

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 32991

1. Центры окружностей лежат на прямой p . Каждая окружность внешне касается соседних с ней. Радиусы окружностей последовательно равны 3, 6, 9, 12, Через центры окружностей проведены прямые, перпендикулярные p . Они пересекаются с окружностями в точках A_1 и B_1 , A_2 и B_2 , A_3 и B_3 , Докажите, что точки A_1, A_2, A_3, \dots принадлежат одной параболе.

2. Банк «Фантастика» предлагает такие условия срочного вклада: если вклад хранится n дней, то клиенту возвращается кроме положенной суммы ещё $0.001(n^5 - n^3)/3$ рублей. На какое целое число дней надо положить 300 000 рублей, чтобы возвращаемая сумма была целым числом?

3. Даны два утверждения.

(1) Уравнение $2a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + 2c = 0$ не имеет решения.

(2) В треугольнике со сторонами a, b, c сторона c лежит против тупого угла.

Могут ли эти утверждения быть одновременно верными? Является ли одно из них следствием другого?

4. Докажите справедливость неравенства

$$10(x^2 + y^2) + 3(x + y) - 8xy \leq 18$$

для всех чисел $x, y \in [0,1]$.

5. Лист бумаги свёрнут без наложения бумаги в трубу. Площадь поперечного сечения трубы не превышает 6 дм^2 . Лист развернули и разрезали (без отхода бумаги) на квадраты и треугольники. Из этих фигур сложили прямоугольник, одна из сторон которого оказалась не менее 4 дм. Фигуры расположились поочередно – квадраты и треугольники – так, что никакие две одноимённые фигуры не имеют общих точек кроме, может быть, вершин. Найдите возможное число квадратов. Может ли суммарная площадь квадратов превышать суммарную площадь треугольников?

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 32992

1. В точке $O(0,0)$ координатной плоскости находится электростанция, в точках $A(0,6)$, $B(8,6)$, $C(8,0)$ – потребители электроэнергии. Точки $P(x, 3)$, $Q(8 - x, 3)$ выбраны так, чтобы суммарная длина отрезков OP, AP, PQ, BQ, CQ электрокабеля была наименьшей. Может ли угол OAP быть равным $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$?
2. Функции $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$, $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ таковы, что уравнение $f_1(x) = 0$ имеет два различных корня и оба этих корня меньше 2014, а уравнение $f_2(x) = 0$ также имеет два различных корня и оба его корня больше 2014. Может ли уравнение $f_1(x) + 2f_2(x) = 0$ иметь два корня, один из которых меньше 2014, а другой больше 2014?
3. Найдите все такие натуральные числа x , что $2x^2 + x - 6$ является квадратом простого числа.
4. Лучшего спортсмена года выбирают 20 экспертов из 5 кандидатов. Каждый эксперт подает один голос ровно за одного кандидата. Сколькими способами могут распределиться голоса? Два журналиста, не входящие в число экспертов, считают, что один из кандидатов не может быть лучшим, а четверо остальных вполне достойны. Какова вероятность избрания лучшим этого спортсмена первоначальным (из 20) и расширенным (из 22) составом экспертов, включающим и двух таких журналистов?
5. Найдите все возможные значения углов треугольника, у которого длины высот – целые числа, а радиус вписанной окружности равен 1.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 33991

1. Покажите, что функция

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{7}{5} - xy - \frac{x}{2y+3} - \frac{y}{2x+3}}$$

определена для всех чисел $x, y \in [0, 1]$. Найдите максимальное значение функции в этой области.

2. В заполярном городе производственные помещения одной из фирм располагались в вершинах прямоугольника со сторонами 80 метров и 60 метров. Руководство фирмы решило соединить эти помещения крытыми переходами. Но оказалось, что на эти цели фирма может выделить деньги достаточные для строительства только 186 метров переходов. Можно ли на эти деньги построить переходы так, чтобы из любого помещения можно было попасть в любое другое, не выходя на улицу? Предложите вариант прокладки таких переходов или докажите, что его не существует.

3. Банк «Чудесный» предлагает такие условия срочного вклада: если вклад хранится n дней, то клиенту возвращается кроме положенной суммы ещё $0.001(n^5 - n^3)/3$ рублей. На какое целое число дней надо положить 300 000 рублей, чтобы возвращаемая сумма была целым числом?

4. Решите уравнение с двумя неизвестными

$$\sin x \sin y = |\sin x \sin y|.$$

5. На прямолинейной просеке стоит лесник. По просеке он может идти со скоростью 4 км/ч, а по лесу – со скоростью 2 км/ч. Изобразите на рисунке в системе координат (ось OX совпадает с просекой, а лесник находится в начале координат) геометрическое место точек, в которые лесник может прийти за один час ходьбы. Найдите площадь области, в точки которой лесник может прийти не более, чем за один час ходьбы.