Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа	NУ 61-99	← Не заполнять Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Абзалилова

ИМЯ Арина

ОТЧЕСТВО Тимуровна

Дата рождения 20 декабря 2002 **Класс:** 7

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: АВ

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$x \in N$
$y \in N$

x - кавалеров
y - дам
$x > 9$ т.к Алена танцует более, чем с 9 кавалерами
$y \geq 4$ т.к 4 девушки мы уже знаем

$\begin{cases} x+y=20 \\ x-7+1=y \end{cases}$ | $20-x=y$ т.к $y \geq 4$, то $x \leq 16$

$x=10$, $y=4$ - не уд
$x=11$, $y=5$ - не уд
$x=12$ $y=6$ - не уд
$x=13$ $y=7$ - уд
$x=14$ $y=8$ - не уд
$x=15$ $y=9$ - не уд
$x=16$ $y=10$ - не уд

Ответ 13 кавалеров

+

№3

$\left.\begin{matrix} x<24 \\ y<24 \\ z<24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z+y<60$

$$\begin{array}{r} z\text{ч } y\text{м} \\ +\ x\text{ч } z\text{м} \\ \hline y\text{ч } x\text{м} \end{array}$$

$y+z=x$ выполн всегда

I сл. $\begin{cases} y+z=x \\ z+x=y \end{cases}$

$x=y-z$
$y+z=y-z$ $(-y)$
$z=-z$
$z=0$
$x-y=0$

II сл. $\begin{cases} y+z=x \\ z+x=24+y \end{cases}$

$x=24+y-z$
$y+z=24+y-z$ $(-y)$
$z=24-z$
$z=12$
$x-y=12$

Ответ: $\{0; 12\}$

+

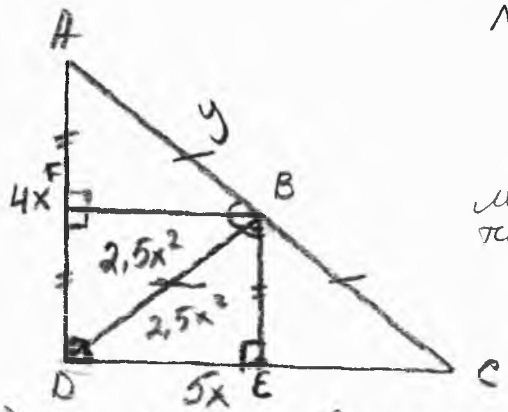
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ N Y 61 - 99

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Дано:
$AD : DC = 4 : 5$
DB - медиана
$\angle ADB = 90°$

Найти:
P_{ABD}
P_{CBD}
S_{ABD}
S_{CBD}

AB=BC т.к DB - медиана

DB=AB=BC т.к как медиана провер. к гипотенузе в прямоугл. треугольнике

Пусть AB=y

А) Проведем высоту BF, т.к треугольник равнобедр она так же явл медианой и биссектрисой

Проведем высоту BE, т.к треугол равнобедр она явл так же медианой и биссектрисой.

$FB \parallel DE$ т.к Σ односторонних углов равна 180

$\angle FBE = 90°$ т.к как накрест лежащие, значит

▭FBDE - прямоугольник

$S_{FBDE} = 5x^2$

$\Delta FBD = \Delta EBD$ по II признаку

1) $\angle FBD = \angle BDE$ } как накрест лежащие
2) $\angle FDB = \angle DBE$ }
3) BD - общ.

т.к Δ-ки равны то их площади равны

$\Delta ABF = \Delta DBF$ по III признаку

AB=BD - по ранее доказ

AF = FD по постр

BF - общ.

⇓

$S_{ABD} = 5x^2$:

общая S $\Delta ACD = \frac{20x^2}{2} = 10x^2 \Rightarrow S_{DBC} = 10x^2 - 5x^2 = 5x^2$

Ответ: получили

где $x, y > 0$

Б) $P_{ABD} = 2y + 4x$

$P_{CBD} = 2y + 5x$ $\Rightarrow P_{ABD} \neq P_{CBD}$

Ответ: не могут

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NY 61-99

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1

31ax - всего топлива

$31ax = (31a + (30 - 2x)a) \cdot x$

$31a = a(31 + 30 - 2x)$

$31 = 61 - 2x$

$x = 15$

Ответ: на 15 недель, $a \in R$

Лист 03 из 03

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

VX 85-60

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ АБРАМОВ

ИМЯ ЕГОР

ОТЧЕСТВО ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 21.09.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: [подпись]

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ) =$

$= \lg 10^4 + \lg \operatorname{tg} 2017^\circ + \lg 10^5 + \lg 2018^\circ + \ldots + \lg 10^{20} + \lg \operatorname{tg} 2033^\circ =$

$= 4 + 5 + \ldots + 20 + \lg \operatorname{tg}(11 \cdot 180^\circ + 37^\circ) + \lg \operatorname{tg}(11 \cdot 180^\circ + 38^\circ) + \ldots +$

$+ \lg \operatorname{tg}(11 \cdot 180^\circ + 53^\circ) = 4 + 5 + \ldots + 20 + \lg \operatorname{tg} 37^\circ + \lg \operatorname{tg} 38^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 53^\circ =$

$= 4 + 5 + \ldots + 20 + \lg(\operatorname{tg} 37^\circ \operatorname{tg} 53^\circ) + \lg(\operatorname{tg} 38^\circ \operatorname{tg} 52^\circ) + \ldots + \lg \operatorname{tg} 45^\circ =$

$= 4 + 5 + \ldots + 20 + \lg \frac{\sin^2 45^\circ - \sin^2 8^\circ}{\cos^2 45^\circ - \sin^2 8^\circ} + \lg \frac{\sin^2 45^\circ - \sin^2 7^\circ}{\sin^2 45^\circ - \sin^2 7^\circ} + \ldots + \lg 1 \overset{*}{=}$

$\operatorname{tg}(\alpha - \beta)\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)} = \frac{(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}{(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)} =$

$= \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta - 1 + \cos^2\beta + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\beta} =$

$= \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$

$\operatorname{tg}x \operatorname{tg}y = \frac{\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{y-x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{y-x}{2}\right)}$

$\begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \alpha + \beta = y \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = x + \beta \\ \beta = \frac{y-x}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{2} \\ \beta = \frac{y-x}{2} \end{cases}$

$\overset{*}{=} 4 + 5 + \ldots + 20 + \lg 1 + \lg 1 + \ldots + \lg 1 = 4 + 5 + \ldots + 20 = 204$

(a_n) — арифметическая прогрессия

$a_1 = 4; d = 1$ $\quad a_n = 4 + (n-1)d$

$20 = 4 + n - 1$

$n = 17$

$S_{17} = \frac{2a_1 + 16d}{2} \cdot 17 = \frac{8 + 16}{2} \cdot 17 = 12 \cdot 17 = 204$

Ответ: $S = 204$ млн. руб.

+

№2

1 мес: x

2 мес: $C - 2x$

3 мес: $C - 2(C - 2x) = 4x - C$

4 мес: $C - 2(4x - C) = 3C - 8x$

при $x = \frac{1}{3}C$

2 мес: $C - \frac{2}{3}C = \frac{1}{3}C$

3 мес: $\frac{4}{3}C - C = \frac{1}{3}C$

4 мес: $3C - \frac{8}{3}C = \frac{1}{3}C$

(+)

значит, запас может оказаться равным в какие-то два месяца

Ответ: запас может оказаться равным в какие-то два месяца, это возможно при $x = \frac{1}{3}C$, т.е. запас газа будет равен $\frac{1}{3}C$

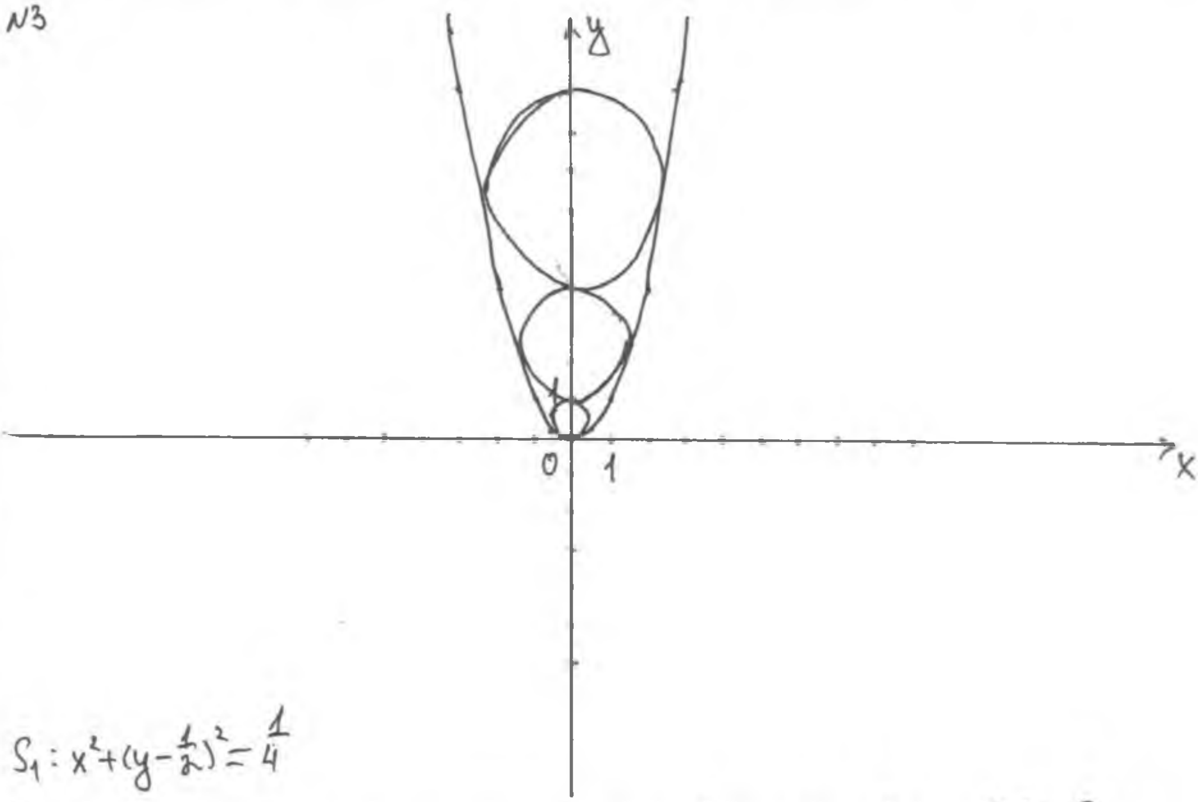
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VX 85-60

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3



$S_1: x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$

Возьмем окружность, заданную уравнением $x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4}$ и посмотрим её взаимное расположение с графиком функции $y=x^2$

$\begin{cases} x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4} \\ y=x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+(x^2-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4} \\ y=x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+x^4-5x^2+\frac{25}{4}=\frac{9}{4} \\ y=x^2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^4-4x^2+4=0 \\ y=x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} (x^2-2)^2=0 \\ y=x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=2 \\ y=x^2 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$ значит, данная окружность касается веток параболы

возьмем точку $A(0;1)$

$0+(1-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4}$

$\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$, значит, т. A принадлежит данной окружности

$\begin{cases} x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \\ x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-5y+\frac{25}{4}-y^2+y-\frac{1}{4}=2 \\ x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} -4y=-4 \\ x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$

значит, окружности S_1 и данная касаются, тогда

$S_2: x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VX 85-60

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

возьмем окружность, заданную уравнением, ~~$x^2+(y-\frac{9}{2})^2=\frac{25}{4}$~~ $x^2+(y-\frac{13}{2})^2=\frac{25}{4}$

посмотрим на расположение окружности и параболы

$$\begin{cases} x^2+(y-\frac{13}{2})^2=\frac{25}{4} \\ y=x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+(x^2-\frac{13}{2})^2=\frac{25}{4} \\ y=x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+x^4-13x^2+\frac{169}{4}=\frac{25}{4} \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4-12x^2+36=0 \\ y=x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2-6)^2=0 \\ y=x^2 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=6 \end{cases} \end{array}\right.$$

значит, данная окружность касается ветвей параболы

посмотрим на расположение окружности S_2 и 2-ой получившейся

$$\begin{cases} x^2+(y-\frac{13}{2})^2=\frac{25}{4} \\ x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} y^2-13y+\frac{169}{4}-y^2+5y-\frac{25}{4}=4 \\ x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8y=-32 \\ x^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} y=4 \\ x=0 \end{cases}$$

значит, эти окружности касаются, тогда S_3: $x^2+(y-\frac{13}{2})^2=\frac{25}{4}$

заметим, что радиусы окружностей $S_1; S_2; S_3$ отличаются на 1; аналогично докажем, что все остальные окружности будут иметь радиус на 1 больше предыдущей

(a_n) - арифметическая прогрессия

$a_1=\frac{1}{2}$; $d=1$

$a_{2017}=a_1+2016d=\frac{1}{2}+2016=2016\frac{1}{2}$

Ответ: радиус S_{2017} равен $2016\frac{1}{2}$

(+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

KL 37-84

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ АГРИНСКИЙ

ИМЯ АЛЕКСАНДР

ОТЧЕСТВО ЕВГЕНЬЕВИЧ

Дата рождения 27.05.2002.

Класс: 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Аг

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17 081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ КЛ 37-84

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases}1+x+y=xy\\ 2+y+z=yz\\ 5+z+x=zx\end{cases};\quad \begin{cases}xy-y-x+1=2\\ yz-z-y+1=3\\ zx-x-z+1=6\end{cases};\quad \begin{cases}y(x-1)-(x-1)=2\\ z(y-1)-(y-1)=3\\ x(z-1)-(z-1)=6\end{cases};$$

$$\begin{cases}(y-1)(x-1)=2\\ (z-1)(y-1)=3\\ (x-1)(z-1)=6\end{cases}\left|\begin{matrix}\times\\ \times\end{matrix}\right.$$

$$(x-1)^2\cdot(y-1)^2\cdot(z-1)^2=2\cdot3\cdot6$$

$$(x-1)(y-1)(z-1)=\sqrt{36}.$$

$$(x-1)(y-1)(z-1)=6,\ \text{но}\ (x-1)(z-1)=6,$$

значит $y-1=1$

$y=2.$

$(y-1)(x-1)=2.$

$(2-1)(x-1)=2.$

$x-1=2.$

$x=3.$

$(z-1)(y-1)=3.$

$z-1=3$

$z=4$

$\pm$

Ответ: $y=2;\ x=3;\ z=4.$ — одно из решений!

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

а) $A = x + \frac{1}{x}$

1) при $k=2$. $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = A^2 - 2$

2) при $k = 3$ $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x^3 + 3x + 3\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) - 3x - 3\frac{1}{x} =$

$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = A^3 - 3A.$

3) при $k=4$ $x^4 + \frac{1}{x^4} = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} - 2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 =$

$= \left(A^2 - 2\right)^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2.$

4) при $k=8$ $x^8 + \frac{1}{x^8} = x^8 + 2 + \frac{1}{x^8} - 2 =$

$= \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2 = \left(A^4 - 4A^2 + 2\right)^2 - 2 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 2$

б) $B_2 = B_4 = B_8.$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + \frac{1}{x^4} = x^8 + \frac{1}{x^8}$

$B_2 = B_4$

$A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2.$

$A^4 - 4A^2 + 2 - A^2 + 2 = 0$

$A^4 - 5A^2 + 4 = 0.$

Пусть $A^2 = t \geq 0$, тогда

$t^2 - 5t + 4 = 0.$

$D = 25 - 16 = 9.$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}.$

$t_1 = \frac{5+3}{2} = 4$; $t_2 = \frac{5-3}{2} = 1.$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ KL 37-84

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~при $t=4$, $A=\sqrt{t}=\sqrt{4}=2$, тогда~~

~~$\frac{1}{x}+x=2 \Rightarrow$~~

при $t=1$, $A=\sqrt{t}=1$, $x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=1$.

$x+\frac{1}{x} = x^2+\frac{1}{x^2} = x^8+\frac{1}{x^8}$

$1+1 = 1+1 = 1+1$.

Ответ: а) при $k=2$ − A^2-2.

при $k=3$ − A^3-3A.

