ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА

ВАРИАНТ 41101 для 10 класса

«Время, как вода, течет из наших сосудов» – думал Лосяш, сидя на берегу реки и выливая из перевернутой вверх дном бутыли химический реактив № 21. Прозрачная жидкость, булькая, покидала сосуд. «Пятнадцать раз булькнула» – посчитал Лосяш и вздохнул – «из другой бутыли было семнадцать. Можно ли это предсказать?».

Попробуем смоделировать этот процесс.

Пусть (для простоты) бутыль имеет форму цилиндра, площадь основания которого $S = 8$ см^2, а высота $H = 25$ см, толщина стенок и дна пренебрежимо мала. Жидкость вытекает из круглого отверстия площадью $s_0 = 1$ см^2 в центре основания. В начальный момент поверхность жидкости отстоит от дна перевернутой (вертикально) бутыли на $x_0 = 1$ см, и это пространство заполнено воздухом, температура и давление которого такие же, как у окружающей атмосферы.

Предположим, что в тот момент, когда жидкость больше не может выливаться из бутыли, внутрь мгновенно входит пузырь воздуха. Определение объема этого пузыря представляет собой весьма непростой вопрос, поэтому будем пользоваться экспериментальной формулой Лосяша: после выливания очередной порции жидкости объем вошедшего пузыря воздуха $U = U_0 \cdot \dfrac{6H - h}{5H - h}$, где $U_0 = 0{,}01$ л, h – высота столба жидкости в момент вхождения предыдущего пузыря.

Всеми эффектами, связанными со взаимодействием жидкости и стенок бутыли, пренебрежем. Будем считать, что температура жидкости, бутыли и воздуха равна 22°C и не меняется в течение всего процесса.

1. Определите, сколько жидкости вытечет из бутыли до первого бульканья, а также между первым и вторым.

2. Определите, сколько пузырей воздуха прорвется в бутыть в процессе выливания всей жидкости (иными словами, сколько раз булькнет)?

Ниже приведены отрывки из записной книжки Лосяша, которые могут оказаться полезными при решении задачи.

плотность реактива $\rho_B = 953\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, *атмосферное давление* $P_A = 101\,\text{кПа}$,
плотность воздуха $\rho_A = 1{,}2\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, *молярная масса воздуха* $\mu_A = 29\,\frac{\text{г}}{\text{моль}}$,
уравнение Менделеева-Клапейрона: $PV = \dfrac{m}{\mu}RT$, *где* $R = 8{,}3\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$,
ускорение свободного падения $g = 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Заочная форма

ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА

ВАРИАНТ 41111 для 11 класса

«Время, как вода, течет из наших сосудов» – думал Лосяш, сидя на берегу реки и выливая из перевернутой вверх дном бутыли химический реактив № 21. Прозрачная жидкость, булькая, покидала сосуд. «Пятнадцать раз булькнула» – посчитал Лосяш и вздохнул – «из другой бутыли было семнадцать. Можно ли это предсказать?».

Попробуем смоделировать этот процесс.

Пусть (для простоты) бутыль имеет форму цилиндра, площадь основания которого $S = 8$ см^2, а высота $H = 25$ см, толщина стенок и дна пренебрежимо мала. Жидкость вытекает из круглого отверстия площадью $s_0 = 1$ см^2 в центре основания. В начальный момент поверхность жидкости отстоит от дна перевернутой (вертикально) бутыли на $x_0 = 1$ см, и это пространство заполнено воздухом, температура и давление которого такие же, как у окружающей атмосферы.

Предположим, что в тот момент, когда жидкость больше не может выливаться из бутыли, внутрь мгновенно входит пузырь воздуха. Определение объема этого пузыря представляет собой весьма непростой вопрос, поэтому будем пользоваться экспериментальной формулой Лосяша: после выливания очередной порции жидкости объем вошедшего пузыря воздуха $U = U_0 \cdot \dfrac{6H - h}{5H - h}$, где $U_0 = 0{,}01$ л, h – высота столба жидкости в момент вхождения предыдущего пузыря.

Всеми эффектами, связанными со взаимодействием жидкости и стенок бутыли, пренебрежем. Будем считать, что температура жидкости, бутыли и воздуха равна 22°C и не меняется в течение всего процесса.

