $y=1$; $x=99$, не подходит т.к. $99+4\cdot 99+99>200$ не удовлетворяет условию. 6) $5y-4=99$. $y=\frac{103}{5}$ $x=1$, но xy целое ⇒ ⇒ искл. Значит нам подходит только 4 вариант. ⇒ I у - 9шт II у - 36шт III - 27шт.

Ответ: 9; 36; 27.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2



Дано: MJ || BC
JP || AB
PR || AC
RK || BC
KS || AB
SM₁ || AC

Р/м △ BRP, △ KSC, △ AMJ
∠1 = ∠2 (т.к. RP || AC и секущая BC), аналогично ∠1 = ∠3 ⇒ ∠1 = ∠2 = ∠3.
∠4 = ∠6 (т.к. RP || KC секущая RK), аналогично ∠4 = ∠5 ⇒ ∠4 = ∠5 = ∠6; RP = AJ (т.к. RP || AJ и AR || JP), аналогично RP = KC ⇒ ~~RP = AJ = KC~~ AM = BR = SK треугольники равны. ⇒ Соответствующие элементы треугольников равны ⇒ RP = AJ = KC.

Р/м DSKJ – параллелограмм (т.к. SK || AB || JP и DS || JK.) ⇒ SK = DJ особый случай!

Р/м AM₁DJ – тоже параллелограм (т.к. PJ || AB и M₁D || AJ) ⇒ DJ = AM₁; SK = AM₁; AM = AM₁ ⇒ ⇒ M₁ совпадет с M ⇒ это верно. Наименьшее кол-во шагов: 3, это произойдет когда M будет серединой AB. Ответ: верно; 3.

±

№3

Мы имеем числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{1001}$. По условию если $a_1 = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{1001}$, то $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1001} = 2(a_2 + a_3 + a_4 + \dots a_{1001})$

Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_{1001} = S$, значит, $S = a_2 + a_3 + a_4 + \dots a_{1001}$
$S = a_1 + a_3 + a_4 + \dots a_{1001}$ и т.д. со всеми числами ⇒ $a_1 = a_2$ (т.к. $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{1001} = a_1 + a_3 + \dots + a_{1001}$) делаем так с каждым получим что $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_{1001} = x$, значит $x = 1000x$ ⇒ все числа равны 0 ⇒ произведение = 0 Ответ: 0.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯГ 11-21

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Используя свойство ряда равных отношений можно заменить что:

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} = \frac{x+x+y+y+z+z}{z+y+x}$$

$$\frac{2(x+y+z)}{z+y+x} = 2 \Rightarrow \frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} = 2.$$

Ответ: 2.

4

№5.

x - апельсины y - яблоки.

Р/м возможные варианты, как могла разложить Маша.

1) $4x$ $4x$ $4x$ $\cancel{3x+y}$ $3y+x$

2) $3x+y$ $3x+y$ $3x+y$ $4x$

3) $2x+2y$ $3x+y$ $4x$ $4x$.

Р/м 1 вариант. если мы будем брать по одному фрукту из каждой вазы и менять на противоположный, то мы будем менять четность каждого фрукта в каждой вазе. т.е. одинаковую четность мы не сможем сделать т.к в одной вазе 4x, а в другой и четное и нечетное. Если мы будем менять все фрукты в вазе то мы ~~опять~~ не меняем четность фруктов в одной вазе. Но так как. если мы заменим все фрукты в одной вазе, то четность не изменится ⇒ такое Саша получить не смогла бы так как во 2 и 3 варианте рассуждения аналогичные.

Ответ: не смогла.

надо бы их привести

1

Лист 3 из 3

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1

I – ?

II – в 4 раза >

III – кратно — если бы в 5 раз больше, то на 99 >

±

Возьмем кол-во установок 3 типа за y, тогда $5y$ больше на 99 чем установок второго типа. Так как установок 2 типа в 4 раза больше, чем первого, то установок 2 типа было $4x$, а первого x. Тогда $5y$ на 99 больше чем $4x$. Составим уравнение.

$5y = 4x + 99$

$5y - 4x = 99$

Разложим число 99 на множители:

$$\begin{array}{r|l} 99 & 11 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Следовательно 99 кратны числа 33, 11, 9 и 3.
Так как установок не могло быть не целое количество, так как завод их уже изготовил, то $5y - 4x$ может равняться $33x$, $11x$, $9x$, $3x$ и $99x$.
Рассмотрим все 5 вариантов:
Уточнение, так как ~~как~~ $y \vdots x$, то мы можем представить ~~на~~ их за x и тогда делители числа 99 мы тоже можем выразить через x.

I $5y - 4x = 33x$

$5y = 37x$

~~y~~ x – не целое ⇒ нельзя (так как установок 1 типа будет не целое число, что невозможно)

II $5y - 4x = 9x$

$5y = 13x$

x – не целое ⇒ нельзя

III $5y - 4x = 3x$

$5y = 7x$

x – не целое ⇒ нельзя.

IV $5y - 4x = 99x$

$5y = 103x$

~~x~~ – не целое ⇒ нельз

V $5y - 4x = 11x$

$5y = 15x$

$y = 3x$ ⇒ это единственный вариант который подходит.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯF 11-34

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Значит установок 3 типа было 3x. Возвращаемся к уравнению

$5y-4x=99$

$y=3x \Rightarrow$

$15x-4x=99$

$x=9$

Установок 1 типа было x, 2 типа – 4x, а 3 типа – 3x. Всего было 8x установок

$x=9$

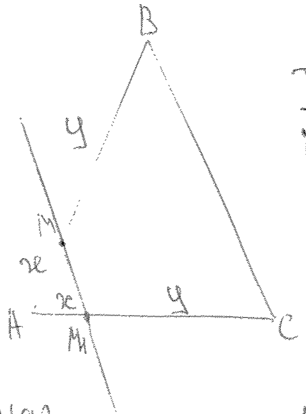
$8x=72$ установки

Ответ: 72 установки задание!