при $k=4$ − A^4-4A^2+2

при $k=8$ − $A^8-8A^6+20A^4-16A^2+2$.

б) при $A=x=1$.

№3.

Т.к. 3 самых лёгких весили 31 кг, то в среднем каждый весил $\frac{31}{3}$, а самый тяжёлый весил в среднем $\frac{41}{3}$.

Всего уже завезли $31+41=72$ кг, значит осталось завезти $120-72=48$ кг.

Допустим, что каждый из оставшихся приборов весил максимум, то есть приблизительно $\frac{41}{3}$ кг, тогда осталось завезти: $48\cdot\frac{3}{41}=3\frac{21}{41}$ приборов.

Допустим, что каждый из оставшихся приборов весил минимум, то есть приблизительно

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ KL 37-84

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\frac{31}{3}$ кг, тогда осталось завезти:

$48 \cdot \frac{3}{31} = 4\frac{20}{31}$.

Значит, если количество оставшихся приборов было x, то:

$3\frac{21}{41} < x < 4\frac{20}{31}$.

Но т.к. количество приборов - целое число, то всего приборов было:

$3+3+4=10$ штук.

Ответ: 10 штук.

№5.

$14ч - 12ч = 2ч.$

$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}.$

То есть во время действия двух насосов за 2 часа набирается $\frac{1}{6}$ резервуара (+)

Значит в 10 часов резервуар был заполнен на:

$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

Тогда до вкл. второго ~~Значит до включ~~ первый разработал 4 часа. $10-4=6ч.$

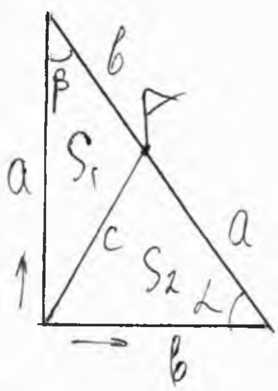
~~Тогда если~~ откачка равна вкачке, то включили

~~в 10 - ((4-3)/4) = 4 ... = 3 часа. Ответ: 3 часа~~

Ответ: в 6 часов.

№4.

а)



Т.к. их скорости равны, то пройдут они одинаковое расстояние, то есть каждый из них пройдёт $a+b$.

Площадь треугольника равна $\frac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\alpha$.

~~sin~~ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\sin\beta = \frac{a}{c}$

~~а и с в обоих треугольниках равны~~

~~тогда $\frac{a\cdot b}{2}$ площади обоих фигур~~

$$S_1 = \frac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{a\cdot b}{2}\cdot\frac{a}{c}$$
$$S_2 = \frac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\beta = \frac{a\cdot b}{2}\cdot\frac{a}{c}$$
$$\Rightarrow S_1 = S_2.$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

RQ 41-24

шифр

← **Не заполнять** **Заполняется ответственным работником**

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ АЛЕКСАНДРОВ

ИМЯ КИРИЛЛ

ОТЧЕСТВО ИГОРЕВИЧ

Дата рождения 18.08.2001

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: АКИ

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№2

$0 < x < 6$

$x > 0$ – из условия. $x < 6$ – т.к. если $x \geq 6$, то в следующем месяце запас будет равен $6 - x \leq 0$, чего не может быть по условию.

Запасы газа по месяцам чередуются, т.к. если в текущем месяце запас равен x м³, то в следующем $(6-x)$, а в следующем $6-(6-x) = x$ м³.

Осталось решить два квадратных уравнения:

1) $x^2 = 6 - x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -3 \text{ – не удовлетворяет ОДЗ} \end{array}\right.$

2) $x = (6-x)^2$

$x^2 - 13x + 36 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 9 \text{ – не удовлетворяет ОДЗ} \end{array}\right.$

Отсюда если запас газа равен 2м³ в первом месяце, то на все месяцы с чётным номером запас газа будет точным квадратом запаса газа в другой месяц (~~а именно в месяцы с не- чётным номером~~) эти другие месяцы – это месяцы с нечётным номером)

Если запас газа равен 4м³ в первом месяце, то на все месяцы с нечётным номером запас газа будет точным квадратом запаса газа в другой месяц (~~а именно в месяцы~~ эти другие месяцы – месяцы с чётным номером).

Ответ: да, может. Если запас равен 2м³ (в месяцы с чётным номером) или 4м³ (в месяцы с нечётным номером).

не все (+)

№3

Приведём всё к общему знаменателю

$$\frac{24 - 24x + 12x(x-1) - 4x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} = 0$$

Т.е. числитель данной дроби равен нулю

$-24(x-1)+12x(x-1)-4x(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)(x-3)=$

$=(x-1)(x-2)(12-4x+x(x-3))=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x^2-7x+12=0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$

$\Downarrow$

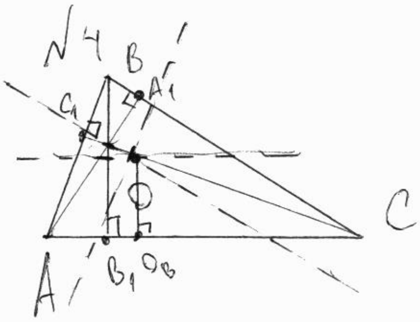
$D=1$

$x=\frac{7\pm1}{2}$, т.е.

+

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$

№4



Пусть $S_{\triangle AOC}=3S$, $S_{\triangle AOB}=1$, $S_{\triangle BOC}=2$.

±

Тогда $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AOC}}=\frac{BB_1}{OO_B}=\frac{6S}{3S}=2$

(т.к. они опираются на одно основание)

Отсюда получаем, что $OO_B=\frac{1}{2}BB_1$

Аналогично $OO_C=\frac{1}{6}CC_1$; $OO_A=\frac{1}{3}AA_1$

Заметим также, что $OO_B \parallel BB_1$, $OO_C \parallel CC_1$, $OO_A \parallel AA_1$, т.к. они перпендикулярны сторонам $\triangle ABC$.

Значит, чтобы найти точку O в $\triangle ABC$, надо провести высоты в $\triangle ABC$, отложить на этой высоте от стороны, к которой проведена эта высота, отрезок, равный соответствующей части для треугольника, который мы хотим получить ($\frac{1}{6}$ от данной высоты для треу-ка с площадью 1, $\frac{1}{3}$ для треу-ка с площадью 2, $\frac{1}{2}$ для треу-ка с площадью 3; 1, 2, 3 – в условных единицах), провести через конец этих отрезков прямую, параллельную той стороне $\triangle ABC$, к которой проведена высота, на которой лежит этот отрезок. Они пересекутся в одной точке, т.к. $\frac{1}{6}S+\frac{1}{2}S+\frac{1}{3}S=S$, т.е. занимается вся площадь треугольника. Эта точка пересечения и будет точкой O (стоит отметить, что в $\triangle ABC$ можно получить 6 различных вариантов расположения точки O, т.к. можно по-разному выбирать площади для $\triangle AOB$, $\triangle AOC$, $\triangle BOC$, а именно 6 разными способами)

№1

a) Ecли $k=2$, то $B_2=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=A^2-2$

Ecли $k=3$, то $B_3=x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(x^2+\frac{1}{x^2}-1)=$
$=A(B_2-1)=A(A^2-3)$

Ecли $k=4$, то $B_4=x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=B_2^2-2=(A^2-2)^2-2=$
$=A^4-4A^2+2$

Ecли $k=8$, то $B_8=x^8+\frac{1}{x^8}=(x^4+\frac{1}{x^4})^2-2=B_4^2-2=(A^4-4A^2+2)^2-$
$-2=A^8-8A^6+20A^4-16A^2+2$

b) Если $B_2=B_4$, то $A^2-2=A^4-4A^2+2$, т.е. $A^4-5A^2+4=0$,

т.е. $\left[\begin{array}{l}A^2=1\\A^2=4\end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l}A=\pm1\\A=\pm2\end{array}\right.$

Если $A=1$, то $x+\frac{1}{x}=1$, т.е. $\frac{x^2-x+1}{x}=0$, но $D<0$ (то же и с $A=-1$)

если $A=2$, то $x+\frac{1}{x}=2$, т.е. $x=1$, если $A=-2$, то $x=-1$

Т.е. если $A=\pm2$, т.е. $x=\pm1$, то $B_2=B_4$, но если подставить данные значения A в B_8, то $\underline{B_2=B_4\neq B_8}$ — значит,

одновременно это равенство выполняться не будет.
Значит, могут выполняться частные случаи данного равенства, но не оно полностью.
c) Чтобы количество арифм-их операций было минимально, ~~надо~~ число A должно быть целым, а не дробью, чтобы при возведении в квадрат, надо было возводить только одно число, а не числитель и знаменатель по отдельности.

Т.к. если $x=\frac{a}{b}$, то $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=k$, где k - целое, т.е.
$a^2+b^2-kab=0$
$(a-b)^2-(k-2)ab=0$, но это ур-ие имеет решение, только если $a=b$ и $k=2$ или $a=-b$ и $k=-2$, т.е. $x=\pm 1$

±

Тогда если $x=1$, то $C=\left((1+1)\times\frac{1}{2}\right)^{2012}=1^{2012}=1$.
если $x=-1$, то $C=\left((-1+(-1))\times\frac{1}{2}\right)^{2012}=(-1)^{2012}=-1$.

N5
$f(x)+f(x-10)=x^2+px+q+(x-10)^2+p(x-10)+q=x^2+x^2-20x+100+px+px-10p+2q=$
$=2x^2+2px+2q-20x-10p+100=2x^2+2x(p-10)+2(q-5p+50)=0$
$\frac{D}{4}=(p-10)^2-4(q-5p+50)=p^2-20p+100-4q+20p-200=$
$=p^2-4q-100=0$

±

$p^2-4q=100$ как дискриминант $f(x)$
Т.к. $\frac{D}{4}=0$, то уравнение $f(x)+f(x-10)=0$ имеет ~~два корня~~. один корень.

Ответ: один корень.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

6IF 91-62

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ АЛЕШНОВСКИЙ

ИМЯ ВАЛЕНТИН

ОТЧЕСТВО СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 19.06.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 листах

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1.

$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017) + \lg(10^5 \lg 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \lg 2033^\circ)$

По свойству периодичности тригонометрических функций (тангенса) $\operatorname{tg}(\alpha + 180n) = \operatorname{tg}(\alpha)$, где $n \in Z$.

~~Преобраз~~ Таким образом, $\operatorname{tg} 2017 = \operatorname{tg}(37 + 180 \cdot 11) = \operatorname{tg} 37$.

Преобразую формулу для S, зная, что $\operatorname{tg}(\alpha + 180n) = \operatorname{tg}\alpha$:

$S = \lg(10^4 \cdot \operatorname{tg} 37) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 38) + \ldots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 53)$

1) $\lg(10^4 \cdot \operatorname{tg} 37) = \lg 10^4 + \lg(\operatorname{tg} 37) = 4 + \lg(\operatorname{tg} 37)$

2) $\lg(\operatorname{tg} 37) + \lg(\operatorname{tg} 53) = \lg(\operatorname{tg} 37 \cdot \operatorname{tg} 53) = \lg(\operatorname{tg} 37 \cdot \operatorname{ctg}(90 - 53)) =$
$= \lg(\operatorname{tg} 37 \cdot \operatorname{ctg} 37) = \lg(1) = 0.$

(+)

Зная (1) и (2), преобразую S:

$S = 4 + 5 + \ldots + 20 + \lg(\operatorname{tg} 37 \cdot \operatorname{tg} 53) + \lg(\operatorname{tg} 38 \cdot \operatorname{tg} 52) + \lg(\operatorname{tg} 39 \cdot \operatorname{tg} 51) + \ldots$
$\ldots + \lg(\operatorname{tg}(44) \cdot \operatorname{tg}(46)) + \lg(\operatorname{tg} 45) = \frac{(4+20)(20-4+1)}{2} + 0 + 0 + \ldots + 0 =$
$= 12 \cdot 17 = 204.$

Ответ: 204.

№2.

Судя по всему, C – какая-то постоянная. Значит, если ~~во~~ втором месяце запас газа такой же, как и в предыдущем (первом), то в третьем и т.д. месяце он будет таким же, равным X.

Гляну зависимость запаса газа от месяца:

1) X
2) $C - 2X$
3) $C - 2(C - 2X) = -C + 4X$
4) $C - 2(-C + 4X) = 3C - 8X$
5) $C - 2(3C - 8X) = -5C + 16X$
6) $C - 2(-5C + 16X) = 11C - 32X$
7) $C - 2(11C - 32X) = -21C + 64X$

...

~~Срав~~ Приравняю, к примеру, 1 и 3, а также 2 и 7 месяцы:

1 и 3: $X = -C + 4X \Rightarrow C = 3X \Rightarrow X = \frac{C}{3}$

2 и 7: $C - 2X = -21C + 64X$
$22C = 66X \Rightarrow X = \frac{C}{3}.$

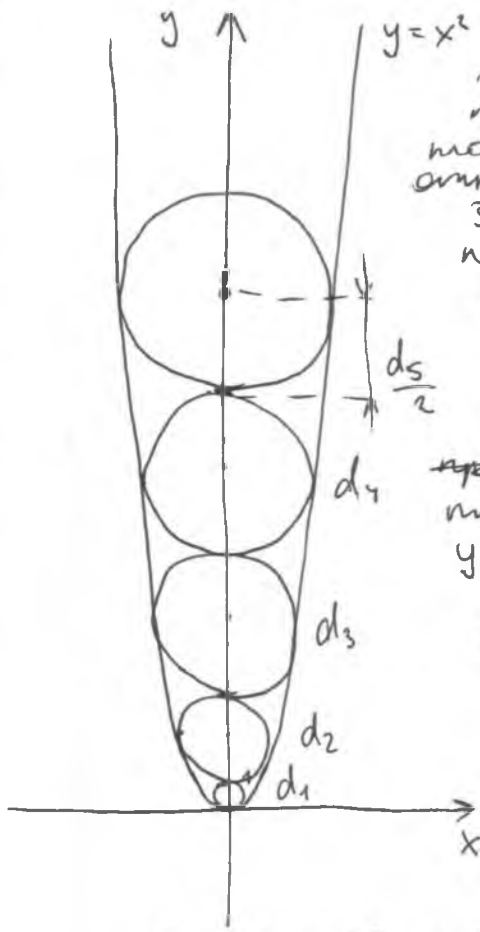
Таким образом, во всех месяцах будет одинаковый запас газа, если $X = \frac{C}{3}$

Во ~~все~~ все месяцы одинаковы $\Leftrightarrow$ в любые два различных месяца одинаковы.

Ответ: Может. $X = \frac{C}{3}$.

(+)

№3



Очевидно, что окружности лежат где-то посередине между ветвями параболы. Т.к. $f(x)=f(-x)$ $(x^2=(-x)^2)$, то функция четная, т.е. симметричная относительно прямой $x=0$.

Значит, центры всех окружностей лежат на прямой $x=0$.

Пусть радиус n-ной окр. равен $\frac{d_n}{2}$.

Тогда по оси Ox её центр не смещен, а по оси Oy располагается на высоте, равной сумме диаметров всех предыдущих окружность S_{n-1} плюс радиус n-ной окр., т.е.

$y_n = S_{n-1} + \frac{d_n}{2}$.

Также известно, что $y=x^2$ (уравнение параболы из усл.)

Запишу ур-е n-ной окружности:

$$x^2+\left(y-S_{n-1}+\frac{d_n}{2}\right)^2 = \left(\frac{d_n}{2}\right)^2$$

$\boxed{\text{Т.к. } y=x^2, \text{ то } x^2=y.}$

$$y+(y-y_n)^2=\left(\frac{d_n}{2}\right)^2$$

$$y+y^2-2yy_n+y_n^2=\frac{d_n^2}{4}$$

$$y^2+y(1-2y_n)+y_n^2=\frac{d_n^2}{4}$$

$$y^2+y(1-2y_n)+y_n^2-\frac{d_n^2}{4}=0$$

Т.к. ф-я четная, то $f(-x)=f(x)$, т.е. точки касания на одной высоте. $\Rightarrow$ $D=0$.

$$D=(1-2y_n)^2-4y_n^2+d_n^2=1-4y_n+4y_n^2-4y_n^2+d_n^2=$$

$$=1-4y_n+d_n^2=1+d_n^2-4\left(S_{n-1}+\frac{d_n}{2}\right)=1+d_n^2-2d_n-4S_{n-1}=$$

$$=d_n^2-2d_n-4S_{n-1}+1=0. \quad D_1=1+4S_{n-1}-1=4S_{n-1}$$

~~Т.к. диаметр увеличи~~

$$d_n=1\pm\sqrt{4S_{n-1}}=1\pm2\sqrt{S_{n-1}}$$

Т.к. диаметр только увеличивается, то $d_n=1+2\sqrt{S_{n-1}}$.

