Решения вариантов заключительного этапа Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2018/2019.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17111 для 11 класса.

Задача 1.

На факультете ядерного дирижаблестроения подсчитали, что в процентном отношении мальчиков на первом курсе больше, чем мальчиков на всем факультете. Кого (в процентном отношении) больше – первокурсников среди всех мальчиков факультета или всех студентов первого курса среди всех студентов факультета?

Решение.

Введем обозначения:
m – количество мальчиков на 1 курсе,
M – количество всех мальчиков на факультете,
k – количество студентов на 1 курсе,
K – количество студентов на всем факультете.

Согласно условию,

$$\frac{m}{k} > \frac{M}{K}.$$

Требуется сравнить

$$\frac{m}{M} \text{ и } \frac{k}{K}.$$

Из условия по свойству пропорции получаем, что левая дробь больше.

Ответ: доля первокурсников среди всех мальчиков факультета больше, чем доля всех студентов первого курса среди всех студентов факультета

Задача 2.

Решите уравнение

$$x^2 - [x] = 2019,$$

в котором $[x]$ означает целую часть числа x.

Решение.

Если представить произвольное число x в виде $x = m + \alpha$, где m – целое, $\alpha \in (0, 1)$, то $[x] = m = x - \alpha$. Тогда исходное уравнение можно переписать в виде

$$x^2 - x + \alpha = 2019.$$

Поскольку $\alpha \in (0, 1)$, то

$$2018 \leq x^2 - x \leq 2019.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - x$. Это парабола с корнями 0 и 1 и с ветвями, направленными вверх.

Поэтому полученное двойное неравенство может выполняться на некотором отрезке, расположеном левее точки $x = 0$ и на некотором другом отрезке, расположеном правее точки $x = 1$. Рассмотрим их по очереди.

Пусть $x < 0$. Легко вычислить (устно), что

$$f(-45) = (-45)^2 + 45 = 2025 + 45 > 2019,$$
$$f(-44) = (-44)(-45) = 45^2 - 45 < 2018.$$

Следовательно, искомые $x \in (-45, -44)$. В этом случае $[x] = -45$ и исходное уравнение принимает вид

$$x^2 - (-45) = 2019.$$

Его решением (отрицательным) является $x_1 = -\sqrt{1974}$.

При $x > 1$ аналогично вычисляем (также устно)

$$f(45) = (45)^2 - 45 = 2025 - 45 < 2018,$$
$$f(46) = 46 \cdot 45 = 45^2 + 45 > 2019.$$

Следовательно, искомые $x \in (45, 46)$. В этом случае $[x] = 45$ и исходное уравнение принимает вид

$$x^2 - 45 = 2019.$$

Его решением (теперь положительным) является $x_2 = \sqrt{2064}$.

Ответ: $x_1 = -\sqrt{1974}$, $x_2 = \sqrt{2064}$.

Задача 3.

Транспортная компания «Пианогруз» специализируется на перевозке тяжелых музыкальных инструментов. После того, как в автомашине компании были оборудованы места для грузчиков, остался грузовой отсек в форме квадрата со стороной 3 м. Изобразите в координатах «длина – ширина» множество всех точек, которые могут задавать размеры прямоугольного инструмента, помещающегося в грузовой отсек. Считайте, что оборудование кузова позволяет закрепить инструмент в любом положении, а ограничения по высоте отсутствуют.

Решение.

1. Поскольку наклоненный (поставленный на ребро) инструмент в проекции на дно отсека образует прямоугольник, то достаточно рассмотреть плоскую задачу о прямоугольнике внутри квадрата. Пусть длина инструмента равна l, ширина h. Обозначим длину стороны квадратного кузова a.

Сначала рассмотрим очевидный случай, когда инструмент помещается вдоль (или, что то же, поперек) кузова. В этом случае $l \le a$, $h \le a$.

2. Теперь рассмотрим ситуацию, когда $l > a$.

2a. Пусть длинная сторона инструмента (прямоугольника) $KLMN$ параллельна диагонали квадрата (см. рис. 2a).
Поскольку $\angle MAO = 45°$, а $MN \perp AC$, то $\triangle MAO$ – равнобедренный и $MO = OA$. Из аналогичных рассуждений для $\triangle CLK$ и равенства этих треугольников друг другу следует, что $LM + MN = AC$.
Таким образом, при $KN \parallel AC$ стороны любого вписанного в квадрат прямоугольника должны удовлетворять соотношению

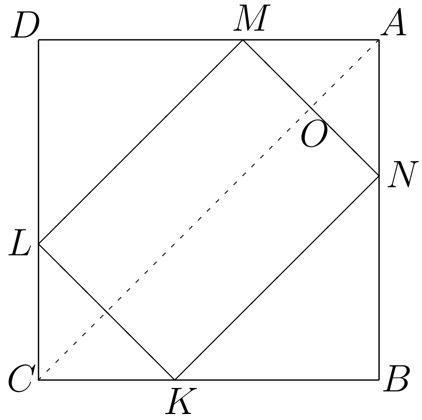


рис. 2a

$$l + h = a\sqrt{2}.$$

2b. Пусть теперь стороны прямоугольника $KLMN$ не параллельны диагоналям квадрата (см. рис. 2б).
Пусть $\angle NKB = \alpha$. Тогда $\angle KLC = \angle MNA = \alpha$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Следовательно, прямоугольные треугольники NKB, KLC подобны, а $\triangle KLC = \triangle MNA$ (по гипотенузе и острому углу).

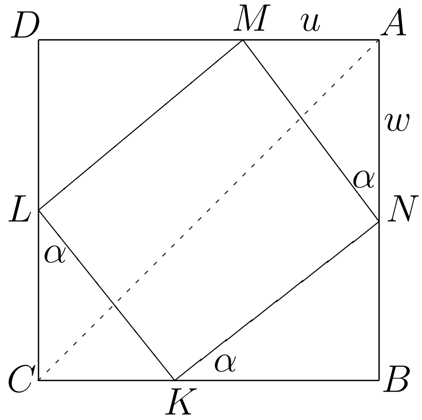


рис. 2б

Пусть коэффициент подобия $\triangle NKB$ и $\triangle KLC$ равен k. Если обозначить через u и w стороны MA и AN, то

$$AB = a = w + k\,u,$$
$$CB = a = u + k\,w,$$

откуда $$(k-1)w = (k-1)u.$$

Если $k \neq 1$, то сокращая, получаем $w = u$, т.е. треугольники MAN и LCK равнобедренные. Если же $k = 1$, то указанные треугольники равнобедренны по построению. Следовательно, стороны LM и KN параллельны диагонали AC.

Таким образом, доказано, что все четыре вершины вписанного в квадрат прямоугольника лежат на сторонах квадрата тогда и только тогда, когда стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

3. Зафиксируем длину стороны l и выясним, какое максимальное значение может принимать ширина h при различных положениях прямоугольника. Для этого будем мысленно вращать его, начиная с положения, параллельного диагонали. На рис 3 отмечено, как будут двигаться его вершины.