Задача 2.

Используя теорему Фалеса рассмотрим каждый шаг:

I шаг

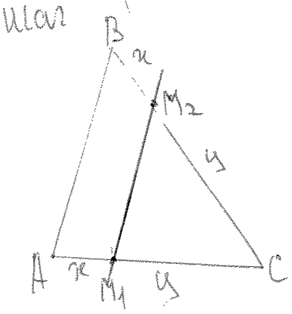


Допустим отношение ~~AB к~~ AM к MB будет $\frac{x}{y}$

Тогда по теореме Фалеса Отношение AM_1 к M_1C будет тоже x к y ($MM_1 \parallel BC$)

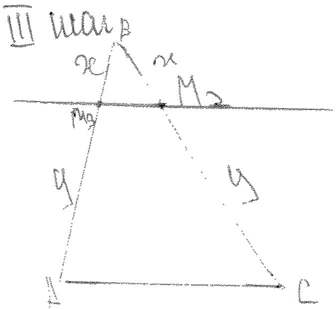
$\frac{-}{+}$

II шаг



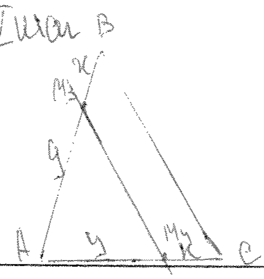
$\frac{AM_1}{M_1C}=\frac{x}{y} \Rightarrow$ по теореме Фалеса $\frac{BM_2}{M_2C}=\frac{x}{y}$

III шаг



$\frac{BM_2}{M_2C}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{BM_3}{M_3A}=\frac{x}{y}$

IV шаг



$\frac{BM_3}{M_3A}=\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{CM_4}{M_4A}=\frac{x}{y}$

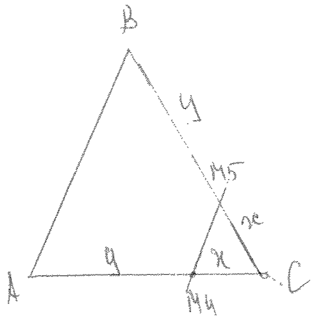
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯF 11-34

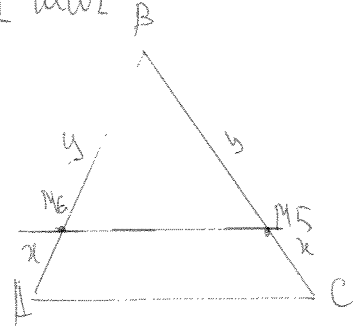
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

V Шаг



$$\frac{M_4C}{M_4A} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{CM_5}{M_5B} = \frac{x}{y}$$

VI Шаг



$$\frac{CM_5}{M_5B} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{AM_6}{M_6B} = \frac{x}{y}$$

[illegible] случай?

Точки М и М6 будут наложены друг на друга так как:

$\frac{AM}{MB} = \frac{x}{y}$ и $\frac{AM_6}{M_6B} = \frac{x}{y}$, так как отношения одинаковы и отношения тоже, то М наложена и совпадает с точкой M_6 ⇒ необходимо 6 шагов.

Ответ: 6 шагов.

Задача 3

1001 число

M ∈ 

Пусть первое число этого множества x, а сумма остальных 1000 равна y. Тогда сумма равна $x + y = P$

Заменим первое число (то есть x) на сумму чисел остальных (то есть y) и получим общую сумму 2y и она тоже равна P, (по условию задачи) ⇒

$$\left.\begin{matrix} x+y=P \\ y+y=P \end{matrix}\right| \Rightarrow x=y$$

Значит это первое число равно сумме ~~всех~~ остальных. В условии сказано, что это же правило действует на все остальные. Значит каждое число равно сумме всех остальных ⇒ все числа ~~долж~~ должны быть все одинаковые, то если они будут >0, то все числа будут одинаковы и получается, что $x = 1000x$ и это возможно тогда x только равен 0 ⇒ все числа равны 0 и произведение будет 0

Ответ: 0

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RF 11-34

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$$

Если они принимают одинаковые значения то они равны. Так как $\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}$, то мы можем сложить знаменатели и числители, и можем утверждать, что полученная дробь будет равна этим трём ⇒

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+z}{y}=\frac{y+z}{x}=\frac{x+y+x+z+y+z}{x+y+z}$$

Мы можем так утверждать по теореме, а так же можем привести пример: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1+2}{2+4}=\frac{3}{6}=0{,}5$.

$$\frac{x+y+x+z+y+z}{z+y+x}=\frac{2x+2y+2z}{x+y+z}=\frac{2\cancel{(x+y+z)}}{\cancel{(x+y+z)}}=2$$

Ответ: 2!

Задача 5

Количество фруктов в вазах никогда не изменится, так как в вазах по 4 фрукта и Саша могла либо взять из каждой вазы по 1 фрукту ~~и~~ и положить опять в каждую вазу по 1 фрукту, либо взять 4 фрукта из одной вазы и положить любые другие фрукты в эту же вазу в ~~этом~~ этом же количестве.