См. на листе №3.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Найду зависимость диаметра n-ной окр от (n−1) окр.:

1) $d_1 = 1$

2) $d_2 = 1+2 = 3$

3) $d_3 = 1+4 = 5$

4) $d_4 = 1+6 = 7$

5) $d_5 = 1+8 = 9$

...

6) $d_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$.

Методом пристального взгляда и с применением дедукции можно убедиться, что диаметры составляют арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 1$, и $d = 2$.

Поэтому для диаметра n-ой окр. будет значение

$d_n = a_1 + d(n-1) = 1 + 2(n-1) = 2n-1$; $R_n = \frac{d_n}{2} = n - \frac{1}{2}$.

$d_{2017} = 2\cdot 2017 - 1 = 2033$.

Тогда её радиус равен $R_{2017} = \frac{d_{2017}}{2} = \frac{2033}{2} = 2016{,}5$.

Ответ: 2016,5.

№5.

$\sin nx = \sin x$

$\sin nx - \sin x = 0$

$2\sin\left(\frac{nx-x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{nx+x}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{nx-x}{2} = 0 \\ \cos\frac{nx+x}{2} = 0 \end{array}\right.$

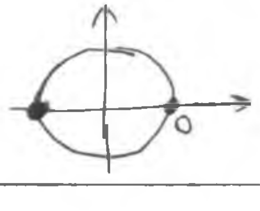
Т.к. $x \in [0; \pi]$, то

~~Отброшу корень~~

~~$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$~~

$\left[\begin{array}{l} \frac{(n-1)x}{2} = 2\pi k \\ \frac{(n-1)x}{2} = \pi + 2\pi k \\ \frac{(n+1)}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \frac{n+1}{2}x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{4\pi k}{n-1} \\ x_2 = 2\pi + \frac{4\pi k}{n-1} \\ x_3 = \pi + \frac{2\pi k}{n+1} \\ x_4 = -\pi + \frac{2\pi k}{n+1} \end{array}\right.$ ⇒ много решений с учетом периодичности.

$S(n) = 3n$.



Ответ: много.

№4

$a^2+b^2+c^2 = 6abc$

$f = a+b+c$.

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc$

Т.к.

$(a+b+c)^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 6abc$, то

методом пристального взгляда можно убедиться, что ф-я симметрична ⇒ а это значит, что $a = b = c$ (только одно решение)

$3a^2 = 6a^3 \Leftrightarrow 6a^3 - 3a^2 = 0$

$a^2(6a - 3) = 0$

$a \neq 0$

$a = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ⇒

$f = a+b+c = 3a = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССТ Мытищи

Место проведения

GE 78 - 33

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Антонов

ИМЯ Егор

ОТЧЕСТВО Алексеевич

Дата рождения 11.07.2003

Класс: 7

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 2 **листах**

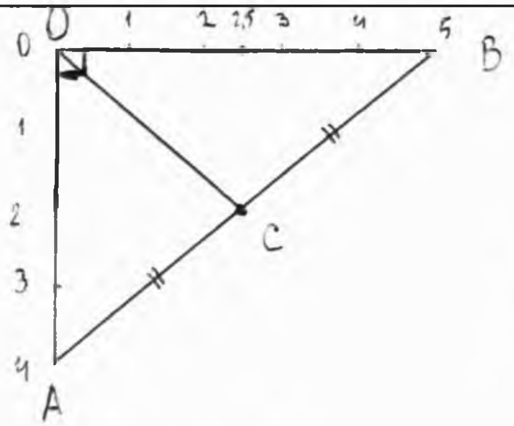
Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Анто

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



Дано: $OB = 5$

$OA = 4$

$AC = CB$

Д-ть: $S_{OCB} = S_{OCA}$

$P_{OCB} = P_{OCA}$

$S_{\triangle OBC} = 2,5 \times 2 = 5$

$S_{\triangle OAC} = 2 \times 2,5 = 5$

$S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAC}$

$\left.\begin{array}{l} AC = CB \text{ (дано)} \\ OC \text{ — общ.} \\ OB \neq OA \end{array}\right\} \Rightarrow P_{\triangle OAC} \neq P_{\triangle OBC}$

Ответ: а) $S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAC}$; б) $P_{\triangle OAC} \neq P_{\triangle OBC}$.

(+)

№3

1. z ч y мин
2. x ч z мин
3. y ч x мин

$x - y = ?$

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} z\,y \\ x\,z \end{array} \\ \hline y\,x \end{array}$$

$\left[\begin{array}{l} y + z = x \\ z + x = y \\ y + z = 10 + x \\ z + x = y + 1 \end{array}\right.$
$\left[\begin{array}{l} x - y = z \\ x - y = -z \\ x - y = z - 10 \\ x - y = -z + 1 \end{array}\right.$

$60z + y + 60x + z = 60y + x$

$\dfrac{59x - 59y}{59} = \dfrac{-61z}{59}$

$x - y = -1\frac{2}{59}z$

(−)

Ответ: z; $-z$; $z - 10$; $1 - z$; $-1\frac{2}{59}z$. решения нет.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GE 78-33

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 $\frac{(31+1)+(30+2)+(29+3)\cdots}{16\cdot 31} = \frac{496}{496}$

Ответ: было закуплено 496л литров, на 16 нед.

№5

$(1,0\ldots4)^2 > (1,0\ldots2)^2$?

$2,0\ldots4 > 2,0\ldots2$

$\frac{2,0\ldots4}{(1,0\ldots4)^2+2,0\ldots4} > \frac{2,0\ldots2}{(1,0\ldots2)^2+2,0\ldots2}$ - - - - - ?

№2

~~Е — 4~~	~~8~~	
~~О — 8~~	~~9 + 1~~	
~~И — 9~~	~~10 + 2~~	
~~А — 10~~	~~11 + 3~~	

Е — 7	8	12
О — 8	10	10
И — 9	12	8
X — 10	14	6
Y — 11	16	4
Z — 12	18	2
А — 13	20	0

$20 - 7 = 13$

Ответ: 13

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

СФ МЭИ

Место проведения

DJ58-37

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ АСТАХОВА

ИМЯ ТАТЬЯНА

ОТЧЕСТВО СЕРГЕЕВНА

Дата рождения 25.01.2004

Класс: 7

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Ат

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071 **ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ!** ⇨ DJ 58-37

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2

Каждая девочка танцевала с большим количеством кавалеров (на 1), чем предыдущая. Последняя девочка Алёна танцевала со всеми кавалерами. Значит, чтобы узнать, сколько было танцоров-кавалеров, нужно прономеровать девочек и к каждому порядковому ~~нове~~ номеру прибавить количество кавалеров, с которыми танцевала эта девочка. Получаются выражения: Екатерина − 1+7; Ольга − 2+8; Ирина − 3+9 и так далее, пока выражение не даст сумму 20.

+

Так выходит при выражении 7+13.

Значит, Алёна была седьмой, а кавалеров было 13.

Ответ: 13 танцоров-кавалеров.

№ 4

а) нет, не получили. Длина катет различна, поэтому площадь не может быть одинаковой.

б) нет, не могут. Длина катет различна, а все остальные стороны равные. Но тем неменее, периметры этих частей различны.

−

Ответ: а) нет; б) нет.

№ 5

Чтобы сравнить дроби, нужно взять последние числа в числителе и знаменателе и выполнить все действия с ними.

ошибка.

Первая дробь: $\frac{4}{4^2+4} = \frac{4}{16+4} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

Вторая дробь: $\frac{2}{2^2+2} = \frac{2}{4+2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

−

Сравниваем дроби: $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$.

Значит, $\frac{2,0000000002}{(1,0000000002)^2+2,0000000002} > \frac{2,0000000004}{(1,0000000004)^2+2,0000000002}$

Ответ: вторая дробь больше.

№3

снег пошёл в z часов y минут.
продолжал идти в течении x часов z минут.
перестал идти в y часов x минут.

Все время: z часов y минут + x часов z минут

Все часы: $z + x = y$

Все минуты: $y + z = x$

$y = x - z$

$x = y - z$

Эти выражение возможны только при $x = 0$ и $y = 0$.

Значит, $x - y = 0 - 0 = 0$

+

Ответ: 0 - один из ответов

№1

На каждую машину в неделю уходит a литров топлива.
На 31 машину в неделю уходит $31a$ литров топлива.
Всего на y недель было куплено $31ay$ литров топлива.
Каждую неделю одна машина полностью выходила из строя и купленного топлива хватило на $2y$ недель.
Топливо вышедшей из строя машины использовалось на следующих неделях.
Время, на которое было рассчитано купленное топливо, закончилось, когда на автобазе осталось 15 машин. Это произошло через 16 недель.
Нужно узнать количество купленного топлива.
$31ay$, если $y = 16$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ DJ 58-37

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$31 \cdot 16 \cdot a = 496a$ литров топлива.

Ответ: было куплено $496a$ литров топлива. Это количество было рассчитано на 16 недель.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССТ Мытищи

Место проведения

ДЦ 54-89

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ БОГАЙ

ИМЯ ОЛЕГ

ОТЧЕСТВО ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 16.02.2002

Класс: 8

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 7 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases}$$

1) Я рассмотрел уравнение $1+x+y=xy$ исходя из него я понял, что сумма чисел равна их произведению минус один, такое может быть, только если числа равны 2 и 3. тогда представим что $y=3$ $x=2$.

$1+2+3=3\cdot 2$

$6=6$

первое уравнение верно, подставим во второе, чтобы узнать чему равен z

$2+3+z=3z$

$2z=5$

$z=2,5$

Подставим z и y во второе уравнение и если равенство будет верно, тогда ур-ие решено верно.

$5+2,5+2=5$

$9,5\neq 5$ => ур-ие решено неверно; тогда.

$x=3$; $y=2$.

Проделываем те же манипуляции. находим z

$2+2+z=2z$

$z=4$

Подставляем z и x в третье; ~~но~~ и если равенство верно, то уравнение решено верно

$5+4+3=12$

$12=12$.

Уравнение решено верно!

Ответ: $x=3$; $y=2$; $z=4$.

±

одно из решений

№3

Дано:

$m_0 = 120кг = x_1 + x_2 + x_3 \dots + x_y$

$m_1 = 31кг = x_1 + x_2 + x_3$

$m_2 = x_y + x_{y-1} + x_{y-2} = 41кг$

$m_p = m_0 - m_1 - m_2 = 49кг$.

Сначала я рассудил: если я найду средний вес среди трёх самых лёгких, то я найду приблизительный минимальный вес остальных.

Средний беру т.к. один энергосберегательный прибор может весить на пару граммов больше или меньше, из-за этого и приблизительно. $m_1 : 3 = 31кг : 3 = 10\frac{1}{3}кг$

Тогда зная минимальный вес для ~~[illegible]~~ каждого из оставшихся приборов я разделил вес оставшихся приборов (m_p) на $10\frac{1}{3}$кг и получил

$49 : 10\frac{1}{3} = 4,8$ но т.к. $10,\frac{1}{3}$ это минимальное число то округляем в меньшую сторону и получаем что помимо трех самых лёгких и трёх самых тяжелых еще 4 прибора.

Но тогда нужно проверить не противоречит ли это другому условию, что вес трёх самых тяжёлых 41кг. Для этого я сравнил средний вес оставшихся приборов и трёх самых тяжелых

$41:3 = 13\frac{2}{3}$ кг.

$49:4=12,25$

$13\frac{2}{3} > 12,25$.

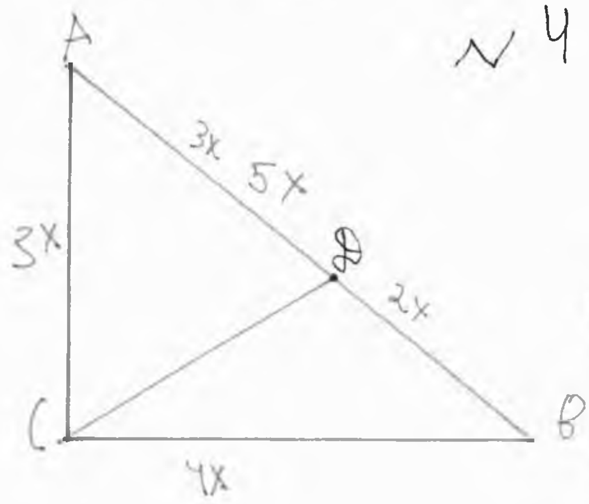
Да, ~~...~~ средний вес 3 самых тяжелых больше $\Rightarrow$ условие выполнено.

количество энергосберегающих приборов =

$= 3+3+4=10$

Ответ: на завод привезли 10 энергосберегающих приборов

№ 4



Т.К катеты в отношении 3:4, то $AC=3x$; $BC=4x$

по теореме Пифагора находим гипотенузу

$AB^2=9x^2+16x^2$

$AB=\sqrt{25x^2}$

$AB=5x$

Я обозначил точку встречи за D и провел прямую CD

Т.К они двигаются с одинаковой скоростью т.е. $V_1=V_2$ то: они пройдут одинаковое расстояние $S_1=S_2 \Rightarrow$ гипотенуза разделится на две части на 2x и 3x.

Дальше я воспользовался теоремой синусов

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{CB}{\sin A}$$

$$\frac{5}{1}=\frac{4}{\sin B}=\frac{3}{\sin A} \Rightarrow \sin B=4:5=0{,}8;\ \sin B=3:\sin A=0{,}6$$

CД я принял за y

потом я достроил треугольники и получил две формулы площади

$$\begin{cases} S_1=\frac{1}{2}(4xy)=2xy \\ S_2=\frac{1}{2}(9x^2)=4{,}5x^2 \end{cases}$$ я предположил что площади равны и тогда $S_1=S_2$

~~тогда S_1 = S_2, тогда $\frac{S_1}{S_2}=1$~~

Я выразил отсюда y $2xy=4{,}5x^2$

$2xy=4{,}5x^2$

$2y=4{,}5x \Rightarrow$

$y=2{,}25x$

~~тогда я снова воспользовался теоремой синусов~~

$$\sin B=\frac{CД}{BC}=\frac{2{,}25x}{4}\neq 0{,}6 \Rightarrow$$ их площади не равны т.к. их площади будут только при $y=2{,}25x$

Ответ: нет не будут у кроликов равные части

б) Существует лишь один вид треугольников при котором площади получившихся треугольников равны – это треугольник катеты которого равны. Т.К. в других случаях получатся разные площади и разное соотношение сторон.
Ответ: только один.
⊕

№5

~~Дано~~:
$t_1 = 10ч$
$t_2 = 12ч$
$t_3 = 14ч.$
$V_1 = ?$
$V_2 = \frac{1}{2}$
$V_3 = \frac{2}{3}$

Сначала я нашел количество горючего со включенным вторым мотором за 2ч.

$t_4 = t_3 - t_2 = 12ч - 14ч = 2ч.$

$V_4 = V_3 - V_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ скорость наполнения $= \frac{1}{12} V/ч.$

тогда я нашел ~~ко~~ объем горючего на момент включения второго насоса.

$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$

Дальше я рассуждал так:

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Т.К. нам не сказанно мощность насосов и другая подобная информация, то второй насос может вообще не качать жидкость $\Rightarrow$ можно найти самое ранее включение первого насоса.

$10ч - \frac{2}{6} : \frac{1}{12} = 6ч.$

+

Ответ: самое ранее время включения насоса 6 ч.

№2 $A = x + \frac{1}{x}$

Я выражал числа через A таким способом: возводил A в степень k, а потом приравнивал к нужному B. Т.е.