1. Определите, сколько жидкости вытечет из бутыли до первого бульканья, а также между первым и вторым.

2. Определите, сколько пузырей воздуха прорвется в бутыть в процессе выливания всей жидкости (иными словами, сколько раз булькнет)?

3. Исследуйте влияние размера бутыли на моделируемый процесс. Определите (с точностью до 0,5 см), какой высоты должна быть бутыль, чтобы количество пузырей было вдвое больше найденного в п. 2.

Ниже приведены отрывки из записной книжки Лосяша, которые могут оказаться полезными при решении задачи.

плотность реактива $\rho_B = 953\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, *атмосферное давление* $P_A = 101$ кПа,
плотность воздуха $\rho_A = 1{,}2\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, *молярная масса воздуха* $\mu_A = 29\,\frac{\text{г}}{\text{моль}}$,
универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$,
постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$,
ускорение свободного падения $g = 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

РЕШЕНИЕ

1. Рассмотрим баланс давлений в «горлышке» бутыли в начальный момент времени. На линию раздела воздух–жидкость снизу давит воздух, создавая давление, равное атмосферному. Сверху давит столб жидкости высоты $H - x_0$ и воздух, заключенный между жидкостью и дном, имеющий (по условию) атмосферное давление. Таким образом, излишек давления сверху заставляет жидкость вытекать.

В процессе вытекания объем свободного пространства между жидкостью и дном будет увеличиваться, а давление воздуха, заключенного в нем, падать. Наступит такой момент, когда суммарное давление этого воздуха и оставшегося в бутыли столба жидкости сравняется с атмосферным. В этот момент вытекание прекратится и произойдет первый «буль».

2. Запишем условие равенства давлений. Обозначим через x_1 расстояние от дна бутыли до поверхности жидкости. Тогда высота опустившегося столба жидкости равна $H - x_1$ и он создает давление

$$P_B = \rho_B g(H - x_1).$$

Давление воздуха найдем из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$P_1 = \frac{m_0 RT}{\mu V_1},$$

в котором $m_0 = \rho_A V_0$ — масса воздуха, заключенного в бутыли (где $V_0 = x_0 S$ – первоначальный его объем) и $V_1 = x_1 S$ — объем, занимаетмый воздухом в бутыли в момент первого «буля».

Подставляя полученные выражения в равенство

$$P_B + P_1 = P_A,$$

получим уравнение для поиска x_1

$$\rho_B g(H - x_1) + \frac{m_0 RT}{\mu\, x_1 S} = P_A.$$

Это квадратное уравнение, которое можно преобразовать к виду

$$x_1^2 + bx_1 - c = 0$$

с коэффициентами

$$b = \frac{P_A}{\rho_B g} - H, \quad c = \frac{m_0 RT}{\mu\, S \rho_B g}.$$

Дискриминант этого уравнения положителен, поскольку $c > 0$. Из двух корней выбираем положительный

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Теперь можно дать частичный ответ на первый вопрос. До первого «буля» из бутыли вытечет объем жидкости, который можно вычислить по формуле

$$(x_1 - x_0)S.$$

3. В момент первого «буля» в бутыль войдет дополнительный объем U воздуха. Это создаст излишек давления внутри и жидкость вновь станет вытекать до тех пор, пока

давления в «горлышке» снизу и сверху не сравняются. В этот момент вытекание вновь прекратится и произойдет второй «буль».

Обозначая через x_2 высоту опустившегося к этому моменту столба жидкости, запишем новое условие равенства давлений

$$\rho_B g(H - x_2) + \frac{m_1 RT}{\mu\, x_2 S} = P_A,$$

в котором

$$m_1 = m_0 + U_1 \rho_A.$$

Поскольку высота столба жидкости в предыдущий момент есть $H - x_0$, то величина U_1, согласно условию, вычисляется как

$$U_1 = U_0 \cdot \frac{6H - (H - x_0)}{5H - (H - x_0)} = U_0 \cdot \frac{5H + x_0}{4H + x_0}.$$

