9 класс. Задача 1

На прокладке линии электропередачи работают три бригады с постоянной интенсивностью. Первая и третья бригады, работая вместе, за месяц прокладывают 15 км линии. Все три бригады вместе могут проложить за месяц линию в два раза длиннее, чем вторая и первая бригады вместе. Сколько километров линии в месяц может проложить третья бригада, если известно, что вторая бригада вместе с третьей прокладывают участок пути в четыре раза быстрее, чем его проложила бы одна вторая бригада?

Решение

Пусть бригады в месяц могут проложить соответственно X, Y, Z км. Тогда, переведя условия задачи в символическую запись, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &X + Z = 15, \\ &X + Y + Z = 2(X + Y), \\ &Y + Z = 4Y. \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &X + Z = 15, \\ &X + Y = Z, \\ &Z = 3Y. \end{aligned}$$

Откуда $X = 6$, $Y = 3$, $Z = 9$.

Ответ. 9 км.

9 класс. Задача 2

Решите задачу из VIII книги «Начал» Евклида. Пусть числа $x_1, \ldots, x_{2021}$ связаны равенствами (по Евклиду — непрерывной пропорцией)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_{2020}}{x_{2021}},$$

причем $x_1 = 2^{2022}$, $x_{2021} = 4$. Найдите $x_2, \ldots, x_{2020}$.

Решение

Обозначив $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{x_2}{x_3} = \cdots = \dfrac{x_{2020}}{x_{2021}} = \dfrac{1}{q}$, видим, что нам дана геометрическая прогрессия, в которой $x_k = x_1 \cdot q^{k-1}$. Поэтому

$$4 = x_{2021} = x_1 \cdot q^{2020} = 2^{2022} q^{2020} = 4 \cdot 2^{2020} q^{2020}.$$

Таким образом, $q = \pm 1/2$ и $x_k = 2^{2022} \cdot (1/2)^{k-1} = 2^{2023-k}$ или $x_k = (-1)^{k-1} 2^{2023-k}$.

Ответ: $x_k = 2^{2023-k}$ или $x_k = (-2)^{2023-k}$, $k = 1, \ldots, 2021$.

9 класс. Задача 3

На координатной плоскости каждая из N прямых l_j параллельна прямой $y = x + 2021$ и пересекает кривую $y = 1/x$ ровно в двух точках $(x_1(j), y_1(j))$ и $(x_2(j), y_2(j))$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Рассмотрим два произведения

$$P_1 = y_1(1)y_1(2)\cdots y_1(N) \ \text{ и } \ P_2 = y_2(1)y_2(2)\cdots y_2(N).$$

Выясните, какие значения может принимать величина P_1P_2 и как это значение зависит от N.

Решение

Прямые имеют уравнения $y = x + b_j$. Найдем точки их пересечения с указанной кривой: $1/x = x + b_j$, $x^2 + b_jx - 1 = 0$. Имеем

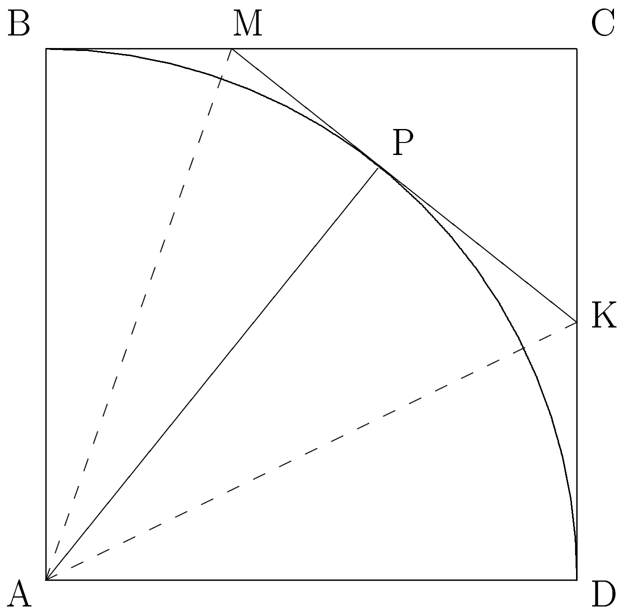
$$x_1(j)x_2(j) = -1, \ \ y_1(j)y_2(j) = 1/(x_1(j)x_2(j)) = -1, \ \ P_1P_2 = (-1)^N \in \{-1,\ 1\}.$$