$B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

$A^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2x\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow B_2 = A^2 - 2$

$B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$A^3 = (x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x^2\frac{1}{x} + 3x\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} \Rightarrow$

$B_3 = A^3 - 3x - \frac{3}{x}$

$B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4}$

$A^4=(x+\frac{1}{x})^4=(x+\frac{1}{x})^2\cdot(x+\frac{1}{x})^2=(x^2+2+\frac{1}{x^2})\cdot(x^2+2+\frac{1}{x^2})=$

$=x^4+2x^2+1+2x^2+4+\frac{2}{x^2}+1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}=x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}\Rightarrow$

$\Rightarrow B^4=A^4-4x^2-6-\frac{4}{x^2}$

$B^8=x^8+\frac{1}{x^8}$

$A^8=A^4\cdot A^4\Rightarrow$

$B^8=\cancel{A^4 A^4}\ \cancel{A^4}(A^4-4x^2-6-\frac{4}{x^2})\cdot(A^4-4x^2-6-\frac{4}{x^2})$

б) ~~при~~ только при $A=0;2;-2$ $x=0;1;-1$

Т.к при других x и A уравнения не равные. Я это выяснил подставляя разные числа вместо x; если брать другие (не равные 0; 1; -1), то B различны.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ, В-308

Место проведения

ЫW 18-86

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Богатырёва

ИМЯ Ирина

ОТЧЕСТВО Сергеевна

Дата рождения 20.03.02

Класс: 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Бб

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЫW 18-86

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Рассмотрим промежуток времени между 12 и 14 ч:

$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ р./2 ч → $\frac{1}{12}$ р./ч

v_1 - v первого насоса v_2 - v второго насоса

$v_1 - v_2 = \frac{1}{12}$ р.ч

$v_1 = \frac{1}{12} + v_2$

Чтобы время начала было самым ранним, v_1 должно быть минимальным => v_2 должно быть минимальным. $v_2 \geq 0$

Пусть $\boxed{v_2 = 0}$

$v_1 = \frac{1}{12}$

в 12 ч → $\frac{6}{12}$ р. заполнено => начало в 6 ч.

Ответ: в 6 часов.

+

№3

Чтобы веса всех приборов были различны, нужна достаточная весовая разность между самым ~~большим~~ тяжелым из трех ~~наименьших~~ легчайших приборов и самым ~~меньшим~~ легким из трех наитяжелейших приборов. Подберем их массы:

~~11,5+12+12,5=37~~ ~~9,5+10,5+11=31~~ ; ~~13+13,5+14,5=41~~

10,32+10,33+10,35=31 ; 13,65+13,67+13,68=41

Значит, массы остальных приборов > 10,35 и < 13,65.

48. Сумма трех наитяжелейших приборов =42, значит, приборов между 10,35 и 13,65 их сумма равна больше 3. Масса каждого прибора точно >10 => их меньше 5.

Значит, таких приборов 4. 3+4+3=10

Ответ: 10 приборов

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВАРИАНТ: 17081 ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЫW 18-86

№2.

а) для $k=2$:

$B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$\boxed{B_2 = A^2 - 2}$

$A^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow B_2 = A^2 - 2$

для $k=3$:

$B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$\boxed{B_3 = A^3 - 3A}$

$A^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) =$

$= x^3 + x + 2x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} =$

$= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow B_3 = A^3 - 3A$

для $k=4$:

$B_4 = x_4 + \frac{1}{x^4}$

$\boxed{B_4 = (A^2 - 2)^2 - 2}$

$(A^2 - 2)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} \Rightarrow$

$\Rightarrow B_4 = (A^2 - 2)^2 - 2$

для $k=8$:

~~$B_8 = x_8 + \frac{1}{x^8}$~~

$B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8}$

$\boxed{B_8 = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2}$

$((A^2 - 2)^2 - 2)^2 = \cancel{\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2} = \cancel{\left(x^4 + \frac{1}{x^4} - 2\right)^2} =$

~~$= x^8 + 4 - 2x^4 \cdot 1 + \frac{1}{x^8} - \frac{2}{x^4} - 2x^4 - \frac{2}{x^4} + 4 =$~~

~~$= x^8 + \frac{1}{x^8} + 6 - 4x^4 - \frac{4}{x^4} = x^8 + \frac{1}{x^8} + 6 - 4\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$~~

$= \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 = x^8 + 2 + \frac{1}{x^8}$

б) $B_2 = B_4 = B_8$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + \frac{1}{x^4} = x^8 + \frac{1}{x^8} \quad | +2$

$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = x^8 + 2 + \frac{1}{x^8}$

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^4 + \frac{1}{4}\right)^2$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 61W 13-86

$x^2-x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=0$

$x(x-1)+\frac{1}{x^2}(1-x)=0$

$(x-\frac{1}{x^2})(1-x)=0$

$x-\frac{1}{x^2}=0$ $\quad \underline{x=1}$

$\frac{x}{1}=\frac{1}{x^2}$

$x^3=1$

$\underline{x=1}$

$x^4-x^2+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}=0$

$x^2(x^2-1)+\frac{1}{x^4}(1-x^2)=0$

$(x^2-\frac{1}{x^4})(x^2-1)=0$

$\frac{x^2}{1}=\frac{1}{x^4}$ $\quad x=\pm1$

$x^6=1$

$x=\pm1$

+

Ответ: при $x=\pm1$, $A=\pm2$

4)

№4

$BC=\sqrt{4^2+3^2}=5$

$AB+BD=AC+CD$

$4+x=3+5-x$

$2x=4$

$x=2 \rightarrow BD=2$

$\frac{AB}{BC}=\frac{EB}{BD}$ $\quad \frac{4}{5}=\frac{x}{2}$ $\quad 5x=8$ $\quad x=\frac{8}{5}=1,6$

$BE=1,6$; $AE=2,4$

$S_{ADC}=\frac{2,4\cdot3}{2}=\frac{7,2}{2}=3,6^2$

$S_{ADB}=\frac{AB\cdot ED}{2}$ $\quad ED=\sqrt{2^2-1,6^2}=\sqrt{1,44}=1,2$

$S_{ADB}=\frac{1,2\cdot4}{2}=2,4^2$ $\quad \boxed{S_{ADB}\neq S_{ADC}}$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 61W 18-86

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

б)

1) Чтобы $S_{ABD} = S_{ADC}$,

$S_{EBD} = S_{FDC}$

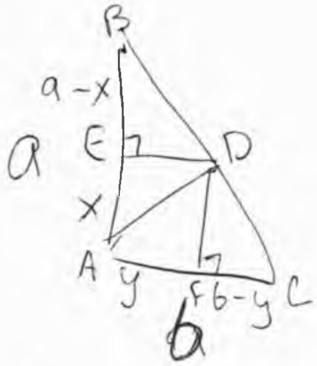
Пусть $AC = b$, $FC = y$, $AF = b - y$

$AB = a$, $AE = x$, $BE = a - x$,

$$\frac{xy}{2} = \frac{(a-x)(b-y)}{2}$$

$$\cancel{xy} = ab - bx - ay + \cancel{xy}$$

$$ab - bx - ay = 0$$



2) $x(b-y) = y(a-x)$

$xb - xy = ya - xy$

$xb = ya$

1) $ab - \cancel{bx} - ay = 0 = ya - \cancel{xb}$

$ab - 2ay = 0$

$a(b - 2y) = 0$

$a \neq 0 \Rightarrow b - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{2}$

2) $ab - bx - \cancel{ay} = 0 = bx - \cancel{ay}$

$ab - 2bx = 0$

$b(a - 2x) = 0$

$x = \frac{a}{2}$

Ответ: 1:1

Чтобы $AE = EB$, $AF = FC$, надо чтобы $AB = AC$, т. е. соотн. катетов $= 1:1$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

070 08 МК

шифр

← **Не заполнять**

Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Боков

ИМЯ Адам

ОТЧЕСТВО Исрапилович

Дата рождения 05.07.2002 **Класс:** 8

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Боков

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

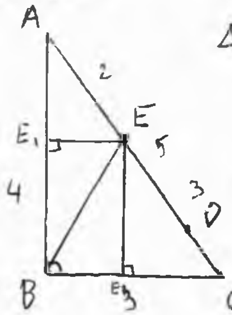
Задача №3. Сумма масс приборов, не являющихся ни самыми тяжёлыми, ни самыми лёгкими: 120кг - 41кг - 31кг = 48 кг.
Разница в сумме масс трёх самых легких приборов и трёх самых тяжёлых всего 10 кг. Чтобы в этих суммах приборы были действительно наибольшие/наименьшие по массе, нужно, чтобы среди них масса приборов не сильно различалась. При большом различии массы бы сильно варьировались, а т.к. разница всего 10кг - самые лёгкие могли бы стать самыми тяжёлыми.
Самые приблизительно равные целые массы (недробные):
9+10+12 = 31 (наим.), 12+13+16 = 41 (наиб.). Как видим, один из наим. по массе приборов получился так же и одним из наиб. по массе, чего быть не может потому что а) все массы различны (по усл.); б) есть еще 48 кг ни наим., ни наиб., и им пришлось бы быть либо равными по массе (быть не может), либо потеряться.
Из этого исходит, что массы имели дробную часть. Разделим массу трёх наиб. и массу трёх наим. примерно на равные по массе приборы:
10+10,4+10,6 = 31 (наим.), 13+13,5+14,5 = 41 (наиб.). Оставшиеся приборы, общ. масса которых 48 кг, нужно заполнить числами, примерно большими 11 и меньшими 13.
Сколько их? Если три или меньше, то тогда массы приборов стали бы слишком велики, не входили бы в число наиб, противоречие. Если было бы в кол-ве 5 или больше, то массы были бы слишком малы, но не входили бы в число наим., противоречие. Подходящее число - 4, 48 кг можно разбить на 4 массы, примерно большие 11 и меньшие 13. Пример всех масс:
10кг + 10,4кг + 10,6кг + 11кг + 12кг + 12,4кг + 12,6кг + 13кг + 13,5кг + 14,5кг = 120кг.
Примеров может быть больше, но всего приборов всегда 10, ведь иначе бы возникало противоречие.

Ответ: 10 приборов.

±

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №4. Построим треугольник, подобный покосу братьев.



$\triangle ABC$. $AB=4$, $BC=3$. $\triangle ABC \sim$ ~~…~~ покосу братьев.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (теорема Пифагора), $AC^2 = 16+9=25$, $\Rightarrow AC=5$.

Стороны относятся как 3:4:5. Предположим, что при делении братья из B идут со скоростью 4/у.е. времени. Тогда, когда тот, кто шёл по AB доберётся до A, тот, кто шёл до C эту точку уже преодолеет и окажется в D, $DC = \frac{1}{5} AC$ (условно они оба прошли 4 части). Тогда через $\frac{1}{2}$ у.е. времени они встретятся в E, за это время они пройдут 2 части, $\Rightarrow \frac{EC}{AE} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$. Соединим E с B и получим части, получившиеся при делёжке - $\triangle ABE$ и $\triangle BEC$. Проведём высоты - EE_1 к AB, EE_2 к BC.

$S_\triangle = ah\frac{1}{2}$. $S_{ABE} = AB \cdot EE_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} EE_1$. $S_{EBC} = BC \cdot EE_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} EE_2$.

I) Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle AEE_1$. $\triangle ABC \sim \triangle AEE_1$ (1 призн. подобия - $\angle A$ общ., $\angle B = \angle E_1 = 90°$), $\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AE_1}{AB} = \frac{E_1E}{BC} = k$. Т.к. $AE = 2$ усл. частей (см. выше), то $k = \frac{2}{5}$. $\Rightarrow \frac{E_1E}{BC} = \frac{2}{5}$. т.к. $BC = 3$, то $\frac{E_1E}{3} = \frac{2}{5}$, $5E_1E = 6$, $E_1E = \frac{6}{5} = 1{,}2$. $S_{ABE} = 1{,}2 \cdot \frac{4}{2} = 2{,}4$.

II) Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle$ ~~EBC~~ EE_2C. $\triangle ABC \sim \triangle EE_2C$ (1 призн. подобия - $\angle C$ общ., $\angle E_2 = \angle B = 90°$), $\Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{E_2C}{BC} = \frac{EE_2}{AB} = k$. Т.к. $EC = 3$ усл. частей (см. выше), то $k = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{EE_2}{AB} = \frac{3}{5} = \frac{EE_2}{4}$, $\Rightarrow 5EE_2 = 12$, $EE_2 = 2{,}4$. $S_{EBC} = \frac{3}{2} \cdot 2{,}4 = 3{,}6$.

$S_{ABE} = 2{,}4$, $S_{EBC} = 3{,}6$. $S_{ABE} < S_{EBC}$, поэтому

а) площади частей не равны.

б) чтобы площади равнялись, нужно, чтобы $ah = a_1h_1$ (a, a_1 - катеты, h, h_1 - высоты, которыми, к примеру, являются EE_1 и EE_2). Первое, что подходит - равнобедренный прямоугольный треугольник - братья встретятся в такой E, что $AE = EC$, $h_1 = h$.

(+)

Задача №5. Если в 14 ч резервуар заполнен на $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$, в 12 ч - на $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, то с заполняющим и откачивающим насосом вместе бассейн заполняется на $\frac{1}{6}$ в 2 ч. ⇒ ⇒ в 10 ч он был заполнен на $\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

То есть, если откачивающий насос не откачивает вообще, то понадобилось бы ровно 4 ч на полное заполнение $\frac{1}{3}$ части: значит, начиналось бы это дело в 6 ч. Но т.к. откач. насос всё же работает, то даже при самом слабом откачивании работу надо начинать позже 6 ч. Т.к. мы ищем самое раннее время вкл., то пусть будет 6:01, или любое время, максимально приближённое к 6.00.

P.S. сила откачивания < сила наполнения.

Ответ: позже 6 ч, но максимально рано.

+

Задача №2:

а) $A^2=(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$; $\Rightarrow B_2=A^2-2$.

$A^3=(x^2+2+\frac{1}{x^2})(x+\frac{1}{x})=x^3+x+2x+2\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}=x^3+\frac{1}{x^3}+3x+3\cdot\frac{1}{x}$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow B_3=A^3-3A$

$A^4=(x^2+2+\frac{1}{x^2})(x^2+2+\frac{1}{x^2})=x^4+2x^2+1+2x^2+4+2\cdot\frac{1}{x^2}+1+2\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}=$

$=x^4+\frac{1}{x^4}+6+4x^2+4\cdot\frac{1}{x^2}$, $\Rightarrow B_4=A^4-4A^2-14$

±

$A^8=(x^4+\frac{1}{x^4}+6+4x^2+4\cdot\frac{1}{x^2})(x^4+\frac{1}{x^4}+6+4x^2+4\cdot\frac{1}{x^2})$, и это очень длинное уравнение, поэтому предположение: $B_8=A^8-4A^4-16A^2-84$.

б) $A^2-2=A^4-4A^2-14$, или $A^4=3A+12$.

При $A^4=3A+12$, также это будет равно и B_8.

Задача №1:
$$\begin{cases}1+x+y=xy\\ 2+y+z=yz\\ 5+z+x=zx\end{cases}$$

$8+2x+2y+2z=xy+yz+zx$

$$\begin{cases}x=xy-y-1=zx-z-5;\\ y=yz-z-2=xy-x-1;\\ z=zx-x-5=yz-y-2.\end{cases}$$

где решение

∓

Ответ: $x=3$, $y=2$, $z=4$. это одно из решений

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ	ГФ 25-58	← **Не заполнять** **Заполняется ответственным работником**
Место проведения	шифр	

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Борисов

ИМЯ Сергей

ОТЧЕСТВО Александрович

Дата рождения 15.02.2001 **Класс:** 10

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ГФ 25-58

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

тек. мес-у x
след. мес-у. $\frac{1}{1-x}$

м.б. запас в два ≠ мес-ца равен-?
если да, то чему он равен-?

