ВАРИАНТ 17881 для 8 класса

1. Найдите все решения системы уравнений

$$x_1x_2 = x_2x_3 = \ldots = x_{24}x_{25} = x_{25}x_1 = 2025.$$

Решение.

Ноль решением быть не может (проверяется подстановкой). Тогда из первого, третьего и так далее уравнений получаем, что все неизвестные с нечетными номерами равны друг другу. Аналогично из второго, четвертого и так далее уравнений получаем равенство всех неизвестных с четными номерами.

Наконец, из уравнения $x_1x_2 = x_{25}x_1$ получаем $x_2 = x_{25}$, что дает равенство друг другу всех неизвестных. Остается решить уравнение

$$x^2 = 2025 = 45^2.$$

Ответ: $x_k = 45$ для всех k или $x_k = -45$ для всех k.

2. Заколдованный калькулятор позволяет только один раз нажать на кнопку извлечения квадратного корня. Можно ли, пользуясь таким калькулятором, вычислить значение выражения

$$\sqrt{5+12\sqrt{5+4\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}\ ?$$

Если можно, то укажите, каким образом; если нет, то объясните почему.

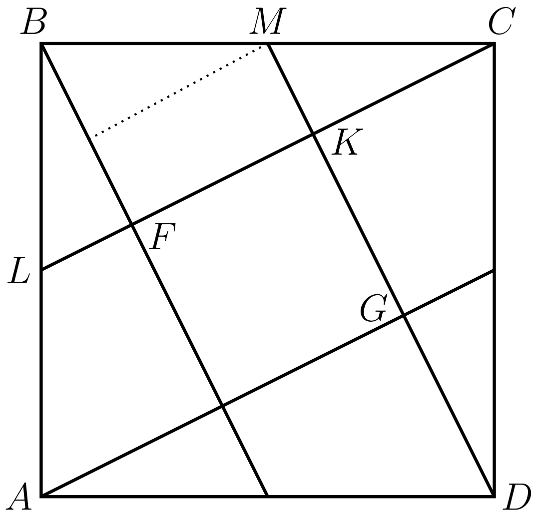
Решение.

1) $6 + 2\sqrt{5} = 1 + 2\sqrt{5} + 5 = (1 + \sqrt{5})^2$.
2) $5 + 4(1 + \sqrt{5}) = 4 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 5 = (2 + \sqrt{5})^2$.
3) $5 + 12(2 + \sqrt{5}) = 29 + 12\sqrt{5} = 9 + 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} + 20 = (3 + 2\sqrt{5})^2$.

Ответ: можно: $3 + 2\sqrt{5}$.

3. В квадрате $ABCD$ построили 4 отрезка, которые соединили вершину A с серединой стороны CD, вершину B с серединой стороны AD, вершину C с серединой стороны AB, вершину D с серединой стороны BC. Докажите, что получившийся внутри квадрата $ABCD$ четырехугольник также является квадратом и найдите отношение площади большего квадрата к площади меньшего.

Решение.



Построим все, что описано в условии, и введем дополнительные буквенные обозначения (см. рис).

1. Треугольники MCD и LBC равны по двум катетам. Поэтому из

$$\angle DMC + \angle MDC = 90^\circ$$

следует, что

$$\angle KMC + \angle MCK = 90^\circ$$

Таким образом, угол MKC прямой. Аналогично рассматриваются остальные углы.

Из равенства больших отсекаемых треугольников следует, что $CF = DK$, а из равенства малых отсекаемых, что $KF = KG$. Таким образом, внутренний четырехугольник — квадрат.

2. Пусть площадь MCK равна S. Тогда площадь $BMKF$ равна $3S$, что следует из подобия треугольников MCK и BCF с коэффициентом 2 (также можно увидеть это явно, проведя отрезок из M параллельно KF).

Обозначим площадь большого квадрата через Q, малого внутреннего через x. Все малые треугольники и все трапеции равны друг другу, а треугольник BCL составляет ровно четверть большого квадрата, поэтому

$$5S = \tfrac{1}{4}Q \quad \Rightarrow \quad S = \tfrac{1}{20}Q.$$

Для площади всего большого квадрата имеем

$$Q = 16S + x = \tfrac{16}{20}Q + x \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{5}Q.$$

См. также второй вариант решения задачи 2 для 7 класса.

Ответ: в 5 раз.

4. Пять чисел a, b, c, d, v таковы, что

$$|a-b| + |b-c| + |c-d| + |d-v| + |v-a| = 1.$$

Какое наименьшее значение может принимать величина

$$S = |a| + |b| + |c| + |d| + |v|?$$

Решение.

Воспользуемся неравенством $|x \pm y| \leq |x| + |y|$. Тогда

$$1 = |a-b| + |b-c| + |c-d| + |d-v| + |v-a| \leq$$
$$\leq |a| + |b| + |b| + |c| + |c| + |d| + |d| + |v| + |v| + |a| = 2S.$$

Таким образом, S не может быть меньше $\frac{1}{2}$.

Остается построить пример. Для этого можно взять набор

$$a = \tfrac{1}{2}, b = c = d = v = 0.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

5. Два буквоеда съели по десять томов полного собрания сочинений поэтов Замедвежья. Первый буквоед первые пять томов ел со скоростью v букв в минуту, а остальные пять томов – со скоростью u букв в минуту. Второй буквоед первую половину затраченного времени ел со скоростью v букв в минуту, а вторую – со скоростью u букв в минуту. Кто из них справился с собранием сочинений быстрее, если все тома имели одинаковый объем?

Решение.

Пусть объем десяти томов, съеденных каждым буквоедом равен Q слов. Пусть первый ел t_1, а второй t_2 минут. Тогда

$$t_1 = \frac{Q/2}{v} + \frac{Q/2}{u}, \qquad Q = \frac{t_2}{2} \cdot v + \frac{t_2}{2} \cdot u \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2Q}{v+u}.$$

Следовательно,

$$t_1 - t_2 = \frac{Q}{2}\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{u} - \frac{4}{v+u}\right) = \frac{Q}{2}\left(\frac{v+u}{vu} - \frac{4}{v+u}\right) =$$
$$= \frac{Q}{2} \cdot \frac{(v+u)^2 - 4vy}{vu(v+u)} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{(v-u)^2}{vu(v+u)} > 0$$

Таким образом, второй справился быстрее.

Ответ: второй.