ВАРИАНТ 17111 для 11 класса

1. Инженер Коворкин установил, что мощность инновационной наноэлектростанции (выраженная в ГВт) должна быть равна корню уравнения

$$1+\sqrt{1+8x^2-6x\sqrt{1-x^2}}=10x^2.$$

Выясните, имеет ли это уравнение корни и есть ли среди них положительные. Если корни имеются, то найдите максимальный и минимальный по модулю среди них.

Решение.

Отметим, что $|x|\leq 1$. Так как возведение уравнения в квадрат не сулит ничего хорошего, то займемся преобразованием подкоренного выражения:

$$1+8x^2-6x\sqrt{1-x^2}=1-x^2-6x\sqrt{1-x^2}+9x^2=\left(\sqrt{1-x^2}-3x\right)^2.$$

Тогда уравнение приводится к виду

$$1+\left|3x-\sqrt{1-x^2}\right|=10x^2$$

.

1. Пусть

$$3x-\sqrt{1-x^2}\geq 0 \Rightarrow 3x\geq\sqrt{1-x^2}$$

При $x\geq 0$ возводим в квадрат

$$9x^2\geq 1-x^2\Rightarrow 10x^2\geq 1.$$

Отсюда, с учетом неотрицательности x, получаем $x\geq 1/\sqrt{10}$. При этих значениях x имеем уравнение

$$1+3x-\sqrt{1-x^2}=10x^2 \quad \text{или} \quad 1-x^2-\sqrt{1-x^2}+3x-9x^2=0.$$

Это квадратное уравнение относительно $\sqrt{1-x^2}=t\geq 0$. По формуле корней квадратного уравнения

$$t=\frac{1\pm\sqrt{1-12x+36x^2}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{(6x-1)^2}}{2}=\frac{1\pm(6x-1)}{2}.$$

Если

$$t=\frac{1+6x-1}{2}=3x,$$

то $1-x^2=9x^2\Rightarrow 10x^2=1\Rightarrow x=1/\sqrt{10}$.

Если

$$t = \frac{1 - 6x + 1}{2} = 1 - 3x,$$

то $\sqrt{1 - x^2} = 1 - 3x$. Если $x \le 1/3$, то $1 - x^2 = 1 - 6x + 9x^2$ или $10x^2 = 6x$. Решения этого уравнения ($x = 0$ и $x = 3/5$) не удовлетворяют условиям.

2. Пусть

$$3x - \sqrt{1 - x^2} < 0 \Rightarrow 3x < \sqrt{1 - x^2}.$$

Это неравенство выполняется при $x \in \big[-1; 1/\sqrt{10}\big)$. При таких x уравнение приобретает вид

$$1 - 3x + \sqrt{1 - x^2} = 10x^2 \quad \text{или} \quad 1 - x^2 + \sqrt{1 - x^2} - 3x - 9x^2 = 0.$$

Тогда

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12x + 36x^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(6x + 1)^2}}{2} = \frac{-1 \pm (6x + 1)}{2}.$$

Если

$$t = \frac{-1 + 6x + 1}{2} = 3x,$$

то $\sqrt{1 - x^2} = 3x$. При неотрицательных x получаем $x = 1/\sqrt{10}$, что не удовлетворяет условию.

Если

$$t = \frac{-1 - 6x - 1}{2} = -1 - 3x,$$

то $\sqrt{1 - x^2} = -1 - 3x$. При $x \le -1/3$ получаем $1 - x^2 = 1 + 6x + 9x^2 \Rightarrow 10x^2 = -6x$. Из двух корней этого уравнения ($x = 0$ и $x = -3/5$) подходит по условию только $x = -3/5$.

Таким образом, корни уравнения $x = -3/5$ и $x = 1/\sqrt{10}$. Среди них есть положительныей корень. Максимальный по модулю корень это $x = -3/5$, а минимальный по модулю $x = 1/\sqrt{10}$.

Ответ: уравнение имеет положительные корни. Максимальный по модулю: $x = -3/5$; минимальный по модулю: $x = 1/\sqrt{10}$.

2. Экран, защищающий от сканирования мыслей, отражает 40% падающего на него излучения, 21% пропускает, а остальное поглощает. Все коэффициенты (проценты) не зависят от угла падения лучей и от того, с какой стороны они падают на экран. Какой процент сканирующих лучей не будет пропущен, если поставить последовательно два таких экрана?

Решение.

1 вариант. Примем падающий на систему из двух экранов поток за единицу. Обозначим (с учетом всех отражений) через x часть потока, которая идет между экранами от первого ко второму, через y – часть потока, которая отразится от второго экрана внутрь двойной системы, а через v – часть, прошедшую через оба экрана. Тогда

$$\begin{aligned} &x = 0.21 + 0.4y, \\ &y = 0.4x, \\ &v = 0.21x. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений находим $x = 0.25$. Следовательно, $v = 0.0525$. Не будет пропущено $1 - v = 0.9475$.

2 вариант. Примем падающий на систему из двух экранов поток за единицу. Рассмотрим процесс по шагам. На первом шаге через первый экран пройдет 0.21 часть потока, из которой 0.21^2 пройдет сквозь второй экран, а а $0.21 \cdot 0.4$ отразится внутрь системы экранов. На втором шаге от внутренней стороны первого экрана отразится часть потока, равная $0.21 \cdot 0.4^2$, из которой $0.21^2 \cdot 0.4^2$ пройдет сквозь второй экран, а а $0.21 \cdot 0.4^3$ отразится внутрь системы экранов.