Так как в каждой вазе всегда по 4 фрукта, а яблок изначально 3 и нужно чтобы в 4 вазах были одинаковые фрукты, то кол-во яблок должно быть кратно 4, а следовательно чётно, а у нас изначально нечётное кол-во яблок. Но весь смысл в том, что мы никогда не сможем получить чётное кол-во яблок. Если мы возьмем 4 апельсина (не важно из одной вазы или с каждой по 1), то мы получим +4 яблока. Если же возьмём 3 апельсина и 1 яблоко, то получим +3 яблока и −1 яблоко ⇒ +2 яблока. Если же возьмём 2 апельсина и 2 яблока то получим +2 яблока и −2 яблока ⇒ кол-во яблок не изменится. Если возьмём 3 яблока и 1 апельсин, то получим +1 яблоко и −3 яблока ⇒ −2 яблока от всего кол-ва. Если же возьмем 4 яблока, то получим что −4 яблока от всего кол-ва яблок. Значит прибавляя и отнимая чётное кол-во яблок от нечётного кол-ва яблок, то всегда получим нечётное кол-во яблок, а нам чтобы нам получить во всех вазах одинаковые фрукты, то у нас должно быть чётное кол-во яблок.

Ответ: нет, не могла.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

I тип x
II тип $4x$ - в 4р>
III тип nx в n р>

$4x$
$5nx$ на 99>

(+)

Решение: Пусть установок I типа - x, тогда II типа - $4x$, III типа - число, кратное x, т.е nx. Составим систему уравнений.

$$\begin{cases} x+4x+nx \leq 200 \\ 4x+99=5nx \end{cases} \qquad \begin{cases} 5nx-4x=99 \\ 5x+nx \leq 200 \end{cases}$$

Добавим слагаемые в обе части неравенства, получим:

$$\begin{cases} 5nx-4x \leq 200+4nx-9x \\ 99 = 5nx-4x \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} 99 &\leq 200+4nx-9x \\ 9x-4nx &\leq 101. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 9x-4nx \leq 101 \\ 5x+nx \leq 200 \end{cases} \Big| \times 4 \qquad \begin{cases} 9x-4nx \leq 101 \\ 20x+4nx \leq 800 \end{cases}$$

Сложим части системы, nx сократятся

$$29x \leq 901 \Longrightarrow x \leq 31\tfrac{2}{29}$$

Значит, т.к. x - целое число, максимальное его значение - 31.

$$5nx=4x+99$$

$$n=\frac{4x+99}{5x}=\frac{4x+4+95}{5x}=\frac{4(x+1)+95}{5x}$$

n - целое число, значит, сумма в его числителе должна делиться на знаменатель без остатка.

$95 \vdots 5 \Longrightarrow 4(x+1) \vdots 5.$

4 не делится на 5 $\Longrightarrow$ на 5 делится $x+1$.

Заметим, что $4(x+1)$ - всегда четное число $\Rightarrow$ сумма его и 95 - нечетная. Значит, знаменатель не должен быть четным числом $\Longrightarrow$ x - только нечетное.

Т.к $x+1 \vdots 5$, x - нечетное и $x \leq 31$, находим 3 возможных значения: 9, 19, 29. Проверим каждое из них.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) $x=9$

$n = \frac{4\cdot 10+95}{5\cdot 9} = \frac{40+95}{45} = \frac{135}{45} = 3.$ – подходит.

$x(1+4+3) \leq 200$

$9\cdot 8 \leq 200 \quad 72 \leq 200 \Rightarrow$ x может быть равен 9.

2) $x=19$

$n = \frac{4\cdot 20+95}{5\cdot 19} = \frac{80+95}{95}$ – не делится нацело.

3) $x=29$

$n = \frac{4\cdot 30+95}{145} = \frac{215}{145}$ – не делится.

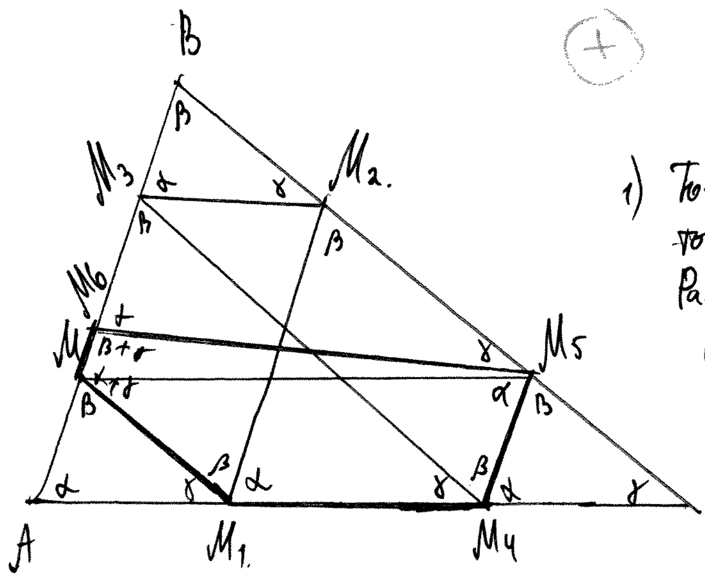
$\Rightarrow$ Единственный вариант – $x=9$.

Тогда I типа: 9 установок

II типа – $9\cdot 4 = 36$, III типа – $9\cdot 3 = 27$.

Ответ: 9, 36, 27.

№2.



