Тренировочный этап. Решения

11 класс, задача 1

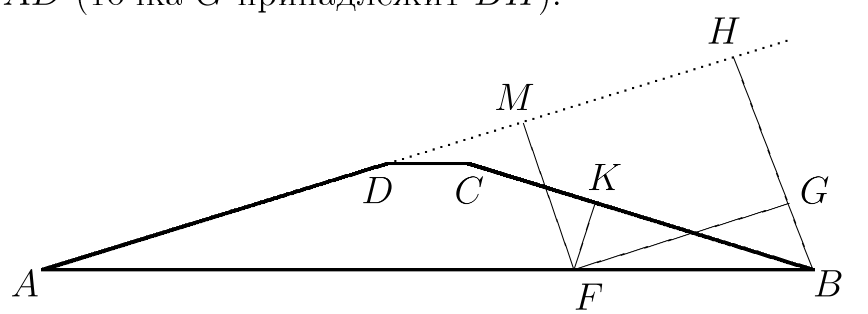
Проектировщик опоры ЛЭП инженер Обрывалин имеет чертеж равнобокой трапеции с основаниями a и $5a$ и с углами при большем основании 25°. Ему необходимо отметить на большем основании такую точку, чтобы сумма длин перпендикуляров, опущенных из этой точки на боковые стороны (или их продолжения) была бы максимальной. Сколько таких точек можно найти? В каком отношении они будут делить большее основание?

Решение.

Изобразим трапецию с основаниями AB и CD, произвольную точку F на основании AB и опущенные из нее перпендикуляры FK (на сторону BC) и FM (на продолжение стороны AD).

1. Рассмотрим сначала случай, когда один из перпендикуляров падает на продолжение боковой стороны.

Выполним дополнительные построения: опустим высоту BH из вершины B (на продолжение стороны AD) и построим отрезок FG, параллельный стороне AD (точка G принадлежит BH).



$OFMH$ – прямоугольник (по построению). Его сторона G равна перпендикуляру FM. Сравним FK и AO. Эти отрезки являются катетами в прямоугольных треугольниках FBK и BFG. Но $\angle BFK = \angle BAD = \angle FBK$, следовательно, $\triangle FBK = \triangle BFG$ по острому углу и общей гипотенузе.

Таким образом, $FK = BG$, откуда $FK + FM = BH$, и это равенство не изменяется при перемещении точки F по основанию трапеции.

2. Теперь нужно либо рассмотреть случай, когда оба перпендикуляра падают на боковые стороны «внутри» трапеции. В этом случае все проведенные рассуждения сохраняют силу, так как они не зависят от того, где именно (на стороне или на ее продолжении) находится точка M.

Итак, искомой точкой является любая точка основания AB.

Ответ. Таких точек бесконечно много (любая точка на AB), с их помощью можно разделить большее основание в любом отношении.

11 класс, задача 2

Исследуя прочность опоры ЛЭП, инженер Обрывалин пришел к величине

$$P(n)=\left(1-\frac{5}{8}\right)\left(1-\frac{7}{15}\right)\left(1-\frac{9}{24}\right)\cdots\left(1-\frac{2n-1}{n^2-1}\right).$$

Существует ли такое n, при котором $P(n)\leq 0,\underbrace{0\ldots0}_{\text{2020 нулей}}1$?

Решение.

Выполним преобразования

$$1-\frac{2n-1}{n^2-1}=\frac{n^2-1-2n+1}{n^2-1}=\frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)\cdot(n+1)}.$$

Теперь

$$P=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)\cdot n}{(n-1)\cdot(n+1)}=\frac{1\cdot 3}{(n-1)\cdot(n+1)}=\frac{3}{n^2-1}$$

Для определения n достаточно взять любое решение неравенства

$$\frac{3}{n^2-1}\leq\ 10^{-2021},$$

эквивалентное неравенству $n^2\geq\frac{1}{3}\cdot 10^{2021}+1$. Например, $n=10^{1010}$.

Ответ. Существует (например $n=10^{1010}$).

11 класс, задача 3

Найдите все значения коэффициентов a, b функции $f(x) = a^x + bx + a$ такие, что $f(0) = f(1/2) = 4$.

Решение.

Из равенств $f(0) = 1 + a = 4$ и $f(1/2) = \sqrt{a} + (1/2)b + a = 4$ находим $a = 3$, $b = 2 - 2\sqrt{a} = 2 - 2\sqrt{3}$.

Ответ: $a = 3$, $b = 2 - 2\sqrt{3}$.

11 класс, задача 4

В основании прямой призмы лежит пятиугольник $ABCDE$, у которого стороны AB, BC и CD имеют длины 1 см, 3 см и 2 см. Можно ли в такую призму вписать цилиндр? (Цилиндр вписан в призму, если он имеет такую же высоту, что и призма, а его боковая поверхность касается каждой боковой грани призмы.)

Решение. Стереометрия сводится к планиметрии: вписать окр. в 5-угольник. Пусть AB=1, BC=3, CD=2, A_1, B_1, C_1 точки кас. вписанной окр. и этих сторон, тогда $A_1B = BB_1 = x$, $B_1C = CC_1 = y$, $C_1D = z$, $AA_1 = t$,

$$\begin{cases} x & & & +t & = 1, \\ x & +y & & & = 3, \\ & y & +z & & = 2. \end{cases}$$

Складывая, получаем $2(x+y) + z + t = 6$, $x + y + (1/2)(z+t) = x + y = 3$, откуда $z + t = 0$, что невозможно, так как $z > 0$ и $t > 0$.

Ответ: нет.

11 класс, задача 5

Вариант 3

Решите в целых числах уравнение

$$1024^{2x} \cdot (\sqrt{2})^{42y} = (1/2)^{-123}.$$

Решение. Все варианты

Преобразуя показательные выражения, получаем уравнение

$$2^{20x+21y} = 2^{123}$$

Теперь задача сводится к следующей. Дадим ее в общем виде.

Найдите все решения уравнения

$$ax + by = k(a + b),\ a > 0, b > 0, \text{НОД}(a, b) = 1, k > 0,$$

в целых числах.

Легко проверить, что решением является $x = y = k$.

Перепишем уравнение в виде

$$a(k + mb) + b(k - ma) = k(a + b)$$

Пусть $ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2 = k(a + b)$, где $x_1 = y_1 = k$.

Тогда $a(k - x_2) + b(k - y_2) = 0$ или $a(k - x_2) = b(y_2 - k)$, откуда $k - x_2$ должно быть кратно b и $y_2 - k$ должно быть кратно a.

Таким образом, решением являются $x = k - mb,\ y = k + ma,\ m \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = 3 - 21m,\ y = 3 + 20m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Примечание

Запись вида $x = k + mb,\ y = k - ma,\ m \in \mathbb{Z}$ также является верным ответом. За формат записи баллы не снижаются.