Применяя математическую индукцию, получаем, что на k-м шаге сквозь второй экран выходит $0.21^2 \cdot 0.4^{2k-2}$ от единичного потока, а внутрь отражается $0.21 \cdot 0.4^{2k-1}$. Остается сложить все выходы через второй экран, их суммирование сводится к сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$0.21^2 + 0.21^2 \cdot 0.4^2 + 0.21^2 \cdot 0.4^4 + \ldots = 0.21^2 \cdot \frac{1}{1 - 0.4^2} = \frac{0.21^2}{0.84} = \frac{0.21}{4}.$$

Таким образом, не пройдет через двойной экран $1 - \dfrac{0.21}{4} = 0.0525$.

Ответ: 94.75%.

3. Две хорды в круге взаимно перпендикулярны и точкой пересечения одна делится на отрезки 1 см и 4 см, а другая делится на отрезки 2 см и 3 см. Найдите площадь этого круга.

Решение. Начнем с «проверки ОДЗ». Известно, что если две хорды делятся точкой пересечения на отрезки длины a_1, b_1 (первая) и a_2, b_2 (вторая), то должно выполняться соотношение

$$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2.$$

Подставляя числовые данные из условия, убеждаемся, что

$$1 \cdot 4 \neq 2 \cdot 3.$$

Таким образом, описанная в задаче конфигурация не может быть реализована.

Ответ: площадь найти невозможно, поскольку круг с указанными параметрами хорд не существует.

4. На полосе из 2025 клеток стоит топотун, который может перемещаться на одну или две клетки. Ему необходимо пройти сначала в один конец полосы, затем в другой и вернуться в начальное положение, причем на каждом из трех этапов двигаться можно только в сторону своей цели. Общее количество различных последовательностей ходов, которыми топотун может осуществить желаемое, искать не требуется. Необходимо выяснить, при каком начальном положении общее количество таких вариантов будет наибольшим.

Решение. Пусть N_k – количество способов попасть на k-ю по счету клетку. Туда топотун может попасть двумя способами: с клетки $k-1$ либо $k-2$. Поэтому

$$N_k = N_{k-1} + N_{k-2}.$$

Если задать клетке, на которой стоит топотун, номер 1, то $N_2 = 1$, $N_3 = 2$.

Таким образом, количество ходов задается хорошо известной последовательностью чисел Фибоначчи (начиная со второго).

Если топотун начинает с клетки с номером k, то количество способов дойти до клетки с номером $L = 2025$ равно N_{L-k+1}. Количество способов дойти от клетки с номером $L = 2025$ до первой клетки (пройти всю полосу) составляет N_L, а количество способов вернуться с клетки номер один на клетку с номером k равно N_k. Общее количество вариантов есть $N_{L-k+1} \cdot N_L \cdot N_k$. Если же движение начинается из конца полосы, то общее количество вариантов есть $N_L \cdot N_L$.

Таким образом, необходимо найти максимум по параметру k выражения

$$N_k \cdot N_{L-k+1},$$

(для $L = 2025$) и сравнить его с N_L.

Если провести расчеты при небольших значениях L, то можно выдвинуть гипотезу, что $N_k \cdot N_{L-k+1} < N_L$.

1 вариант. Рассмотрим выражения $N_k \cdot N_{L-k+1}$ и N_L как количество способов передвинуться по полосе. Первое из них соответствует количеству способов переместиться на L-ю клетку вправо, но с обязательным посешением клетки с номером k. Второе (N_L) есть общее количество способов переместиться на такое же количество клеток, которое включает в себя как варианты с посещением клетки с номером k, так и варианты с перепрыгиванием этой клетки.

Следовательно, $N_L > N_k \cdot N_{L-k+1}$.

2 вариант. Перепишем доказываемую формулу в виде

$$N_k \cdot N_m < N_{k+m-1}$$

и докажем ее индукцией по k при фиксированном m.

Базу проверим для $k = 2$. $\quad N_2 \cdot N_m = 1 \cdot N_m < N_{2+m-1}$.

Теперь рассмотрим значение параметра $k+1$ в предположении, что для всех предыдущих значений k неравенство верно.

$$N_{(k+1)+m-1} = N_{k+m-1} + N_{k+m-2} > N_k \cdot N_m + N_{k-1} \cdot N_m = (N_k + N_{k-1}) N_m = N_{k+1} \cdot N_m.$$

Таким образом, максимальное количество вариантов будет при начале движения из любого конца полосы.

Ответ: максимум — при начале движения из любого конца полосы.

5. Верно ли, что число

$$2024^{2026} - 2024 \cdot 2026 + 2025$$

делится на 2023^2?

Решение. Преобразуем выражение

$$2024^{2026} - 2024 \cdot 2026 + 2025 = 2024^{2026} - 1 - 2023 \cdot 2026$$

Обозначим $x = 2024$. В новых обозначениях преобразование можно продолжить

$$\begin{aligned} &x^{2026} - 1 - 2026(x-1) = \\ &\qquad = (x-1)(x^{2025} + x^{2024} + \ldots + x + 1) - 2026(x-1) = \\ &\qquad\qquad (x-1)(x^{2025} - 1 + x^{2024} - 1 + \ldots + x - 1). \end{aligned}$$

Необходимо выяснить делимость на 2023^2, т.е. на $(x-1)^2$.

Один множитель $(x-1)$ явно выделен. Остается заметить, что каждая из разностей вида $(x^k - 1)$ делится на $(x-1)$ при любом натуральном k. Следовательно, вторая скобка также делится на $(x-1)$.

Ответ: да, верно.