Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

ВАРИАНТ 17771 для 7 класса

Решить задачу – это вывести, а не угадать ответ! Решение должно содержать логическое обоснование всех его этапов с формулировкой предположений и выводов.

1. На лыжные соревнования «Гони в пургу» прибыло 200 юных спортсменов. Для их проживания на турбазе выделено 4 трехместных номера и 47 четырехместных. При каком количестве юниорок всех прибывших удастся расселить на турбазе, если в один номер можно заселять только спортсменов одного пола? Приведите все возможные варианты.

Ответ: при любом, кроме 1, 2, 5, 195, 198, 199.

2. Студент Репкин готовился к конкурсу художественной пайки и тренировался в течение пяти недель, причем на каждой следующей неделе количество тренировок было меньше, чем на предыдущей, а на пятой неделе их оказалось в три раза меньше, чем на первой. Сколько раз спортсмен тренировался на второй неделе, если всего за этот период у него было 33 тренировки? Перечислите все возможные варианты ответа.

Ответ: 8 раз.

3. В 7:00 на табло были высвечены числа 2, 5 и 3. В этот момент между каждой парой соседних чисел появилась их сумма, а крайние числа погасли. Получилась запись 7, 5, 8. Затем каждый час процедура повторялась: между каждой парой соседних чисел появлялась их сумма, после чего крайние числа гасли. Чему будет равна сумма всех чисел на табло в 7:15 следующего утра?

Ответ: 260, $S_{n+1} = S_n + 10 = S_1 + 10n$, $S_1 = 20$.

4. Равнобедренный треугольник с углом при основании AB, равным $72°$, сначала повернули относительно вершины C на некоторый угол. После уменьшили в три раза так, что его форма, а также положение вершины C не изменились. Затем отразили симметрично относительно медианы CM исходного треугольника ABC и, наконец, отразили симметрично относительно своей собственной медианы. При этом вершины A и B переместились в точки $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Определите, какая из точек ($\widetilde{A}$ или $\widetilde{B}$) оказалась дальше от своего начального положения, и найдите отношение длин отрезков $A\widetilde{A}$ и $B\widetilde{B}$.

Ответ: расстояния равны, $A\widetilde{A}/B\widetilde{B} = 1$.

5. Докажите, что каковы бы ни были положительные числа a, b и c, верно неравенство

$$\frac{ab + ac + bc}{a^2 + b^2 + c^2} \leqslant 1.$$

Укажите также все возможные условия на a, b и c, при которых неравенство становится равенством.

Ответ: равенство только при $a = b = c$.