Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап

ЗАДАНИЕ ПО КОМПЬЮТЕРНОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

ВАРИАНТ 47101 для 10 класса

Телепортатор дальнего действия работает оптимальным образом, если выполнен в виде рамки замысловатой формы, которую после включения следует располагать горизонтально, а перемещаемый предмет класть в центр масс рамки.

Вся конструкция составлена из трех полуокружностей (см. рис. 1). Большая имеет радиус $R = 1$ м и массу $M = 15$ кг, две меньшие равны друг другу, имеют радиус $R/2$ и массу $m = 3$ кг каждая. Масса каждой полуокружности распределена равномерно по ней.

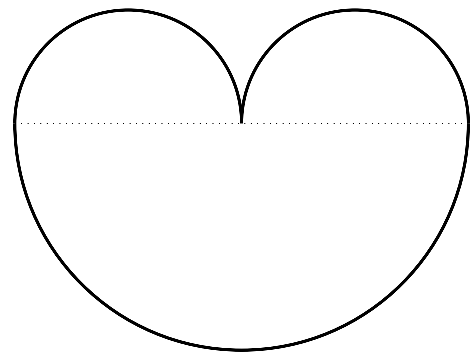


Рис. 1. Рамка телепортатора

Для поиска положения центра масс заменим непрерывную рамку на конечную систему точек, равномерно расположенных на ней, и найдем центр масс этой системы. Чем больше точек будет выбрано, тем точнее будет найдено положение искомого центра. При неограниченном возрастании количества точек их центр масс будет неограниченно приближаться к центру масс рамки.

1. Определите приближенное положение центра масс рамки, заменив каждую полуокружность на систему из $N = 4$ точек.

2. Подберите такое количество N_0, чтобы координаты центра масс рамки, вычисленные для систем из N_0 и из $N_0 - 1$ точек, отличались бы не более, чем на 10^{-5} м. (Найдите как можно меньшее значение N_0.)

3. Найдите (с точностью до 10^{-2} кг) такое значение массы m_0 каждой малой полуокружности, при которой центр масс рамки будет располагаться на расстоянии $R/4$ от центра большой полуокружности (внутри нее). Если это невозможно, объясните причину.

4. Найдите с точностью 10^{-5} м (см. п. 2) координаты центра масс рамки, если ее большую полуокружность заменить на дугу, соответствующую центральному углу в $120°$, опирающемуся на хорду длины $2R$.

Все ответы следует записывать с указанной в задании точностью.

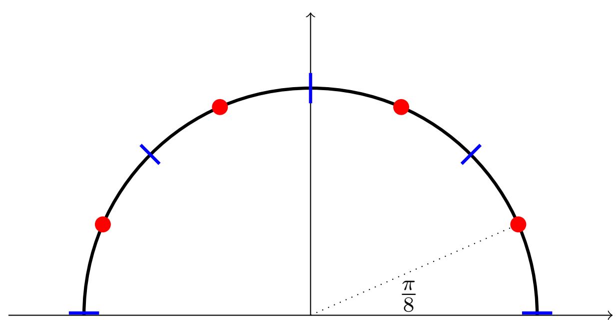
РЕШЕНИЕ

Будем последовательно реализовывать описанный в задании алгоритм.

Поскольку рамка состоит из трех полуокружностей, построим способ нахождения центра масс произвольной полуокружности, а затем применим его к каждой из трех заданных.

Также сразу заметим, что рамка имеет вертикальную ось симметрии, следовательно, центр масс будет лежать на этой оси и необходимо искать только одну его координату.

1. Разделим сначала полуокружность на 4 равные части. На рисунке ниже синим отмечены границы частей, а красным – их центры, в каждом из которых сосредоточена четверть всей массы полуокружности.



Координаты самой правой точки будут равны

$$x_0 = R\cos\frac{\pi}{8}, \quad y_0 = R\sin\frac{\pi}{8}.$$

Координаты каждой следующей будут получаться увеличением угла на $\dfrac{\pi}{4}$.

$$x_k = R\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}\right), \quad y_k = R\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

По известным формулам координат центра масс получаем ординату

$$y_c = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{3} y_k\, m_k = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{3} y_k\,\frac{M}{4} = \frac{R}{4}\sum_{k=0}^{3}\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}\right).$$

Эту сумму можно посчитать непосредственно, либо предварительно упростить до формулы

$$y_c = \frac{R}{4}\sum_{k=0}^{3}\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}\right) = \frac{R}{2}\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\right) = R\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8},$$

по которой можно вычислить значение, либо упростить далее

$$y_c = R\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = R\,\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}$$

В любом случае получим значение $0.653281\,R$. Для нижней полуокружности это дает $y_1 = -0.653281$ (с учетом ее расположения ниже горизонтальной оси), для каждой из верхних $y_2 = 0.653281/2$

Окончательно для системы из трех точечных масс получаем

$$y_{\text{ц}} = (-15 \cdot y_1 + 2 \cdot 3 \cdot y_2)/21 = -0.373.$$

2. При разбиении полуокружности на N равных частей процесс расчета будет полностью аналогичен предыдущему. Поскольку нас интересует только вертикальное направление, будем рассматривать далее только координату y.

