Задача 1 (11 класс)

Исследуя прочность опоры ЛЭП, инженер Закамский пришел к величине

$$P(n) = \left(1 - \frac{5}{8}\right)\left(1 - \frac{7}{15}\right)\left(1 - \frac{9}{24}\right)\cdots\left(1 - \frac{2n-1}{n^2-1}\right).$$

Существует ли такое n, при котором $P(n) \le 0{,}\underbrace{0\ldots0}_{\text{2020 нулей}}1$?

Решение.

Выполним преобразования

$$1 - \frac{2n-1}{n^2-1} = \frac{n^2-1-2n+1}{n^2-1} = \frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)\cdot(n+1)}.$$

Теперь

$$P = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)\cdot(n+1)} = \frac{1\cdot 3}{(n-1)\cdot(n+1)} = \frac{3}{n^2-1}$$

Для определения n достаточно взять любое решение неравенства

$$\frac{3}{n^2-1} \le\ 10^{-2021},$$

эквивалентное неравенству $n^2 \ge \frac{1}{3}\cdot 10^{2021} + 1$. Например, $n = 10^{1010}$.

Ответ. Существует (например $n = 10^{1010}$).

Задача 2 (11 класс)

Решите в целых числах уравнение

$$(1/3)^{-19x}\cdot(\sqrt{3})^{44y} = 9^{410}.$$

Решение.

Преобразуем показательное выражение: $3^{19x+22y} = 3^{820}$.

Теперь задача сводится к следующей.

Найдите все решения уравнения

$$19x + 22y = 820 = 20(19+22)$$

в целых числах.

Легко проверить, что решением является $x = y = 20$.

Перепишем уравнение в виде

$$19(20 + 22m) + 22(20 - 19m) = 20(19 + 22)$$

Отсюда видны остальные решения.

Ответ $x = 20 + 22m,\ y = 20 - 19m,\ m \in \mathbb{Z}.$

Задача 3 (11 класс)

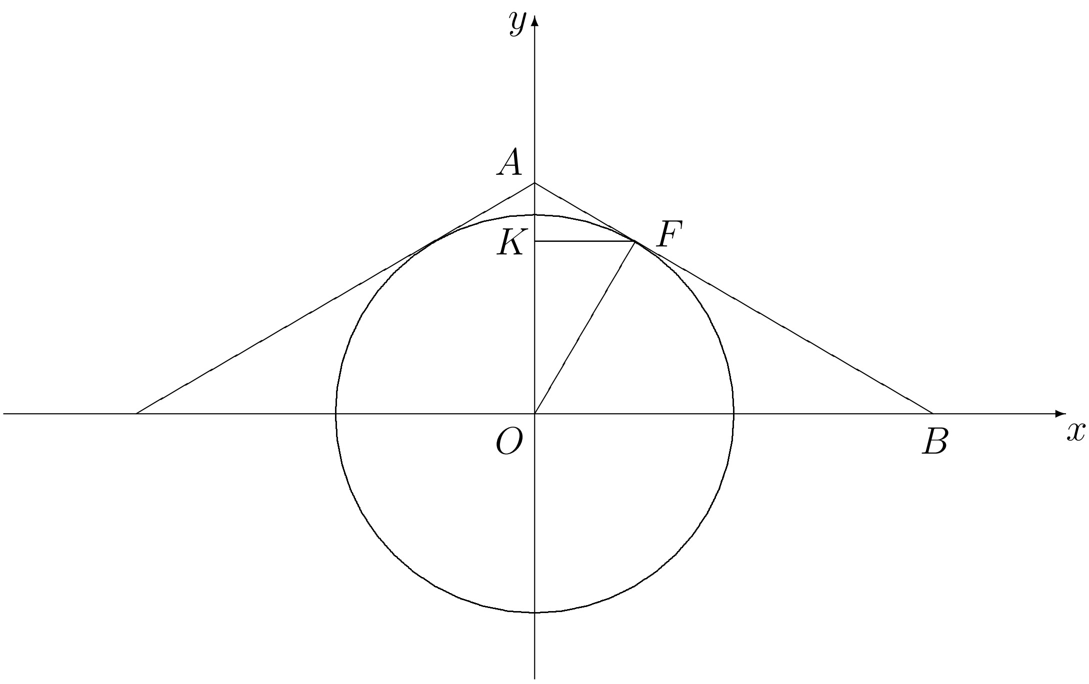
Дана сфера радиуса $R = 2$ с центром $(0, 0, 0)$. Прямая, пересекающая ось OY, касается сферы и образует с плоскостью XOZ угол 30°.

