

ВАРИАНТ 17771 для 7 класса

1. Изучив руку принцессы, придворный чародей выяснил, что если кольцо великой нежности не сядет на указательный палец, то оно сядет на средний и не сядет на безымянный. Если же это кольцо сядет на безымянный палец, то оно сядет на средний и не сядет на указательный. А если кольцо сядет на средний палец, то оно сядет на безымянный и не сядет на указательный. На каком пальце сможет носить кольцо принцесса? Перечислите все возможные варианты.

**Решение.**

Пусть верно, что кольцо не сядет на указательный. Тогда из первого утверждения следует, что оно не сядет на безымянный, а из третьего — что оно сядет на безымянный. Очевидно, два противоположных утверждения верными быть не могут, значит, неверным является предположение, которое к этому привело. Таким образом, кольцо сядет на указательный палец.

Пусть теперь верно, что кольцо сядет на безымянный. Тогда из второго утверждения следует, что оно не сядет на указательный, а из первого — что оно не сядет на безымянный. Снова получили два противоположных утверждения. Таким образом, кольцо не сядет на безымянный палец.

Аналогично разбирается, что кольцо не сядет на средний палец.

Важно отметить, что рассуждения можно строить и по-другому.

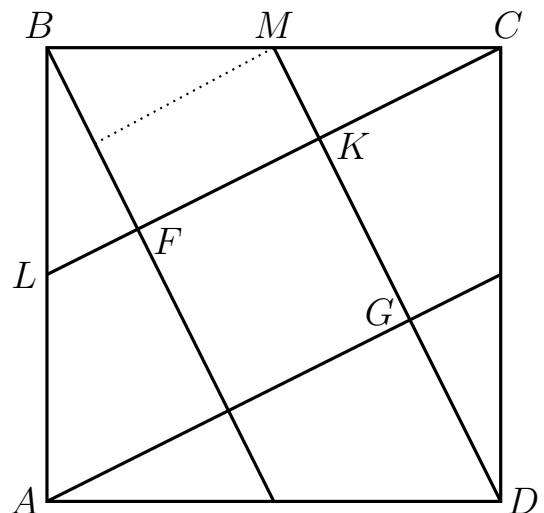
**Ответ:** только на указательном.

2. В квадрате  $ABCD$  построили 4 отрезка, которые соединили вершину  $A$  с серединой стороны  $CD$ , вершину  $B$  с серединой стороны  $AD$ , вершину  $C$  с серединой стороны  $AB$ , вершину  $D$  с серединой стороны  $BC$ . В результате внутри квадрата получился четырехугольник. Найдите его площадь, если площадь квадрата  $ABCD$  равна  $2025 \text{ м}^2$ .

**Решение.**

Построим все, что описано в условии, и введем дополнительные буквенные обозначения (см. рис).

Пусть площадь  $MCK$  равна  $S$ . Тогда площадь  $BMKF$  равна  $3S$ , что следует из подобия треугольников  $MCK$  и  $BCF$  с коэффициентом 2 (также можно увидеть это явно, проведя отрезок из  $M$  параллельно  $KF$ ).



Обозначим площадь большого квадрата через  $Q$ , малого внутреннего через  $x$ . Все малые треугольники и все трапеции равны друг другу, а треугольник  $BCL$  составляет ровно четверть большого квадрата, поэтому

