11 класс. Задача 1

Рассматривается многочлен

$$a^2x^4 + 2abx^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2,$$

в котором коэффициент c и сумма $a + b + c$ — нечетные целые числа. Могут ли корни такого многочлена быть целыми числами?

Решение

Путем несложных преобразований (например, выделяя полный квадрат) многочлен приводится к виду

$$(ax^2 + bx + c)^2.$$

Таким образом, задача сведена к аналогичной для корней квадратного трехчлена.

Пусть x_1 и x_2 — его целые корни уравнения. Тогда $c = ax_1x_2$, и оно нечетное. Отсюда следует, что каждое из чисел a, x_1 и x_2 - нечетное. Тогда поскольку сумма двух нечетных чисел $a + c$ - четная, а сумма $a + b + c$ нечетная, то число b — тоже нечетное. Но с другой стороны, число b должно быть четным, так как $b = -a(x_1 + x_2)$, а сумма двух нечетных чисел $x_1 + x_2$ – четная. Противоречие.

Ответ. Не могут.

11 класс. Задача 2

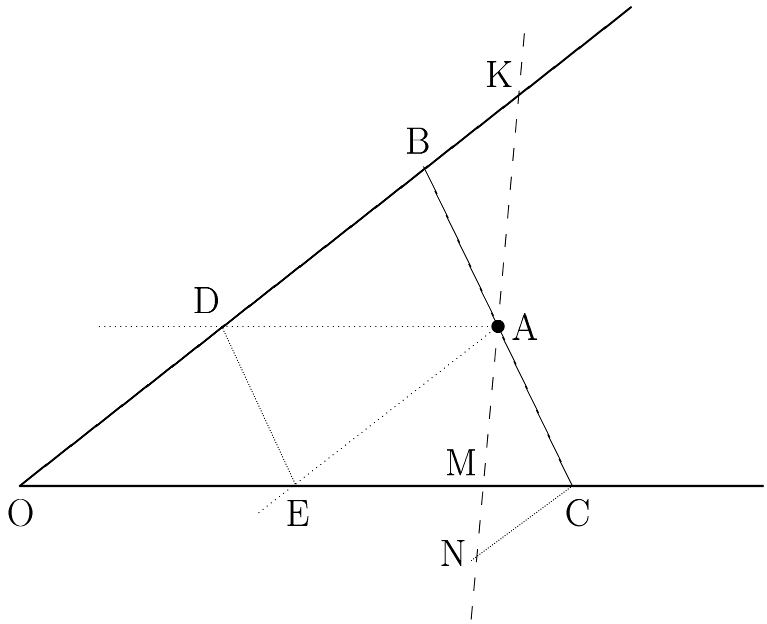
Точка A лежит внутри острого угла. Через эту точку проведена прямая, отсекающая от угла треугольник наименьшей площади. Выясните, в каком отношении точка A делит отрезок этой прямой, заключенный внутри угла?

Решение

Пусть BOC – заданный острый угол, A – заданная точка внутри него.

Проведем $AD \parallel CO$, $AE \parallel BO$. Через т. A проведем $BC \parallel DE$. Все треугольники ODE, DBA, AED и EAC равны, откуда $AB = AC$.

Покажем, что BC отсекает треугольник наименьшей площади. Для этого проведем другую произвольную прямую KM (точки K и M лежат на сторонах заданного угла). Построим также $CN \parallel BK$.



Треугольники ABK и ACN равны по стороне и двум углам. Следовательно, площадь $\triangle ACM$ меньше, чем площадь $\triangle ACN$, откуда получается, что площадь $\triangle OBC$ меньше, чем площадь $\triangle OKM$, что и требовалось.

Таким образом, BC отсекает треугольник наименьшей площади, и, как показано выше, она делится точкой A пополам.

Ответ. Точка A делит отрезок пополам.

11 класс. Задача 3

Функция $F(x) = x^2 + px + q$ имеет ровно один вещественный корень, а функция $F(F(F(x)))$ — ровно три вещественных корня. Найдите все эти корни.

Решение

Ясно, что $F(x)$ имеет вид $F(x) = (x-a)^2$, поэтому

$$F(F(F(x))) = (((x-a)^2 - a)^2 - a)^2 = 0.$$

Получаем, что $((x-a)^2 - a)^2 = a > 0$ (строгое неравенство $a > 0$ следует из того, что при $a = 0$ уравнение $F(F(F(x))) = 0$ имеет не три, а всего один корень), откуда $(x-a)^2 = a \pm \sqrt{a}$.

Поскольку у этих двух квадратных уравнений должно быть три корня, у одного из уравнений должен быть один корень, а у другого два. У уравнения $(x-a)^2 = a + \sqrt{a}$ не может быть всего один корень, так как $a + \sqrt{a} > 0$, поскольку $a > 0$. Значит, один корень имеет уравнение $(x-a)^2 = a - \sqrt{a}$, то есть $a - \sqrt{a} = 0$, что даёт два варианта: $a = 0$ или $a = 1$. Поскольку $a > 0$, остаётся только $a = 1$.

