ВАРИАНТ 17101 для 10 класса

1. Экран, защищающий от сканирования мыслей, отражает 40% падающего на него излучения, 21% пропускает, а остальное поглощает. Все коэффициенты (проценты) не зависят от угла падения лучей и от того, с какой стороны они падают на экран. Какой процент сканирующих лучей не будет пропущен, если поставить последовательно два таких экрана?

Решение.

1 вариант. Примем падающий на систему из двух экранов поток за единицу. Обозначим (с учетом всех отражений) через x часть потока, которая идет между экранами от первого ко второму, через y – часть потока, которая отразится от второго экрана внутрь двойной системы, а через v – часть, прошедшую через оба экрана. Тогда

$$\begin{aligned} x &= 0.21 + 0.4y, \\ y &= 0.4x, \\ v &= 0.21x. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений находим $x = 0.25$. Следовательно, $v = 0.0525$. Не будет пропущено $1 - v = 0.9475$.

2 вариант. Примем падающий на систему из двух экранов поток за единицу. Рассмотрим процесс по шагам. На первом шаге через первый экран пройдет 0.21 часть потока, из которой 0.21^2 пройдет сквозь второй экран, а а $0.21 \cdot 0.4$ отразится внутрь системы экранов. На втором шаге от внутренней стороны первого экрана отразится часть потока, равная $0.21 \cdot 0.4^2$, из которой $0.21^2 \cdot 0.4^2$ пройдет сквозь второй экран, а а $0.21 \cdot 0.4^3$ отразится внутрь системы экранов.

Применяя математическую индукцию, получаем, что на k-м шаге сквозь второй экран выходит $0.21^2 \cdot 0.4^{2k-2}$ от единичного потока, а внутрь отражается $0.21 \cdot 0.4^{2k-1}$. Остается сложить все выходы через второй экран, их суммирование сводится к сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$0.21^2 + 0.21^2 \cdot 0.4^2 + 0.21^2 \cdot 0.4^4 + \ldots = 0.21^2 \cdot \frac{1}{1 - 0.4^2} = \frac{0.21^2}{0.84} = \frac{0.21}{4}.$$

Таким образом, не пройдет через двойной экран $1 - \dfrac{0.21}{4} = 1 - 0.0525 = 0.9475$.

Ответ: 94.75%.

2. Инженер Коворкин установил, что мощность инновационной наноэлектростанции (выраженная в ГВт) должна быть равна корню уравнения

$$1 - x^2 + \sqrt[3]{8x^3 - 1 - x^2\left(12\sqrt[3]{1 - x^2} - 1\right) + 6x\sqrt[3]{1 + x^4 - 2x^2}} = 2x.$$

Выясните, имеет ли это уравнение корни и есть ли среди них положительные. Если корни имеются, то найдите максимальный и минимальный по модулю среди них.

Решение.

Займемся преобразованием подкоренного выражения:

$$8x^3 - 1 - x^2\left(12\sqrt[3]{1 - x^2} - 1\right) + 6x\sqrt[3]{1 + x^4 - 2x^2} =$$

$$= 8x^3 - 12x^2\sqrt[3]{1 - x^2} + 6x\sqrt[3]{(1 - x^2)^2} - 1 + x^2 = \left(2x - \sqrt[3]{1 - x^2}\right)^3.$$

Тогда уравнение сводится к виду

$$1 - x^2 + 2x - \sqrt[3]{1 - x^2} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x^2 - \sqrt[3]{1 - x^2} = 0.$$

Введем замену $t = \sqrt[3]{1 - x^2}$, уравнение приобретает вид

$$t^3 - t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(t - 1)(t + 1) = 0.$$

Рассмотрим все случаи и сделаем обратную замену.

1. Пусть $t = 0$. Тогда

$$\sqrt[3]{1 - x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1.$$

2. Пусть $t = 1$. Тогда

$$\sqrt[3]{1 - x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

3. Пусть $t = -1$. Тогда

$$\sqrt[3]{1 - x^2} = -1 \quad \Rightarrow \quad 1 - x^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Таким образом, уравнение имеет корни, в том числе положительные. Максимальный по модулю корень это $x = \pm\sqrt{2}$, а минимальный по модулю $x = 0$.

Ответ: положительные корни есть; максимальный по модулю $x = \pm\sqrt{2}$, минимальный по модулю $x = 0$.

3. Верно ли, что выражение

$$x^{2025} - 2025x + 2024$$

делится на $(x - 1)^2$ при любом натуральном $x > 1$?