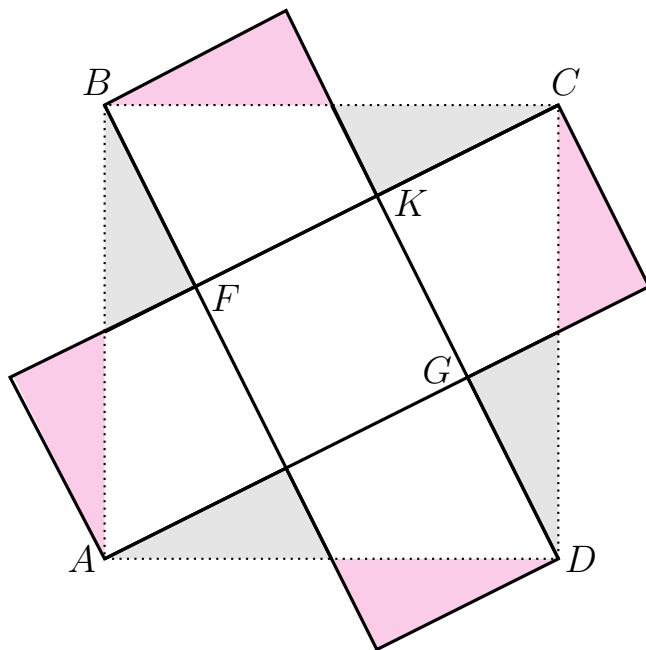
$$5S = \frac{1}{4}Q \Rightarrow S = \frac{1}{20}Q.$$

Для площади всего большого квадрата имеем

$$Q = 16S + x = \frac{16}{20}Q + x \Rightarrow x = \frac{1}{5}Q.$$

### Второй вариант решения.

Отрезав от квадрата серые треугольники и переставив их снаружи квадрата так, как изображено на нижнем рисунке. Получим фигуру, состоящую из пяти одинаковых квадратов, площадь которой равна площади исходного (большого) квадрата. Следовательно, каждый малый квадрат имеет площадь  $2025/5 = 405 \text{ м}^2$ .



**Ответ:**  $405 \text{ м}^2$ .

3. Три числа  $c$ ,  $a$ ,  $t$  таковы, что

$$|c - a| + |a - t| + |t - c| = 1.$$

Какое наименьшее значение может принимать величина  $S = |c| + |a| + |t|$ ?

### Решение.

Воспользуемся неравенством  $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ . Тогда

$$1 = |c - a| + |a - t| + |t - c| \leq |c| + |a| + |a| + |t| + |t| + |c| = 2S.$$

Таким образом,  $S$  не может быть меньше  $\frac{1}{2}$ .

Остается построить пример. Для этого можно взять набор

$$c = \frac{1}{2}, a = t = 0.$$

**Ответ:**  $\frac{1}{2}$ .

4. Как-то раз один буквоед съел полное собрание сочинений поэтов За-медвежья. Первые пять томов он заглотил без перерыва со скоростью  $u = 90$  букв в минуту. Затем отдыхал вдвое больше времени, чем ел, а после не отрыва-ваясь заглотил оставшиеся пять томов со скоростью, равной средней скорости поглощения всего собрания. Найдите, чему равна эта средняя скорость, если все тома одинаковы по объему, а временем поглощения считается все время от начала трапезы до ее завершения, включая перерывы.

**Решение.**

Пусть буквоед ел первые пять томов в течение времени  $t_1$ , оставшиеся пять томов в течение времени  $t_2$ . Тогда он отдыхал в течение времени  $2t_1$ . Пусть весь объем съеденного равен  $Q$ . Тогда средняя скорость буквоеда  $v$  равна

$$v = \frac{Q}{t_1 + 2t_1 + t_2}.$$

Та же самая скорость может быть вычислена по второй половине томов как

$$v = \frac{Q/2}{t_2},$$

откуда

$$t_1 + 2t_1 + t_2 = 2t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 3t_1.$$

Из равенства

$$u = \frac{Q/2}{t_1}$$

получаем

$$v = \frac{ut_1}{t_2} = \frac{u}{3}.$$

**Ответ:** 30 букв в минуту.

5. Найдите все решения системы уравнений с тремя неизвестными

$$uv = vw = wu = 2025.$$

**Решение.**

Ноль решением быть не может (проверяется подстановкой). Тогда из уравнения  $uv = vw$  получаем, что  $u = w$ , а из уравнения  $vw = wu$  получаем, что  $v = u$ . Таким образом, все три неизвестные равны.

Остается решить уравнение

$$u^2 = 2025 = 45^2.$$

**Ответ:**  $u = v = w = 45$  или  $u = v = w = -45$ .