Найдите координаты всех возможных точек касания сферы такой прямой.

Среди всех точек касания найдите ближайшую к точке пересечения сферы с лучом $z = -x$ $(x \leq 0, y = 0)$.

Решение

Совокупность всех прямых, описанных в условии образует конус, вершина которого находится в точке пересечения прямых с осью (указанной в условии). Ось конуса совпадает с той же координатной осью. Изобразим сечение плоскорстью YOX.



Все точки пересечения прямых с плоскостью XOZ будут располагаться на окружности радиуса OB. Все точки касания прямых со сферой будут располагаться на окружности радиуса KF. Координатой y этих точек будет координата y точки K.

Обозначим угол OBA через α. Величина этого угла дана в условии. Поскольку $KF \perp OA$ и $OF \perp AB$, то $\angle KOF = \alpha$.

Из прямоугольных треугольников OKF и OFB, сторона которых OF равна радиусу сферы, найдем $KF = OF \cdot \sin\alpha = 1$.

Также найдем $OK = OF \cdot \cos\alpha = \sqrt{3}$.

Таким образом, получаем, что все возможные точки касания лежат на окружности $x^2 + z^2 = 1$, $y = \sqrt{3}$.

Для поиска точки M на окружности, ближайшей к заданному г.м.т., заметим, что заданный луч лежит в биссектральной плоскости. Поэтому достаточно на найденной окружности отметить точку с равными координатами $z = -x,\ x \le 0$. Это будет $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Ответ. точки касания лежат на окружности $x^2 + z^2 = 1$, $y = \sqrt{3}$; ближайшая к лучу: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Задача 4 (10 класс)

Решите уравнение $|xyz| = |x| - |y|$ в целых числах.

Могут ли числа x, y, z, удовлетвор яющие этому уравнению, быть косинусами, быть тангенсами углов одного треугольника?

Решение.

Введем неотриц. целочисл. перем. $u = |x|, v = |y|, w = |z|$. Тогда

$$uvw = u - v. \tag{$*$}$$

1. Если $u = 0$, то $v = 0$. Если $v = 0$, то $u = 0$. Получаем решения

$$(u, v, w) = (0, 0, k), k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

2. Если $w = 0$, то $u = v$, получаем решения

$$(u, v, w) = (k, k, 0), k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

3. Пусть $uvw \ne 0$. Тогда $u(1 - vw) = v$ и v кратно u, $v = Nu$, где $N \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Подставляя это выражение для v в (*), получим $u^2Nw = u - Nu$, откуда $N(1+uw) = 1$. Последнее равносильно $N = 1+uw = 1$, откуда $uw = 0$, что невозможно.

Итак, (1) и (2) есть все решения ур-я (*). Возвращаясь к исходным переменным, получаем

$$(x, y, z) = (0, 0, m), (m, m, 0), (m, -m, 0),\ m \in \mathbb{Z}.$$

Ни одно из решений не может быть набором ни косинусов, ни тангенсов углов одного треуг-ка. Треугольник не может иметь два прямых угла и не может иметь угол, кратный π. Если же один из углов прямой, то два других не могут иметь целочисленные косинусы.

Ответ: $(x, y, z) = (0, 0, m), (m, m, 0), (m, -m, 0),\ m \in \mathbb{Z}$. Ни одно из решений не может быть набором ни косинусов, ни тангенсов углов одного треуг-ка.

Задача 5 (10 класс)

В пятиугольнике длина одной из сторон вдвое больше среднего арифметического длин двух смежных с ней сторон. Можно ли в такой пятиугольник вписать окружность?

