ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА ВАРИАНТ 42091 для 9 класса

Рабочий день Харона Эребовича, перевозчика, начинается, когда солнце склоняется к западу. В это время он забирает в лодку всех собравшихся на берегу, садится на весла и перевозит на противоположный берег реки.

Рассмотрим этот процесс более подробно.

Для простоты будем считать русло прямолинейным с постоянной шириной $H = 200$ м. Пусть скорость течения u изменяется по мере приближения к середине реки и составляет $u(d) = 0,02 \cdot d \cdot (H - d)$ м/мин на расстоянии d м от берега. Пусть частота гребли составляет 10 взмахов в минуту, а в стоячей воде лодка развивала бы скорость $w = 120$ м/мин.

Во время переправы лодку сносит течением, и гребец, каждый раз опуская весла в воду, направляет ее носом прямо к берегу. Размерами лодки пренебрежем. Движение лодки между гребками будем считать равномерным. Изменением скорости течения на расстоянии, проходимом лодкой между гребками, пренебрежем.

1. Определите положение лодки (по отношению к пункту отправления) через одну минуту после отчаливания.

2. Определите время, которое будет затрачено на достижение противоположного берега.

3. Определите, насколько ниже по течению (по отношению к пункту отправления) лодка достигнет противоположного берега.

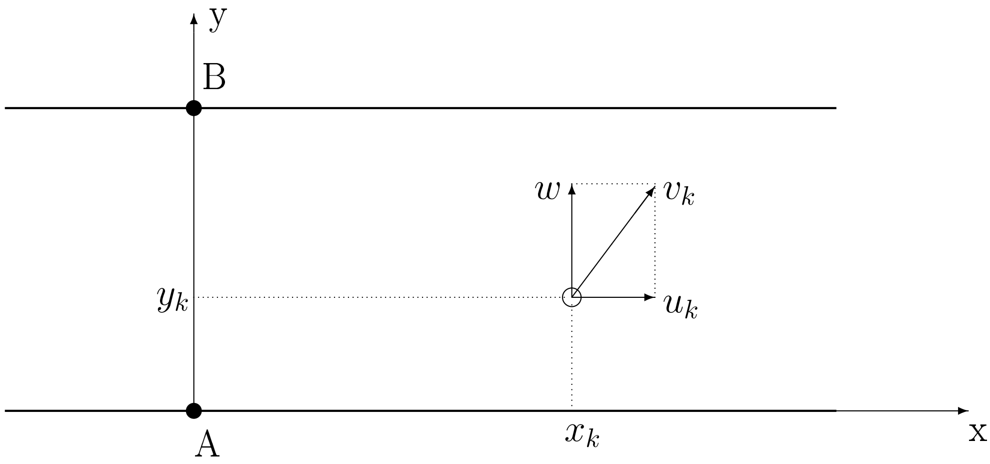
УКАЗАНИЕ. Считайте любое «пересечение» линии противоположного берега причаливанием.

Решение. 9 класс, 10 класс

1. Введем систему координат, связанную с берегами реки. Пусть ось OX направлена по течению (прямолинейной) реки, ось OY – перпендикулярно берегу. Начало координат совместим с пунктом отправления A. Тогда пункт назначения B будет иметь координаты $(0, H)$.

Обозначим скорость реки через u, скорость лодки (относительно берегов) $v(t)$. Согласно условию, $u = u(y) = 0.02 \cdot y \cdot (H - y)$.

Ясно, что все изменения в процессе движения лодки происходят в момент гребков, которые происходят с интервалом $\Delta t = 60/10 = 6$ секунд, поэтому достаточно рассматривать только моменты времени $t_k = k \cdot \Delta t$. Индексом k будем помечать величины, относящиеся к моменту времени t_k.



2. Рассмотрим сначала движение лодки между двумя гребками. Пусть в момент времени t_k лодка находилась в точке K с координатами (x_k, y_k).