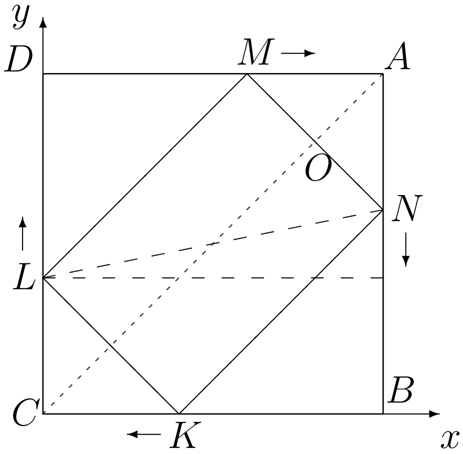


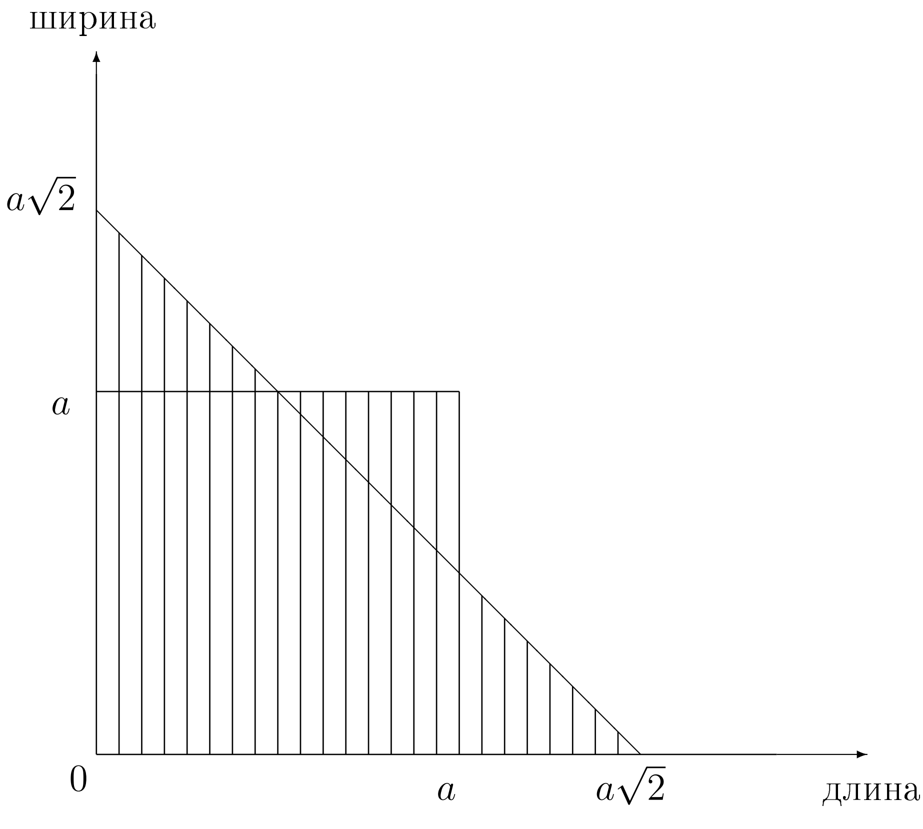
рис. 2a

Введем оси координат Cx, Cy как показано на рисунке. Рассмотрим диагональ LN. Квадрат ее длины можно найти из прямоугольного треугольника (пунктирного), один катет которого равен a, другой равен разности ординат точек L и N, которая при вращении прямоугольника уменьшается.

Таким образом, диагональ LN будет уменьшаться, и, следовательно, будет уменьшаться ширина h. Поэтому максимальная ширина соответствует исходному положению, при котором $l + h = a\sqrt{2}$.

Остается изобразить в координатных осях $l - h$ треугольник, отсекаемый в первой четверти прямой $h \le a\sqrt{2} - l$, и совместить два полученных множества.

Ответ. Искомое множество точек показано ниже вертикальной штриховкой.



Задача 4.

Четыре бригады разрабатывали открытым способом месторождение угля в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. На втором году из-за метеоусловий в течение четырех месяцев работы не велись, а все остальное время на добыче бригады работали поочередно (по одной). Отношение времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества добытого угля соответственно равны: в первый год 4:1:2:5 и 10 млн. т.; во второй год 2:3:2:1 и 7 млн.т.; в третий год 5:2:1:4 и 14 млн. т. Сколько угля добыли бы за 4 месяца эти четыре бригады, работая вместе?

Решение. Пусть i-я бригада добывает за месяц x_i угля. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 14, \end{cases}$$

Сложив удвоенное первое уравнение с утроенным вторым и вычтя третье уравнение, получим

$$9(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 27.$$

Тогда

$$4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 12.$$

Ответ: 12 млн.т.

Задача 5.

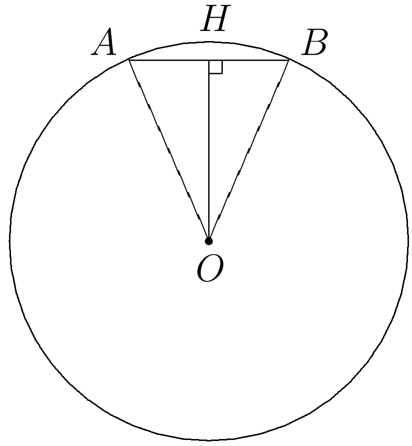
Окружность единичного радиуса поделили на 2^{2019} равных частей. Докажите, что расстояние от центра окружности до хорды, стягивающей одну такую часть, составляет ровно половину от величины

$$\sqrt{\underbrace{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}_{2018 \text{ двоек}}}.$$

Решение.

Изобразим (внемасштабно) $\angle AOB$, составляющий одну 2^{2019}-ю часть окружности. Обозначим его α. Ясно, что

$$\alpha = \frac{2\pi}{2^{2019}} = \frac{\pi}{2^{2018}}.$$



В условии дана формула для OH. Из прямоугольного треугольника OHB с гипотенузой $OB = 1$ и с острым углом $BOH = \dfrac{\alpha}{2}$ получаем, что

$$OH = OB\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, требуется доказать, что

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{2019}}\right) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{2018\text{ двоек}}}.$$

Обобщим требуемую формулу (домножив предварительно на 2)

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n\text{ двоек}}} \qquad (*)$$

и докажем ее по индукции. Тогда при $n = 2018$ будем иметь требуемое.

База индукции при $n = 1$ очевидна:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \sqrt{2}.$$

Индуктивный переход будет заключаться в том, чтобы доказать, что из верности формулы $(*)$ будет следовать верность формулы

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{(n+1)\text{ двоек}}}.$$

Преобразуем правую часть, используя $(*)$

$$\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{(n+1)\text{ двоек}}} = \sqrt{2+\sqrt{\underbrace{2+\ldots+\sqrt{2}}_{(n)\text{ двоек}}}} = \sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

Обозначим $\beta = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. Теперь остается доказать соотношение

$$2\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{2+2\cos\beta}$$

для угла $\beta \in (0, \pi/2)$. Возводя обе стороны равенства в квадрат и деля на 2, получаем известную формулу косинуса половинного угла

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{2}.$$

Индуктивный переход доказан. Следовательно, формула $(*)$ верна при любом $n \geq 1$. Остается положить $n = 2018$.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17101 для 10 класса

Задача 1.

