Задача для 11 класса

Коэффициентами многочлена $P_n(x)$ некоторой степени n являются целые неотрицательные числа, не превосходящие трех. Известно, что $P_n(4) = 2021$. Найдите $P_n(2)$.

Решение. Запись

$$P_n(4) = a_n \cdot 4^n + a_{n-1} \cdot 4^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 4 + a_0,$$

в которой $a_k \in \{0, 1, 2, 3\}$ $(k = \overline{0, n})$, можно рассматривать как представление числа $P_n(4)$ в системе счисления с основанием 4.

Переводя $2021_{10} = 133211_4$, получаем все коэффициенты

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 3,\ a_5 = 1.$$

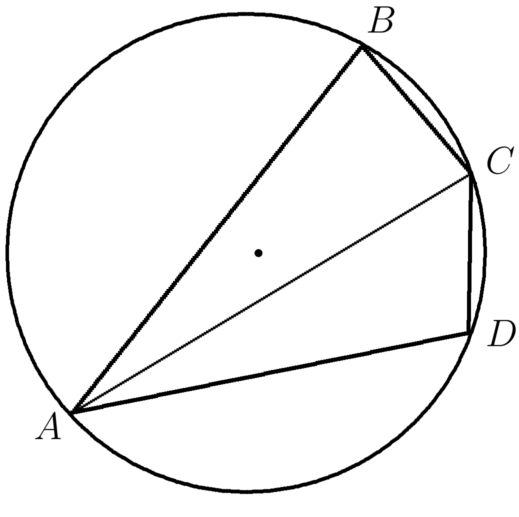
Теперь $P_n(2) = 2^5 + 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2^1 + 1 = 115$.

Ответ. 115.

Задача для 10 класса

Вариант 4.

В окружность вписан четырехугольник ABCD, у которого стороны BC и CD равны. Диагональ AC равна 5 м, а площадь четырехугольника ABCD равна 10 м^2. Найдите косинус угла BAD.



Решение.

Углы BAC и CAD равны (как вписанные, опирающиеся на равные дуги). Обозначим каждый из них через α. Тогда угол BAD равен 2α.

Пусть $AB \neq AD$, иначе задача становится тривиальной.

Площадь четырехугольника равна

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\alpha + \frac{1}{2} AD \cdot AC \sin\alpha = \frac{1}{2} AC \cdot (AB + AD) \sin\alpha.$$

Найдем $AB + AD$. По теореме косинусов

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos\alpha = BC^2 = CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos\alpha.$$

Отсюда

$$AB^2 - AD^2 = 2AC \cdot (AB - AD) \cos\alpha$$

или после сокращения на $(AB - AD)$

$$AB + AD = 2AC\cos\alpha.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot 2AC\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}AC^2\sin 2\alpha,$$

откуда $\sin\angle BAD = \sin 2\alpha = \dfrac{2S}{AC^2}$.

Подставляя числовые значения, находим $\sin\angle BAD = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5}$, откуда $\cos\angle BAD = \sqrt{1 - \dfrac{16}{25}} = \dfrac{3}{5}$.

Ответ. $\dfrac{3}{5}$

Задача для 9 класса

Вар. 1

Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \le x$. Например, $[-4/3] = -2,\ [\pi] = 3,\ [2] = 2$. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x^2}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] = 2x.$$

Решение. Возм. 2 случая.

1. $x = 2n$, где n целое. Тогда получаем ур-е относ. n: $2n^2 + [n + 1/2] = 4n$, откуда $2n^2 + n = 4n$, $n(2n-3) = 0$. Последнее ур. имеет ровно одно целое решение $n = 0$, откуда $x = 0$.

2. $x = 2n + 1$, где n целое. Тогда получаем ур-е относ. n:

$$[2n^2 + 2n + 1/2] + n + 1 = 2(2n+1),$$

откуда $2n^2 + 2n + n + 1 = 4n + 2$, $2n^2 - n - 1 = 0$. Последнее ур-е имеет ровно одно целое реш. $n = 1$, откуда $x = 3$.

Ответ: $x = 0;\ 3$.

Задача для 9 класса

В ряд выписано 2021 положительное число. Произведение всех чисел равно 2021, а произведение любых десяти подряд стоящих чисел равно 1. Чему равно 1011-ое по счету число?

Решение

Введем обозначения. Пусть в ряд выписано $N = 2021$ положительное число, произведение всех чисел равно $P = 2021$, а произведение любых 10 подряд стоящих чисел равно $Q = 1$. Чему равно число C, имеющее номер 1011?

Если разбивать ряд на блоки по 10 чисел "встык", двигаясь одновременно слева и справа навстречу, то очередной блок слева закончится на позиции 1010, а некоторый блок справа – на позиции 1012.