Теперь, решив уравнения $(x-a)^2 = a \pm \sqrt{a}$ при $a = 1$, легко найдём все три корня уравнения $F(F(F(x))) = 0$: это $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Ответ. $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$.

11 класс. Задача 4

Зная, что $2021 = 43 \cdot 47$, решите в целых числах уравнение с двумя неизвестными

$$40(x+y) + xy = 421.$$

Решение

Переменные входяи в ур-е симметрично, поэтому если есть решение (x, y), то (y, x) тоже явл. решением.

Далее,

$$(40+x)(40+y) = 40^2 + 40(x+y) + xy = 1600 + 421 = 2021.$$

Введем переменные $a = 40 + x, b = 40 + y \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим ур-е

$$ab = 2021 = 43 \cdot 47.$$

Если есть решение (a, b), то есть и решение (b, a).

1. Пусть один из множителей равен 1, например, $a = 40 + x = 1$. Тогда $b = 40 + y = 2021$, и есть решения

$$(x, y) = (-39; 1981), (1981; -39).$$

2. Пусть один из множителей равен -1, например, $a = 40 + x = -1$, Тогда $b = 40 + y = -2021$, и есть решения

$$(x, y) = (-41; -2061), (-2061; -41).$$

3. Пусть нет множителей ± 1. Тогда $(a, b) = (43; 47), (-43; -47), (47; 43), (-47; -43)$, откуда получаем решения

$$(x, y) = (3; 7), (-83; -87), (7; 3), (-87; -83).$$

Ответ. 8 пар: $(3; 7), (7; 3), (-39; 1981), (1981; -39), (-41; -2061), (-2061; -41), (-83; -87), (-87, -83)$.

11 класс. Задача 5

Напряженность электрического поля в точке (x, y) описывается функцией

$$E(x, y) = \left(\frac{20}{21}\right)^{x^2+y^2}.$$

Найдите максимальное значение напряженности в области, задаваемой неравенствами

$$|ax+y| \le b, \quad |ax-y| \ge b,$$

где a и b – фиксированные вещественные числа.

Решение

Функция $E(f) = \left(\frac{20}{21}\right)^f$ монотонно убывает при $f \in [0, \infty)$.

Рассмотрим величину $f(x,y) = x^2 + y^2$, если переменные удовлетворяют неравенствам

$$|ax+y| \le b, \qquad |ax-y| \ge b.$$

Максимум E соответствует минимуму f.

1. Если $b < 0$, то множество решений системы неравенств пусто. Функция не определена.

2. Если $b = 0$, то неравенства равносильны ур-ю $ax + y = 0$, откуда $f(x, -ax) = g(x) = (1+a^2)x^2$. Максимум $E(x,y)$ будет достигаться в начале координат и будет равен 1.

3. Пусть $b > 0, a = 0$. Тогда система нер-в равносильна ур-ю $|y| = b$ и $f(x,y) = f(x, |b|) = x^2 + b^2 \ge b^2$. Максимум равен $\left(\frac{20}{21}\right)^{b^2}$.

4. Пусть $b > 0, a > 0$. Тогда получаем систему ограничений

$$-b - ax \le y \le b - ax, \qquad (y \le ax - b \ \text{ или } \ y \ge ax + b).$$

Она задает на плоскости область между двумя парал. прямыми $y = -b - ax$ и $y = b - ax$ и вне ромба с вершинами $(0; \pm b), (\pm b/a; 0)$. Ф-я f есть квадрат расстояния от нач коорд-т до точки области. Точки с одинак. расстоянием от O образуют окр. Минимум расстояния имеют точки касания сторон ромба со вписанной в ромб окр. Найдем ее радиус r.

Рассмотрим площадь ромба $S = d_1 d_2/2$. Его диагонали имеют длины $d_1 = 2b/a$, $d_2 = 2b$, $S = 2b^2/a$, сторона — $c = \sqrt{b^2 + (b/a)^2} = b\sqrt{a^2+1}/a$. Рассм. площадь прямоуг. треуг-ка с катетами b/a, b, составляющего четверть ромба,

$$S_\Delta = S/4 = b^2/(2a) = (1/2)cr = b\sqrt{a^2+1}/(2a).$$

Отсюда

$$r = \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}, \quad f_{min} = r^2 = \frac{b^2}{a^2+1}.$$

5. Случай $b > 0, a < 0$ аналогичен предыдущему и приводит к такому же рез-ту.

6. Объединяя результаты пп. 3–5, получаем короткий

Ответ. Если $b < 0$, то ф-я f не определена. Если $b \ge 0$, то

$$E_{max} = \left(\frac{20}{21}\right)^{\frac{b^2}{a^2+1}}.$$