На факультете ядерного дирижаблестроения подсчитали, что в процентном отношении мальчиков на первом курсе больше, чем мальчиков на всем факультете. Кого (в процентном отношении) больше – первокурсников среди всех мальчиков факультета или всех студентов первого курса среди всех студентов факультета?

Решение.

Введем обозначения:
m – количество мальчиков на 1 курсе,
M – количество всех мальчиков на факультете,
k – количество студентов на 1 курсе,
K – количество студентов на всем факультете.

Согласно условию,

$$\frac{m}{k} > \frac{M}{K}.$$

Требуется сравнить

$$\frac{m}{M} \text{ и } \frac{k}{K}.$$

Из условия по свойству пропорции получаем, что левая дробь больше.

Ответ: доля первокурсников среди всех мальчиков факультета больше, чем доля всех студентов первого курса среди всех студентов факультета

Задача 2.

Может ли число n^2+n+17 делиться на 2019 при каких-либо натуральных n? Либо найдите такое минимальное n, либо докажите невозможность.

Решение.

Разложим делитель: $2019 = 3 \cdot 673$.

Число n^2 дает при делении на 3 остатки 0 и 1 (что легко проверить, например, составляя таблицу остатков)

n	$n \mod 3$	$n^2 \mod 3$
0	0	0
1	1	1
2	2	1

Поэтому число n^2+n будет давать при делении на 3 остатки 0 и 2. Следовательно, n^2+n+17 не кратно 3, а, значит, не делится на 2019.

Ответ: таких n не существует.

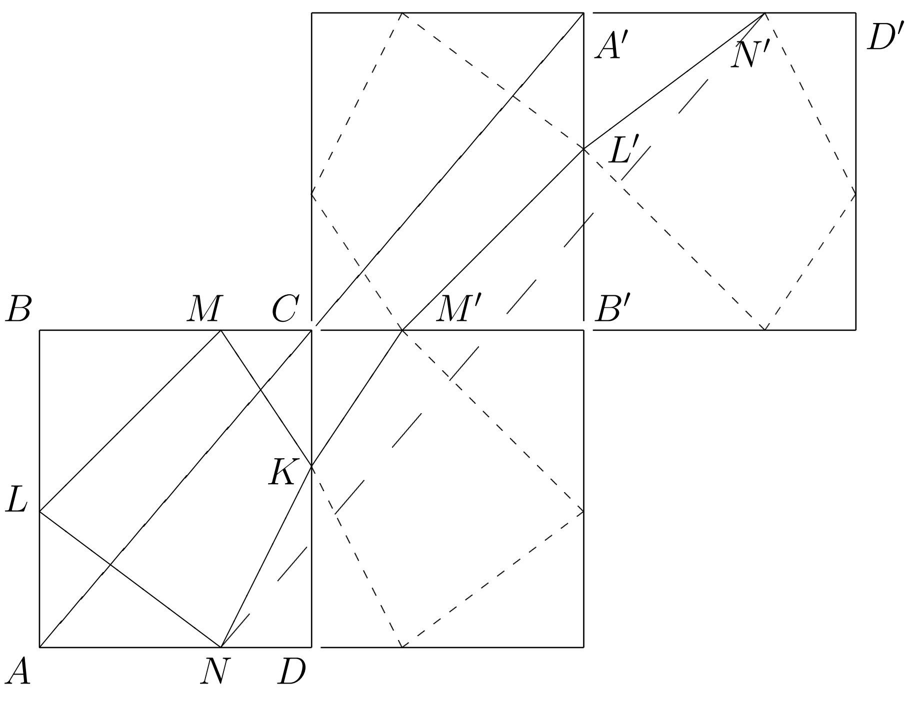
Задача 3.

Два пловца проводят тренировки на карьере прямоугольной формы. Первому удобнее выходить на угол карьера, поэтому он проплывает по диагонали до противоположного угла и обратно. Второму пловцу удобнее начинать из точки, которая делит один из берегов карьера в отношении 2018 : 2019. Он проплывает по четырехугольнику, посещая по одной точке на каждом берегу, и возвращается к месту старта. Может ли второй пловец так выбрать точки на трех других берегах, чтобы его путь был короче, чем у первого? Какое минимальное значение может иметь отношение длины большего пути к меньшему?

Решение.

Изобразим прямоугольный карьер $ADCD$ и вписанный в него четырехугольный маршрут второго пловца $NLMK$.

Отразим симметрично чертеж сначала относительно стороны CD, затем относительно стороны CB', наконец, относительно стороны $A'B'$.



По построению отрезки ND и $N'D'$ равны и параллельны друг другу. Следовательно, $AA'N'N$ – параллелограмм, и его сторона NN' равна удвоенной диагонали исходного прямоугольника AC (т.е. длине пути первого пловца).

Ясно, что сумма длин отрезков NK, KM', $M'L'$ и $L'N'$ равна периметру четырехугольника $NLMK$ (т.е. длине пути второго пловца).

Но длина ломаной $NKM'L'N'$ не меньше длины отрезка NN', являющегося кратчайшим расстоянием между точками N и N'. Отсюда следует, что путь второго пловца не может быть меньше (короче) пути первого.

Пути можно сделать равными, если перенести (пользуясь симметрией построения) точки пересечения отрезка NN' со сторонами DC, CB' и $B'A'$ на исходный прямоугольник. (Можно показать, что получившаяся таким образом фигура будет параллелограммом, но это не входит в постановку задачи.)

При таком построении пути пловцов будут равны и их отношение будет равно 1.

Заметим, что в рассуждениях нигде не использовано то, в какой пропорции исходная точка N делит соответствующую сторону прямоугольника AD.

Ответ:
путь второго пловца не может быть короче, чем у первого;
минимальное отношение длины большего пути к меньшему равно 1.

Задача 4.

В кладовой Пончика и в кладовой Сиропчика запасено суммарно 100 кг варенья. На поедание своих запасов у каждого коротышки ушло одинаковое время несмотря на то, что они обладают разной прожорливостью. «Если бы мой запас был равен твоему, то я бы съел его за 45 дней» – заявил товарищу Пончик. «А если бы мой запас был равен твоему, я бы съел его всего за 20 дней» – ответил Сиропчик. Какое количество варенья и с какой прожорливостью съел каждый из коротышек?

Решение.

Пусть Пончик имеет x кг варенья, а Сиропчик – в n раз больше, т.е. nx кг. Тогда прожорливость Пончика равна $\dfrac{nx}{45}$, а прожорливость Сиропчика $\dfrac{x}{20}$. Тогда равенство время поедания запасов дает уравнение

$$\frac{x}{nx/45} = \frac{nx}{x/20},$$

откуда

$$n^2 = \frac{45}{20} = \frac{9}{4},$$

следовательно, $n = \dfrac{3}{2}$.

