РЕШЕНИЕ

Введем обозначения P_k, V_k, m_k для давления, объема и массы воздуха внутри шарика после k-го выдоха. Через R_k обозначим радиус шарика в тот же момент. В начальный момент времени

$$P_0 = P_A, \qquad V_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3, \qquad m_0 = \rho_A V_0.$$

1. Рассмотрим первый выдох. После него в шарик добавится объем воздуха W, имеющий массу $\Delta m = \rho_A W$.

Запишем равенство давлений внутри и снаружи оболочки шарика

$$P_A + Q(R_1) = P_1.$$

Снаружи имеем атмосферное давление P_A и давление растянутой оболочки $Q(R_1)$. Изнутри – давление воздуха P_1, которое можно найти из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$P_1 = \frac{1}{V_1}\frac{m_1}{\mu}RT = \frac{3}{4\pi R_1^3}\frac{m_1}{\mu}RT.$$

Здесь R – универсальная газовая постоянная. Спрячем ее в новую константу, чтобы не путать с радиусами. Обозначим $C = \dfrac{3RT}{4\pi\mu}$. Эта величина не будет изменяться в процессе расчетов. Окончательно получаем уравнение

$$P_A + \gamma P_A\left(1 - \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3\right) = \frac{Cm_1}{R_1^3}.$$

Из него можно найти R_1.

$$R_1 = \sqrt[3]{\frac{Cm_1 + \gamma P_A R_0^3}{P_A + \gamma P_A}}.$$

2. После второго вздоха в шарике окажется масса воздуха $m_2 = m_1 + \Delta m$. Уравнение баланса внутреннего и наружного давлений примет вид

$$P_A + \gamma P_A\left(1 - \left(\frac{R_0}{R_2}\right)^3\right) = \frac{Cm_2}{R_2^3},$$

откуда

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{Cm_2 + \gamma P_A R_0^3}{P_A + \gamma P_A}}.$$

Подставляя в полученные формулы числовые значения, находим ответ на первый вопрос задания.

4. Расписывая баланс давлений для последующих вздохов, видим, что все формулы будут иметь однотипную структуру, но отличаться только индексами. Поэтому можно записать, что после k-го вздоха в шарике будет находиться воздух массой $m_k = m_{k-1} + \Delta m$, то радиус шарика будет равен

$$R_k = \sqrt[3]{\frac{Cm_k + \gamma P_A R_0^3}{P_A + \gamma P_A}}.$$

По такой формуле можно рассчитать размер шарика после каждого выдоха (при любом их количестве).

Остается выяснить, до каких пор следует вычислять радиусы. Согласно условию, катастрофа происходит при $\sigma(R) \geq 30P_A$. Это и есть условие останова расчетов.

4. Запишем все в форме алгоритма на псевдокоде

Алгоритм «Шарик»

задать R_0, m_0, P_A, γ, W, C

$\Delta m := \rho_A W$

$S = 0$

$k = 0$

ПОКА $S < 30P_A$

$k = k + 1$

$m = m_0 + k\Delta m$

$$R = \sqrt[3]{\frac{Cm + \gamma P_A R_0^3}{P_A + \gamma P_A}}$$

$S = \sigma(R)$

КОНЕЦ_ПОКА

Вывести k

конец алгоритма

Здесь опущена индексация, поскольку все новые величины пересчитываются через известные значения

Выполняя этот алгоритм, находим количество вздохов, необходимое для того, чтобы шарик лопнул. Если оно окажется больше 50-ти, то шарик уцелеет.

5. (10 класс) Для поиска максимального диаметра шарика нужно запускать алгоритм «шарик» при разных значениях W (постепенно уменьшая ее) и выводить удвоенные радиусы на последнем (лопнул) и предпоследнем (еще не лопнул) проходах цикла. Как только эти диаметры станут отличаться друг от друга в пределах одного миллиметра, любой из них (округлив) можно выдать в качестве ответа на третий вопрос.

6. (11 класс) Для поиска граничного (спасительного) значения коэффициента γ достаточно запускать алгоритм «шарик» при различных значениях γ и следить за изменениями количества вздохов. Можно заметить (и даже теоретически предсказать), что продолжительность жизни шариков увеличивается при уменьшении этого коэффициента.

Самый простой (но не самый быстрый) способ – уменьшать значение γ с шагом 0.001 до тех пор, пока количество вздохов не окажется больше 50. Можно, при желании, более тонко автоматизировать перебор значений. В любом случае, ответ будет найден.

ОТВЕТЫ

1 (все классы). $R_1 = 70$ мм, $R_2 = 83$ мм.

2 (все классы). 34 вздоха. Шарик лопнет. :(

3 (10 класс). $R_{\max} = 390$ мм.

3 (11 класс). $\gamma = 0.075$.