ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17881 для 8 класса

1. В шестизначном числе A, начинающемся цифрой 1, переставили первую цифру в конец и получили большее число, кратное исходному. Найдите наибольшее возможное значение числа A.

Решение.

Число A можно представить в виде $A = 10^5 + x$, где x – некоторое пятизначное число. После перестановки первой цифры в конец будет получено новое число B, которое запишется как $B = 10x + 1$.

По условию, $B \vdots A$. Следовательно, существует такое натуральное n, что

$$10x + 1 = n \cdot (10^5 + x),$$

или, выделяя x

$$x \cdot (10 - n) = n \cdot 10^5 - 1,$$

откуда сразу следует, что $n < 10$.

Дальше можно воспользоваться перебором. Предварительно заметим, что слева стоит нечетное число, заканчивающееся цифрой 9. Поэтому множитель $(10 - n)$ может принимать только значения $1, 3, 7, 9$.

При $10 - n = 1 \Rightarrow n = 9$ получаем $x = 899\,999 > 10^4$. Это значение не подходит.

При $10 - n = 3 \Rightarrow n = 7$ получаем $x = 699\,999/3 = 233\,333 > 10^4$, что также не подходит.

При $10 - n = 7 \Rightarrow n = 3$ получаем $x = 299\,999/7 = 42\,857$ (можно разделить в столбик). Это значение подходит.

При $10 - n = 9 \Rightarrow n = 1$ получаем $x = 1111$, следовательно $A = B = 11111$. По условию, число B больше, чем A, значит этот вариант нам тоже не подходит.

Ответ: $A = 142\,857$.

2. Шофер суперавтобуса ПАЗ-3206 решил узнать на практике прожорливость своего двигателя (измеряемую в литрах на 100 км пути). Для этого он залил полный бак и начал отсчитывать пробег. Израсходовав весь бак, он снова заполнил его и повторял так несколько раз. Когда бак в очередной раз почти опустел, шофер разделил объем всех потраченных полных баков на пройденное расстояние (в сотнях км) и получил нужную величину. Определите, сколько раз нужно было заправиться, чтобы полученная величина отличалась от истинной не более, чем на 1%, если в момент расчета бак был заполнен не более, чем на четверть. Как изменится ответ, если увеличить объем бака в полтора раза?

Решение.

Обозначим объем бака через V, пройденный путь через S (в сотнях км), а остаток топлива в момент расчета через w. Пусть было истрачено k баков.

Тогда вычисленная шофером прожорливость двигателя равна

$$q = \frac{k \cdot V}{S},$$

а истинная равна

$$p = \frac{k \cdot V - w}{S}.$$

Ясно, что $q > p$ и

$$q - p = \frac{w}{S}.$$

Ошибка не превышает 1%, если $\dfrac{q-p}{p} \leq 0{,}01$.

Тогда получаем

$$\frac{q-p}{p} = \frac{w}{k \cdot V - w} = \frac{1}{k \cdot \frac{V}{w} - 1} \leq 0{,}01.$$

Выразим k.

$$k \geq 101 \cdot \frac{w}{V}.$$

Поскольку неравенство должно быть верным для любого значения w в заданном диапазоне, то справа нужно взять максимально возможное значение. Согласно условию, $\dfrac{w}{V} \leq \dfrac{1}{4}$, поэтому

$$k \geq 101 \cdot \frac{1}{4} = 25{,}25.$$

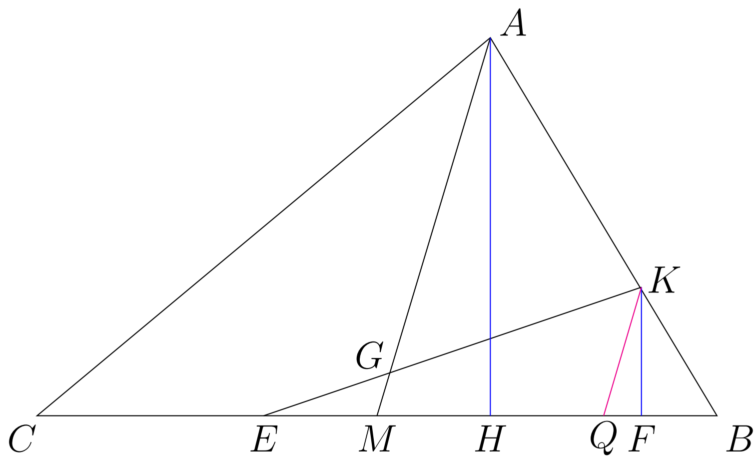
С учетом целочисленности k получаем минимальное значение 26.