Из уравнения

$$x + \frac{3}{2} \cdot x = 100$$

находим $x = 40$. Таким образом, у Пончика было припасено 40 кг варенья, а у Сиропчика – 60 кг.

Их прожорливость равна соответственно $\dfrac{60}{45} = \dfrac{4}{3}$ кг/день и $\dfrac{40}{20} = 2$ кг/день.

Ответ:
Пончик: 40 кг варенья, $\dfrac{4}{3}$ кг/день;
Сиропчик: 60 кг варенья, и 2 кг/день.

Задача 5.
Верно ли неравенство

$$\sqrt{\underbrace{2019 + \sqrt{2019 + \ldots + \sqrt{2019}}}_{2019\ \text{раз}}} < 2019\ ?$$

Решение.
Рассмотрим величину

$$x_n = \sqrt{\underbrace{2019 + \sqrt{2019 + \ldots + \sqrt{2019}}}_{n\ \text{раз}}}$$

Ясно, что $x_n > 0$. Возводя неравенство $x_n < 2019$ в квадрат, получаем

$$x_n^2 = 2019 + x_{n-1} < 2019^2$$

или, что то же

$$x_{n-1} < 2019^2 - 2019.$$

Несложно проверить, что $2019 < 2019^2 - 2019$. Поэтому из неравенства $x_{n-1} < 2019$ следует неравенство $x_n < 2019$ для любого номера n.

Остается проверить, что $x_1 = \sqrt{2019} < 2019$. Это неравенство верно. Теперь переходя от неравенства для x_1 к неравенству для x_2 и так далее, получаем, что неравенство для x_{2019} будет верным.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17091 для 9 класса

Задача 1.

Головастики триасовой дискоглоссы имеют по пять ног, а у головастиков саблезубой лягушки отрастает несколько хвостов (у всех одинаковое количество). Сотрудник парка юрского периода зачерпнул вместе с водой несколько головастиков. Оказалось, что всего у пойманных было 100 ног и 64 хвоста. Сколько же хвостов имеет каждый гловастик саблезубой лягушки, если все пятиногие гловастики имеют один хвост, а все многохвостые – четыре ноги?

Решение.

Обозначим через x количество хвостов у гловастика саблезубой лягушки. Пусть было поймано n пятиногих и k многохвостых головастиков. Подсчет общего количества ног и хвостов дает уравнения

$$\begin{cases} 5n + 4k = 100, \\ n + xk = 64. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $n \leq 100/5 = 20, \qquad k \leq 100/4 = 25.$

Кроме того, $4k = 5(20 - n)$, следовательно, k кратно 5.

Умножим теперь второе уравнение системы на 5 и вычтем из результата первое. Получим

$$(5x - 4)k = 64 \cdot 5 - 100 = 220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11.$$

Поскольку слева стоит произведение двух натуральных чисел и с учетом полученных ограниченый, находим, что k может принимать только значения

$$k = 5 \qquad \text{или} \qquad k = 10 \qquad \text{или} \qquad k = 20.$$

Подставим их по очереди в систему уравнений. При $k = 5$ имеем

$$\begin{cases} 5n + 20 = 100, \\ n + 5x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 16$. Но $64 - 16 = 48$ не кратно 5. Решений нет.

При $k = 10$ получаем

$$\begin{cases} 5n + 40 = 100, \\ n + 10x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 12$. Но $64 - 12 = 52$ не кратно 10. Решений снова нет.

Наконец, при $k = 20$ находим

$$\begin{cases} 5n + 80 = 100, \\ n + 20x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 4$ и $n = 3$.

Ответ: 3 хвоста.

Задача 2.

Может ли число $n^2 + n + 8$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных n? Либо найдите такое минимальное n, либо докажите невозможность.

Решение.

Разложим делитель: $2019 = 3 \cdot 673$.

Число n^2 дает при делении на 3 остатки 0 и 1 (что лекго проверить, например, составляя таблицу остатков)

n	$n \mod 3$	$n^2 \mod 3$
0	0	0
1	1	1
2	2	1

Поэтому число $n^2 + n$ будет давать при делении на 3 остатки 0 и 2. Следовательно, $n^2 + n + 8$ не кратно 3, а, значит, не делится на 2019.

Ответ: таких n не существует.

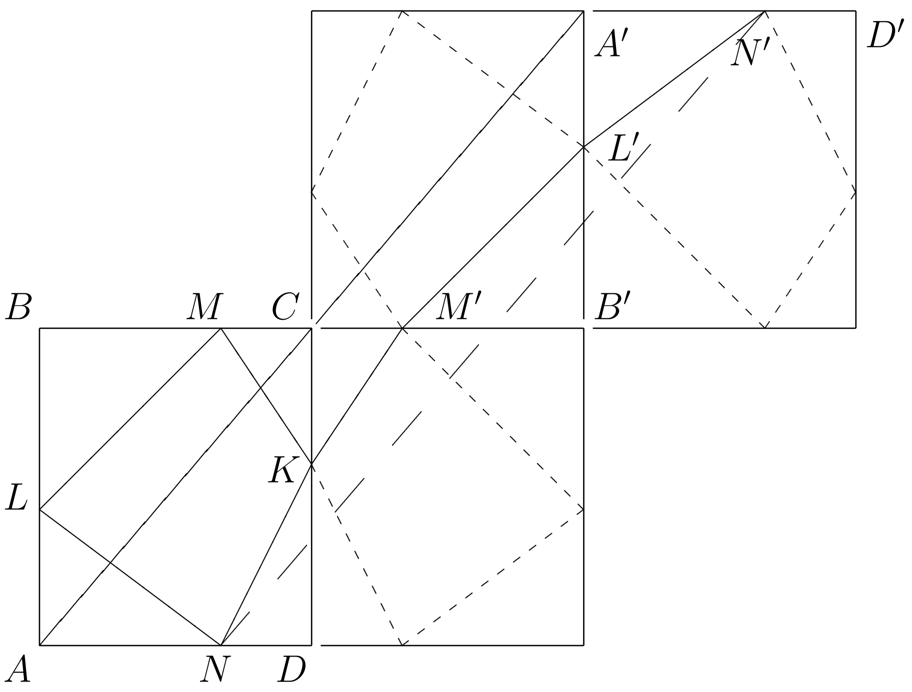
Задача 3.

Два пловца проводят тренировки на карьере прямоугольной формы. Первому удобнее выходить на угол карьера, поэтому он проплывает по диагонали до противоположного угла и обратно. Второму пловцу удобнее начинать из точки, которая делит один из берегов карьера в отношении 2018 : 2019. Он проплывает по четырехугольнику, посещая по одной точке на каждом берегу, и возвращается к месту старта. Может ли второй пловец так выбрать точки на трех других берегах, чтобы его путь был короче, чем у первого? Какое минимальное значение может иметь отношение длины большего пути к меньшему?

Решение.

Изобразим прямоугольный карьер $ADCD$ и вписанный в него четырехугольный маршрут второго пловца $NLMK$.

Отразим симметрично чертеж сначала относительно стороны CD, затем относительно стороны CB', наконец, относительно стороны $A'B'$.