Решение: 1) представим следующие месяца через предыдущие

$$x;\ \frac{1}{1-x};\ \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)};\ \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)}\right)}$$

2) упростим:

$$x;\ \frac{1}{1-x};$$

$$3^{й}\text{ мес-у}: \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{(1-x)-1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$4^{й}\text{ мес-у}: \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

⇓

посл-ть: $x;\ \frac{1}{1-x};\ \frac{x-1}{x};\ x;\ \frac{1}{1-x};\ \ldots$

+

⇓

Ответ: Может быть, запас в каждом следующем через 2 месяца месяце и он соотв = $\left[\begin{array}{l} x; \\ \frac{1}{1-x}; \\ \frac{x-1}{x}; \end{array}\right.$

№3

Найти все решения:

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0$$

~~Это можно представить как посл-ть (геометр.) с $b_0=1$; $q=\frac{-1(x-n+1)}{n}$ $\left(1\cdot\frac{-1(x-1+1)}{1}=-\frac{x}{1!};\ и\ т.д\right)$~~

~~⇓~~

~~Это можно записать как сумму г.п, с двумя возможными решениями, либо $n=0$~~

Продолжение
(Решение на листе 2)

№3 (продолжение)

в (исходном) данном уравнении можно заметить, что при $x=$ какому-то $k\in\mathbb{Z}, <n$

в выражении пропадают все слагаемые после $k^{го}$ номера из-за наличия множителя $\frac{\ldots(x-k)\ldots}{\ldots} = 0$, а

арифм. сумма всех предыдущих становится $=0$

$\left(x=1: \quad \underbrace{1-\frac{x}{1!}}_{1-\frac{1}{1}=0} \underbrace{+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots}_{0} = 0 \right.$ - корень)

$\left(x=2: \quad \underbrace{1-\frac{\cancel{x}}{1}+\frac{\cancel{x}(x-1)}{2!}}_{1-2+1=0} \underbrace{-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\ldots}_{0} = 0 \right.$ - корень)

. . . .

Σ всех чл. с $0^{го}$ по $k^{й}$ можно представить как

(например $\frac{2-2x+x(x-1)}{2}+\underbrace{\ldots}_{0} = \frac{2(1-x)-x(1-x)}{2}+\underbrace{\ldots}_{0} = \frac{(2-x)(1-x)}{2}+\underbrace{\ldots}_{0}$

⚠ и т.к $x=2$ (3 ...) то это слагаемое тоже становится равным нулю

⇓

при $\forall x\in\mathbb{Z}, <n$ ур-е верно

Ответ: $x=1,2,3,\ldots(n-1)$

$(x\in\mathbb{Z};\ x-\forall<n)$

(+)

№1

м.б прибыль удовл-ть ур-ю $12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35$

$\Downarrow$

$$\frac{12x\sqrt{x^2-1} + 12x - 35\sqrt{x^2-1} = 0}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\begin{cases} x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1;\ x>1 \\ 12x\sqrt{x^2-1} + 12x - 35\sqrt{x^2-1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 12x \\ b = \sqrt{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow a\cdot b + a - 35b = 0$$

$\Downarrow$

$a + a\cdot b - 35b = 0$

$a + (a-35)\cdot b = 0$

$(a-35)\cdot b = -a$

$b = \frac{-a}{a-35}$

$\sqrt{x^2-1} = \frac{-12x}{12x-35}$

$\Downarrow$

т.к $x>0$ (прибыль >0)

$\Downarrow$

$x < \frac{35}{12}$

$\Downarrow$

возв в ^2

$\frac{x^2-1}{1} = \frac{144x^2}{144x^2 - 840x + 1225}$

$144x^2 = (x^2-1)(144x^2 - 840x + 1225)$

$144x^2 = 144x^4 - 840x^3 + 1225x^2 - 144x^2 + 840x - 1225$

~~$144x^4 - 840x^3 + 1125x^2$~~

Ответ: не должен

т.к сист-ма не и-т реш-й ⇒ не должен

$\Uparrow$

система не имеет решений т.к корни ур-я (А) $\notin (1; \frac{35}{12})$

$\Uparrow$

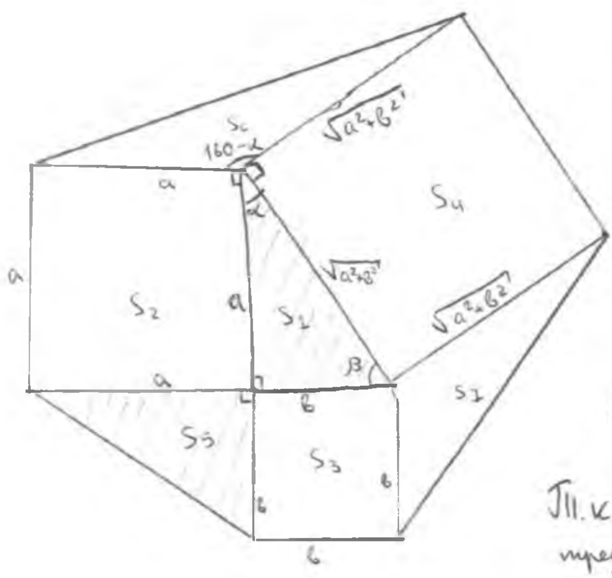
$$(A)\begin{cases} 144x^4 - 840x^3 + 937x^2 - 840x - 1225 = 0 \\ x < \frac{35}{12} \\ x > 1 \end{cases}$$

№4

Дано: дом - п/угол. Δк

катеты a, b, пост-и кв-ты на ст-х

$S_{фигура}$ -? $\frac{a}{b}$ -? $\frac{S_{нов}}{S_0}$ min



Решение:

1) Поделим участки $S_1, S_2 \dots S_7$

Вычислим площади к-е мы знаем

$S_1 = S_5 = \frac{ab}{2}$

$S_2 = a^2$

$S_3 = b^2$

$S_4 = a^2 + b^2 = S_2 + S_3$

$S_5 = S_1 = \frac{ab}{2}$

($S_1 = S_5$) т.к Δ равны (2е ст-ны + угол)

Т.к это - Пифагорова система треугольников $\Rightarrow$

для ΔS_6, две стороны $a, \sqrt{a^2+b^2}$

угол $360 - 180 - \alpha = 180 - \alpha$

$tg\,\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow$ угол $= 180 - arctg\,\frac{b}{a}$

(Я не помню Точно Т. Косинусов)

по-этому

$S_\Delta = \frac{ab \cdot \sin\alpha}{2}$

S_6 по теореме косинусов $=$

$= \frac{a \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(180 - arctg\,\frac{b}{a})}{2}$

Аналогично S_7, стороны $b, \sqrt{a^2+b^2}$

угол $= 180 - arctg\,\frac{a}{b}$

$S_7 = \frac{b \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(180 - arctg\,\frac{a}{b})}{2}$

$S_{общ} = \frac{ab}{2} + a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + \frac{ab}{2} + \frac{a\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(180 - arctg\,\frac{b}{a})}{2} + \frac{b\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(180 - arctg\,\frac{a}{b})}{2}$

Ответ:
1) $\frac{S_{нов}}{S_{стар}}$ - min когда $\frac{a}{b} = 1$
2) $S_{общ} = 2(a^2+b^2) + ab + \frac{a\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(180 - arctg\,\frac{b}{a})}{2} + \frac{b\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(180 - arctg\,\frac{a}{b})}{2}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

	КГЭУ	XY 50-89	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
№ группы	Место проведения	шифр	

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ БОРИСОВА

ИМЯ ПОЛИНА

ОТЧЕСТВО ВЛАДИМИРОВНА

Дата рождения 19.06.2003 **Класс:** 7

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ПБор-

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

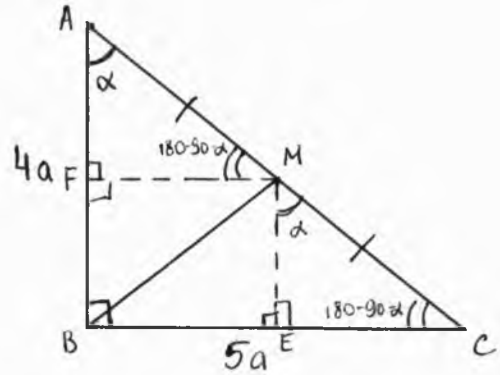
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ XV 50-39

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.



Б) Ограды, поставленные вокруг каждой части одинаковыми быть не могут, т.к.

BM - общая

AM = MC

но BC > AB

⇓

BM + MC + BC > BM + AM + AB

А) Доп. пост.: высоты ME и MF

BE ⊥ BF

BF ⊥ MF

⇓

BE ∥ MF

ME ⊥ BE

BF ⊥ MF

BE ∥ MF

⇓

ME ⊥ BF

M ∈ MF

M ∈ ME

E ∈ ME

E ∈ BE

B ∈ BF

B ∈ BE

F ∈ FM

F ∈ FB

⇒ FM = BE

FB = ME

Рассмотрим △BME и △BMF

BM - общая сторона

ME = FB

MF = BE

⇓

△BME = △BMF (по III пр.)

Если треугольники равны, то их площади тоже равны

$S_{\triangle BME} = S_{\triangle BMF}$

Рассмотрим $\triangle MEC$ и $\triangle AFM$

$\angle BAM = \alpha$

Тогда $\angle ACB = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$

сумма углов $\triangle ABC$; $\angle B$; $\angle A$

$\angle CME = 180 - \angle MEC - \angle ECM = 180 - 90 - 90 + \alpha = \alpha$

$\angle FMA = 180 - \angle AFM - \angle A = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$

1) $AM = MC$ (по усл.)
2) $\angle C = \angle AMF = 90 - \alpha$
3) $\angle A = \angle CME = \alpha$

⇓

$\triangle MEC = \triangle AFM$ (по II пр.)

⇓ $S_{\triangle MEC} = S_{\triangle AFM}$

$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMF} + S_{\triangle AFM}$

$S_{\triangle BMC} = S_{\triangle BME} + S_{\triangle MEC}$

⇓

$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMC}$

⇓

Участки братьев равны.

(+)

№3

Начало: Zч Yмин

Продолжительность: Xч Zмин

Конец: Yч Xмин

Заметим, что $Y + Z < 60$ мин., т.к. $Z \le 23$ (час начала) и $Y \le 23$ (час конца)

⇓

Переполнения в часы при сложении времени начала и продолжительности не будет

$Z + X = Y$ ⇓ $Y + Z = X$
$Z = Y - X$ $\quad Z = X - Y$ => $Y - X = X - Y$, такое возможно только при $X = Y$. => Значение разности $X - Y = 0$

Ответ: $X - Y = 0$

(+)

2. Заметим, что в последовательности каждая следующая девушка танцует с $k+1$ кавалером, где k – кол-во кавалеров у предыдущей.

Е – 7 ; О – 8 ; И – 9 ... А – x

Допустим, что Алена была в последовательности после Ирины и танцевала с $9+1=10$ кавалерами. Тогда получается что девушек всего было 4 => кавалеров $20-4=16$, но в условии задачи сказано, что Алена танцевала со всеми, а она на самом деле танцевала с 10 (не со всеми) Противоречие.

Допустим, что Алена была в последовательности после Даши

(Даша – девушка, стоящая в последов. после Ирины), тогда получается, что девушек всего 5 => кавалеров $20-5=15$, но заметим, что Алена танцевала только с $10+1=11$, а должна была со всеми. Противоречие.

Допустим, что Алена была в последовательности после Лены (Лена после Даши), тогда девушек всего 6 => кавалеров $20-6=14$, но заметим, что Алена танцевала с $11+1=12$, а должна была со всеми. Противоречие

Допустим, что Алена была в последовательности после Полины (Полина после Лены), тогда девушек всего 7 => кавалеров $20-7=13$, ~~=~~ заметим, что Алена танцевала с $12+1=13$, получается что она танцевала со всеми.

Победа!

Ответ: 13 кавалеров-танцоров было приглашено в гости.

1. Посмотрим на ~~пройденное~~ / затраченный бензин на весь путь

$31a+30a+\ldots+a=31a+15\{31a\}=16\cdot31a$

Заметим, что запланированных недель из выражения выше 16.

Ответ: 16 недель, $16\cdot31a$ бензина.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

СФ МЭИ
Место проведения

WR84-61
шифр

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Бояринова

ИМЯ Полина

ОТЧЕСТВО Юрьевна

Дата рождения 26.05.2000

Класс: 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: Заключительный

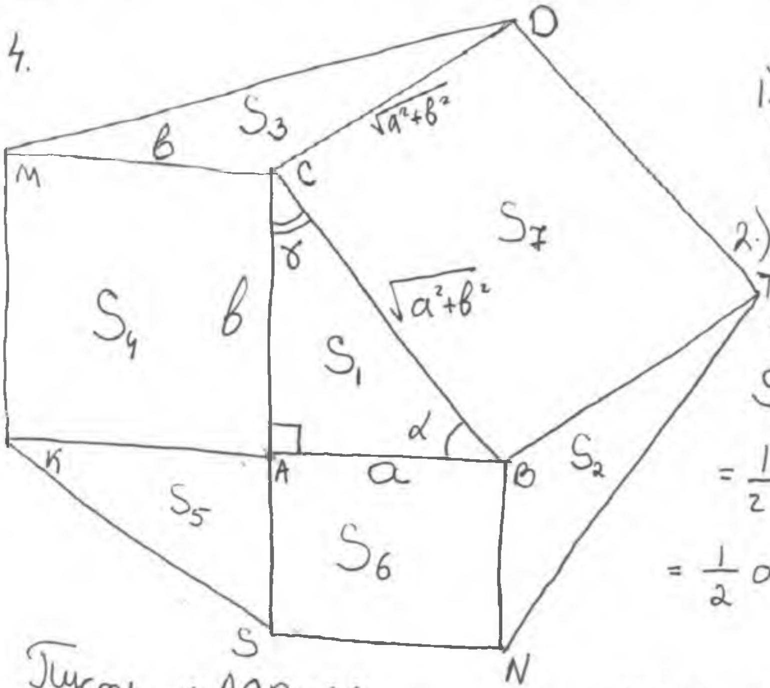
Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Бояр

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

4.



1.) $\triangle ABC$ (по т. Пифагора)

$CB = \sqrt{b^2+a^2}$; $S_1 = \frac{1}{2}ab$

2.) Пусть $\angle CBA = \alpha$, тогда $\angle TBN = \pi - \alpha$,

$S_2 = \frac{1}{2} a\sqrt{a^2+b^2}\sin(\pi-\alpha) = \frac{1}{2} a\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2} a\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}ab$

Пусть $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle MCD = \pi - \gamma$, $S_3 = \frac{1}{2} b\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\pi-\gamma)$
$= \frac{1}{2} b\sqrt{a^2+b^2}\sin\gamma = \frac{1}{2} b\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{2}ba$

$S_4 = b^2$; $S_5 = \frac{1}{2}ab$; $S_6 = a^2$; $S_7 = a^2+b^2$ +

$S_ш = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$;

$S_ш = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + b^2 + a^2 + a^2 + b^2 = 2ab + 2a^2 + 2b^2 =$
$= 2(ab + a^2 + b^2)$;

$S_{TDMKSN} = 2(ab + a^2 + b^2)$

$\frac{S_{TDMKSN}}{S_{ABC}} = \frac{2(ab+a^2+b^2)}{\frac{1}{2}ab} = 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)$

Пусть $\frac{a}{b} = y$, тогда $f(y) = y + \frac{1}{y} + 1 \to$ минимальное

X $y + \frac{1}{y} \geq 2$, при $y > 0$ $\Rightarrow f(y) \geq 2 + 1 = 3$, зн-т $f(y) \geq 3$,
наим. значение принимает при $x = 1$

$a = b$; Ответ: $S_{TDMKSN} = 2(ab + a^2 + b^2)$
$a = b$

3. $1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = 0$ ∓

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101   ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ WR84-61

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если $n=1$, то $1-\frac{x}{1}=0$; $-\frac{x}{1}=-1$; $x=1$;

если $n=2$, то $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}=0$; $1-\frac{x}{1}+\frac{x^2-x}{2}=0$

$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2-x}{2}=0$; $1-\frac{3x}{2}+\frac{x^2}{2}=0$; $2-3x+x^2=0$

$x^2-3x+2=0$; $x=1$; $x=2$ $(x-1)(x-2)=0$

$D=b^2-4ac$; $D=1$

$\begin{cases} x_1+x_2=3; \\ x_1\cdot x_2=2; \end{cases}$

если $n=3$: $1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=0$

$\frac{6-6x+3(x-1)-x(x-1)(x-2)}{6}=0$

$6-6x+3(x-1)-x(x-1)(x-2)=0$

$(x-1)(-6+3x-x(x-2))=0$

$(x-1)(3(x-2)-x(x-2))=0$

$(x-1)(x-2)(3-x)=0$; $x=1$ $x=2$; $x=3$

Заметим, что по аналогии все корни будут $1,2,3\ldots n$

Ответ: $\{1;2;3;\ldots;n\}$

(2.) текущий месяц $=x\,м^3$ и $x>0$

следующий месяц $=\frac{1}{1-x}\,м^3$ и $\frac{1}{1-x}>0 \Rightarrow x\in(0;1)$

$\frac{1}{1-x}>1$ - неверно

Ответ: нет, по этой формуле запас газа не может меняться

(5.)

