Некоторые задачи отборочного этапа Олимпиады школьников "Надежда энергетики" по предмету "математика" в 2014/2015 учебном году

Задача 1. (10, 11 класс) Два дворника из двух шлангов наполняют бассейн. Разница между временем, за которое наполнил бы бассейн только первый дворник из своего шланга и временем, за которое наполняют бассейн оба вместе, в 4 раза меньше, чем разница между временем, за которое наполнил бы бассейн только второй дворник из своего шланга и временем, за которое наполняют бассейн оба вместе. Во сколько раз расход воды у первого дворника больше (или меньше), чем у второго?

Решение. Пусть v_1 и v_2 — расход воды в час, что равно скорости наполнения бассейна шлангами (измеряется, например, литрами в час), t — время совместного наполнения бассейна из обоих шлангов, V — объем бассейна. Введем обозначение $a = V/v_1 - t$. Тогда

$$\frac{V}{v_2} - t = 4a, \quad v_1 = \frac{V}{a+t}, \quad v_2 = \frac{V}{4a+t},$$

а скорость совместного наполнения равна V/t. Таким образом,

$$\frac{V}{a+t} + \frac{V}{4a+t} = \frac{V}{t}, \quad t = 2a, \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{V/(a+2a)}{V/(4a+2a)} = \frac{6a}{3a} = 2.$$

Ответ: больше в 2 раза.

Задача 2. (9, 10, 11 класс) Дядька Черномор наварил для своих богатырей котел киселя, который все богатыри разом могут выпить за время T. Но сначала на трапезу пришел только один богатырь. Спустя некоторое время к нему присоединился второй, еще через столько же времени – третий, за ним через такой же промежуток – четвертый и так до последнего. Оказалось в итоге, что первый пробыл у котла в n раз дольше последнего. Сколько времени ел кисель последний богатырь, если скорость поглощения у всех богатырей одинакова?

Решение. Пусть x — время (например, в часах), которое провел за трапезой последний богатырь, тогда первый провел за едой время nx. Если t — интервал между включениями в процесс поглощения новых участников, m — количество богатырей, то $nx, nx - t, nx - 2t, \ldots, nx - (m-1)t$ — время, которое провели у котла первый, второй, третий, . . . , последний богатыри. Совокупное время трапезы всей дружины — сумма этой арифметической прогрессии, т. е. $(nx + x)m/2$ (человекочасов). Если бы дружина все время поглощала кисель в полном составе, то каждый из m участников провел бы у котла время T и совокупное время для всей дружины составило бы mT человекочасов. Таким образом, $(nx+x)m/2 = mT$, откуда $x = 2T/(n+1)$.

Ответ: $2T/(n+1)$.

Задача 3. (11 класс) Найдите наименьшее значение дроби $\dfrac{81^x+9^x+5}{(9^x+1)^2}$.

Решение. Пусть $a = 9^x$. Преобразуем выражение.

$$y = \frac{a^2+a+5}{(a+1)^2} = 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{5}{(a+1)^2}$$

Снова заменим $z = \dfrac{1}{a+1}$. Тогда $y = 5z^2 - z + 1$. Минимум этого выражения достигается в точке $z_{\min} = 0.1$ и равен $y_{\min} = 0.95$.

Ответ: $y_{\min} = 0.95$.

Задача 4. (9 класс) Найдите все значения a, при которых уравнение $x^4 = a^2 - 2015a + 2014$ имеет ровно один корень x. Найдите этот корень при каждом найденном значении a.