По построению отрезки ND и $N'D'$ равны и параллельны друг другу. Следовательно, $AA'N'N$ – параллелограмм, и его сторона NN' равна удвоенной диагонали исходного прямоугольника AC (т.е. длине пути первого пловца).

Ясно, что сумма длин отрезков NK, KM', $M'L'$ и $L'N'$ равна периметру четырехугольника $NLMK$ (т.е. длине пути второго пловца).

Но длина ломаной $NKM'L'N'$ не меньше длины отрезка NN', являющегося кратчайшим расстоянием между точками N и N'. Отсюда следует, что путь второго пловца не может быть меньше (короче) пути первого.

Пути можно сделать равными, если перенести (пользуясь симметрией построения) точки пересечения отрезка NN' со сторонами DC, CB' и $B'A'$ на исходный прямоугольник. (Можно показать, что получившаяся таким образом фигура будет параллелограммом, но это не входит в постановку задачи.)

При таком построении пути пловцов будут равны и их отношение будет равно 1.

Заметим, что в рассуждениях нигде не использовано то, в какой пропорции исходная точка N делит соответствующую сторону прямоугольника AD.

Ответ:

путь второго пловца не может быть короче, чем у первого;
минимальное отношение длины большего пути к меньшему равно 1.

Задача 4.

В кладовой Пончика и в кладовой Сиропчика запасено суммарно 100 кг варенья. На поедание своих запасов у каждого коротышки ушло одинаковое время несмотря на то, что они обладают разной прожорливостью. «Если бы мой запас был равен твоему, то я бы съел его за 45 дней» – заявил товарищу Пончик. «А если бы мой запас был равен твоему, я бы съел его всего за 20 дней» – ответил Сиропчик. Какое количество варенья и с какой прожорливостью съел каждый из коротышек? (Не забудьте указать единицы измерения.)

Решение.

Пусть Пончик имеет x кг варенья, а Сиропчик – в n раз больше, т.е. nx кг. Тогда прожорливость Пончика равна $\frac{nx}{45}$, а прожорливость Сиропчика $\frac{x}{20}$. Тогда равенство время поедания запасов дает уравнение

$$\frac{x}{nx/45} = \frac{nx}{x/20},$$

откуда

$$n^2 = \frac{45}{20} = \frac{9}{4},$$

следовательно, $n = \frac{3}{2}$.

Из уравнения

$$x + \frac{3}{2} \cdot x = 100$$

находим $x = 40$. Таким образом, у Пончика было припасено 40 кг варенья, а у Сиропчика – 60 кг.

Их прожорливость равна соответственно $\frac{60}{45} = \frac{4}{3}$ кг/день и $\frac{40}{20} = 2$ кг/день.

Ответ:

Пончик: 40 кг варенья, $\frac{4}{3}$ кг/день;

Сиропчик: 60 кг варенья, и 2 кг/день.

Задача 5.

Имеет ли уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2} = 1$$

решение в натуральных числах, больших единицы?

Решение.

Пусть целое $x = n \geq 2$ является решением, обозначим выражение в левой части уравнения как $S(n)$. В левой части при этом ровно $n^2 - n + 1$ слагаемых.

Каждое слагаемое кроме первого заменим меньшим его положительным числом $1/n^2$. Тогда

$$S(n) > \frac{1}{n} + (n^2 - n)\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2 - n}{n^2} = 1.$$

Равенство невозможно.

Ответ: решений не имеет.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17081 для 8 класса

Задача 1.

Головастики триасовой дискоглоссы имеют по пять ног, а у головастиков саблезубой лягушки отрастает несколько хвостов (у всех одинаковое количество). Сотрудник парка юрского периода зачерпнул вместе с водой несколько головастиков. Оказалось, что всего у пойманных было 100 ног и 64 хвоста. Сколько же хвостов имеет каждый гловастик саблезубой лягушки, если все пятиногие гловастики имеют один хвост, а все многохвостые – четыре ноги?

Решение.

Обозначим через x количество хвостов у гловастика саблезубой лягушки. Пусть было поймано n пятиногих и k многохвостых головастиков. Подсчет общего количества ног и хвостов дает уравнения

$$\begin{cases} 5n + 4k = 100, \\ n + xk = 64. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $n \le 100/5 = 20, \qquad k \le 100/4 = 25.$

Кроме того, $4k = 5(20 - n)$, следовательно, k кратно 5.

Умножим теперь второе уравнение системы на 5 и вычтем из результата первое. Получим

$$(5x - 4)k = 64 \cdot 5 - 100 = 220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11.$$

Поскольку слева стоит произведение двух натуральных чисел и с учетом полученных ограниченый, находим, что k может принимать только значения

$$k = 5 \qquad \text{или} \qquad k = 10 \qquad \text{или} \qquad k = 20.$$

Подставим их по очереди в систему уравнений. При $k = 5$ имеем

$$\begin{cases} 5n + 20 = 100, \\ n + 5x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 16$. Но $64 - 16 = 48$ не кратно 5. Решений нет.

При $k = 10$ получаем

$$\begin{cases} 5n + 40 = 100, \\ n + 10x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 12$. Но $64 - 12 = 52$ не кратно 10. Решений снова нет.

Наконец, при $k = 20$ находим

$$\begin{cases} 5n + 80 = 100, \\ n + 20x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 4$ и $n = 3$.

Ответ: 3 хвоста.

Задача 2.

Может ли число $n^2 + n + 2$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных n? Либо найдите такое минимальное n, либо докажите невозможность.

Решение.

Разложим делитель: $2019 = 3 \cdot 673$.

Число n^2 дает при делении на 3 остатки 0 и 1 (что легко проверить, например, составляя таблицу остатков)

n	$n \mod 3$	$n^2 \mod 3$
0	0	0
1	1	1
2	2	1

Поэтому число $n^2 + n$ будет давать при делении на 3 остатки 0 и 2. Следовательно, $n^2 + n + 2$ не кратно 3, а, значит, не делится на 2019.

Ответ: таких n не существует.

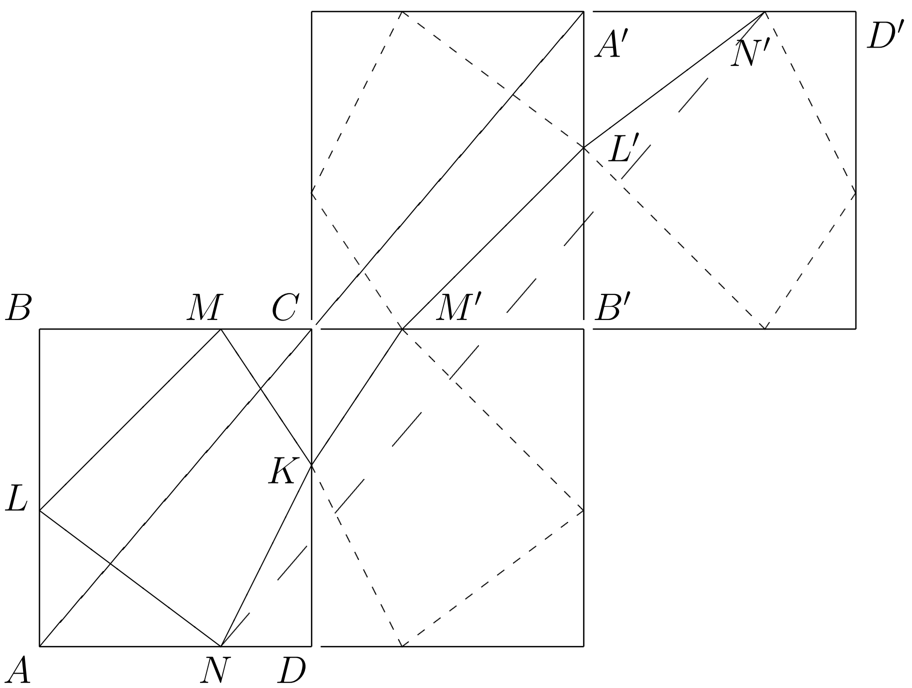
Задача 3.