Решение:

Возьмем на стороне AB произвольную точку M.

1) Тогда на пересечении с AC – точка M_1, такая, что $BC \parallel MM_1$.

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle AMM_1$

Обозначим углы треугольника за α, β и γ

Тогда в $\triangle AMM_1$ есть общий угол α, $\angle AMM_1 = \beta$, $\angle AM_1M = \gamma$, т.к. прямые $\parallel$.

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AMM_1$

2) На стороне BC – точка M_2

$\triangle ABC \sim \triangle M_1M_2C$ (доказывается так же, как подобие 2 предыдущих)

Обозначим равные углы

3) На AB – точка M_3, $\triangle ABC \sim \triangle M_3BM_2$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4) На AC - точка M_4

$\triangle ABC \sim \triangle AM_3M_4$

5) На BC - M_5

$\triangle ABC \sim \triangle M_4M_5C$.

6) На AB - точка M_6. Допустим, что M_6 не совпала с M.

Тогда $\triangle ABC \sim \triangle M_6BM_5$

Заметим, что $\alpha+\beta+\gamma=180$.

Тогда $\angle MM_1M_2 = 180-\alpha-\gamma=\beta$

$\angle M_3M_4M_5 = 180-\alpha-\gamma=\beta$

$\angle MM_6M_5 = 180-\alpha = \beta+\gamma$

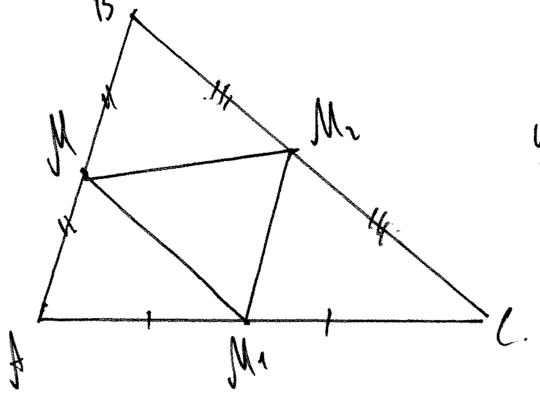
$\angle M_6MM_1 = 180-\beta = \alpha+\gamma$.

Рассмотрим пятиугольник $MM_6M_5M_4M_1$. Сумма углов 5-угольника равна 540°. Тогда:

$\alpha+\beta+\gamma+\beta+\alpha+\beta+\gamma+\alpha+\gamma+\angle MM_5M_6=540$

$3(a+\beta+\gamma)+\angle MM_5M_6 = 540^\circ \Longrightarrow \angle MM_5M_6=0^\circ$.

$\rightarrow$ Точка M совпала с M_6. Значит, за 6 ходов точка M вернется в исходное положение в любом случае.



Кроме этого, рассмотрим вариант когда $AM=BM$

Тогда MM_1 - средняя линия $\triangle ABC$

$\Rightarrow AM_1=M_1C$

Тогда M_1M_2 так же средняя линия $\triangle ABC$, и $CM_2=BM_2$

В таком случае, точка M вернется в свое исходное положение через 3 хода.

Ответ: минимальное количество шагов - 3, когда M не середине стороны, 6 - в любом другом случае.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

Обозначим все элементы множества за $m_1, m_2, m_3 \dots m_{1001}$, а их сумму - за M.

Если при замене m_1 на $m_2+m_3 \dots + m_{1001}$, M не меняется, то $m_1 = m_2+m_3 \dots + m_{1001}$.

Составим систему, в которую входят все m.

$$\begin{cases} m_1 = m_2+m_3+\dots+m_{1001} \\ m_2 = m_1+m_3+\dots+m_{1001} \\ m_3 = m_1+m_2+m_4 \dots + m_{1001} \\ \dots \\ m_{1001} = m_1+m_2+\dots+m_{1000} \end{cases}$$

Сложим первые 2 уравнение системы.

$m_1+m_2 = m_1+m_2+2m_3+2m_4+\dots+2m_{1001}$

Получается, что

$2m_3+2m_4 \dots + 2m_{1001} = 0$

+

$2(m_3+m_4+\dots+m_{1001}) = 0 \Rightarrow m_3+m_4+m_5 \dots + m_{1001} = 0.$

Сложив 2 и 3 уравнение, получим:

$m_1+m_4+m_5 \dots + m_{1001} = 0$

Получается, что $m_3 = m_1$, т.к. оставшаяся часть одинаковая

Проделав такие действия, получим, $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_{1001}$

И, например, $m_3+m_4+m_5 \dots + m_{1001} = 0$

Значит, $m_1+m_2+m_3 \dots + m_{1001} = 0$ и $m_1 = m_2 \dots = m_{1001} = 0$

Тогда произведение всех элементов равно 0.

Ответ: 0.

№4.

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$$

Составим и решим систему.

$$\begin{cases} \frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} \\ \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} \\ \frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} \end{cases} \quad \begin{cases} xy+y^2 = xz+z^2 \\ x^2+zx = y^2+yz \\ x^2+yx = yz+z^2 \end{cases} \quad \begin{cases} xy+y^2-xz-z^2=0 \\ x^2+xz-y^2-yz=0 \\ x^2+yx-yz-z^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}(y-z)(y+z)+x(y-z)=0\\(x-y)(x+y)+z(x-y)=0\\(x-z)(x+z)+y(x-z)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}(y-z)(x+y+z)=0\\(x-y)(x+y+z)=0\\(x-z)(x+y+z)=0.\end{cases}$$

Тогда $x+y+z=0$ или $y-z=0,\ x-y=0,\ x-z=0$

$\Rightarrow z=-x-y$ или $y=z,\ x=y,\ x=z$

В 1 случае:

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+y}{-x-y}=\frac{x+y}{-(x+y)}=-1$$

Во 2 случае:

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x+x}{x}=\frac{2x}{x}=2.$$

Значит, отношение равно 2 или -1.