Полученное квадратное уравнение можно записать в том же виде

$$x_2^2 + bx_2 - c = 0,$$

где коэффициенты

$$b = \frac{P_A}{\rho_B g} - H, \quad c = \frac{m_1 RT}{\mu\, S \rho_B g}.$$

Из двух корней снова выбираем положительный

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Теперь можно дать окончательный ответ на первый вопрос. Между первым и вторым «булями» из бутыли вытечет объем жидкости, который можно вычислить по формуле

$$(x_2 - x_1)S.$$

4. Заметим, что как вид уравнений, так и их коэффициенты, полученные при поиске величин x_1 и x_2, полностью аналогичны друг другу и отличаются только индексами. Поэтому, рассуждая аналогичным образом, можно получить формулы для высоты столба жидкости x_{k+1} в момент $(k+1)$-го «буля», считая все величины в момент k-го «буля» известными.

Уравнение для поиска x_{k+1} будет иметь вид

$$\rho_B g(H - x_{k+1}) + \frac{m_k RT}{\mu\, x_{k+1} S} = P_A,$$

в котором

$$m_k = m_{k-1} + U_k \rho_A.$$

Поскольку высота столба жидкости в момент предыдущего «буля» есть $H - x_k$, то величина U_k, согласно условию, вычисляется как

$$U_k = U_0 \cdot \frac{6H - (H - x_k)}{5H - (H - x_k)} = U_0 \cdot \frac{5H + x_k}{4H + x_k}.$$

Полученное квадратное уравнение можно записать в виде

$$x_{k+1}^2 + bx_{k+1} - c = 0,$$

где коэффициенты

$$b = \frac{P_A}{\rho_B g} - H, \quad c = \frac{m_k RT}{\mu S \rho_B g}.$$

Из двух корней выбираем положительный

$$x_{k+1} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

Производя описанный расчет (делая цикл по индексу k), можно определить высоту столба жидкости в момент каждого «буля».

Расчет следует прекращать в тот момент, когда очередной найденный x_{k+1} окажется больше высоты бутыли H.

5. Запишем все действия в форме алгоритма

Алгоритм "Буль-буль"

начало алгоритма

задать H, x_0, S, P_A, μ, ρ_B, ρ_A, R, T

$b := \dfrac{P_A}{\rho_B \cdot g} - H$

$k := 0$

$x[0] := x_0$

$m := x[0] \cdot S$

ПОКА $x[k] < H$

$\quad c := \dfrac{m \cdot R \cdot T}{\mu \cdot S \cdot \rho_B \cdot g}$

$\quad x[k+1] := \dfrac{-b + \sqrt{b \cdot b + 4 \cdot c}}{2}$

$\quad m := m + U_0 \cdot \dfrac{5H + x[k]}{4H + x[k]} \cdot \rho_A$

$\quad k := k + 1$

КОНЕЦ_ПОКА

Вывести массив $x[\ ]$ и значение $k - 1$

конец алгоритма

6. Реализуя на ЭВМ написанный алгоритм, получим $x_{16} = 0{,}241$; $x_{17} = 0{,}256$.

Таким образом, 16 раз в бутыль будут входить пузыри воздуха, на 17-й раз вытечет весь остаток. Другими словами, булькнет 16 раз. Это ответ на второй вопрос.

7. Найдем ответ на третий вопрос (который был задан только для 11 класса).

Для этого потребуется провести вычислительный эксперимент, запуская реализованный алгоритм при разных значениях входного параметра H. Легко увидеть (это ожидаемо), что с ростом H растет количество «булей».

Поэтому в самом простом варианте можно выполнять алгоритм «Буль-буль(H)» циклически, передавая в него значения H, увеличивающиеся на 0,5 см. Когда алгоритм выдаст 32 «буля», ответ будет найден.

Ниже приведены результаты некоторых расчетов, в которых (как при ответе на второй вопрос) «булями» считаются пузыри воздуха, прорвавшиеся в еще не опустевшую бутыль.

$H = 48{,}0$ 31 «буль»

$H = 48{,}5$ 31 «буль»

$H = 49{,}0$ 32 «буля»

$H = 49{,}5$ 32 «буля»

$H = 50{,}0$ 32 «буля»

$H = 50{,}5$ 33 «буля»

$H = 51{,}0$ 33 «буля»

Таким образом, можно брать бутыль высотой 49,0 – 50,0 см.