Два пловца проводят тренировки на карьере прямоугольной формы. Первому удобнее выходить на угол карьера, поэтому он проплывает по диагонали до противоположного угла и обратно. Второму пловцу удобнее начинать из точки, которая делит один из берегов карьера в отношении 2018 : 2019. Он проплывает по четырехугольнику, посещая по одной точке на каждом берегу, и возвращается к месту старта. Может ли второй пловец так выбрать точки на трех других берегах, чтобы его путь был короче, чем у первого?

Решение.

Изобразим прямоугольный карьер $ADCD$ и вписанный в него четырехугольный маршрут второго пловца $NLMK$.

Отразим симметрично чертеж сначала относительно стороны CD, затем относительно стороны CB', наконец, относительно стороны $A'B'$.



По построению отрезки ND и $N'D'$ равны и параллельны друг другу. Следовательно, $AA'N'N$ – параллелограмм, и его сторона NN' равна удвоенной диагонали исходного прямоугольника AC (т.е. длине пути первого пловца).

Ясно, что сумма длин отрезков NK, KM', $M'L'$ и $L'N'$ равна периметру четырехугольника $NLMK$ (т.е. длине пути второго пловца).

Но длина ломаной $NKM'L'N'$ не меньше длины отрезка NN', являющегося кратчайшим расстоянием между точками N и N'. Отсюда следует, что путь второго пловца не может быть меньше (короче) пути первого.

Заметим, что в рассуждениях нигде не использовано то, в какой пропорции исходная точка N делит соответствующую сторону прямоугольника AD.

Ответ:
путь второго пловца не может быть короче, чем у первого (но может быть равен ему).

Задача 4.

В кладовой Пончика и в кладовой Сиропчика запасено суммарно 100 кг варенья. На поедание своих запасов у каждого коротышки ушло одинаковое время несмотря на то, что они обладают разной прожорливостью. «Если бы мой запас был равен твоему, то я бы съел его за 45 дней» – заявил товарищу Пончик. «А если бы мой запас был равен твоему, я бы съел его всего за 20 дней» – ответил Сиропчик. Какое количество варенья и с какой прожорливостью съел каждый из коротышек? (Не забудьте указать единицы измерения.)

Решение.

Пусть Пончик имеет x кг варенья, а Сиропчик – в n раз больше, т.е. nx кг. Тогда прожорливость Пончика равна $\frac{nx}{45}$, а прожорливость Сиропчика $\frac{x}{20}$. Тогда равенство время поедания запасов дает уравнение

$$\frac{x}{nx/45} = \frac{nx}{x/20},$$

откуда

$$n^2 = \frac{45}{20} = \frac{9}{4},$$

следовательно, $n = \frac{3}{2}$.

Из уравнения

$$x + \frac{3}{2} \cdot x = 100$$

находим $x = 40$. Таким образом, у Пончика было припасено 40 кг варенья, а у Сиропчика – 60 кг.

Их прожорливость равна соответственно $\frac{60}{45} = \frac{4}{3}$ кг/день и $\frac{40}{20} = 2$ кг/день.

Ответ:

Пончик: 40 кг варенья, $\frac{4}{3}$ кг/день;

Сиропчик: 60 кг варенья, и 2 кг/день.

Задача 5.

Имеет ли уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2} = 1$$

решение в натуральных числах, больших единицы?

Решение.

Пусть целое $x = n \geq 2$ является решением, обозначим выражение в левой части уравнения как $S(n)$. В левой части при этом ровно n^2-n+1 слагаемых.

Каждое слагаемое кроме первого заменим меньшим его положительным числом $1/n^2$. Тогда

$$S(n) > \frac{1}{n} + (n^2-n)\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2-n}{n^2} = 1.$$

Равенство невозможно.

Ответ: решений не имеет.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17071 для 7 класса

Задача 1.

Головастики триасовой дискоглоссы имеют по пять ног, а у головастиков саблезубой лягушки отрастает несколько хвостов (у всех одинаковое количество). Сотрудник парка юрского периода зачерпнул вместе с водой несколько головастиков. Оказалось, что всего у пойманных было 100 ног и 64 хвоста. Сколько же хвостов имеет каждый гловастик саблезубой лягушки, если все пятиногие гловастики имеют один хвост, а все многохвостые – четыре ноги?

Решение.

Обозначим через x количество хвостов у гловастика саблезубой лягушки. Пусть было поймано n пятиногих и k многохвостых головастиков. Подсчет общего количества ног и хвостов дает уравнения

$$\begin{cases} 5n + 4k = 100, \\ n + xk = 64. \end{cases}$$

Из первого уравнения имеем $n \le 100/5 = 20$, $k \le 100/4 = 25$.

Кроме того, $4k = 5(20 - n)$, следовательно, k кратно 5.

Умножим теперь второе уравнение системы на 5 и вычтем из результата первое. Получим

$$(5x - 4)k = 64 \cdot 5 - 100 = 220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11.$$

Поскольку слева стоит произведение двух натуральных чисел и с учетом полученных ограниченый, находим, что k может принимать только значения

$$k = 5 \qquad \text{или} \qquad k = 10 \qquad \text{или} \qquad k = 20.$$

Подставим их по очереди в систему уравнений. При $k = 5$ имеем

$$\begin{cases} 5n + 20 = 100, \\ n + 5x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 16$. Но $64 - 16 = 48$ не кратно 5. Решений нет.

При $k = 10$ получаем

$$\begin{cases} 5n + 40 = 100, \\ n + 10x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 12$. Но $64 - 12 = 52$ не кратно 10. Решений снова нет.

Наконец, при $k = 20$ находим

$$\begin{cases} 5n + 80 = 100, \\ n + 20x = 64, \end{cases}$$

откуда $n = 4$ и $n = 3$.

Ответ: 3 хвоста.

Задача 2.

Может ли число $n^2 + n + 2$ делиться на 2019 при каких-либо натуральных n? Либо найдите такое минимальное n, либо докажите невозможность.

Решение.

Разложим делитель: $2019 = 3 \cdot 673$.

