РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17081 для 8 класса

Задача 1.

В ряд выписаны 100 ненулевых чисел. Каждое число кроме первого и последнего равно произведению двух соседних с ним чисел. Первое число равно 2018. Найдите последнее число в таком ряду.

Решение.

Обозначим сто чисел $a_1, \ldots, a_{100}$. Согласно условию,

$$a_1 = \frac{a_2}{a_3}, \quad a_2 = \frac{a_3}{a_4}, \ \ldots, \ a_{98} = \frac{a_{99}}{a_{100}}.$$

Перемножая первое и второе равенства, получаем

$$a_1 a_2 = \frac{a_2 a_3}{a_3 a_4} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{a_4}.$$

Аналогично $a_4 = \dfrac{1}{a_7}$. Следовательно, $a_1 = a_7$.

Рассуждая таким же образом далее, получаем

$$a_1 = a_7 = \ldots = a_{97} = 2018.$$

Теперь $a_{100} = \dfrac{1}{a_{97}} = \dfrac{1}{2018}$.

Ответ: $a_{100} = \dfrac{1}{2018}$.

Задача 2.

В футбольном турнире каждая команда должна сыграть по одному матчу с каждой из остальных. Но в ходе турнира половина всех команд была дисквалифицирована и выбыла из дальнейшего участия. В результате оказалось сыграно 77 матчей, а выбывшие команды успели сыграть все матчи между собой, причем число всех матчей, сыгранное каждой выбывшей командой, одинаково. Сколько команд было в начале турнира?

Решение.

Согласно условию стартовало четное количество команд $2n$, из которых n дисквалифицировано. Выбывшие команды сыграли между собой $\dfrac{n(n-1)}{2}$ матчей. Такое же количество матчей сыграли оставшиеся в турнире команды.

Пусть каждая из выбывших команд сыграла с k командами из числа оставшихся ($k < n$). Тогда

$$n(n-1) + k\,n = 77.$$

По условию $n > 1$. Очевидно, что $k = 1$ не является решением, поэтому $n + k - 1 > n$. Разлагая на множители $77 = 7 \cdot 11$, получаем

$$n = 7, \qquad n + k - 1 = 11,$$

откуда $k = 5$.

Ответ: 14 команд.

Задача 3.

Число b является средним арифметическим чисел a и c. Найдите все упорядоченные тройки (a, b, c) таких чисел, для которых хотя бы одно из чисел $1/a$, $1/b$, $1/c$ является средним арифметическим двух других.

Решение.

Очевидно, что a, b, c не должны быть равны 0. Как указано,

$$2b = a + c$$

и должно быть выполнено одно из условий:

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \quad \text{или} \quad \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{или} \quad \frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2b = a + c; \\ \dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c}, \end{cases}$$

получаем, что $a = b = c (= x)$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2b = a + c; \\ \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}, \end{cases}$$

получаем либо $a = b = c$ (этот случай уже разобран), либо $a = 4b, c = -2b (= 2x)$, что даёт тройку $(-4x, -x, 2x)$.

Ответ: Это либо тройка (x, x, x), где $x \neq 0$, либо тройка $(-4x, -x, 2x)$, где $x \neq 0$.

Задача 4.

В 9 часов утра из порта О в порт Е вышли корабли "Анин" и "Ванин". В тот же момент из порта Е в порт О отправился корабль "Санин". Все три судна идут одним курсом ("Санин" навстречу "Анину" и "Ванину") с постоянными, но различными скоростями. В 10 часов утра "Ванин" находился на одном расстоянии от "Анина" и "Санина". В 10 часов 30 минут "Санин" находился на одинаковом расстоянии от "Анина" и "Ванина". В какой момент "Анин" окажется посередине между "Ваниным" и "Саниным"?

Решение.

Для простоты расстояние между портами примем за 1. Пусть x – скорость ”Анина”, y – скорость ”Ванина”, а z – скорость ”Санина”. Тогда в 10 часов (т.е. через час после отправления)

$$2y = x + 1 - z, \tag{1}$$

а через полтора часа после отправления

$$2(1 - 1.5z) = 1.5x + 1.5y. \tag{2}$$

Через время t после отправления должно выполнится условие

$$2x\,t = 1 - t\,z + t\,y,$$

откуда

$$t\,(2x + z - y) = 1. \tag{3}$$

Из (1) и (2)

$$3z + 1.5x + 1.5y = 4y + 2z - 2x$$

или $z = 2.5y - 3.5x$ Подставляя полученное выражение в (1), получаем, что $y - x = 2/9$ С учетом этого из (1) имеем $y + z + y - x = y + z + 2/9$. Значит, $t + z = 7/9$. Поэтому из (3) получаем

$$t\,(2x + z - y) = t\,(z + y - 2x + 2y) = 1,$$

$$t\,(7/9 - 4/9) = 1,$$

откуда $t = 3$.

Ответ: в 12 ч дня.

Задача 5.
Числа $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ удовлетворяют условиям

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 2018^2, \quad b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 2017^2,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 2017 \cdot 2018.$$

Найдите отношения $a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_n/b_n$.

Решение.
Выполним преобразования.

$$\begin{aligned}(2017a_1 - 2018b_1)^2 + (2017a_2 - 2018b_2)^2 + \ldots + (2017a_n - 2018b_n)^2 = \\ = 2017^2\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) + 2018^2\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right) - \\ - 2 \cdot 2017 \cdot 2018\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n\right) = \\ = 2017^2 \cdot 2018^2 + 2018^2 \cdot 2017^2 - 2 \cdot 2017^2 \cdot 2018^2 = 0.\end{aligned}$$

Поскольку сумма квадратов может равняться 0 тогда и только тогда, когда каждое слагаемое нулевое, то

$$2017a_k - 2018b_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Отсюда получаем

Ответ: $a_1/b_1 = a_1/b_1 = \ldots = a_n/b_n = 2018/2017.$