Ответ: 2 или -1.

№5.

Пусть какой-то из фруктов – а, другой – в.

Рассмотрим действие Сани с конца.

Тогда в конце остались все фрукты вида а или вида в.

Т.к. пока не известно, какие именно одинаковые фрукты остались, и что именно – а, а что – в, то допустим, что ~~остав~~ оставшиеся фрукты были вида а.

Тогда до этого есть 4 варианта различных комбинаций.

1) Во всех корзинах было по 3а и 1в.

2) В 1 корзине было 3а и 1в, а в остальных – 4в.

3) В 2 корзинах было 3а и 1в, а в остальных – 4в.

4) В 3 корзинах было 3а и 1в, а в последней – 4в.

Вариант „во всех было 4 в" не рассматриваем, т.к

тогда условие бы уже выполнилось.
Тогда последним действием можно заменить 4в на 4а или 1в на 1а, и везде станет по 4а.
Найдем количество а и в в каждом случае.

1) $(3a+1b)4 = 12a + 4b$.

2) $3a + 1b + 3\cdot 4b = 3a + 1b + 12b = 3a + 13b$.

3) $2(3a+b) + 2\cdot 4b = 6a + 2b + 8b = 6a + 10b$

4) $3(3a+b) + 4b = 9a + 3b + 4b = 9a + 7b$.

Заметим, что нам подходит вариант 2, т.е. $3a + 13b$, т.к. есть 3 яблока и 13 апельсинов.
Значит, а - яблоки, в - апельсины.
Тогда если Маша положила в 1 вазу 3 яблока и апельсин, а в другие - по 4 апельсина, то Саша заменит 1 апельсин и по 4 апельсина на яблоки, и везде будут только яблоки. Значит, это возможно.

Ответ: могла.

Это невозможно!

−

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №1

Пусть число установок первого типа возьмем за p, число установок второго типа – за v, а число установок третьего типа – за t. Тогда по условию:

1. $v = 4p$
2. $\frac{t}{p} \in N$ (т.к. t кратно p)
3. $5t = 99 + v \Rightarrow 5t = 99 + 4p$
4. $p + v + t < 200$

+

Из 3 условия $5t = 99 + 4p$ следует, что $99 + 4p$ кратно 5, а это возможно только когда $4p$ оканчивается на 6, и еще t - нечетное, значит и p - нечетное

Причем $99 + 4p \leq 200 \Rightarrow 4p \leq 101$

Рассмотрим числа, кратные 4 и заканчивающиеся на 6:

16, $p = 4$, что не удовлетворяет условию $\Rightarrow$ не подходит

36, $p = 9$ и $t = 27$, 27 кратно 9 $\Rightarrow$ подходит

56, $p = 14$ и $t = 31$, 31 не кратно 14 $\Rightarrow$ не подходит

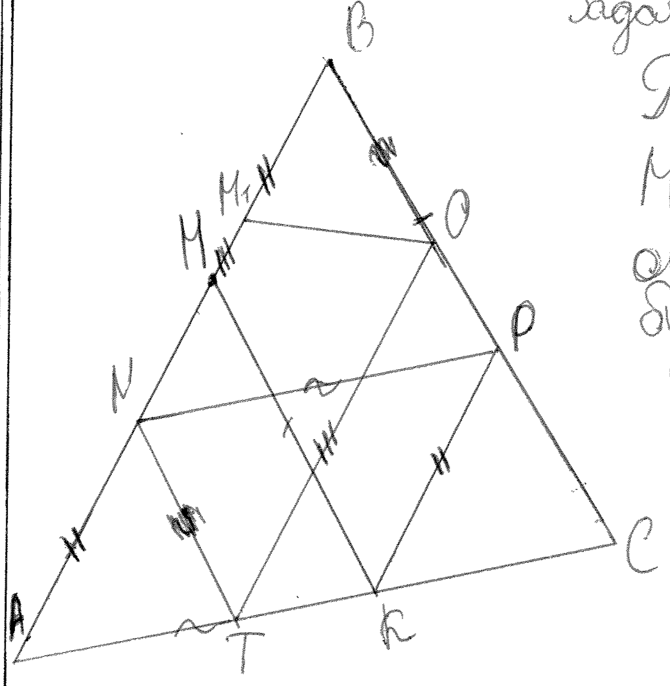
76, $p = 19$ и $t = 35$, 35 не кратно 19 $\Rightarrow$ не подходит

96, $p = 24$ и $t = 39$, 39 не кратно 24 $\Rightarrow$ не подходит

Значит, $p = 9$, $t = 27$ и $v = 36$

Ответ: первого типа установок изготовили – 9 штук, второго – 36 штук и третьего – 27 штук.

Задача 2



Рассмотрим „путь" точки M, обозначая точки, где она „ходит" разными буквами

Проведем отрезок MK (MK ∥ BC), потом отрезок KP (KP ∥ AB)

MBPK – параллелограмм, т.к. его стороны попарно параллельны => MK = BP и MB = KP

Дальше проводим отрезок PN (PN ∥ AC)

AN = KP и NP = AK, т.к. ANPK – параллелограмм

Теперь проводим отрезок NT (NT ∥ BC) и отрезок TO

NT = BO и NB = OT, т.к. TNBO – параллелограмм

И теперь проводим отрезок OM_1 (OM_1 ∥ AT)

M_1O = AT и AM_1 = OT, т.к. AM_1OT – параллелограмм.