Число n^2 дает при делении на 3 остатки 0 и 1 (что легко проверить, например, составляя таблицу остатков)

n	$n \mod 3$	$n^2 \mod 3$
0	0	0
1	1	1
2	2	1

Поэтому число $n^2 + n$ будет давать при делении на 3 остатки 0 и 2. Следовательно, $n^2 + n + 2$ не кратно 3, а, значит, не делится на 2019.

Ответ: таких n не существует.

Задача 3.

Винтик и Шпунтик проектировали нановездеход. Винтик начертил прямоугольник 9×11 см и отметил в нем двести точек – мест под заклепки. Шпунтик разлиновал прямоугольник на квадратные отсеки со стороной 1 см. При этом ни одна пометка Винтика не попала на линии Шпунтика. Докажите, что обязательно найдется отсек, на который приходится три или более заклепки.

Решение.

Ясно, что Шпунтик разбил исходный прямоугольник на $9 \times 11 = 99$ квадратов.

Если в каждом квадрате будет менее трех отверстий, то всего отверстий будет менее 198, что противоречит условию.

Задача 4.

В двух отделах лаборатории «Фантасмагория» разрабатывают мобильные приложения под Android и под iOS. В один из рабочих дней все сотрудники этих отделов обменялись некоторым количеством сообщений. При этом каждый разработчик из Android-отдела отправил по 7, а получил по 15 сообщений, а каждый разработчик из iOS-отдела отправил по 15, а получил по 9 сообщений. Сообщения могли быть отправлены как сотруднику своего, так и чужого отдела. В каком отделе работает больше сотрудников?

Решение.

Пусть в Android-отделе работает n, а в iOS-отделе m человек. Вычислим общее количество сообщений двумя способами.

Было отправлено $7n + 15m$ сообщений.

Было принято $15n + 9m$ сообщений.

Тогда

$$7n + 15m = 15n + 9m,$$

откуда

$$6m = 8n.$$

Поскольку слева первый множитель меньше, то второй должен быть больше. Следовательно, $m > n$.

Ответ: в iOS-отделе больше человек.

Задача 5.

Как-то раз Баба Яга и Кощей Бессмертный пытались поровну поделить чудесный порошок, который все обращает в золото. Баба Яга достала весы и взвесила весь порошок. Весы показали 6 золотников. Затем она стала убирать порошок, пока весы не показали 3 золотника. Однако Кощей заподозрил, что весы врут, и взвесил отдельно на тех же весах (других не было) отсыпанную часть порошка. Весы показали 2 золотника. Определите точный вес тех двух частей, на которые Баба Яга разделила порошок. Считайте, что если весы врут, то всегда на одну и ту же величину.

Решение.

Обозначим через A вес первой части (той, что осталась на весах), через B вес второй части (той, что была отсыпана), через d ошибку весов.

Тогда результат первого взвешивания (всего порошка) дает

$$A + B + d = 6,$$

результат второго взвешивания (после отсыпания) дает

$$A + d = 3$$

и результат последнего взвешивания (отсыпанной части) дает

$$B + d = 2.$$

Складывая два последних равенства, получаем, что

$$A + B + 2d = 5.$$

Вычитая из полученного самое первое равенство, получаем

$$d = -1.$$

Таким образом, весы уменьшают все показания на 1 золотник. Отсюда сразу следует ответ.

Ответ: 4 и 3 золотника.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17061 для 6 класса

Задача 1.

Задано правило, по которому каждой паре целых чисел X и Y ставится в соответствие число $X \triangledown Y$. (Значок «$\triangledown$» означает применение правила к числам X и Y.) Известно, что для любых целых чисел X, Y верны свойства 1) $X \triangledown\ 0 = X$, 2) $X \triangledown (Y-1) = (X \triangledown Y) - 2$ 3) $X \triangledown (Y+1) = (X \triangledown Y) + 2$.

Найдите формулу, которая описывает действие заданного правила, и решите уравнение

$$X \triangledown X = -2019.$$

Решение.

Начнем выписывать по порядку результат применения операции $X \triangledown Y$ при $Y = 0, 1, 2, \ldots$, используя свойство 3.

$$\begin{aligned}
&X \triangledown\ 0 = 0,\\
&X \triangledown\ 1 = X \triangledown\ (0+1) = (X \triangledown\ 0) + 2 = X + 2,\\
&X \triangledown\ 2 = X \triangledown\ (1+1) = (X \triangledown\ 1) + 2 = X + 4,\\
&X \triangledown\ 3 = X \triangledown\ (2+1) = (X \triangledown\ 2) + 2 = X + 6
\end{aligned}$$

и так далее. Видно, что результат можно вычислить по формуле $x + 2y$.

Аналогичное выписывание результатов применения операции $X \triangledown Y$ при $Y = -1, -2, -3, \ldots$ (используя свойство 2) также приводит к формуле $x+2y$.

Остается решить уравнение

$$X \triangledown X = X + 2X = 3X = -2019.$$

Ответ. $X \triangledown Y = X + 2Y$, решение уравнения $X = -673$

Задача 2.

Что больше: сумма всех нечетных чисел от 1 по 2019 (включительно) или сумма всех четных чисел от 2 по 2018 (включительно)?

Решение.

Запишем указанные суммы одну под другой

$$\begin{aligned}
N &= 1 + 3 + 5 + \ldots + 2017 + 2019,\\
K &= 2 + 4 + 6 + \ldots + 2018.
\end{aligned}$$

Количество слагаемых во второй сумме равно $2018/2 = 1009$.

Видно, что каждое слагаемое второй суммы на единицу больше соответствующего слагаемого первой суммы (стоящего ровно на ним). Поэтому, чтобы из K получить N нужно 1009 раз вычесть единицу и затем прибавить слагаемое $+2019$ (которому нет пары в сумме K). Получаем

$$N = K - 1 \cdot 1009 + 2019 = K + 1010.$$

Таким образом, $N > K$.

Ответ: сумма нечетных больше.

Задача 3.

Винтик и Шпунтик проектировали нановездеход. Винтик начертил прямоугольник и наметил в нем двадцать отверстий для колес. Шпунтик разделил прямоугольник на отсеки, начертив две линии, параллельные одной стороне прямоугольника, и еще две, параллельные другой. При этом ни одно отверстие Винтика не попало на линии Шпунтика. Докажите, что обязательно найдется отсек с тремя или более отверстиями.

Решение.

Ясно, что 4 линии, попарно паралельные сторонам прямоугольника, разбивают его на 9 частей.

Если в каждой части будет не более двух отверстий, то всего их будет не более 18-ти, что противоречит условию.

Задача 4.

В двух отделах лаборатории «Фантасмагория» разрабатывают мобильные приложения под Android и под iOS. В один из рабочих дней все сотрудники этих отделов обменялись некоторым количеством сообщений. При этом каждый разработчик из Android-отдела отправил по 7, а получил по 15 сообщений, а каждый разработчик из iOS-отдела отправил по 15, а получил по 9 сообщений. Сообщения могли быть отправлены как сотруднику своего, так и чужого отдела. В каком отделе работает больше сотрудников?

Решение.

Пусть в Android-отделе работает n, а в iOS-отделе m человек. Вычислим общее количество сообщений двумя способами.