Найдем наименьшую сторону n:

$n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n+1}{2}n$

по 1 ед   по 2 ед   по 3 ед.

Для p и m аналогично

$\frac{p+1}{2}p$ и $\frac{m+1}{2}m$

Зн-т при трёх: $\frac{n+1}{2}n\ \frac{p+1}{2}p\ \frac{m+1}{2}m=1$

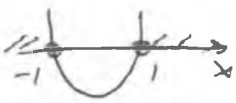
Ответ: 1

1.

$$12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35$$

ОДЗ: $x^2-1>0$

$(x-1)(x+1)>0$



$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, но $x>0$ -прибыль

$x=2$: $12x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=35$; $24\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>35$

$x=3$: $36\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)>35$

$x\in(1;2)$

$$12+\frac{12}{\sqrt{y^2-1}}=\frac{35}{y}$$

Пусть $y=\frac{5}{3}$, тогда $12+\frac{12}{\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2-1}}=\frac{35}{\frac{5}{3}}$

$12+\frac{12}{\frac{4}{3}}=21$ $\frac{36}{4}=9$ - правильно, зн-т $x=\frac{5}{3}\in(1;2)$

Ответ: он должен поверить этому уравнению

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ Москва

Место проведения

ZP 10-57

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Брошко

ИМЯ Ольга

ОТЧЕСТВО Олеговна

Дата рождения 04.06.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Брош

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\boxed{N1}$ $S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ)$

$S = \lg 10^4 + \lg \operatorname{tg} 2017^\circ + \lg 10^5 + \lg \operatorname{tg} 2018^\circ + \ldots + \lg 10^{20} + \lg \operatorname{tg} 2033^\circ$

$S = 4\lg 10 + 5\lg 10 + \ldots + 20\lg 10 + \lg \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 11 + 37^\circ) + \lg \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 11 + 38^\circ)$

$+ \ldots + \lg \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 11 + 53^\circ)$

$S = 4 + 5 + \ldots + 20 + \lg \operatorname{tg} 37^\circ + \lg \operatorname{tg} 38^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 53^\circ$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

$S = \frac{4+20}{2} \cdot 17 + \lg \operatorname{tg} 37^\circ + \lg \operatorname{tg} 38^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 45^\circ + \lg \operatorname{tg} 46^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 53^\circ$

$S = 204 + \lg \operatorname{tg} 37^\circ + \lg \operatorname{ctg} 37^\circ + \lg \operatorname{tg} 38^\circ + \lg \operatorname{ctg} 38^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 45^\circ$

$S = 204 + \lg(\operatorname{tg} 37^\circ \cdot \operatorname{ctg} 37^\circ) + \lg(\operatorname{tg} 38^\circ \cdot \operatorname{ctg} 38^\circ) + \ldots + \lg \operatorname{tg} 45^\circ$

$S = 204 + \lg 1 + \lg 1 + \ldots + \lg 1$

$S = 204$

Ответ: $S = 204$ +

$\boxed{N4}$ $a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$

$a + b + c > 0$

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ ← Нер-во Коши

$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$a + b + c \leq 3 \cdot 6abc$

$\sqrt[3]{(a+b+c)^2} \leq \sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{abc}$

$\sqrt[3]{(a+b+c)^2} \leq \sqrt[3]{18} \cdot \frac{a+b+c}{3}$

$(a+b+c)^2 \leq \frac{18(a+b+c)^2}{27}$

$1 \leq \frac{2(a+b+c)}{3}$

$a + b + c \geq \frac{3}{2}$

Ответ: $\frac{3}{2}$ наименьшее значение выражения $a+b+c$

+

$\boxed{N5}$ $n>1$

$\sin nx = \sin x \quad , [0;\pi]$

Решим уравнение

$\sin nx = \sin x$

$\sin nx - \sin x = 0$

$2\sin\frac{nx-x}{2}\cos\frac{nx+x}{2}=0$

$\sin\frac{n-1}{2}x=0$

$\frac{n-1}{2}x=\pi k,\ k\in Z$

$x=\frac{2\pi k}{n-1},\ k\in Z$

Сделаем отбор корней:

$0\le\frac{2\pi k}{n-1}\le\pi$

$0\le\frac{2k}{n-1}\le 1$

$0\le 2k\le n-1$

$0\le k\le\frac{n-1}{2}$

$\cos\frac{n+1}{2}x=0$

$\frac{n+1}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ m\in Z$

$x=\frac{\pi}{n+1}+\frac{2\pi m}{n+1}$

$x=\frac{\pi+2\pi m}{n+1},\ m\in Z$

$0\le\frac{\pi+2\pi m}{n+1}\le\pi$

$0\le\pi+2\pi m\le\pi(n+1)$

$0\le 1+2m\le n+1$

$-1\le 2m\le n$

$-\frac{1}{2}\le m\le\frac{n}{2}$

При $n=2$, $S(n)=3$

$n=3$, $S(n)=4$

$n=4$, $S(n)=5$

$n=5$, $S(n)=6$

Сл-но, $S(n)=n+1$

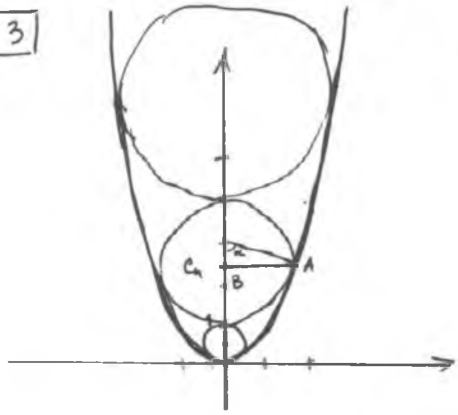
$S(n)$ принимает значение 2017 в $n=2016$, только 1 раз

Ответ: $S(n)=n+1$;

1 раз

4

|N3|



Касательная к окружности перпендикулярна радиусу.

C_n – центр окружности

r радиус

$r_1 = \frac{1}{2}$ $n = 1, 2, 3 \dots$

$2(r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1})$

$C_n = (0; r_n + O_1)$ $B(x; x^2)$

$A(x; x^2)$ $A \in$ параболе и окружности

$x^2 + (r_n - O_1)^2 = r_n^2$

$tg\alpha = (x^2)' = 2x$, но $\angle AC_nB = \alpha$

$tg\alpha = \frac{AB}{BC_n} = \frac{x}{r_n + O_1 - x^2}$, тогда

$r_n + O_1 + x^2 = \frac{1}{2}$

$r_n = n - \frac{1}{2}$

$r_{2017} = 2017 - \frac{1}{2}$

+

Ответ: 2016,5 – r окружности S_{2017}

|N2|

x $м^3$ – запас в текущ. месяце

$c - 2x$ $м^3$ – запас в след. месяце

$c - 2(c - 2x) = -c + 4x = -c + 2^2x$

$c - 2(-c + 4x) = 3c - 8x = 3c - 2^3x$

$c - 2(3c - 8x) = -5c + 16x = -5c + 2^4x$

$c - 2(-5c + 16x) = 11c - 32x = 11c - 2^5x$

$c - 2(11c - 32x) = -21c + 64x = -21c - 2^6x$

$c - 2(-21c + 64x) = 43c + 128x = 43c + 2^7x$

Ответ: не может.

−

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ	WD 87-89
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ ВАЛЬКОВ

ИМЯ МИХАИЛ

ОТЧЕСТВО ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 25.12.2000 **Класс:** 10

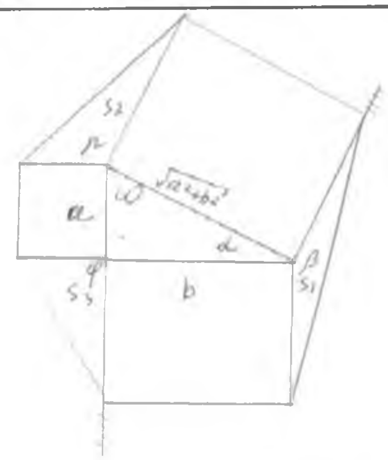
Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№4



Гипотенуза треугольника исходного равна $\sqrt{a^2+b^2}$.

Тогда посмотрим на треугольник с площадью S_1, две его стороны равны b и $\sqrt{a^2+b^2}$ соответственно. Пусть угол между ними равен β, тогда

$\alpha+\beta+90^\circ+90^\circ=360^\circ$

$\alpha+\beta=180^\circ$

$\sin\beta=\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$S_1=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot b\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,b\,\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{2}ab$

Аналогично для S_2: $S_2=\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{a^2+b^2}\sin\mu=$

$=\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+b^2}\sin\omega=$

$=\frac{1}{2}a\sqrt{a^2+b^2}\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=$

$=\frac{1}{2}ab$

для S_3: $\angle\varphi=90^\circ$

$S_3=\frac{1}{2}ab$

$S_{искол.}=a^2+b^2+(\sqrt{a^2+b^2})^2+\frac{1}{2}ab\cdot 4=a^2+b^2+a^2+b^2+2ab=$

$=\cancel{\dfrac{(a+b)^2+a^2+b^2}{\frac{1}{2}}}\quad=(a+b)^2+a^2+b^2$

$\dfrac{S_{искол.}}{S_{исх.}}=\dfrac{(a+b)^2+a^2+b^2}{\frac{1}{2}ab}=\dfrac{2(a+b)^2}{ab}+\dfrac{2(a^2+b^2)}{ab}$

$\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$, где равенство достигается при $a=b$

$\sqrt{ab}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, где равенство достигается при $a=b$

след-но: $\dfrac{2(a+b)^2}{ab}+\dfrac{2(a^2+b^2)}{ab}$ будет минимальным при минимальных значениях слагаемых, т.е. при $\sqrt{ab}=\dfrac{(a+b)}{2}$ и $\sqrt{ab}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, т.е. $a=b$

$\Updownarrow$

$ab=\dfrac{(a+b)^2}{4}\quad ab=\dfrac{a^2+b^2}{2}$, т.к. $a>0$, $b>0$.

Ответ: $a=b$, $(a+b)^2+a^2+b^2$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ WD 87-89

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Посмотрим на запасы газа в третий месяц.

I – x $\qquad x > 0$

II – $\frac{1}{1-x}$ $\qquad \frac{1}{1-x} > 0 \quad 1-x > 0 \quad x < 1$

III – $\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-x} > 1 \\ x < 1 \end{cases}$$

Тогда $\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} < 0$, т.к. $1-\frac{1}{1-x} < 0$.

Но запасы газа должны быть положительны, а значит они могут меняться по такому закону только два месяца, т.е. ~~помотр~~ первые два месяца.

$$x = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{x(1-x)-1}{1-x} = 0$$

$$\begin{cases} x - x^2 - 1 = 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \qquad D < 0 \qquad x \in \varnothing$$

след-но такое невозможно

Ответ: не может.

№3.

Докажем, что $x=n$ является корнем данного уравнения, т.к. ~~[illegible]~~ в этом случае все числа от 1 до n являются корнями уравнения, т.к. при $x = n-1$ (дальше)

$$\frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = 0$$ и задача

сводится к доказательству этого факта опять. Воспользуемся метод математической индукции:

1. При $x=1$

$1-1=0$

$0=0$ - верно

2. При $x=n=k$

$$1-k+\frac{k(k-1)}{2}+\dots+\frac{(-1)^k k(k-1)\dots(k-k+1)}{k!} = 0 \text{ - верно}$$

3. Докажем при $x=n=k+1$

$1-k+\frac{k(k-1)}{2}+\dots+$

$$1-(k+1)+\frac{(k+1)k}{2}+\dots+\frac{(-1)^{k}(k+1)k\dots2}{k!}+\frac{(-1)^{k+1}(k+1)k\dots2\cdot1}{(k+1)!}=0$$

$$-k+\frac{k(k+1)}{2}+\dots+\frac{(-1)^k(k+1)}{1}+(-1)^{k+1}1=0$$

$$-k+\frac{k(k+1)}{2}+\dots+(-1)^k(k+1-1)=0$$

$$-k+\frac{k(k+1)}{2}+\dots(-1)^k k=0$$

$$-k+\frac{k(k+1)}{2}+\dots+(-1)^k k = 1-k+\frac{k(k-1)}{2}+\dots+(-1)^k$$

$$\frac{k(k+1-k+1)}{2}+\dots+(-1)^k k-1+(-1)^{k+1}=0$$

$$k+\dots+(-1)^k k-1+(-1)^{k+1}=0 \text{ - верно}$$

след-но утверждение верно при $x=n=1$, k и $k+1$, а значит верно при $x=n\in N$

Ответ: 1, 2 … n

+

№1.

$12x\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=35 \iff 12x+\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}=35 \quad (1)$

$x=\frac{35\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x^2-1}+1)12}$

Оценим x и x^2-1

$x^2 > x^2-1$

$x > \sqrt{x^2-1}$, т.к. $x>0$.

след-но при увеличении значение x значение $\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}$ также увеличивается.

При $x=2$: $24+\frac{24}{\sqrt{3}}>35$

Значит $x<2$.

$\cancel{x^2-1}>0$ $\quad x^2-1>0$ по ОДЗ

$x>1$, т.к. $x>0$

$1<x<2$

$\cancel{\frac{35\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x^2-1}+1)12}}<2$

$0<\sqrt{x^2-1}<\sqrt{3}$

$0<35\sqrt{x^2-1}<35\sqrt{3}$

$1<\sqrt{x^2-1}+1<\sqrt{3}+1$

$12<(\sqrt{x^2-1}+1)12<\sqrt{3}12+12$

$0<\frac{35\sqrt{x^2-1}}{(\sqrt{x^2-1}+1)12}<2$

$0<x<2$ – верно

след-но ~~выражение~~ уравнение (1) имеет решение

Ответ: далтек.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

ГФ 25-67

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ ВАРФОЛОМЕЕВ

ИМЯ АЛЕКСАНДР

ОТЧЕСТВО СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 17.10.2000

Класс: 10

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Варф

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

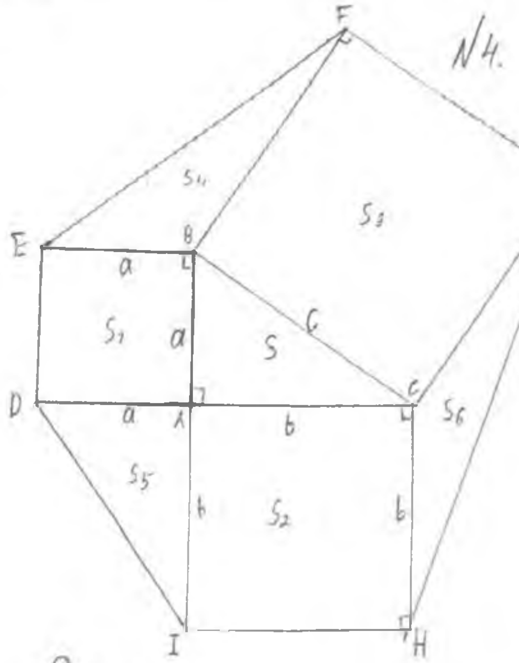
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ГФ 25-67

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



Дано:

a, b

Найти: S_{DEFGHI}, $\frac{b}{a}$

Решение:

1. $S_{\text{с-уг}} = S + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6$
2. $S = ab/2$
3. $\angle DAI = 90° = \angle BAC \Rightarrow S_5 = ab/2$
4. $c = BC = \sqrt{a^2+b^2}$
5. $S_1 = a^2$, $S_2 = b^2$

   $S_3 = c^2 = a^2 + b^2$
6. $S_4 = \frac{1}{2} ac \sin\angle \cancel{ABE}BF$

   $\sin\angle EBF = \sin\angle ABC$ $(\angle EBF + \angle ABC = 360° - 90° \cdot 2 = 180°)$ $\Big\}$ $S_4 = \frac{1}{2} ac \sin\angle ABC = \frac{1}{2} ac \cdot \frac{b}{c} = \frac{1}{2} ab$
7. $S_6 = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\angle HCG$

   $\sin\angle HCG = \sin\angle ACB$ $(\angle HCG + \angle ACB = 180°)$ $\Big\}$ $S_6 = \frac{1}{2} bc \sin\angle ACB = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{a}{c} = \frac{1}{2} ab$
8. $S_{\text{с-уг}} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + a^2 + b^2 + (a^2+b^2) = 2(a^2+ab+b^2)$
9. $b = ka$, где k - отношение катетов b и a ($b : a = k$)
10. $\frac{S_{DEFGHI}}{S} = \frac{2(a^2 + ka^2 + k^2a^2)}{ka^2} = \frac{2(k^2+k+1)}{k} = 2\left(k + 1 + \frac{1}{k}\right) = y$

$y \Rightarrow \min$

$y' = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{-1}{k^2} = 2\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

$y \Rightarrow \min \Rightarrow y' = 0$ $\Big\}$ $0 = 2\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

$1 = \frac{1}{k^2}$

$k^2 = 1$

$k = \pm 1$

$k = \frac{b}{a}$; $a, b > 0 \Rightarrow k > 0$ $\Big\}$ $k = 1$

Ответ: $S_{DEFGHI} = 2(a^2+ab+b^2)$, $a:b=1:1$.