Ответы

10 и 11 класс

1. $V_1 \approx 2$ мл, $V_2 \approx 0{,}13$ л.

2. 16 «булей».

Только 11 класс

3. $49{,}0 \leq H_2 \leq 50{,}0$ (см).

Критерии проверки

10 класс

1. Приведен верный и обоснованный ответ на первый вопрос – 30 баллов.

2. Приведен верный и обоснованный ответ на второй вопрос – 30 баллов.

3. Приведено корректное описание физической модели явления (выведены все необходимые для расчетов формулы) – 20 баллов.

4. Приведено подробное описание алгоритма (словесное описание, блок-схема, псевдокод любого формата, в том числе, совпадающий с любым алгоритмическим языком) либо в тексте работы алгоритм описан очень кратко (вплоть до «голых» формул), но программный код (на алгоритмическом языке) откомментирован построчно (почти) – 20 баллов.

11 класс

1. Приведен верный и обоснованный ответ на первый вопрос – 30 баллов.

2а. Приведен верный и обоснованный ответ на второй вопрос – 20 баллов.
2б. Приведен верный и обоснованный ответ на третий вопрос – 10 баллов.

3. Приведено корректное описание физической модели явления (выведены все необходимые для расчетов формулы) – 20 баллов.

4. Приведено подробное описание алгоритма (словесное описание, блок-схема, псевдокод любого формата, в том числе, совпадающий с любым алгоритмическим языком) либо в тексте работы алгоритм описан очень кратко (вплоть до «голых» формул), но программный код (на алгоритмическом языке) откомментирован построчно (почти) – 20 баллов.

Примечание (для участников)

Жюри запускает программные коды только для того, чтобы убедиться в их работоспособности либо проверить приведенный ответ. Но делает это только в сомнительных (для Жюри) ситуациях.

ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА

ВАРИАНТ 41091 для 9 класса

Дозатор молодильной воды представляет собой невзрачный цилиндрический сосуд, герметично закрытый сверху и имеющий клапан подачи снизу. Площадь основания цилиндра $S = 8$ см^2, высота $H = 25$ см, толщина стенок и дна пренебрежимо мала.

В начале раздачи молодильная вода занимает 96% объема сосуда, над ней находится воздух плотностью $\rho = 1{,}2\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Жидкость свободно изливается до тех пор, пока плотность воздуха над ней превышает критическую величину $\rho_0 = 0{,}7\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Как только эта величина будет достигнута, клапан подачи закрывается и сверху закачивается дополнительный воздух, объем которого определяется как $U = U_0 \cdot \dfrac{6H - h}{5H - h}$, где $U_0 = 0{,}1$ л, H – высота всего сосуда, h – высота молодильной воды в нем. После этого возобновляется подача следующей дозы до достижения критической плотности воздуха в сосуде. Так происходит до тех пор, пока дозатор не опустеет.

Будем считать, что температура жидкости, дозатора и воздуха не меняется в течение всего процесса. Всеми эффектами, связанными со взаимодействием жидкости и стенок сосуда, пренебрежем.

1. Определите объем первой и второй доз молодильной воды.
2. Определите, какое количество доз молодильной воды выдаст дозатор.
3. Определите объем последней выданной дозы.

РЕШЕНИЕ

1. Рассмотрим подачу первой дозы молодильной воды. В самом начале воздух занимает 4% общего объема дозатора (цилиндра), что составляет $V_0 = 0{,}04SH = 0{,}08$ л. При этом его плотность равна ρ, следовательно изначальная масса воздуха в сосуде есть $m_0 = 0{,}04\rho SH$.

При изливании первой дозы воды объем свободного пространства над ней увеличивается, а плотность воздуха, в нем заключенного, уменьшается. Когда объем достигнет величины

$$V_1 = \frac{m_0}{\rho_0},$$

плотность уменьшится до критической величины ρ_0, и изливание прекратится.