Ответ: если N четно, то $P_1P_2 = 1$; если N нечетно, то $P_1P_2 = -1$.

9 класс. Задача 4

На сторонах BC и CD квадрата ABCD отмечены две точки, соответственно, M и K так, что периметр треугольника MKC равен удвоенной стороне квадрата. Найдите угол MAK.

Решение



Задача решается просто, если сообразить, что отрезок MK является касательной к окружности с центром в точке A и радиуса, равного стороне квадрата. Обозначим точку касания через P.

Так как угол BAM равен углу MAP, а угол PAK равен углу KAD, то угол MAK равен 45°.

Ответ. 45°.

9 класс. Задача 5

В конце XIX в. немецкий математик (он родился и вырос в Санкт-Петербурге) Георг Кантор доказал, казалось бы, парадоксальный факт: между множеством и его подмножеством можно установить взаимно однозначное соответствие. Так, в частности, можно каждому целому числу k поставить в соответствие натуральное число $N(k)$, которое будет номером числа k, причем все номера (натуральные числа) будут использованы. Укажем первые пары такого соответствия:

$N(0) = 1, N(1) = 2, N(-1) = 3, N(2) = 4, N(-2) = 5, N(3) = 6, N(-3) = 7, ...$

Решите следующие уравнения

А) $N(x) = 2021$,

Б) $N(x) - N(y) = 2021$.

Решение

1. Выпишем для удобства часть таблицы с номерами целых чисел:

k	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
$N(k)$	...	9	7	5	3	1	2	4	6	8	...

Видно, что

$$N(0) = 1, \qquad N(n) = 2n, \quad N(-n) = 2n + 1, \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (1)$$

2. Рассмотрим ур-е $N(x) = N$. Из (1) получаем его решения:

$x = 0$, если $N = 1$; $\quad x = N/2$, если N четно; $\quad x = -(N-1)/2$, если N нечетно.

3. Рассмотрим ур-е $N(x) - N(y) = 2021$.

3.1. Пусть $x = 0$. Тогда $1 - N(y) = 2021$, что невозм., так как $N(y) > 0$.

3.2. Пусть $y = 0$. Получаем $N(x) - 1 = 2021$, $x = 1011$. Итак, есть решение

$$(x, y) = (1011; 0). \qquad (2)$$

3.3. Пусть $xy \neq 0$. Разность номеров (2021) нечетна, поэтому нат. числа $N(x), N(y)$ разной четности.

Если $x > 0$, $y > 0$, то они оба четны, это невозм.

Если $x < 0$, $y < 0$, то они оба нечетны, это невозм.

Таким образом, $xy < 0$.

3.3.1. Пусть $x=-m,\ y=n,\quad m,n\in\mathbb{N}$. Тогда

$$N(x)-N(y)=2m+1-2n=2021,\quad m-n=1010,\ m=1010+n,$$

$$(x;y)=(-(1010+n);\ n),\ n\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

3.3.2. Пусть $x=m,\ y=-n,\quad m,n\in\mathbb{N}$. Тогда

$$N(x)-N(y)=2m-2(n+1)=2021,\quad m-n=1011, m=1011+n,$$

$$(x;y)=(1011+n);\ -n),\ n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Теперь все возможности рассмотрены и все решения найдены.

Ответ. А) $x=-1010$.
Б) $(x,y)=(-(1011+n),n),(1011+m,-m),\ n\in\mathbb{N},\ m\geq 0$.