Так как анализируется относительная величина и в условии дано отношение объемов, то ответ не изменится при изменении объема бака.

Ответ: не менее 26-ти баков; ответ не изменится.

3. В треугольнике ABC точка K делит сторону AB в отношении $1:2$, считая от точки B, точка E делит сторону BC в отношении $1:2$, считая от точки C. Пусть G – точка пересечения отрезка KE с медианой AM, проведенной из вершины A. В каком диапазоне может находиться отношение площади четырехугольника $MGKB$ к площади всего треугольника ABC?

Решение.
Пусть $CE = 2a$. Тогда $BE = 4a$, $CM = MB = 3a$, $EM = a$.



Найдем вклад треугольника EKB в площадь всего треугольника ABC. Опустим высоты AH и KF на сторону BC. Из подобия треугольников AHB и KFB получаем

$$\frac{KF}{AH} = \frac{KB}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Тогда отношение площадей составит

$$\frac{S_{EKB}}{S_{CAB}} = \frac{KF \cdot EB}{AH \cdot CB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Проведем KQ параллельно AM. По теореме Фалеса

$$\frac{BQ}{QM} = \frac{BK}{KA} = \frac{1}{2} \Rightarrow BQ = a, MQ = 2a, \Rightarrow \frac{EG}{GK} = \frac{EM}{MQ} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, треугольники EGM и EKQ подобны с коэффициентом $1/3$, поэтому

$$S_{EGM} = \frac{1}{9} \cdot S_{EKQ} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot KF \cdot EQ = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} AH \cdot \frac{1}{2} CB = \frac{1}{54} S_{CAB}.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{MGKB}}{S_{CAB}} = \frac{S_{EKB} - S_{EGM}}{S_{CAB}} = \frac{2}{9} - \frac{1}{54} = \frac{11}{54}.$$

Ответ: только $11/54$.

4. В книге о вкусной и здоровой пище людоеда (Г. Остер) есть классический рецепт «Путаник в макаронах» и инновационый «Шалун в шоколаде». Людоед хочет два раза за неделю поесть «Путаника» и один раз «Шалуна». Сколькими разными способами он может выбрать дни для этих блюд, чтобы не есть «Путаника» и «Шалуна» в соседние дни?

Решение.

Рассмотрим отдельно два варианта выбора дня для «Шалуна».

Если «Шалун» стоит в понедельник, то двух «Путаников» можно ставить в любые пять дней со среды по воскресенье. Количество способов выбрать из этих пяти дней два равно $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Такое же количество способов будет, если «Шалун» будет в воскресенье.

Если же «Шалун» стоит не в крайний день недели, то «Путаников» можно ставить в любые четыре дня (исключаются день Ш, а также предшествующий и последующий ему). Количество способов выбрать из этих четырех дней два равно $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.

Итого получается $10 + 10 + 6 = 26$ способов.

Ответ: 26.

5. Найдите все решения уравнения

$$1 - 1 : (1 - 1 : (1 - 1 : (1 - 1 : (x - 2024)))) = 1 + 1 : (1 : 0{,}2 - 1).$$

Решение.

Вычислим правую часть $1 + 1 : (1 : 0{,}2 - 1) = 1 + \dfrac{1}{5-1} = \dfrac{5}{4}$ и выполним цепочку преобразований уравнения

$$1 - 1 : (1 - 1 : (1 - 1 : (1 - 1 : (x - 2024)))) = \frac{5}{4}$$

$$1 : (1 - 1 : (1 - 1 : (1 - 1 : (x - 2024)))) = -\frac{1}{4}$$

$$1 - 1 : (1 - 1 : (1 - 1 : (x - 2024))) = -4$$

$$1 : (1 - 1 : (1 - 1 : (x - 2024))) = 5$$

$$1 - 1 : (1 - 1 : (x - 2024)) = \frac{1}{5}$$

$$1 : (1 - 1 : (x - 2024)) = \frac{4}{5}$$

$$1 - 1 : (x - 2024) = \frac{5}{4}$$

$$1 : (x - 2024) = -\frac{1}{4}$$

$$x - 2024 = -4$$

Ответ: $x = 2020$.