№3.

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0$$

$$x(x-1)\ldots(x-n+1)=\frac{x!}{(x-n)!}$$

Следовательно уравнение можно записать в виде:

$$\frac{x!}{0!(x-0)!}-\frac{x!}{1!(x-1)!}+\ldots+\frac{(-1)^n x!}{n!(x-n)!}=0$$

Однако ~~оно~~ замена верна, ~~лишь~~ только если $x \geq n$. Рассмотрим 2 случая:

I. $x=n$

тогда $\sum\limits_{n=0}^{x}(C_x^n\cdot(-1)^n)=0=(1-1)^x=0^x$

Данное условие выполняется для любого x, т.е. n - всегда будет корнем уравнения.

II. $x>n$

$$\sum_{k=0}^{n}(C_x^k\cdot(-1)^k)=0=\sum_{k=n+1}^{x}(C_x^k\cdot(-1)^k)$$

Данное равенство не выполняется ни при одном x.

Если $x<n$, то уравнение из условия можно записать как:

$$\frac{x!}{0!(x-0)!}-\frac{x!}{1!(x-1)!}+\ldots+\frac{(-1)^x x!}{x!(x-x)!}+\frac{(-1)^{x+1}x!\cdot 0}{(x+1)!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot x!\cdot 0\cdot(-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0$$

Разбиваем его на 2 части:

$$\left(\frac{x!}{0!(x-0)!}-\frac{x!}{1!(x-1)!}+\ldots+\frac{(-1)^x x!}{x!}\right)+\left(\frac{(-1)^{x+1}\cdot 0}{x+1!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot 0}{n!}\right)=0$$

В первом случае было доказано, что первая часть полученного уравнения равна 0. Вторая же часть очевидно равна нулю, т.к. во всех числителях присутствует сомножитель, равный нулю.

Следовательно, любое положительное целое x до n является корнем уравнения.

Если $x=0$, то урав-е можно записать, как $1=0$, что неверно.

Если $x<0$, то ур-е записывается как:

$$1+\frac{(-1)^1\cdot(-1)\cdot|x|}{1!}+\frac{(-1)^2\cdot(-1)^2\cdot|x|(|x|+1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n\cdot(-1)^n\cdot|x|(|x|+1)\ldots(|x|+n-1)}{n!}=0$$

Все слагаемые в данной сумме больше или равны нулю. Таким образом, левая часть уравнения всегда больше или равна единице. Равенство никогда не выполняется.

Ответ: все натуральные числа от 1 до n.

(+)

№2.

Допустим в первом месяце мы имеем x м³. Тогда во втором месяце запас газа будет равен $\frac{1}{1-x}$ м³, а в третьем месяце он будет равен $\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$ Т.к. запас газа - число положительное, то

$$\begin{cases} \frac{1}{1-x} > 0 \\ \frac{x-1}{x} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1 \\ x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ x > 0 \end{cases}$$

(+)

Данная система не имеет решений. Следовательно, запас газа будет положительным только 2 месяца.

Если сравнивать запасы газа двух последующих друг за другом месяцев, то получим ур-е: $x = \frac{1}{1-x}$; $x^2 - x + 1$. Дискриминант ур-я меньше нуля ($D = 1-4 = -3$), следовательно требуемого запаса газа не существует.

Ответ: запасы газа не могут оказаться одинаковыми.

№1.

$12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35$ ОДЗ: $x^2 \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Если взять $x = \sqrt{2}$, то получим, что $y = 12\sqrt{2} + \frac{12\sqrt{2}}{1} = 24\sqrt{2}$; $24\sqrt{2} < 35$ $(1152 < 1225)$

Если взять $x = 2$, то получим, $y = 24 + \frac{24}{\sqrt{3}} = 24 + 8\sqrt{3}$;

$24 + 8\sqrt{3} > 35$ $(8\sqrt{3} > 11;\ 64 \cdot 3 > 121)$

Следовательно, между числом $\sqrt{2}$ и числом 2 существует число, удовлетворяющее уравнению (на интервале $(\sqrt{2}; 2)$ функция непрерывна).

Ответ: да.

(−)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

GЯ 97-11

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ВАСИЛЬЕВА

ИМЯ АННА

ОТЧЕСТВО ОЛЕГОВНА

Дата рождения 26.10.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Вас

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GЯ 97-11

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.

$tg 2017° = tg 37°$

$tg 2018° = tg 38°$

$\dots$

$tg 2033° = tg 53°$

$S = lg(10^4 tg 2017°) + lg(10^5 \cdot tg 2018°) + \ldots + lg(10^{20} tg 2033°) =$

$= 4+5+\ldots 20 + lg\, tg 37° + lg\, tg 38° + \ldots + lg\, tg 53° =$

$= 204 + lg(tg 37° \cdot tg 38° \cdot \ldots \cdot tg 53°)$

$tg 53° = tg(90° - 37°) = ctg 37°$

$tg 52° = tg(90° - 38°) = ctg 38°$

$tg 46° = tg(90° - 46°) = ctg 46°$

$S = 204 + lg(tg 37° \cdot ctg 37° \cdot tg 38° \cdot ctg 38° \ldots tg 44° \cdot ctg 44° \cdot tg 45°) =$

$= 204 + lg(1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1) = 204 + lg 1 = 204 + 0 = 204$

Ответ: $S = 204$ +

2. (начало)

Рассмотрим, ~~могут~~ может ли запас газа оказаться равным два месяца подряд.

Пусть в ~~первом~~ одном месяце было x_0 газа, тогда в следующем газа будет $(c - 2x_0)$ газа.

$\cancel{c - 2x_0 = x_0}$ $\quad x_0 \geq 0$, т.к. запас газа не может быть

$\cancel{x_0 = \frac{c}{3}}$ $\quad$ отрицательным.

Аналогично, $c - 2x_0 \geq 0$

$c \geq 2x_0 \geq 0$

Т.е. c и x_0 неотрицательны. Посмотрим будет ли выполняться это условие, если в этих месяцах запас газа будет равным.

$c - 2x_0 = x_0$

$x_0 = \frac{c}{3} \geq \frac{0}{3} = 0$

x_0 получилось неотрицательным, т.е. такое возможно.

Т.е. запас газа может оказаться ~~равным в~~ одинаковым в какие-то 2 различных месяца, при этом запас равен $\frac{c}{3}$.

2. (продолжение)
Если в первом месяце запас газа будет ~~сост~~ равен $\frac{c}{3}$, то запас газа будет равен во всех месяцах.

1-ый месяц $\frac{c}{3}$

2-ой месяц: $c - 2\cdot\frac{c}{3} = \frac{c}{3}$

3-ий месяц: $c - 2\cdot\frac{c}{3} = \frac{c}{3}$

и т.д.

(+)

Ответ: ~~запас газа~~ может; $\frac{c}{3}$

5. (начало)

$n \in N$, $n > 1$

$S(n)$ – количество решений уравнения $\sin nx = \sin x$, $x \in [0;\pi]$

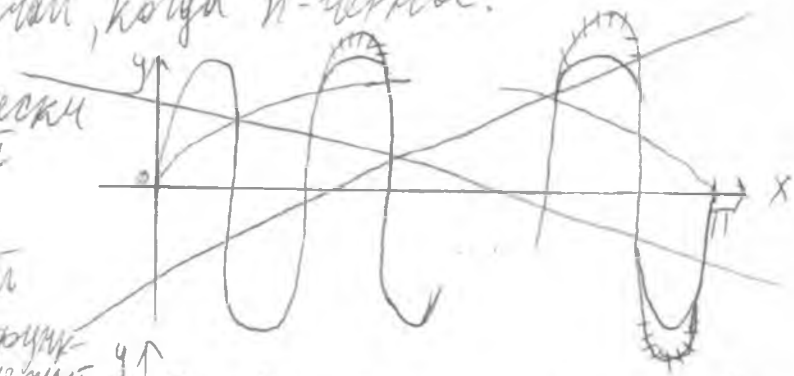
Пусть $f(x) = \sin nx$, $g(x) = \sin x$. $-1 \le f(x) \le 1$, $-1 \le g(x) \le 1$.

$f(\pi) = \sin n\pi = 0$
$f(0) = \sin n0 = \sin 0 = 0$
$g(\pi) = \sin \pi = 0$
$g(0) = \sin 0 = 0$
$\Rightarrow f(\pi) = g(\pi)$, $f(0) = g(0)$.
т.е. $S(n) \ge 2$

(+)

1) Рассмотрим случай, когда n – четное.

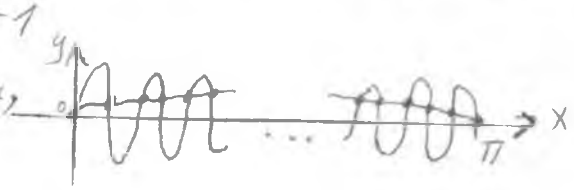
Построим схематически графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$.



Заметим, что каждый бугорок ~~ф-ц~~ графика функции $y = f(x)$, который лежит выше оси Ox, пересекает график функции $g(x)$ в 2 точках. ~~Графики~~ А которые лежат ниже оси Ox, не пересекают ~~в~~ график функции $y = g(x)$. Графики функций пересекаются еще в одной точке – $x = \pi$.

Тогда $S(n) = \frac{n}{2}\cdot 2 + 1 = n + 1$

2) n – нечетное
Аналогично с прошлым случаем,



$S(n) = \frac{n+1}{2}\cdot 2 = n + 1$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. (продолжение)

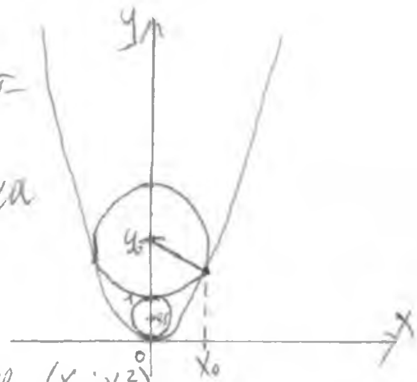
Получаем, что в обоих случаях $S(n) = n+1$.

$S(n)$ будет принимать значение 2017 только 1 раз, т.к. уравнение $n+1=2017$ имеет только 1 решение ($n=2016$).

Ответ: $S(n)=n+1$; $S(n)$ принимает значение 2017 только 1 раз.

3. (начало)

$R_1 = \frac{1}{2}$ - радиус S_1



Т.к. график функции $y=x^2$ симметричен относительно оси Oy, центры всех окружностей будут лежать на оси Oy.

Пусть центр ~~второй~~ окружности S_2 - точка $(0; y_0)$, S_2 касается $y=x^2$ в точке $(x_0; x_0^2)$.

$R_2 = y_0 - 1 = \sqrt{(y_0 - x_0^2)^2 + x_0^2}$ - радиус S_2

$y_0^2 - 2y_0 + 1 = y_0^2 - 2x_0^2 y_0 + x_0^4 + x_0^2$

$x_0^4 + (1-2y_0)x_0^2 + 2y_0 - 1 = 0$

$t = x_0^2$

$t^2 + (1-2y_0)t + 2y_0 - 1 = 0$

$D = 1 - 4y + 4y_0^2 - 8y_0 + 4 = 4y_0^2 - 12y_0 + 5 = 0$ (т.к. касаются, а не пересекаются)

$4y_0^2 - 12y_0 + 5 = 0$

$D = 144 - 80 = 64$

$y_0 = \frac{12-8}{8} = \frac{1}{2} < 1$

$y_0 = \frac{12+8}{8} = 2,5$

Т.е. $R_2 = 2,5 - 1 = 1,5$

Пусть центр окружности S_3 - $(0; y_1)$, S_3 касается $y=x^2$ в точке $(x_1; x_1^2)$.

$R_3 = y_1 - (1 + 1,5 \cdot 2) = \sqrt{(y_1 - x_1^2)^2 + x_1^2}$

$16 - 8y_1 = -2y_1x_1^2 + x_1^4 + x_1^2$

$x_1^4 + (1-2y_1)x_1^2 + 8y_1 - 16 = 0$

$t = x_1^2$

$t^2 + (1-2y_1)t + 8y_1 - 16 = 0$

$D = 1 - 4y_1 + 4y_1^2 - 32y_1 + 64 = 4y_1^2 - 36y_1 + 65 = 0$

$4y_1^2 - 36y_1 + 65 = 0$

$D = 1296 - 1040 = 256$

$y_1 = \frac{36-16}{8} < 4$

$y_1 = \frac{36+16}{8} = \frac{13}{2} = 6,5$

$R_3 = 6,5 - 4 = 2,5$.

3. (продолжение)

Заметим, что радиусы отличаются на 1.

Тогда радиус окружности S_{2017} будет равен $2016+0,5=2016,5$

Ответ: 2016,5

+

4.

$a>0$, $b>0$, $c>0$

$a^2+b^2+c^2=6abc$; $(a+b+c)$ будет наименьшей, если $a=b=c$

~~если a=b=c~~,

$a^2+a^2+a^2=6a\cdot a\cdot a$ (∓)

$3a^2=6a^3$

т.к. $a\neq0$, разделим обе стороны на a^2

$3=6a$

$a=\frac{1}{2}$

$a+b+c=3\cdot a=3\cdot\frac{1}{2}=1,5$

Ответ: 1,5

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

2Р 63-91

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Внуков

ИМЯ Данил

ОТЧЕСТВО Игоревич

Дата рождения 13.05.1999 **Класс:** 11

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$S = \lg(10^4 \cdot tg\, 2017°) + \lg(10^5 \cdot tg\, 2018°) + \dots \lg(10^{20} \cdot tg\, 2033°) =$

$= \lg(10^4 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \dots 10^{20} \cdot tg(11\pi + 37°) \cdot tg(11\pi + 38°) \cdot \dots \cdot tg(11\pi + 53°)) =$

$= \lg(10^{204} \cdot tg\,37 \cdot tg\,38 \cdot \dots \cdot tg\,53) = \lg(10^{204} \cdot tg\,37 \cdot tg\,38 \dots tg\,45 \cdot tg(90-44) \cdot$

$\cdot tg(90-43) \cdot \dots tg(90-37)) = \lg(10^{204} \cdot tg\,37 \cdot tg\,38 \cdot \dots tg\,45 \cdot ctg\,44 \cdot \dots ctg\,37) =$

$= \lg(10^{204} \cdot (tg\,37 \cdot ctg\,37) \cdot (tg\,38 \cdot ctg\,38) \cdot \dots \cdot tg\,45) =$

$= \lg(10^{204} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1) = \lg(10^{204}) = 204. \Rightarrow S = 204$ млн рублей

Ответ: 204 млн рублей.

+

№4.

Дано:
$a > 0$
$b > 0$
$c > 0$
$a^2+b^2+c^2 = 6abc$

Найти:
~~Найти~~ значение:
~~Реше~~ $(a+b+c.)$

+

Решение.