OT = NB = AM_1 => NB = AM_1 => AN = M_1B

AN = PK = M_1B => PK = M_1B и также PK = MB = M_1B =>

M_1B = MB => MB совпадает с M_1B и точка M вернулась в свое исходное положение через 6 шагов.

Ответ: да, ей достаточно 6 шагов

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача ~ 3

Пусть элементы множества М будут:

$n_0, n_1, n_2 \dots n_{999}, n_{1000}$

По условию можно сказать, что каждый элемент множества, равен сумме всех остальных элементов, т.к. при замене его на сумму всех оставшихся элементов ~~не меняется~~ сумма всех элементов множества не меняется.

Значит, $n_0 = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{999} + n_{1000}$ и $n_1 = n_0 + n_2 + n_3 + \dots + n_{999} + n_{1000}$

Если взять эти равенства в систему:

$$\begin{cases} n_0 = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{999} + n_{1000} \\ -n_0 = -n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{999} + n_{1000} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{n_2 + n_3}_{} + \dots + n_{999} + n_{1000} = 0$$

+

Также

$$\begin{cases} n_0 = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{999} + n_{1000} \\ n_3 = n_0 + n_1 + n_2 + \overset{n_4}{\dots} + n_{999} + n_{1000} \end{cases} \Rightarrow \underbrace{n_1 + n_2}_{} + \dots + n_{999} + n_{1000} = 0$$

~~Если~~ Из двух получившихся равенств видно, что $n_1 + n_2 = n_2 + n_3$, значит $n_1 = n_3$.

Следовательно, все элементы множества М равны и они равны 0, т.к. если это другое число, то $n_0 \neq n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{999} + n_{1000}$

Если они равны 0, то и их произведение равно 0.

Ответ: 0.

доп. лист

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯF 11-92

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4

По условию $\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x}$

Если $\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y}$, то $y+z=-x$, т.к.

$xy+y^2 = z^2+zx$

$(y-z)(y+z) = -x(y-z)$

$y+z=-x$

Значит, $\frac{y+z}{x} = -1$

Также $\frac{x+z}{y} = \frac{y+x}{x}$

$x^2+xz = y^2+yz$

$(x-y)(x+y) = -z(x-y)$

$x+y=-z \Rightarrow \frac{x+y}{z} = -1$

И $\frac{y+z}{x} = \frac{x+y}{z}$

$yz+z^2 = x^2+yx$

$(z-x)(z+x) = -y(z-x)$

$z+x=-y \Rightarrow \frac{z+x}{y} = -1$

Везде значения отношений равные -1

Ответ: -1

$+$

допллист

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ВF 11-92

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5

~~Она не сможет получи~~

Саша не смогла бы получить во всех 4 вазах одновременно одинаковые фрукты, потому что изначально в каждой вазе было по 4 фрукта и их количественный ~~состав в каждой вазе не менялся~~, следовательно не может оказаться в одной вазе 3 фрукта (3 яблока), а в трех других вазах ~~по 13~~ вместе 13 фруктов.

Ответ: нет.

отв. не обоснован

Это не верно

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 Пусть установок первого типа x, тогда второго $4x$, а третьего $p \cdot x$ (причем p – натуральное число, т.к число установок III типа кратно установкам I типа.

По условию

$x + 4x + p \cdot x \leq 200$ и $5 p \cdot x = 4x + 99$

$5p\, x - 4x = 99$

$x(5p - 4) = 99$

Вероятно $5p - 4 > 0$, т.к p - натуральное и целое.

Найдем множители числа 99: 1, 3, 11, 9, 33, 99.

Пусть $x = 1$

$5p - 4 = 99$

$5p = 103$

$p = \frac{103}{5}$ - не целое $\Rightarrow \varnothing$

Пусть $x = 3$

$3(5p - 4) = 99$

$5p - 4 = 33$

$5p = 37$

$p = \frac{37}{5}$ - не целое $\varnothing$

Пусть $x = 11$

$11(5p - 4) = 99$

$5p - 4 = 9$

$5p = 13$

$p = \frac{13}{5}$ - не целое $\varnothing$

Пусть $x = 9$

$9(5p - 4) = 99$

$5p - 4 = 11$

$5p = 15$

$p = 3$

тогда установок II типа – 36, а III – $x \cdot p = 9 \cdot 3 = 27$

$9 + 36 + 27 = 72 \leq 200$, значит условию не противоречит

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Пусть $x = 33$

$33(5p-4) = 99$

$5p-4 = 3$

$5p = 7$

$p = \frac{7}{5}$ - не целое

Пусть $x = 99$

$99(5p-4) = 99$

$5p-4 = 1$

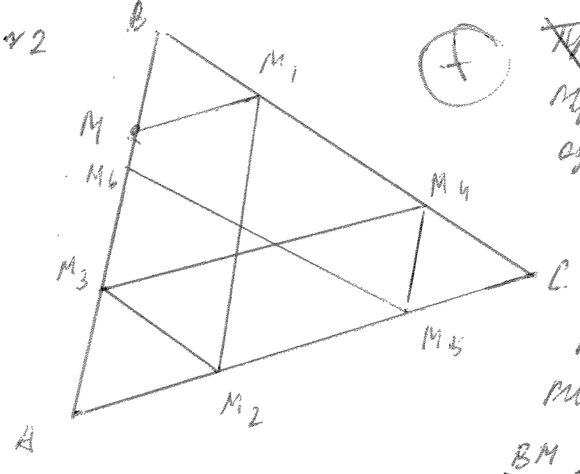
$5p = 5$

$p = 1$

тогда установок I типа 99, II $99 \cdot 4 = 396$, а третьего 99, но всего их больше 200, а значит это невозможно

