ЗАДАНИЕ ПО КОМПЬЮТЕРНОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

ВАРИАНТ 47991 для 9 класса

Телепортатор дальнего действия работает оптимальным образом, если выполнен в виде рамки замысловатой формы, которую после включения следует располагать горизонтально, а перемещаемый предмет класть в центр масс рамки.

Вся конструкция представляет собой полуокружность (см. рис. 1), дуга которой имеет радиус $R = 1$ м и массу $M = 15$ кг, а стягивающий ее диаметр — массу $m = 3$ кг. Масса каждой из двух частей распределена равномерно по ним.

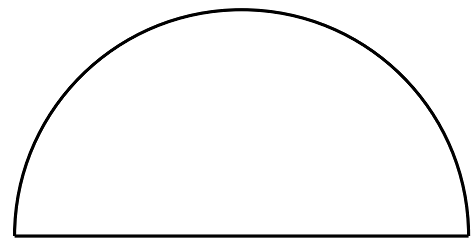


Рис. 1. Рамка телепортатора

Для поиска положения центра масс заменим непрерывную рамку на конечную систему точек, равномерно расположенных на ней, и найдем центр масс этой системы. Чем больше точек будет выбрано, тем точнее будет найдено положение искомого центра. При неограниченном возрастании количества точек их центр масс будет неограниченно приближаться к центру масс рамки.

1. Определите приближенное положение центра масс рамки, заменив полуокружность на систему из $N = 4$ точек.

2. Подберите такое количество N_0, чтобы координаты центра масс, вычисленные для систем из N_0 и из $N_0 - 1$ точек (на полуокружности), отличались бы не более, чем на 10^{-5} м. (Найдите как можно меньшее значение N_0.)

3. Найдите (с точностью до 10^{-2} кг) такое значение массы m_0 рейки-диаметра, при которой центр масс рамки будет располагаться на расстоянии $R/4$ от центра полуокружности. Если это невозможно, объясните причину.

Все ответы следует записывать с указанной в задании точностью.

Примечание. Для системы N точек с массами m_i и координатами (x_i, y_i) положение центра масс можно вычислить по формулам

$$x_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} x_i m_i, \qquad y_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} y_i m_i, \qquad \text{где } M = \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

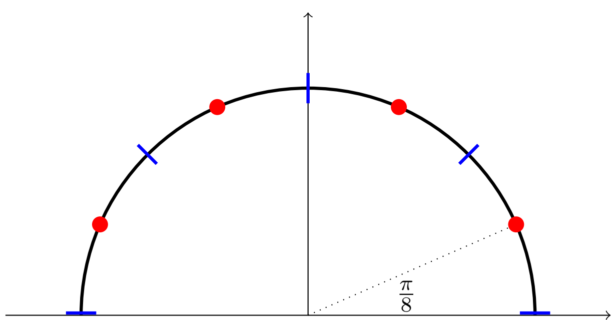
РЕШЕНИЕ

Будем последовательно реализовывать описанный в задании алгоритм.

Поскольку рамка состоит из трех полуокружностей, построим способ нахождения центра масс произвольной полуокружности, а затем применим его к каждой из трех заданных.

Также сразу заметим, что рамка имеет вертикальную ось симметрии, следовательно, центр масс будет лежать на этой оси и необходимо искать только одну его координату.

1. Разделим сначала полуокружность на 4 равные части. На рисунке ниже синим отмечены границы частей, а красным – их центры, в каждом из которых сосредоточена четверть всей массы полуокружности.



Координаты самой правой точки будут равны

$$x_0 = R\cos\frac{\pi}{8}, \quad y_0 = R\sin\frac{\pi}{8}.$$

Координаты каждой следующей будут получаться увеличением угла на $\dfrac{\pi}{4}$.

$$x_k = R\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right), \quad y_k = R\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

По известным формулам координат центра масс получаем ординату

$$y_c = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{3} y_k\, m_k = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{3} y_k\, \frac{M}{4} = \frac{R}{4}\sum_{k=0}^{3}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right).$$

Эту сумму можно посчитать непосредственно, либо предварительно упростить до формулы

$$y_c = \frac{R}{4}\sum_{k=0}^{3}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}\right) = \frac{R}{2}\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\right) = R\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8},$$

по которой можно вычислить значение, либо упростить далее

$$y_c = R\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = R\,\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}$$

В любом случае получим значение $0.653281\,R$.

Центр масс отрезка, соединяющего концы полуокружности находится в его середине. Остается найти положение центра системы двух точечных масс. По той же формуле получаем

$$y_{\text{ц}} = (15\cdot y_1 + 3\cdot 0)/18 = 0.544.$$

2. При разбиении полуокружности на N равных частей процесс расчета будет полностью аналогичен предыдущему. Поскольку нас интересует только вертикальное направление, будем рассматривать далее только координату y.

Координаты точек, являющихся серединами равных дуг, равны

$$y_k = R\sin\left(\frac{\pi}{2N}+\frac{\pi k}{N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

По формуле координат центра масс получаем

$$y_c = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\,m_k = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{N-1} y_k\,\frac{M}{N} = \frac{R}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\frac{\pi}{2N}+\frac{\pi k}{N}\right).$$

Далее вычисление центра двух точечных масс осуществляется по формуле

$$y_{\text{ц}} = (15\cdot y_1 + 3\cdot 0)/18 = y_1\cdot 5/6.$$

Псевдокод для вычисления по этой формуле будет иметь вид

Алгоритм Центр(N)
$S = 0$
Для k от 0 до $N-1$
    $S = S + \sin\left(\frac{\pi}{2N}+\frac{\pi k}{N}\right)$
Вернуть $(S/N)\cdot 5/6$
Конец алгоритма

Здесь учтены значения $R=1$, $M=15$, $m=3$.

Теперь для ответа на второй вопрос необходимо дважды запускать алгоритм Центр с аргументами N и $N-1$ до тех пор, пока их результаты не станут отличаться в пределах указанной в задании точности. В простейшем случае можно просто увеличивать N на единицу, но можно применить и более интересные стратегии.

3. При получении верного ответа на второй вопрос видно, что центр тяжести рамки отстоит от центра полуокружности более, чем на $R/4$. Поэтому увеличивая массу m его можно «опустить» (см. рис) до нужного положения. Для поиска подходящей массы m достаточно запускать алгоритм Центр с найденным выше аргументом N_0 и постепенным увеличением аргумента m. Стратегии подбора аргумента m могут быть различными. Например, можно организовать бинарный поиск.

ОТВЕТЫ

1. $x_c = 0$ м, $y_c = 0.544$ м.
2. $x_c = 0$ м, $y_c = 0.53067$ м при $N_0 = 38$.
3. $m_0 \approx 23.21$ кг.