Тогда произведение всех чисел равно, с одной стороны, P, а с другой стороны, $Q^k \cdot C$ (где $k = 101$ – количество блоков по 10 чисел). Таким образом, $C = \dfrac{P}{Q^k}$.

Ответ. 2021.

Задача для 9 класса

Коротая время перед рассветом, суперагенты Алов и Вертов играют в такую игру: Алов выбирает произвольное целое число a_1, Вертов увеличивает или уменьшает его на 2, получая число b_1. Затем каждый по очереди вычисляет свое следующее число по формулам:

$$\begin{cases} a_{n+1} = n(n-1) - 5a_n - 7b_n, \\ b_{n+1} = 2 + n^2 - n - 5b_n - 7a_n, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Могут ли агенты на каком-то шаге $n > 1$ получить равные числа?

Решение.

Обозначим $\Delta_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}$. Для этой величины имеем

$$\begin{aligned} &\Delta_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n - 2b_n - 2 = 2\Delta_n - 2 = 2(2\Delta_{n-1} - 2) - 2 = \\ &= 2^2\Delta_{n-1} - 2^2 - 2^1 = 2^2(2\Delta_{n-2} - 2) - 2^2 - 2^1 = 2^3 - 2^3 - 2^2 - 2^1 = ... = \\ &= 2^n\Delta_1 - \sum_{p=1}^{n} 2^p = 2^n\Delta_1 - \frac{2(2^n - 1)}{2-1} = 2^n(\Delta_1 - 2) + 2. \end{aligned}$$

Приравняем полученное выражение к нулю и, так как $\Delta_1 \in \{-2, 2\}$, рассмотрим оба случая.

$$\begin{matrix} 2^n \times 0 = -1 \\ 2^n \times (-4) = -1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2^n = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad n < 0$$

Очевидно, такого n среди натуральных быть не может.

Ответ. Не могут.

Задача для 8 класса

Австралийский фермер Комби Корм разводит породистых свиней. В один сезон каждая свиноматка принесла от шести до двенадцати поросят. Возможно ли, что 40% приплода появилась у 20% свиноматок?

Решение. Пусть количество свиноматок равно N, а общее число поросят равно P. Предположим, что указанное в условии соотношение возможно.

Тогда, поскольку каждая из $0.2N$ свиноматок принесла не более 12 поросят, то

$$0.4P \leq 12 \cdot 0.2N.$$

Остальные $0.8N$ свиноматок принесли не менее 6 поросят каждая, поэтому для оставшихся 60% приплода получается оценка

$$6 \cdot 0.8N \leq 0.6P.$$

Но неравенства

$$0.4P \leq 2.4N \qquad \text{и} \qquad 4.8N \leq 0.6P$$

как и эквивалентные им

$$P \leq 6N \qquad \text{и} \qquad 8N \leq P$$

не могут выполняться одновременно.

Следовательно, предположенное невозможно.

Ответ. Невозможно.

Задача для 8 класса

На кольцевой автодороге вокруг озера К установили 103 поста ДПС. Задумчивый водитель, совершив несколько витков по дороге, обнаружил, что каждый третий пост – это муляж. Прав ли был его вдумчивый пассажир, заявивший, что в таком случае все посты являются муляжами?

Решение.

Дано множество из 103 элементов (постов), которые циклически повторяются. Согласно условию муляжами являются 1, 4, 7 и т.д. посты. Иными словами, все посты, номера которых дают остаток 1 при делении на 3.

В том числе, таковым является пост номер 103. Третьим после него постом будет пост номер 3, затем 6 и т.д. Таким образом, все посты, номера которых делятся на 3 (без остатка) также являются муляжами.

В том числе, таков пост номер 102. Третьим после него постом будет пост номер 2, затем 5 и т.д. Таким образом, все посты, номера которых при делении на 3 дают остаток 2, также являются муляжами.

Все возможные результаты деления на 3 рассмотрены, и во всех случаях обнаружены муляжи. Следовательно, пассажир прав.

Ответ. Прав, все посты являются муляжами.

Задача для 7 класса

На заборе написано друг за другом более ста положительных чисел. Может ли быть, что произведение любых трех подряд стоящих чисел равно одной и той же величине a, не превосходящей 125, а произведение любых четырех подряд стоящих чисел равно одной и той же величине b, не меньшей 1000?

Решение.

Предположим, что описанная ситуация возможна. Обозначим числа на заборе x_1, x_2, x_3, $\ldots$ (нижний индекс обозначает порядковый номер). Рассмотрим произведение первых четырех. С одной стороны, оно равно b, с другой, оно равно произведению первого и трех следующих

$$b = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = x_1 \cdot a$$

Точно такое же соотношение можно получить для любого числа из первой четверки, а также из любой другой четверки. Поэтому все числа будут равны друг другу и величине $c = \dfrac{b}{a}$.