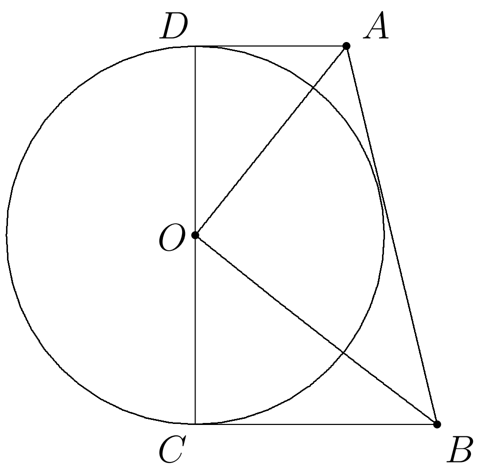
Решение. Уравнение $x^4 = b$ имеет ровно один корень x (при этом $x = 0$) тогда и только тогда, когда $b = 0$. Решая уравнение $b = a^2 - 2015a + 2014 = 0$ относительно a, находим $a = 1$, $a = 2014$.

Ответ: $a \in \{1,\ 2014\}$, $x = 0$.

Задача 5. (9 класс) Круглая в плане Замедвежская крепость расположена в труднодоступном месте. Для экскурсантов сооружен прямолинейный смотровой мостик длины L, перемещаясь по которому можно обозреть ровно половину окружности крепости. При этом из начальной точки мостика крепость видна под углом $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ (это угол между направлениями на крайнюю левую и крайнюю правую видимую точки), а из конечной – под углом $\beta = \dfrac{2\pi}{3}$. Найдите радиус крепости.

Решение.

1. Заметим, что $\alpha + \beta = \pi$. С другой стороны, сумма углов A и B прямоугольной трапеции $ABCD$ также равна π. Это означает, что соответствующие углы совпадают, а сторона AB является касательной к окружности. Угол AOB, являющийся полусуммой углов A и B, равен прямому.



Обозначим длину AB через L, радиус окружности через R, длины сторон OA и OB через a и b соответственно.

2. Из прямоугольных треугольников ODA и OCB выражаем их гипотенузы $a = \dfrac{R}{\sin\alpha/2}$, $b = \dfrac{R}{\sin\beta/2}$.

3. По теореме Пифагора для $\triangle AOB$ имеем

$$L^2 = a^2 + b^2 = \frac{R^2}{\sin^2\alpha/2} + \frac{R^2}{\sin^2\beta/2}.$$

Подставляя значения, получаем

$$L^2 = R^2\left(\frac{1}{\sin^2\pi/6} + \frac{1}{\sin^2\pi/3}\right) = \frac{16}{3}R^2.$$

Ответ $R = \dfrac{\sqrt{3}}{4}L$.

Задача 6. (8 класс) Найдите количество различных решений числового ребуса

$$\begin{array}{r} \ast\ \ast\ \ast\ \ast \\ +\ \ast\ \ast\ \ast\ \ast \\ \hline 2\ 0\ 1\ 4 \end{array}$$

Символ $\ast$ означает некоторую десятичную цифру. В разных местах цифры могут быть различными. Самой левой цифрой не может быть 0. Решения, отличающиеся друг от друга порядком слагаемых, считаются одинаковыми.

Решение. Самые левые $\ast$ не могут означать 0. Поэтому первыми цифрами обоих слагаемых должны быть 1.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & * & * & * \\
+ & 1 & * & * & * \\
\hline
 & 2 & 0 & 1 & 4
\end{array}
$$

Теперь видно, что при сложении переноса в самый старший разряд не было, значит, самые левые из оставшихся $*$ означают нули.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 0 & * & * \\
+ & 1 & 0 & * & * \\
\hline
 & 2 & 0 & 1 & 4
\end{array}
$$

Осталось разбить на два неотрицательных целых слагаемых число 14. Это можно сделать ровно 8 способами: $0 + 14 = 1 + 13 = \cdots = 6 + 8 = 7 + 7$.

Ответ. 8.

Задача 7 (7, 8 класс) Мартышка и попугай решили шагами измерить длину удава. Длина одного шага мартышки 26 см, а попугая – 8 см. Они пошли навстречу друг другу, оставляя следы на песке. Оказалось, что следы совпали 11 раз. Какова длина удава?

Решение сводится к вычислению $\text{НОК}(26, 8) \cdot (11 - 1) = 1040$ см.
Ответ: 10 м 40 см.