Было отправлено $7n + 15m$ сообщений.

Было принято $15n + 9m$ сообщений.

Тогда

$$7n + 15m = 15n + 9m,$$

откуда

$$6m = 8n.$$

Поскольку слева первый множитель меньше, то второй должен быть больше. Следовательно, $m > n$.

Ответ: в iOS-отделе больше человек.

Задача 5.

Как-то раз Баба Яга и Кощей Бессмертный пытались поровну поделить чудесный порошок, который все обращает в золото. Баба Яга достала весы и взвесила весь порошок. Весы показали 6 золотников. Затем она стала убирать порошок, пока весы не показали 3 золотника. Однако Кощей заподозрил, что весы врут, и взвесил отдельно на тех же весах (других не было) отсыпанную часть порошка. Весы показали 2 золотника. Определите точный вес тех двух частей, на которые Баба Яга разделила порошок. Считайте, что если весы врут, то всегда на одну и ту же величину.

Решение.

Обозначим через A вес первой части (той, что осталась на весах), через B вес второй части (той, что была отсыпана), через d ошибку весов.

Тогда результат первого взвешивания (всего порошка) дает

$$A + B + d = 6,$$

результат второго взвешивания (после отсыпания) дает

$$A + d = 3$$

и результат последнего взвешивания (отсыпанной части) дает

$$B + d = 2.$$

Складывая два последних равенства, получаем, что

$$A + B + 2d = 5.$$

Вычитая из полученного самое первое равенство, получаем

$$d = -1.$$

Таким образом, весы уменьшают все показания на 1 золотник. Отсюда сразу следует ответ.

Ответ: 4 и 3 золотника.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17051 для 5 класса

Задача 1.

Задано правило, по которому каждой паре натуральных чисел X и Y ставится в соответствие число $X\nabla Y$ (значок «∇» означает применение правила к числам X и Y). Для любых натуральных чисел X, Y верны свойства

$$1)\ X\nabla\ 0 = X, \qquad 2)\ X\nabla(Y+1) = (X\nabla Y)+2.$$

Найдите формулу, которая описывает действие заданного правила, и определите, чему равно $2019\ \nabla\ 19$?

Решение.

Начнем выписывать по порядку результат применения операции $X\nabla Y$ при $Y = 0, 1, 2, \ldots$, используя свойство 2.

$$\begin{aligned}
&X\nabla\ 0 = 0,\\
&X\nabla\ 1 = X\nabla\ (0+1) = (X\nabla\ 0)+2 = X+2,\\
&X\nabla\ 2 = X\nabla\ (1+1) = (X\nabla\ 1)+2 = X+4,\\
&X\nabla\ 3 = X\nabla\ (2+1) = (X\nabla\ 2)+2 = X+6
\end{aligned}$$

и так далее. Видно, что результат можно вычислить по формуле $x+2y$.

Остается вычислить

$$2019\nabla 19 = 2019 + 2\cdot 19 = 2057.$$

Ответ: $X\nabla Y = X+2Y, \quad 2019\nabla 19 = 2057.$

Задача 2.

Что больше: сумма всех нечетных чисел от 1 по 2019 (включительно) или сумма всех четных чисел от 2 по 2018 (включительно)?

Решение.

Запишем указанные суммы одну под другой

$$\begin{aligned}
&N = 1+3+5+\ldots+2017+2019,\\
&K = 2+4+6+\ldots+2018.
\end{aligned}$$

Количество слагаемых во второй сумме равно $2018/2 = 1009$.

Видно, что каждое слагаемое второй суммы на единицу больше соответствующего слагаемого первой суммы (стоящего ровно на ним). Поэтому, чтобы из K получить N нужно 1009 раз вычесть единицу и затем прибавить слагаемое +2019 (которому нет пары в сумме K). Получаем

$$N = K - 1 \cdot 1009 + 2019 = K + 1010.$$

Таким образом, $N > K$.

Ответ: сумма нечетных больше.

Задача 3.

Винтик и Шпунтик проектировали нановездеход. Винтик начертил прямоугольник и наметил в нем двадцать отверстий для колес. Шпунтик разделил прямоугольник на отсеки, начертив две линии, параллельные одной стороне прямоугольника, и еще две, параллельные другой. При этом ни одно отверстие Винтика не попало на линии Шпунтика. Докажите, что обязательно найдется отсек с тремя или более отверстиями.

Решение.

Ясно, что 4 линии, попарно паралельные сторонам прямоугольника, разбивают его на 9 частей.

Если в каждой части будет не более двух отверстий, то всего их будет не более 18-ти, что противоречит условию.

Задача 4.

В двух отделах лаборатории «Фантасмагория» разрабатывают мобильные приложения под Android и под iOS. В один из рабочих дней все сотрудники этих отделов обменялись некоторым количеством сообщений. При этом каждый разработчик из Android-отдела отправил по 7, а получил по 15 сообщений, а каждый разработчик из iOS-отдела отправил по 15, а получил по 9 сообщений. Сообщения могли быть отправлены как сотруднику своего, так и чужого отдела. В каком отделе работает больше сотрудников?

Решение.

Пусть в Android-отделе работает n, а в iOS-отделе m человек. Вычислим общее количество сообщений двумя способами.

Было отправлено $7n + 15m$ сообщений.

Было принято $15n + 9m$ сообщений.

Тогда

$$7n + 15m = 15n + 9m,$$

откуда

$$6m = 8n.$$

Поскольку слева первый множитель меньше, то второй должен быть больше. Следовательно, $m > n$.

Ответ: в iOS-отделе больше человек.

Задача 5.

Как-то раз Баба Яга и Кощей Бессмертный пытались поровну поделить чудесный порошок, который все обращает в золото. Баба Яга достала весы и взвесила весь порошок. Весы показали 6 золотников. Затем она стала убирать порошок, пока весы не показали 3 золотника. Однако Кощей заподозрил, что весы врут, и взвесил отдельно на тех же весах (других не было) отсыпанную часть порошка. Весы показали 2 золотника. Определите точный вес тех двух частей, на которые Баба Яга разделила порошок. Считайте, что если весы врут, то всегда на одну и ту же величину (но неизвестно, в большую или в меньшую сторону).

Решение.

Имеем три взвешивания:

$$\begin{array}{llcl}
\text{часть 1} & & = 3\ (\text{золотника}) & + \quad \text{ошибка весов},\\
& \text{часть 2} & = 2\ (\text{золотника}) & + \quad \text{ошибка весов},\\
\text{часть 1} + & \text{часть 2} & = 6\ (\text{золотников}) & + \quad \text{ошибка весов},
\end{array}$$

Из этих записей следует, что

$$\begin{aligned}
&6\ (\text{золотников}) + \text{ошибка весов} =\\
&\qquad = 5\ (\text{золотников}) + \text{ошибка весов} + \text{ошибка весов}.
\end{aligned}$$

Таким образом, ошибка весов равна 1 золотнику.

Следовательно, часть 1 весит 4 золотника, а часть 2 весит 3 золотника.

Ответ: 4 и 3 золотника.