ВАРИАНТ 17991 для 9 класса

1. Заколдованный калькулятор позволяет только один раз нажать на кнопку извлечения квадратного корня. Можно ли, пользуясь таким калькулятором, вычислить значение выражения

$$\sqrt{5+12\sqrt{5+4\sqrt{6+2\sqrt{5}}}}\ ?$$

Если можно, то укажите, каким образом; если нет, то объясните почему.

Решение.
1) $6+2\sqrt{5}=1+2\sqrt{5}+5=(1+\sqrt{5})^2$.
2) $5+4(1+\sqrt{5})=4+2\cdot 2\cdot\sqrt{5}+5=(2+\sqrt{5})^2$.
3) $5+12(2+\sqrt{5})=29+12\sqrt{5}=9+2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}+20=(3+2\sqrt{5})^2$.

Ответ: можно: $3+2\sqrt{5}$.

2. Два буквоеда съели по десять томов полного собрания сочинений поэтов Замедвежья. Первый буквоед первые пять томов ел со скоростью v букв в минуту, а остальные пять томов – со скоростью u букв в минуту. Второй буквоед первую половину затраченного времени ел со скоростью v букв в минуту, а вторую – со скоростью u букв в минуту. Кто из них справился с собранием сочинений быстрее, если все тома имели одинаковый объем?

Решение.

Пусть объем десяти томов, съеденных каждым буквоедом равен Q слов. Пусть первый ел t_1, а второй t_2 минут. Тогда

$$t_1=\frac{Q/2}{v}+\frac{Q/2}{u},\qquad Q=\frac{t_2}{2}\cdot v+\frac{t_2}{2}\cdot u\quad\Rightarrow\quad t_2=\frac{2Q}{v+u}.$$

Следовательно,

$$t_1-t_2=\frac{Q}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{1}{u}-\frac{4}{v+u}\right)=\frac{Q}{2}\left(\frac{v+u}{vu}-\frac{4}{v+u}\right)=$$
$$=\frac{Q}{2}\cdot\frac{(v+u)^2-4vy}{vu(v+u)}=\frac{Q}{2}\cdot\frac{(v-u)^2}{vu(v+u)}>0$$

Таким образом, второй справился быстрее.

Ответ: второй.

3. На части шахматной доски размером 5×7 клеток стоит фигура топотун, которая может ходить по вертикали или по горизонтали на одну или две клетки. Изначально топотун стоит на одном из угловых полей и хочет вернуться на него же, наступая только на клетки, расположенные по периметру, причем нельзя возвращаться на уже пройденные клетки (в том числе перепрыгнутые). Сколько существует различных последовательностей ходов, которыми топотун может осуществить желаемое?

Решение. Поскольку топотун должен обязательно остановиться во всех угловых клетках, достаточно выяснить количество вариантов перемещения по прямой на 5 или на 7 клеток. Пусть N_k – количество способов попасть с первой клетки на k-ю. Тогда общее количество вариантов составит $N_5 \cdot N_7 \cdot N_5 \cdot N_7$.

Рассмотрим перемещение с клетки номер 1 на клетку номер k. На клетку k топотун может попасть двумя способами: с клетки $k-1$ либо $k-2$. Поэтому

$$N_k = N_{k-1} + N_{k-2}.$$

С клетки номер 1 на клетку номер 2 мы можем попасть только одним способом: делав один шаг вперед, значит $N_2 = 1$. На клетку номер 3 можно попасть двумя способами: сделать один двойной шаг или два одинарных, то есть $N_3 = 2$. Теперь по формуле несложно вычислить $N_4 = 3$, $N_5 = 5$, $N_6 = 8$, $N_7 = 13$.

Остается перемножить

$$N_5 \cdot N_7 \cdot N_5 \cdot N_7 = 5 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 13 = 65^2 = 4\,225.$$

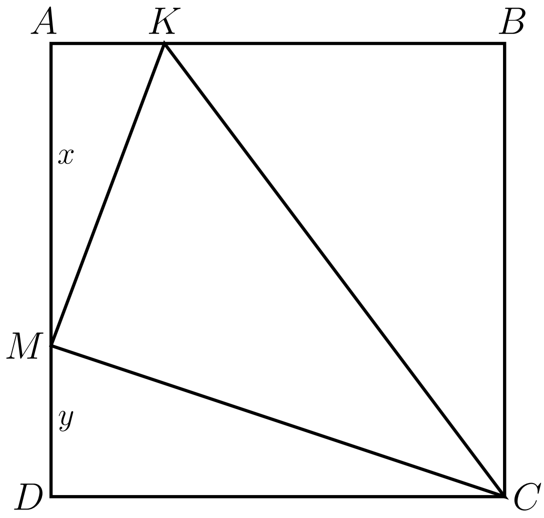
Ответ: $65^2 = 4\,225$.

4. Господин Бур Жуй, большой поклонник фен-шуй, построил беседку в форме треугольника со сторонами 9, 12 и 15 метров. Затем к каждой ее стороне были пристроены террасы в форме прямоугольных треугольников таким образом, что вся конструкция приобрела форму квадрата. Какую площадь застройки может иметь этот квадрат?

Решение.

Изобразим постройку. Обозначим через MCK исходный треугольник, через $ABCD$ получившийся квадрат. Так как стороны треугольника пропорциональны пифагоровой тройке 3, 4, 5, то этот треугольник прямоугольный (можно и непосредственно проверить, что $9^2 + 12^2 = 15^2$).

Так как после достройки может образоваться фигура с шестью углами, а получился квадрат, то два угла из шести «лишние». Поэтому две вершины исходного треугольника лежат на сторонах получившегося квадрата, а третья обязана совпадать с его вершиной, причем она не может быть вершиной прямого угла треугольника. Следовательно, гипотенуза выходит из вершины квадрата.



Пусть сначала $CM = 12$, $KC = 15$.

Обозначим AM через x, MD через y. Тогда $CD = x + y$. Треугольники MAK и CDM подобны, поэтому $AK = \dfrac{3}{4}y$ и $\dfrac{x}{x+y} = \dfrac{3}{4}$, откуда $x = 3y$. Из того же подобия получаем .

Теперь по теореме Пифагора для треугольника MAK имеем

$$(3y)^2 + \left(\tfrac{3}{4}y\right)^2 = 9^2,$$

откуда $y = \dfrac{12}{\sqrt{17}}$. Сторона квадрата равна $x + y = 4y$, поэтому его площадь равна

$$(4y)^2 = \left(\frac{48}{\sqrt{17}}\right)^2 = \frac{2304}{17}.$$

Если теперь предположить, что $CM = 9$, $KC = 15$, то из подобия треугольников MAK и CDM получаем, что

$$\frac{x}{x+y} = \frac{4}{3},$$

чего не может быть при $x > 0$, $y > 0$.

Ответ: $\dfrac{2304}{17}$ м^2.

5. Сто чисел x_1, x_2, …, x_{100} таковы, что

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{99} - x_{100}| + |x_{100} - x_1| = 1.$$

Какое наименьшее значение может принимать величина

$$S = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_{100}|?$$

Решение.

Воспользуемся неравенством $|x \pm y| \le |x| + |y|$. Тогда

$$1 = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{99} - x_{100}| + |x_{100} - x_1| \le \\ \le |x_1| + |x_2| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_{99}| + |x_{100}| + |x_{100}| + |x_1| = 2S.$$

Таким образом, S не может быть меньше $\frac{1}{2}$.

Остается построить пример. Для этого можно взять набор

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \ldots = x_{100} = 0.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.