Координаты точек, являющихся серединами равных дуг, равны

$$y_k = R\sin\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{\pi k}{N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

По формуле координат центра масс получаем

$$y_c = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\, m_k = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\,\frac{M}{N} = \frac{R}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{\pi k}{N}\right).$$

Псевдокод для вычисления по этой формуле будет иметь вид

Алгоритм ЦентрПолуокр(N, R)
$S = 0$
Для k от 0 до $N-1$
$\quad S = S + \sin\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{\pi k}{N}\right)$
Вернуть $S \cdot R/N$
Конец алгоритма

Применение построенного алгоритма для вычисления центра масс системы, состоящей из полуокружности массы $M = 15$, опирающейся на горизонтальную ось и расположенной ниже этой оси, и двух полуокружностей массы $m = 3$, опирающихся на горизонтальную ось и расположенных выше этой оси, можно оформить как функцию

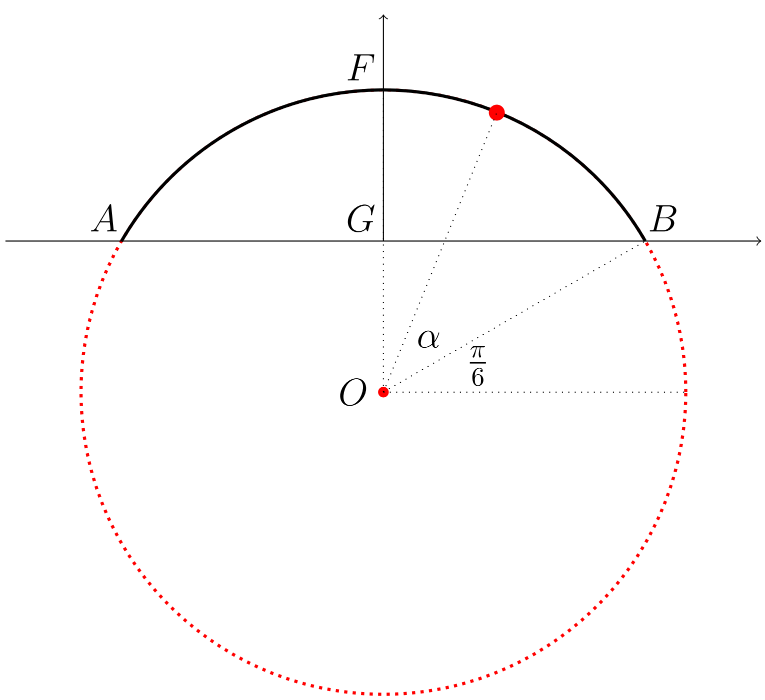
Алгоритм Центр(N**,** M**,** m)
$y_1 =$ ЦентрПолуокр$(N, 1)$
$y_2 =$ ЦентрПолуокр$(N, 1/2)$
Вернуть $(-M \cdot y_1 + 2 \cdot m \cdot y_2)/21$.
Конец алгоритма

Теперь для ответа на второй вопрос необходимо положить $M = 15$, $m = 3$ и дважды запускать алгоритм Центр с аргументами N и $N - 1$ до тех пор, пока их результаты не станут отличаться в пределах указанной в задании точности. В простейшем случае можно просто увеличивать N на единицу, но можно применить и более интересные стратегии.

Заметим также, что поскольку $y_1 = 2y_2$, то итоговую формулу алгоритма можно упростить и возвращать $y_1 \cdot (-M + m)/21$. При этом величину $y2$ вычислять не следует, что уменьшает трудоемкость алгоритма примерно вдвое!

3. При получении верного ответа на второй вопрос видно, что центр тяжести системы из трех полуокружностей отстоит от центра нижней более, чем на $R/4$. Поэтому увеличивая массу m его можно «поднять» до нужного положения. Для поиска подходящей массы m достаточно запускать алгоритм Центр с найденным выше аргументом N_0 и постепенным увеличением аргумента m. Стратегии подбора аргумента m могут быть различными. Например, можно организовать бинарный поиск.

4. Замена большей (нижней) полуокружности на дугу приводит к конфигурации, изображенной ниже.



Необходимо найти центр масс дуги AFB, которая опирается на угол AOB, равный $120°$. Из рассмотрения треугольников получаем, что если $OB = r$, то $OG = GF = r/2$, $AB = r\sqrt{3}$.

В условии дана длина хорды $AB = 2$. Отсюда радиус окружности $r = 2/\sqrt{3}$.

Отрезок AB, на который опирается рассматриваемая дуга, лежит на оси абсцисс. Поэтому координата (ордината) любой точки, лежащей на дуге, вычисляется как

$$y = r\,\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \frac{r}{2}.$$

Если дуга AFB будет разбита на N равных частей, то координаты их середин будут равны

$$y_k = r\,\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} + k\alpha\right) - \frac{r}{2}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{3N}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Дальнейшие вычисления полностью повторяют описанные в п. 2.

ОТВЕТЫ

1. $x_c = 0$ м, $y_c = -0.373$ м.
2. $x_c = 0$ м, $y_c = -0.36387$ м при $N_0 = 38$.
3. $m_0 \in [5.09, 5.12]$ кг.
4. $x_c = 0$ м, $y_c = -0.17882$ м.