Ответ: I - 9
II - 36
III - 27

№2



(+)

~~При проведении каждой линии образуются треугольники подобные ABC (т.к. у них один общий угол, а остальные 2 равны как соответствующие углы при секущей у двух параллельных прямых. И так каждый раз точка M делит стороны угла в какой-то пропорции если $\triangle MBM_1 \sim ABC$, то~~

~~$\frac{BM}{BA} = \frac{BM_1}{BC} = \frac{x}{y}$.~~

~~Т-м 2 подобных треугольника $\triangle M_1CM_2 \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{CM_1}{CB} = \frac{CM_2}{CA} =$~~

При проведении линии точкой M она делит стороны треугольника в равных пропорциях, т.к. эта линия параллельна основанию. (по теореме Фалеса). Пусть $\frac{BM}{MA} = \frac{x}{y}$, тогда $\frac{BM_1}{M_1C} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{CM_2}{M_2A} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{AM_3}{M_3B} = \frac{AM_2}{M_2C} = \frac{x}{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BM_3}{M_3A} = \frac{BM_4}{M_4C} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{CM_5}{M_5A} = \frac{CM_4}{M_4B} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{AM_6}{M_6B} = \frac{AM_5}{M_5C} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{M_6B}{AM_6} = \frac{BM}{MA} \Rightarrow$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

⇒ M и M_i - одна и та же точка. Но если бы точка M лежала бы на середине AB, то линии бы стали средними линиями $\triangle ABC$ и точка M вернулась бы на место после третьего шага.

Ответ: если M лежит на середине AB, то 3 хода, если не на середине AB, то 6 ходов.

№3 Пусть P - сумма всех элементов M, а x - ~~φ~~ один из элементов.

По условию $P - x + (P - x) = P$

$$P - 2x = 0.$$

Так же мы можем расписать все элементы множества M, значит все элементы множества - одни и те же числа.

Сумма всех элементов равна $1001x = P$

$$1001x - 2x = 0$$

$$1999x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 0$$

$$1001 \cdot x = 1001 \cdot 0 = 0$$

Ответ: 0

+

№4 По условию

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} \Rightarrow \frac{x+y}{z} - \frac{x+z}{y} = \frac{y^2 + yx - xz - z^2}{zy} = 0$$

$x \neq 0$; $y \neq 0$; $z \neq 0$, т.к на ноль делить нельзя

$$\Downarrow$$

$$y^2 + yx - xz - z^2 = 0$$

$$\frac{x+y}{z} - \frac{y+z}{x} = \frac{x^2 + xy - z^2 - zy}{xz} = 0 \Rightarrow x^2 + xy - z^2 - zy = 0$$

$$\frac{x+z}{y} - \frac{y+z}{x} = \frac{x^2 + xz - y^2 - yz}{xy} = 0 \Rightarrow x^2 + xz - y^2 - yz = 0$$

$$x^2 + xy - z^2 - zy = x^2 + xz - y^2 - yz = 0$$

$$y^2 - z^2 + xy - xz = 0$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7881

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯГ 11-95

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$(y-z)(y+z)+x(y-z)=0$

$(y-z)(y+z+x)=0$

~~$x^2+xy-z^2-zy=x^2+xz-y^2-yz=0$~~

~~$y^2\ \ z^2+xy-xz$~~

$y^2+yx-xz-z^2=0$

$z^2+xz-yx-y^2=0=x^2+xz-y^2-yz$

$z^2-x^2+yz-yx=0$

$(z-x)(z+x)+y(z-x)=0$

$(z-x)(z+x+y)=0$

$(z-x)(z+x+y)=0=(y-z)(y+z+x)$

$z-x=0$ или $x+y+z=0$

Пусть $x+y+z=0$, тогда $x+y=-z$; $y+z=-x$; $z+x=-y$ и отношение $-\frac{z}{z}=-\frac{y}{y}=-\frac{x}{x}=\frac{-1}{1}$

Пусть $x+y+z\neq0$, тогда $z-x=0$ и $y-z=0$

$z=x$ $\quad y=z$

$x=y$ и отношение

$\frac{2z}{z}=\frac{2y}{y}=\frac{2x}{x}=\frac{2}{1}$.

Ответ: если $x+y+z=0$, то $-\frac{1}{1}$

если $x+y+z\neq0$, то $\frac{2}{1}$

⊕

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7981

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭF 11-95

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5 Существует 3 варианта положить фрукты. Или 3 яблока в одну корзину, всё остальное апельсины, или в одной 1 яблоко, в другой 2 яблока, остальное апельсины, или в 3 корзинах по 1 яблоку, всё остальное апельсины. Назовём фруктов, которых меньше меньшими (или ~~н~~ если 2 яблока и 2 ап - то меньший любой из фруктов.).

Если менять все фрукты в одной корзине на противоположные, то мы просто меняем вид меньшего фрукта и это ничего не меняет.