Решение. Преобразуем

$$x^{2025} - 2025x + 2024 = x^{2025} - 1 - 2025x + 2025 = \\ = (x-1)(x^{2024} + x^{2023} + \ldots + x + 1) - 2025(x-1) = \\ (x-1)(x^{2024} - 1 + x^{2023} - 1 + \ldots + x - 1).$$

Один множитель $(x-1)$ явно выделен. Остается заметить, что каждая из разностей вида $(x^k - 1)$ делится на $(x-1)$ при любом натуральном k. Следовательно, вторая скобка также делится на $(x-1)$.

Ответ: да, верно.

4. Две хорды в круге взаимно перпендикулярны и точкой пересечения одна делится на отрезки 1 см и 4 см, а другая делится на отрезки 2 см и 3 см. Найдите площадь этого круга.

Решение. Начнем с «проверки ОДЗ». Известно, что если две хорды делятся точкой пересечения на отрезки длины a_1, b_1 (первая) и a_2, b_2 (вторая), то должно выполняться соотношение

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2.$$

Подставляя числовые данные из условия, убеждаемся, что

$$1 \cdot 4 \neq 2 \cdot 3.$$

Таким образом, описанная в задаче конфигурация не может быть реализована.

Ответ: площадь найти невозможно, поскольку круг с указанными параметрами хорд не существует.

5. На полосе из 2025 клеток стоит топотун, который может перемещаться на одну или две клетки. Ему необходимо пройти сначала в один конец полосы, затем в другой и вернуться в начальное положение, причем на каждом из трех этапов двигаться можно только в сторону своей цели. Общее количество различных последовательностей ходов, которыми топотун может осуществить желаемое, искать не требуется. Необходимо выяснить, при каком начальном положении общее количество таких вариантов будет наибольшим.

Решение. Пусть N_k – количество способов попасть на k-ю по счету клетку. Туда топотун может попасть двумя способами: с клетки $k-1$ либо $k-2$. Поэтому

$$N_k = N_{k-1} + N_{k-2}.$$

Если задать клетке, на которой стоит топотун, номер 1, то $N_2 = 1$, $N_3 = 2$.

Таким образом, количество ходов задается хорошо известной последовательностью чисел Фибоначчи (начиная со второго).

Если топотун начинает с клетки с номером k, то количество способов дойти до клетки с номером $L = 2025$ равно N_{L-k+1}. Количество способов дойти от клетки с номером $L = 2025$ до первой клетки (пройти всю полосу) составляет N_L, а количество способов вернуться с клетки номер один на клетку с номером k равно N_k. Общее количество вариантов есть $N_{L-k+1} \cdot N_L \cdot N_k$. Если же движение начинается из конца полосы, то общее количество вариантов есть $N_L \cdot N_L$.

Таким образом, необходимо найти максимум по параметру k выражения

$$N_k \cdot N_{L-k+1},$$

(для $L = 2025$) и сравнить его с N_L.

Если провести расчеты при небольших значениях L, то можно выдвинуть гипотезу, что

$$N_k \cdot N_{L-k+1} < N_L.$$

1 вариант. Рассмотрим выражения $N_k \cdot N_{L-k+1}$ и N_L как количество способов передвинуться по полосе. Первое из них соответствует количеству способов переместиться на L-ю клетку вправо, но с обязательным посешением клетки с номером k. Второе (N_L) есть общее количество способов переместиться на такое же количество клеток, которое включает в себя как варианты с посещением клетки с номером k, так и варианты с перепрыгиванием этой клетки.

Следовательно, $N_L > N_k \cdot N_{L-k+1}$.

2 вариант. Перепишем доказываемую формулу в виде

$$N_k \cdot N_m < N_{k+m-1}$$

и докажем ее индукцией по k при фиксированном m.

Базу проверим для $k = 2$.

$$N_2 \cdot N_m = 1 \cdot N_m < N_{2+m-1}.$$

Теперь рассмотрим значение параметра $k+1$ в предположении, что для всех предыдущих значений k неравенство верно.

$$N_{(k+1)+m-1} = N_{k+m-1} + N_{k+m-2} > N_k \cdot N_m + N_{k-1} \cdot N_m = (N_k + N_{k-1}) N_m = N_{k+1} \cdot N_m.$$

Таким образом, максимальное количество вариантов будет при начале движения из любого конца полосы.

Ответ: максимум — при начале движения из любого конца полосы.