7 класс. Задача 1

Зная, что $2021 = 43 \cdot 47$, решите в целых числах уравнение

$$x^2 + 4x = 2021.$$

Решение

Разложим левую часть на множители

$$x \cdot (x - 4) = 2021.$$

Для правой части имеем

$$2021 = 1 \cdot 2021 = 43 \cdot 47 = (-1) \cdot (-2021) = (-43) \cdot (-47).$$

Перебирая варианты, убеждаемся, что два из них подходят.

Ответ. $x = -47,\ 43$.

7 класс. Задача 2

Автомобиль двигался без остановки 3,5 часа. В течение любого промежутка времени длительностью в один час (в течение этих трех с половиной часов) он проходил ровно 70 км. Можно ли утверждать, что средняя скорость автомобиля 70 км/ч?

Решение

Построим контрпример.

Пусть, например, первые полчаса он двигался со скоростью 90 км/ч, а вторые полчаса со скоростью 50км/ч. Затем опять полчаса со скоростью 90 км/ч, а последующие полчаса со скоростью 50 км/ч. и т. д. В итоге за 3,5 часа он продвинется на расстояние $45 + 25 + 45 + 25 + 45 + 25 + 45 = 255$ км, а средняя скорость его равна $\dfrac{255}{3{,}5} > 70$.

Ответ. Нет.

7 класс. Задача 3

Дано 2021 целое число. Их произведение равно 1. Может ли сумма их кубов быть равной нулю?

Решение

Ясно, что каждое число равно либо $+1$, либо -1. Их кубы совпадают с самими числами.

Чтобы сумма была равна нулю, нужно иметь равное количество положительных и отрицательных единиц.

Чтобы произведение было равно 1, нужно иметь четное количество отрицательных единиц.

Таким образом, сумма может зануляться только если количество чисел кратно 4. Заданное количество не кратно.

Ответ. Не может.

7 класс. Задача 4

По трем параллельным железнодорожным путям движутся три поезда одинаковой длины. Первый поезд движется в том же направлении, что и второй, но с меньшей скоростью. Второй поезд проходит мимо первого за 4 минуты 12 секунд. Третий поезд движется в противоположном направлении относительно первых двух, и проходит мимо второго за 36 секунд. За какое время третий поезд пройдет мимо первого?

Решение

Обозначим через L длину каждого поезда, через v_1, v_2, v_3 их скорости (без учета направления).

Первый и второй поезда двигаются в одну сторону, поэтому разность их скоростей (скорость сближения второго и первого поезда) равна частному суммы длин поездов и времени обгона первого поезда вторым:

$$v_2 - v_1 = \frac{2L}{252} = \frac{L}{126}.$$

Второй и третий двигаются в противоположные стороны, поэтому сумма их скоростей (скорость сближения второго и третьего поезда) равна частному суммы длин поездов и времени проезда второго поезда мимо третьего:

$$v_2 + v_3 = \frac{2L}{36} = \frac{L}{18}.$$

Тогда скорость сближения первого и третьего поезда равна

$$v_1 + v_3 = \frac{L}{18} - \frac{L}{126} = \frac{L}{21}.$$

Следовательно, время проезда третьего поезда мимо первого равно

$$\frac{2L}{v_1 + v_3} = \frac{2L}{L \cdot \frac{1}{21}} = 42\ (c).$$

Ответ. За 42 секунды.

7 класс. Задача 5

Для проведения турнира по спортивному программированию приготовили 10 компьютеров двух типов. Их соединили пятью кабелями попарно; при этом оказалось, что ровно половина всех лэптопов соединена с десктопами.

А) Найдите количество компьютеров каждого типа и состав пар.

Б) Можно ли так переподключить кабели, чтобы ровно половина десктопов была связана с лэптопами?

(К каждому компьютеру всегда подключен только один кабель.)

Решение

Обозначим каждый лэптоп через А, каждый десктоп через В.

Пусть a и b — число объектов каждого вида А, В, N — число пар, тогда

$$a + b = 2N,\ a > 0,\ b > 0. \tag{1}$$

Если есть ровно $a/2$ пар вида АВ, то a четно, причем остальные $a/2$ объектов А образуют пары только с такими же объектами А, откуда $a/2$ четно и тогда a кратно 4. Из наличия $a/2$ пар АВ получаем

$$b \geq a/2. \tag{2}$$

Далее перебором (наиболее естественный путь для младших) с учетом условий (1), (2) находим a, b и состав пар.

Чтобы можно было составить пары, удовлетворяющие второму условию задачи, необходимы и достаточны симметричные ограничения: b кратно 4, $a \geq b/2$.

Ответ.

$N = 5:\ a = 4,\ b = 6,\ AB, AB, AA, BB, BB,$ нельзя.