Таким образом, объем первой выданной дозы молодильной воды равен

$$V_1 - V_0 = \frac{m_0}{\rho_0} - V_0 = \frac{0{,}04\rho SH}{\rho_0} - 0{,}04SH = 0{,}04SH\left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right).$$

2. В момент прекращения подачи воды высота столба жидкости составит

$$h_1 = H - \frac{V_1}{S}.$$

Согласно условию, в этот момент будет моментально закачан объем воздуха

$$U_1 = U_0 \cdot \frac{6H - h_1}{5H - h_1},$$

и масса всего воздуха в сосуде станет равна

$$m_1 = m_0 + U_1\rho.$$

Критическая плотность ρ_0 теперь будет достигнута при дальнейшем увеличении объема до величины

$$V_2 = \frac{m_1}{\rho_0}.$$

Объем второй выданной дозы молодильной воды составит

$$V_2 - V_1.$$

Сделав расчет по указанным формулам, получим ответ на первый вопрос.

3. Далее процесс пойдет аналогично описанному в п. 2. Напишем формулы для произвольной дозы.

Пусть k доз уже выдано, объем воздуха над жидкостью равен V_k, а его масса с учетом уже закачанного воздуха равна m_k. Начинается выдача очередной дозы.

Критическая плотность ρ_0 теперь будет достигнута при увеличении объема до величины

$$V_{k+1} = \frac{m_k}{\rho_0}.$$

При достижении этого объема высота столба жидкости составит

$$h = H - \frac{V_k}{S}.$$

Следовательно, будет закачан объем воздуха

$$U_k = U_0 \cdot \frac{6H - h}{5H - h},$$

и масса всего воздуха в сосуде составит

$$m_{k+1} = m_k + U_k \rho.$$

Производя описанный расчет циклически (увеличивая индекс k), можно получить объемы всех выданных доз молодильной воды. Следовательно, можно узнать их количество.

Расчет следует прекращать в тот момент, когда очередное значение объема воздуха окажется больше объема всего сосуда.

4. Запишем все действия в форме алгоритма

Алгоритм "Молодильная вода"

начало алгоритма

задать H, S, ρ_0

$k := 0$

$V[0] := 0{,}04 \cdot S \cdot H$

$m := V[0] \cdot \rho$

ПОКА $V[k] < S \cdot H$

$\quad V[k+1] := \dfrac{m}{\rho_0}$

$\quad h := H - \dfrac{V[k+1]}{S}$

$\quad m := m + U_0 \cdot \dfrac{6 \cdot H - h}{5 \cdot H - h} \cdot \rho$

$\quad k := k + 1$

КОНЕЦ_ПОКА

Вывести массив $V[\ ]$ и значение $k - 1$

конец алгоритма

Заметим, что величины h и m в алгоритме используются без индексов (скалярные пременные вместо массивов). Это связано с тем, что нет необходимости сохранять их значения на каждом шаге для дальнейшего использования.

Исполняя на ЭВМ написанный алгоритм, получим ответ на второй вопрос.

5. Для получения ответа на третий вопрос нужно скорректировать результат работы алгоритма. Последний найденный объем V_K может оказаться больше объема всего сосуда, поэтому объем последней выданной дозы нужно вычислить как

$$SH - V_{K-1}$$

(где K – общее количество выданных доз).

Ответы

1. Первая доза: 57 мл, вторая: 178 мл.

2. 12 доз.

3. Последняя доза: 113 мл.

Критерии проверки

1. Приведен верный и обоснованный ответ на первый вопрос – 30 баллов.

2. Приведен верный и обоснованный ответ на второй вопрос – 20 баллов.

3. Приведен верный и обоснованный ответ на третий вопрос – 20 баллов.

4. Приведено корректное описание физической модели явления (выведены все необходимые для расчетов формулы) – 20 баллов.

5. Приведено подробное описание алгоритма (словесное описание, блок-схема, псевдокод любого формата, в том числе, совпадающий с любым алгоритмическим языком) либо в тексте работы алгоритм описан очень кратко (вплоть до «голых» формул), но программный код (на алгоритмическом языке) откомментирован построчно (почти) – 10 баллов.

Примечание (для участников)

Жюри запускает программные коды только для того, чтобы убедиться в их работоспособности либо проверить приведенный ответ. Но делает это только в сомнительных (для Жюри) ситуациях.