Решение.

Пусть AB=a, BC=b, CD=c, A_1, B_1, C_1 точки кас. вписанной окр. и этих сторон, тогда $b = 2(a + c)/2 = a + c$, $A_1B = BB_1 = x$, $B_1C = CC_1 = y$, $C_1D = z$, $AA_1 = t$,

$$\begin{cases} x & & & +t & = a, \\ x & +y & & & = a + c, \\ & y & +z & & = c. \end{cases}$$

Складывая, получаем $2(x + y) + z + t = 2(a + c)$, $x + y + (1/2)(z + t) = x + y = a + c$, откуда $z + t = 0$, что невозможно, так как $z > 0$ и $t > 0$.

Ответ: нет.

Задача 6 (9 класс)

Решите уравнение $2xyz = 2x - y$ в целых числах.

Решение.

Введем целочисл. переменную $M = 2x$. Тогда исходное ур-е преобразуется:

$$Myz = M - y. \qquad (*)$$

1. Если $M = 0$, то $y = 0$. Если $y = 0$, то $M = 0$. Получаем решение

$$(M, y, z) = (0, 0, k),\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

2. Если $z = 0$, то $M = y$, решение

$$(M, y, z) = (k, k, 0),\ k \in \mathbb{Z}. \qquad (2)$$

3. Пусть $Myz \neq 0$. Тогда $M(1 - yz) = y$, след-но, y кратно M, $y = nM$, где $n \in \mathbb{Z}$. Подставим это в (*): $M^2nz = M - nM$, откуда

$$n(1 + Mz) = 1.$$

Рассмотрим возможные решения этого ур-я в целых числах.

3.1. $n = 1 + Mz = 1$, тогда $Mz = 0$, невозможно.

3.2. $n = 1 + Mz = -1$, тогда $Mz = -2$. Рассмотрим решения последнего ур-я.

3.2.1. $M = 1, z = -2, \quad y = nM = (-1)1 = -1$, получаем решение

$$(M, y, z) = (1, -1, -2). \tag{3}$$

3.2.2. $M = -1, z = 2$, тогда

$$(M, y, z) = (-1, 1, 2). \tag{4}$$

3.2.3. $M = 2, z = -1$, тогда

$$(M, y, z) = (2, -2, -1). \tag{5}$$

3.2.4. $M = -2, z = 1$, тогда

$$(M, y, z) = (-2, 2, 1). \tag{6}$$

Найдены все решения ур-я (*). Учитывая, что $M = 2x$, получаем для исходного ур-я

Ответ: $(x, y, z) = (0, 0, m),\ (m, 2m, 0),\ (1, -2, -1),\ (-1, 2, 1), \quad m \in \mathbb{Z}$.

Задача 7 (9 класс)

Дату 9.11.20 можно назвать красивой, так как $9 + 11 = 20$. Сколько дат такого вида в годы с 2020 по 2030? На какой день недели придется 19.11.30?

Решение.

$X.Y.Z: \quad X + Y = Z, \quad Z = 20, \dots, 30, \ X \in \{1, \dots, 31\}, \ Y \in \{1, \dots, 12\}$.

$20 = 8 + 12 = 9 + 11 = \cdots = 19 + 1$.

$21 = 9 + 12 = 10 + 11 = \cdots = 20 + 1$.

$22 = 10 + 12 = 11 + 11 = \cdots = 21 + 1$.

$\vdots$

$30 = 18 + 12 = 19 + 11 = \cdots = 29 + 1$.

Все эти даты существуют ($28 + 2 \ \Leftrightarrow\ 28$ февраля). Итого $12 \times 11 = 132$.

Найдем день недели. 19.11.20 — четверг. Между 2030 и 2020 пройдет 10 лет, из них 2 года високосных, 2024 и 2028. Каждый невисокосный год день недели сдвигается на 1 вперед (так как $365 = 7k + 1$), а в високосный год — на 2 вперед. Остается сдвинуть четверг на остаток от деления $10 + 2$ на 7 вперед, т. е. четв. $+5$ =вторник.