Вектор скорости лодки $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k + \mathbf{w}$. Первое слагаемое действует вдоль оси OX, поэтому оно будет изменять только координату x. Второе действует вдоль оси OY, поэтому оно будет изменять только координату y. Следовательно, нет необходимости вычислять каждый раз результирующий вектор скорости $\mathbf{v}_k$, а можно записать, что координаты точки, в которой лодка окажется в момент следующего гребка, будут равны

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + u_k \Delta t, \\ y_{k+1} &= y_k + w\,\Delta t. \end{aligned} \qquad (*)$$

3. Теперь можно сформулировать базовый алгоритм расчета.

Алгоритм "Базовый"
Задать H, Δt; положить $x_0 := 0$, $y_0 := 0$;
ДЛЯ $k = 0, 1, 2, \ldots$
    Вычислить x_{k+1}, y_{k+1} по формулам $(*)$;
конец алгоритма

Этот основной алгоритм мы будем дополнять действиями, необходимыми для поиска ответов на вопросы задачи.

4. Для ответа на 1-й вопрос нужно найти x_{10}, y_{10}, поскольку за одну минуту происходит 10 взмахов веслами. Для этого достаточно выполнить 10 повторений цикла алгоритма (k от 0 до 9).

5. Для ответа на 2-й вопрос задачи нужно производить расчет до тех пор, пока y_{k+1} не окажется больше H. Это означает, что нужно использовать цикл ПОКА с условием продолжения $y_k < H$. Номер последнего шага k_H будет совпадать с количеством проделанных шагов. Тогда общее время переправы $T = k_H \cdot \Delta t$.

Соответствующий алгоритм примет вид

Алгоритм "Время переправы"
Задать H, Δt; положить $x_0 := 0$, $y_0 := 0$, $k := 0$;
ПОКА $y_k < H$
  Вычислить скорость течения $u_k := y_k \cdot (H - y_k)$;
  Вычислить x_{k+1}, y_{k+1} по формулам $(*)$;
  Увеличить счетчик $k := k + 1$;
КОНЕЦ_ПОКА
Вычислить общее время $T := k \cdot \Delta t$;
Вывести T;
конец алгоритма

Заметим, что время переправы можно получить гораздо быстрее, разделив ширину реки на собственную скорость лодки. Алгоритм "Время переправы" можно применять для решения более сложных задач. Рекомендуется ознакомиться с соответствующим этапом решения задачи для 11 класса.

6. Теперь, когда мы умеем определять номер шага, на котором лодка достигает берега, мы можем определить координату x_H точки причаливания. Так как лодка отошла из начала координат, то величина x_H будет показывать, насколько ниже по течению закончилась переправа.

7. (Только для 10 класса.) Наконец, для ответа на 4-й вопрос придется искать полную скорость v_k при $k = k_H - 1$. В момент последнего (перед причаливанием) взмаха весел лодка находилась в точке с координатами (x_{k_H-1}, y_{k_H-1}). После этого момента скорость лодки уже не изменялась. в указанной точке скорость течения равна $u_H = y_{k_H-1}(H - y_{k_H-1})$. Поэтому $v_H = \sqrt{u_H^2 + w^2}$.

Итоговый алгоритм примет вид (значок % означает комментарий)

Алгоритм "Время переправы и снос"
Задать H, Δt; положить $x_0 := 0$, $y_0 := 0$, $k := 0$;
ПОКА $y_k < H$
  Вычислить скорость течения $u_k := y_k \cdot (H - y_k)$;
  Вычислить x_{k+1}, y_{k+1} по формулам $(*)$;
  Увеличить счетчик $k := k + 1$;

КОНЕЦ_ПОКА

% теперь переменная k содержит количество повторний цикла

Вывести x_{10} и y_{10}; % это ответ на первый вопрос

Вычислить общее время $T := k \cdot \Delta t$;

Вывести T; % это ответ на второй вопрос

Вывести 'Причалили ниже на ' + x_k % это ответ на третий вопрос

Вычислить $v := \sqrt{u_k + w}$

Вывести 'Причалили со скоростью ' + v; % это ответ на четвертый вопрос

конец алгоритма

8. Числовые данные, которые должны были бы быть получены в результате выполнения описанных алгоритмов не приводятся. Их отсутствие следует рассматривать как стимул для повторной самостоятельной проработки задачи.