Кол-во меньших в корзинах как минимум 1 раз отличается на нечетное число. в начале:

3 яб 1 ап, 4 ап; 4 ап, 4 ап - разница нечёт

2 яб 2 ап; 3 ап 1 яб; 4 ап, 4 ап - разн - нечёт

1 яб	1 яб	1 яб	
3 ап	3 ап	3 ап	4 ап

- разница между яблоками нечетна, если мы заменим все ~~яб~~ фрукты одной корзины, то всё равно разница не станет четной. Если мы будем брать из каждой корзины по ~~яблок~~ фрукту, то кол-во яблок в каждой станет или +1 или -1, то разница в яблоках относительно ~~между 2 корзинами б~~ двух корзин или не будет меняться (если -1; -1 или +1, +1) или будет меняться на 2 (+1; -1). Поэтому кол-во яблок между 2 корзинами (хотя бы двумя) будет нечетным, а чтобы в каждой был только один вид фруктов разница должна быть или 0 (если в двух корзинах по 4) или 4 (если в одной 0, а в другой 4 яблока), то есть разница - четное число, а мы не можем этого сделать.

Ответ: нет, не могла.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

~~n кол-во детей~~ n – кол-во детей

что бы были 2 равных группы, n ~~..~~ должно быть кратно двум (n:2)

если всего 2 человека, то не выполнятся условие

либо у обоих сосед ~~того~~ того же пола, либо у обоих сосед другого пола

из этого следует: $n>2$

~~если детей чётное количество, и их больше двух, то хоровод можно разделить на две равные части. В одной только мальчики, в другой только девочки.~~

из 2х человек нельзя образовать хоровод по данному правилу, а значит и нельзя образовать „звено" (можно составить хоровод из нескольких одинаковых звеньев, при этом даже одно звено будет являться хороводом)

±

возьмём следующее чётное число. это 4

из 4х человек можно образовать звено

~~М Д М~~ М Д Д М или М М М Д

значит хоровод состоит из нескольких звеньев по 4 ребёнка в каждом, тогда число детей в хороводе должно быть кратно четырём.

Ответ: 4k детей, где k – кол-во звеньев, $k \in N$

№3

если при замене числа на сумму остальных чисел сумма всех чисел не меняется, то сумма чисел, кроме одного, равна этому числу

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7991

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯМ33-56

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$M \in \{a_1, a_2, a_3 \dots a_{2015}\}$

возьмём произвольное число a_x, тогда:

$a_x = a_1 + a_2 + \dots + a_{x-1} + a_{x+1} + \dots + a_{2015} = S - a_x$

S — сумма всех элементов множества M

следовательно:

$2a_x = S$

$a_x = \frac{S}{2}$

+

получается $a_1 = a_2 = \dots = a_{2015} = \frac{S}{2}$

тогда:

$\frac{S}{2} \cdot 2015 = S$

$2015 S = 2S$

$S = 0$

$a_x = \frac{S}{2} = 0$ выходит, что множество M состоит из 2015ти нулей, а значит произведение всех его членов равно нулю

Ответ: произведение равно нулю

№4

если $g(x)$ имеет 1 корень, то $g(x)$ можно представить как $(x-y)^2$, где y — корень квадратного трёхчлена $g(x)$

тогда:

$g(1+3x) = (1+3x-y)^2$ $\quad$ $g(2x-3) = (2x-3-y)^2$

$(1+3x-y)^2 + (2x-3-y)^2 = 0$ т.к. квадрат не может быть отрицательным числом, то оба значения квадратов равны нулю

$\begin{cases}(1+3x-y)^2=0\\(2x-3-y)^2=0\end{cases}$ $\begin{cases}1+3x-y=0 \; (1)\\2x-3-y=0 \; (2)\end{cases}$ $(1)-(2)$ $3x+1-y-2x+3+y=0-0$

$x+4=0$

$x=-4 \Rightarrow y = 1+3x = 1-12 = -11$

Ответ: корень равен -11

+

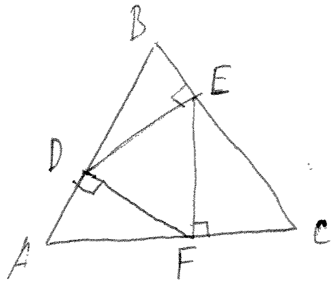
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 7991

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЯМ33-56

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.



1) $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ \Rightarrow \angle BDE = \angle CEF = \angle DFA = 30^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{BE}{BD} = \frac{CF}{CE} = \frac{1}{2}$; $AB = BC = AC$ $\Bigg\} \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$

2) $\angle EDF = \angle EFD = \angle DEF = 90^\circ - \angle CEF = 90^\circ - \angle DFA = 90^\circ - \cancel{DFA}\,CEF = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

значит $\triangle DEF$ – равносторонний.

все равносторонние треугольники подобные по двум углам

рассмотрим $\triangle BED$:

$BE = \frac{1}{3}BC = BC = BE \cdot 3$

$DE = BE \cdot \sqrt{3}$ т.к. $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DE}{DB} \Rightarrow DE = \frac{DB \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{DB}{2} \cdot \sqrt{3} = BE \cdot \sqrt{3}$

$\cancel{\frac{BE}{DE} = \frac{BE}{BE\sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{3}BC}{}}$ $\frac{DE}{BC} = \frac{BE \cdot \sqrt{3}}{BE \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = \sqrt{3}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = k^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

~~Ответ: делится в~~

Ответ: делит в отношении $\frac{1}{2}$; площади относятся как $\frac{3}{1}$