Ответ: 132 даты, 19.11.2030 — вторник.

Задача 8 (8 класс) Три доблестных рыцаря решили провести турнир в честь прекрасной дамы. Правила турнира таковы.
1. Поединки ведутся турнирным (безопасным) оружием, чтобы не нанести повреждения ни рыцарям, ни коням.
2. Каждые два участника проводят между собой не более одного поединка.
3. Все заявленные каждым участником поединки должны состояться.
Оценив свои возможности и выносливость своих коней, все три рыцаря вызвались провести по 3 поединка;
Какое минимальное количество участников надо добавить к этим трем, чтобы турнир стал возможен? Сколько поединков должны они провести?

Решение.

Пусть участники король Артур (A), король Бан (B), сэр Кэй (C). Любой из них, встретившись с 2 другими, проведет только 2 поединка, а не 3. Пригласят как минимум еще одного, пусть это будет сэр Дамас (D). Рассмотрим количество поединков, в которых они должны участвовать (a, b, c, d).

1. Допустим сначала $d = 1$. Имеем $(a, b, c, d) = (3, 3, 3, 1)$. После всех трех поединков A получим $(b, c, d) = (2, 2, 0)$. Но B и C не могут проводить поединок друг с другом дважды. Такой случай невозможен.

2. При $d = 2$ имеем $(a, b, c, d) = (3, 3, 3, 2)$. После всех трех поединков A получим $(b, c, d) = (2, 2, 1)$. После двух поединков B с C и D получим $(c, d) = (1, 0)$. Такое продолжение турнира невозможно.

3. Наконец, при $(a, b, c, d) = (3, 3, 3, 3)$ турнир возможен: каждый из четырех проводит по одному поединку с тремя другими. Число поединков есть $3 \cdot 4/2 = 6$.

Ответ: один доп. участник, он проведет 3 поединка, всего в турнире 6 поединков.

Задача 9 (7 класс)

В детстве Михаил Лермонтов катался с подружками на лодочке в бабушкином имении Тарханы Пензенской губернии. От причала лодочка прошла по озеру со скоростью 3 версты в час, затем вошла в вытекающую из озера речку и двигалась со скоростью 6 верст/ч до мельницы. Здесь дети сделали остановку, посмотрели на работу мельника, а затем таким же путем вернулись обратно на причал в имении бабушки Елизаветы Алексеевны Арсеньевой. Против течения лодочка двигалась со скоростью 2 версты/ч, и весь путь (туда и обратно), не считая времени на остановку у мельницы, занял 2 часа 40 минут. Каково расстояние по воде от причала до мельницы?

Решение.

Пусть по озеру путь от причала до речки составляет S_1 верст, по речке от озера до мельницы — S_2 верст. Тогда

$$2 \cdot \frac{S_1}{3} + \frac{S_2}{6} + \frac{S_2}{2} = 2 + \frac{2}{3}, \quad \frac{2(S_1 + S_2)}{3} = \frac{8}{3}.$$

Таким образом, путь $S_1 + S_2$ составляет 4 версты.

Ответ: 4 версты.

Задача 10 (7 класс)

19 октября в Царском Селе в честь дня знаменитого лицея проводился праздничный фейерверк. Было выпущено 418 снарядов из нескольких пушек. Все пушки были построены в две одинаковые батареи и произвели по одинаковому количеству выстрелов. Число батарей меньше числа пушек в батарее, а число пушек в батарее меньше числа выстрелов, сделанных одной пушкой. Сколько выстрелов произвела каждая пушка?

Решение

Если x — число батарей, y — число пушек в батарее, z — число выстрелов из каждой пушки, то числа x, y, z натуральные, $x < y < z$, $xyz = 418$. Разлагая на простые множители $418 = 2 \cdot 11 \cdot 19$, получаем однозначно $z = 19$.