Таким образом получаем, что некоторая величина c должна одновременно удовлетворять условиям

$$c^3 \leq 125, \quad \text{и} \quad 1000 \leq c^4.$$

Из первого условия получаем, что $c \leq 5$. Но $5^4 = 625 < 1000$. Полученное противоречие доказывает ошибочность предположения.

Ответ. Невозможно.

Задача для 7 класса

Укажите все значения x, которые являются решением уравнения

$$(2x - 1 - (2x - 1 - \ldots (2x - 2022))) = 2021$$

в котором 2000 пар скобок.

Решение. Заменой переменой

$t = 2x - 1$ или $t = 1 - x$ или $t = 3x - 2$ или $t = 2 - 3x$ уравнение сводится к модельному

$$(t - (t - \ldots (t - 2021))) = 2021,$$

в котором четное количество пар скобок. Рассмотрев две внутренние (или аналогично внешние) пары скобок

$$(t-(t-a))=a,$$

приходим к выводу, что каждое раскрытие двух пар скобок не изменяет структуры уравнения. Поэтому после раскрытия всех пар скобок получим равенство $a=a$, верное при любых x.

Ответ. x – любое число.

Задача для 6 класса

Однажды перед лекцией состоялся диалог трех студентов. Первый сказал, что до начала лекции еще как минимум пятнадцать минут. Второй опроверг первого, заявив, что осталось точно меньше пятнадцати минут. Третий же миролюбиво заявил, что, в любом случае, хотя бы одна минута до начала точно есть. Когда все трое подошли к аудитории, выяснилось, что на момент разговора только одно высказывание из трех было верным. За сколько минут до начала лекции проходил диалог?

Решение

Есть три утверждения о некотором количестве m. Составим (для наглядности) таблицу истинности выражений, три последние столбца которой содержат все возможные варианты, соответствующие условию (одно верное, два – нет).

утверждение	1	2	3
$m \geq N$	И	Л	Л
$m < N$	Л	И	Л
$m \geq 1$	Л	Л	И

Разберем столбец «1». Если первое утверждение в нем истинно, то третье также должно быть истинным. Следовательно, такая ситуация невозможна.

Разберем столбец «2». Если ложно первое и третье утверждения, то $m=0$. В этом случае второе утверждение будет истинным. Ситуация допустимая.

Разберем столбец «3». Первое и второе утверждения взаимоисключающие, они не могут быть ложными одновременно. Следовательно, такая ситуация невозможна.

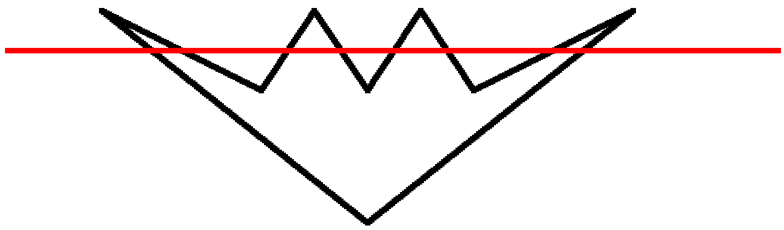
Таким образом, единственным подходящим является столбец «2».

Ответ 0 минут.

Задача для 5 класса

Однажды Гарри Поттер попросил Таню Гроттер нарисовать 12-угольник, все стороны которого пересекает одна единственная прямая (не проходящая через вершины многоугольника). В ответ Таня попросила Гарри нарисовать 13-угольник, обладающий тем же свойством. Помогите героям. Либо нарисуйте такой многоугольник (для каждого случая), либо объясните, почему это сделать невозможно.

Решение. Чтобы не загромождать рисунок изобразим 8-угольник, обладающий нужным свойством.



Для увеличении количества вершин можно добавлять «зубчики» в средней верхней части рисунка. При этом каждый новый «зубчик» будет соответствовать двум новым вершинам. Поэтому указанным свойством может обладать многоугольник с произвольным четным количеством сторон.

Заметим, что поскольку красная прямая пересекает каждую сторону многоугольника, то с обеих сторон от нее будет находиться равное количество вершин. Следовательно, если общее количество вершин многоугольника нечетно, то указанный чертеж построить невозможно.

Ответ. Таня сможет, Гарри нет.

Задача для 5 класса

Дано 23 числа. Известно, что сумма любых шести из них положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?

Решение

Дано, что сумма любых шести чисел положительна. Предположим, что сумма всех отрицательна. Выбросим из этой суммы самое большое слагаемое. В результате ее величина уменьшится и останется отрицательной. В оставшейся сумме снова отбросим самое большое слагаемое. Знак суммы снова сохранится. Так будем поступать до тех пор, пока не останется сумма шести слагаемых. Она также сохранит свой отрицательный знак. Но по условию сумма любых шести чисел положительна. Полученное противоречие обосновывает ложность предположение об отрицательности всей суммы.

Ответ. Верно. Доказательство выше.