Разложить 418 на простые множители можно довольно быстро и просто. Сначала разделим 418 на 2, получим нечетное 209. Используя признаки делимости на 3 и 5, заметим, что 209 не кратно ни 3, ни 5. Далее, 209 не делится на 7, так как число $209 + 1 = 210$ кратно 7. Делить далее на 9 не требуется, так как 209 не кратно 3. Разделив же 209 на следующее нечетное 11, получим 19. Числа 11 и 19 простые, так как 11 не делится на меньшие простые 2,3,5,7, а 19 не делится на меньшие простые 2,3,5,7,11 (делить 19 на 13 и 17 не требуется, так как $19 < 2 \cdot 13$).

Ответ. 19 выстрелов произвела каждая пушка.

Задача 11 (6 класс)

Найдите все общие делители чисел $2020^{2021} - 1$ и $2020^{2021} + 1$.

Решение

Если два различных числа кратны k, то разница между ними не может быть меньше k. Разница между заданными числами равна 2. Но каждое из них – нечетное, т.к. получается прибавлением/вычитанием единицы из четного числа (степени с четным основанием). Поэтому никаких других общих делителей, кроме 1, заданные числа не имеют.

Ответ. Только 1.

Задача 12 (6 класс)

Африканский животновод Комби Корм содержит на своей ферме 5 бегемотиков. К моменту ветеринарного осмотра суммарный вес бетемотиков достиг 1,5 т. Верно ли, что есть хотя бы одна пара бегемотиков, которую можно отвезти на осмотр на машине грузоподъемностью 7 ц?

Решение Попробуем обосновать утвердительный ответ, рассуждая от противного. Пусть указанное действие невозможно.

Из 5 бегемотиков можно составить $(5 \cdot 4)/2 = 10$ различных пар. Если каждая пара весит больше 7 ц., то 10 пар весят больше $7 \cdot 10 = 70$ ц. $= 7$ т.

Но при таком подсчете каждый бегемотик учтен 4 раза, поскольку участвует в 4 различных парах. Следовательно, вес всех пяти бегемотиков больше, чем $7/4$ т. Но $7/4 > 6/4 = 1{,}5$, что противоречит условию задачи.

Ответ. Верно.

Задача 13 (5 класс)

Квадратная шоколадка, обсыпанная по периметру ароматным перцем, разделена бороздками на 25 равных квадратных долек. Можно ли распределить эти дольки между пятью гурманами так, чтобы каждому досталось поровну и шоколада, и перца?

Решение

Нарисуем квадрат, разбитый на 25 частей и будем расставлять в них цифры, соответствующие номерам гурманов.

Сначала заполним углы

1				2
4				3

Чтобы гурману 5 досталось столько же перца, его номер нужно поставить у границы дважды.

1	5	5		2
4				3

Остается 10 свободных клеток у границы. Заполняем их номерами от 1 до 5 (каждый будет использован дважды).

1	5	5	1	2
5				2
4				3
3				4
4	2	1	5	3

В результате весь перец распределен поровну. Но номера 1 – 4 стоят в 3-х клетках каждый, а номер 5 – в 4-х клетках. Поэтому в оставшиеся свободные места сначала ставим по 1 разу номера 1, 2, 3, 4. А затем все осташееся заполняем равномерно номерами с 1 по 5. Получаем **ответ**

1	5	5	1	2
5	1	2	3	2
4	4	5	1	3
3	2	3	4	4
4	2	1	5	3

Задача 14 (5 класс)

В бюро ремонта «Ай-люли» сдали два планшета и 25 смартфонов. Сначала стажер чинил планшет, а мастер все это время занимался смартфонами. Когда стажер закончил, мастер взялся за второй планшет и к концу рабочего дня починил его, а стажер за это время отремонтировал все остальные смартфоны. Сколько смартфонов починил мастер, если любую работу он выполняет вдвое быстрее стажера?

Решение

Поскольку скорость мастера вдвое выше, то второй планшет был починен вдвое быстрее. Если за это время стажер починил k смартфонов, то мастер починил $4k$ смартфонов (т.к. он работает вдвое быстрее и времени на починку смартфонов у него было вдвое больше). Таким образом, получаем уравнение $k + 4k = 25$, откуда $k = 5$, $4k = 20$.

Ответ. Мастер починил 20 смартфонов.