1. По неравенству Коши:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \\ \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \\ \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ a+c \geq 2\sqrt{ac} \end{cases}$$

$\oplus \Rightarrow a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$

Значит $a+b+c$ будет ~~наименьшим~~ при таких a, b, c, что $a+b+c = \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$

2. Так как $a>0;\ b>0;\ c>0$
$\sqrt{ab}>0, \sqrt{bc}>0; \sqrt{ac}>0$ возведу в квадрат.

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \geq ab+bc+ac+2\sqrt{ab^2c}+2\sqrt{a^2bc}+2\sqrt{abc^2}$$

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac \geq 2b\sqrt{ac}+2a\sqrt{bc}+2c\sqrt{ab}$$

$$(a^2-2a\sqrt{bc}+bc)+(b^2-2b\sqrt{ac}+ac)+(c^2-2c\sqrt{ab}+ab) \geq 0$$

$$(a-\sqrt{bc})^2+(b-\sqrt{ac})^2+(c-\sqrt{ab})^2 \geq 0$$

Сумма 3 неотриц. чисел равна 0, если каждое слагаемое равно 0 $\Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{bc} \\ b=\sqrt{ac} \\ c=\sqrt{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=bc\ (1) \\ b^2=ac\ (2) \\ c^2=ab\ (3) \end{cases}$

3. $\frac{(1)}{(2)}$: $\frac{a^2}{b^2}=\frac{b}{a}$ $\quad a^3=b^3 \Rightarrow a=b$

Аналогично $\frac{(2)}{(3)}$ $\quad \frac{b^2}{c^2}=\frac{c}{b} \Rightarrow c^3=b^3 \Rightarrow c=b$

$\Rightarrow a=b=c$

4. $a^2+b^2+c^2=6abc$
$3a^2=6a^3 \Leftrightarrow 3a^2(2a-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \text{ не удов. усл. } a>0. \\ a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{2}\ c=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Значит наименьшее значение выражения $a+b+c$ равно $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1,5$

Ответ: 1,5.

№5

$n>1$; $S(n)$ – число решений $\sin nx=\sin x$ на интервале $[0;\pi]$

$\sin nx=\sin x \Leftrightarrow \sin nx-\sin x=0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{nx-x}{2}\cos\frac{nx+x}{2}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{nx-x}{2}=0\\ \cos\frac{nx+x}{2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}nx-x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ nx+x=\pi+2\pi f,\ f\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi k}{n-1},\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi+2\pi f}{n+1},\ f\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

1) при $n=2$ $\left[\begin{array}{l}x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi f}{3};\ f\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow$ при $x\in[0;\pi]$ $x=\{0;\frac{\pi}{3};\pi\}$

Значит $S(n)=3$

2) при $n=3$ $\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi f}{2},\ f\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow$ при $x\in[0;\pi]$ $x=\{0;\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\pi\}$ F

Значит $S(n)=4$.

3) при $n=4$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi k}{3};\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi f}{5};\ f\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Rightarrow$ при $x\in[0;\pi]$ $x=\{0;\frac{\pi}{5};\frac{3\pi}{5};\frac{2\pi}{3};\pi\}$

Значит $S(n)=5$.

4) Наблюдаем зависимость $S(n)$ от n, которая будет продолжаться дальше при увеличении n. Это зависимость:

$S(n)=n+1$

Так как зависимость прямолинейная, то при каждом n существует единственное значение $S(n) \Rightarrow S(n)$ примет значение 2017 один раз при $n=2016$.

Ответ: $S(n)=n+1$; один раз.

№2

В I месяце x м³

Во II месяце $c-2x$ м³

В III месяц $c-2(c-2x)=c-2c+4x=4x-c$ м³

В IV месяце $c-2(4x-c)=3c-8x$ м³

1) Предположим, что в I и во II месяце одинаковый запас, тогда
$X = C - 2x \Leftrightarrow C = 3x$ и при $C = 3x$ запас будет постоянен
в течение месяца и равен X, так как

I x
II $C - 2x = 3x - 2x = x$
III $C - 2x = 3x - 2x = x$
IV $C - 2x = 3x - 2x = x$.

Значит это возможно, запас газа будет одинаковый в любые два месяца и равен x.

2. Пусть запас в I месяце и в III месяце равен, тогда $X = 4x - C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow C = 3x$ — сводится к (1) случаю
Пусть равен запас газа в II и III мес., тогда $C - 2x = 4x - C \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2C = 6x \Leftrightarrow C = 3x$ свод. к (1) случаю.
Пусть в I м. и IV м. запасы равны, тогда $X = 3C - 8x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3C = 9x \Leftrightarrow C = 3x$ - сводится к (1) случаю

3. Значит равенство запаса в любых двух месяцах возможно только при $C = 3x$, при иных C все запасы разные (вывод из п. 2). Следовательно существует единственный случай равенства запасов, удовлетворяющих условию, при $C = 3x$.

Ответ: возможно; запас равен $X = C/3$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ	ГФ 25-76	← **Не заполнять** **Заполняется ответственным работником**
Место проведения	шифр	

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ ВОЛКОВА

ИМЯ МАРИЯ

ОТЧЕСТВО ВЛАДИСЛАВОВНА

Дата рождения 24.10.2000 **Класс:** 10

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: [signature]

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1 $12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35$

$\cancel{12}\, x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{35}{12}$

$x > 10^6$ (по условию) $\cancel{\Rightarrow \sqrt{x^2-1}}$

$1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 1$

$\Rightarrow x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right) > 10^6 \quad \left(> \frac{35}{12}\right)$

$\Rightarrow$ совет не должен верить

№2. $x \longrightarrow \frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} = 1-\frac{1}{x}$ (будет через месяц)

$\frac{1}{1-1+\frac{1}{x}} = x$ (будет через 2 месяца)

Т.о. объем газа равен x, $\frac{1}{1-x}$ или $1-\frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{1-x} \rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ $D<0$ не имеет реш.

$x = 1-\frac{1}{x}$

Если $\exists$ 2 месяца, в которых объем газа был

$\frac{1}{1-x} = 1-\frac{1}{x}$

По условию объем газа всегда положителен

$\Rightarrow \frac{1}{1-x} > 0 \Rightarrow x<1 \Rightarrow 1-\frac{1}{x} < 1-\frac{1}{1}$ $(=0)$

Т.о. условие может быть выполнено только 2 месяца, и ~~в об~~ объем газа в них не может совпадать.

№3 $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)}{n!}=0$

1. $n=1$ $\quad 1-\frac{x}{1}=0 \quad x=1$ - корень

2. Док-м по индукции, что $1,2,\ldots,n-1$ - корни (индукция по n)

База: $n=2$ $\quad 1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{2}=0$

$$1-\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 0}{2}=0 \text{ - верно}$$

Предположим, что для n $1,2,\ldots,n-1$ являются корнями исходного выражения. Докажем, что $1,2,\ldots,n$ - корни выражения для $n+1$:

Док-во:
$\forall$ k - целое число от 1 до n

$$\underbrace{1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^k x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}}_{\text{по предположению } k \text{ - корень}}+\underbrace{\ldots+\frac{(-1)^n x\ldots(x-n+1)}{n!}}_{\text{во всех слагаемых в числителе встречается множитель } (x-k)}=0$$

$\Downarrow$ k - корень

3. Док-м, что n - корень данного выражения

$$1-\frac{n}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n n(n-1)\ldots 1}{n!}=0$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k$$

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-\ldots+(-1)^n C_n^n=0$$

$$C_{k+1}^m=C_k^m+C_k^{m-1}, \quad C_{k+1}^0=C_k^0=C_{k+1}^{k+1}=C_k^k$$

$$C_{n-1}^0-(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1)+(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)-(C_{n-1}^2+C_{n-1}^3)+\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})+(-1)^n C_{n-1}^{n-1}=0$$

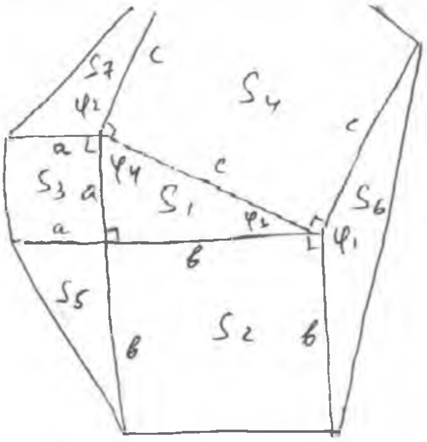
Видно, что после раскрытия скобок ~~равенство~~ выражение принимает значение 0

Т.к. степень выражения - n, то корней не более n.

Ответ: $1,2,\ldots,n$

+

№4.



по т. Пифагора:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$S_\Delta = \frac{ab}{2}$$

$$S_6 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 =$$

$$= \frac{ab}{2} + b^2 + a^2 + \underset{a^2+b^2}{c^2} + \frac{ab}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} bc \sin\varphi_1 + \frac{1}{2} ac \sin\varphi_2 = ab + 2a^2 + 2b^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} bc \frac{a}{c} + \frac{1}{2} ac \frac{b}{c} = 2(a^2 + b^2 + ab)$$

$\varphi_1 = 180 - \varphi_3 \Rightarrow \sin\varphi_1 = \sin\varphi_3 = \frac{a}{c}$ (из исходного Δ)

Аналогично $\sin\varphi_2 = \sin\varphi_4 = \frac{b}{c}$ (из исходного Δ)

$$\frac{S_6}{S_\Delta} = \frac{2(a^2 + b^2 + ab)}{\frac{ab}{2}} = 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)$$

$$\frac{a}{b} = x \Rightarrow \frac{S_6}{S_\Delta} = 4\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)$$

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$ $(x^2 + 1 - 2x \geq 0)$

равенство достигается при $x = \frac{1}{x} = 1$

$\Rightarrow \frac{S_6}{S_\Delta}$ ~~min~~ минимально, при $\frac{a}{b} = 1$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5. Введем координатные оси так, чтобы они были параллельны ребрам параллелепипеда, вершины были в целочисленных точках. Выделить пар-д из кубиков (1×1), то же самое, что указать координаты двух его вершин, которые не имеют общей грани (⇒ ни какие две координаты не совпадают).
На ребре длинной n $n+1$ ~~точка~~ целочисленная точка (~~если~~ где n это $a/b/c$ и ребро исходного пар-да)
⇒ всего ~~точек~~ целочисленных точек в пар-де $(a+1)(b+1)(c+1)$, а способов выбрать 2 точки, удовлетв. условию — $(a+1)(b+1)(c+1)abc/8$ (т.к. для пар-да 4 пары вершин, не имеющих общей грани, и каждая посчитана дважды) т.к. исходный пар-д был посчитан, то в итоге $\frac{(a+1)(b+1)(c+1)abc}{8}-1$

(+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

RQ 41-66

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ ВОРОНОВА

ИМЯ АЛЕКСАНДРА

ОТЧЕСТВО АНДРЕЕВНА

Дата рождения 21.07.2001

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№5.

$f(x)=x^2+px+q$

$D=p^2-4q=100$ (по усл.)

$f(x)+f(x-10)=0$

$x^2+px+q+(x-10)^2+p(x-10)+q=0$

$x^2+px+q+x^2-20x+100+px-10p+q=0$

$2x^2+x(2p-20)+2q-10p+100=0$

$D_1=(p-10)^2-2(2q-10p+100)=p^2-20p+100-4q+20p-200=p^2-4q-100=$
$=100-100$ (из усл.) $=0$, т.е. $D_1=0 \Rightarrow$ только один корень

Ответ: один корень

+

№3.

$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0$

$24-24x+12x(x-1)-4x(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$24-24x+12x^2-12x+(-4x^2+4x)(x-2)+(x^2-x)(x^2-5x+6)=0$

$24-24x+12x^2-12x-4x^3+8x^2+4x^2-8x+x^4-5x^3+6x^2-x^3+5x^2-6x=0$

$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$

при $x=1$ $\quad 1-10+35-50+24=0$

$(x-1)(x^3-9x^2+26x-24)=0$

$$\begin{array}{l|l} x^4-10x^3+35x^2-50x+24 & x-1 \\ x^4-x^3 & x^3-9x^2+26x-24 \\ -9x^3+35x^2 & \\ -9x^3+9x^2 & \\ 26x^2-50x & \\ 26x^2-26x & \\ -24x+24 & \\ -24x+24 & \\ 0 & \end{array}$$

при $x=2$ $\quad 8-9\cdot 4+26\cdot 2-24=0$

$(x-1)(x-2)(x^2-7x+12)=0$

$$\begin{array}{l|l} x^3-9x^2+26x-24 & x-2 \\ x^3-2x^2 & x^2-7x+12 \\ -7x^2+26x & \\ -7x^2+14x & \\ 12x-24 & \\ 12x-24 & \\ 0 & \end{array}$$

$D=(-7)^2-4\cdot 12=49-48=1$

$x_{1,2}=\frac{7\pm 1}{2}=\left[\begin{array}{l}4\\3\end{array}\right.$

+

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$

$x_1=1 \quad x_2=2 \quad x_3=3 \quad x_4=4$

Ответ: $x=\{1;2;3;4\}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RQ 41 - 66

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

x м^3; $(6-x)$ м^3

Из усл. $\Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 6-x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x<6 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;6)$

I запас в текущем месяце - квадрат запаса в следующем

$x=(6-x)^2$

$x=36-12x+x^2$

$x^2-13x+36=0$

$D=(-13)^2-4\cdot 36=169-144=25=5^2$

$x_{1,2}=\frac{13\pm 5}{2}=\left[\begin{matrix}9\\4\end{matrix}\right. \Rightarrow x=4$, т.к. по усл. $x\in(0;6)$, а $9>6 \Rightarrow 6-4=2$ (м^3)

II запас в следующем месяце - квадрат запаса в текущем

$x^2=6-x$

$x^2+x-6=0$

$D=1^2+4\cdot 6=25=5^2$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\left[\begin{matrix}-3\\2\end{matrix}\right. \Rightarrow x=2$, т.к. по усл. $x\in(0;6)$, а $-3<0 \Rightarrow 6-2=4$ (м^3)

Ответ: в текущем месяце 4 м^3, в следующем 2 м^3;
в текущем месяце 2 м^3, в следующем 4 м^3. не только!

$\overline{+}$

№1.

$A=x+\frac{1}{x}$

а) $B_k=x^k+\frac{1}{x^k}$, $k=2,3,4,8$

$B_2=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=A^2-2$

$B_3=x^3+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x^3}-x-\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=$
$=A\cdot(A^2-2-1)=A\cdot(A^2-3)=A^3-3A$

$B_4=x^4+\frac{1}{x^4}=x^4+\frac{1}{x^2}+x^2+\frac{1}{x^4}-x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=A\cdot(A^3-3A)-$
$-(A^2-2)=A^4-3A^2-A^2+2=A^4-4A^2+2$

$B_8=x^8+\frac{1}{x^8}=x^8+\frac{x^4}{x^4}+\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^8}-2=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)-2=(A^4-4A^2+2)(A^4-4A^2+2)-$
$-2=A^8-4A^6+2A^4-4A^6+16A^4-8A^2+2A^4-8A^2+4-2=A^8-8A^6+20A^4-16A^2+2$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

b) $B_2 = B_4 = B_8$

I $B_2 = B_4$

$A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2$

$A^4 - 5A^2 + 4 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$A^2_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \left[\begin{array}{l}4\\1\end{array}\right. \Rightarrow A = \{-2; -1; 1; 2\}$

II $B_4 = B_8$

$A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 2$

$A^8 - 8A^6 + 19A^4 - 12A^2 = 0$

при $A^2 = 1$ $\quad 1 - 8 + 19 - 12 = 0$, т.е. подходит $\Rightarrow A = \pm 1$

при $A^2 = 4$ $\quad 4^4 - 8 \cdot 4^3 + 19 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 = 4^3 \cdot (4 - 8) + 4 \cdot (19 \cdot 4 - 12) = -4^4 + 4 \cdot 64 =$
$= -256 + 256 = 0$, т.е. подходит $\Rightarrow A = \pm 2$

$x + \frac{1}{x} = 1$	$x + \frac{1}{x} = -1$	$x + \frac{1}{x} = 2$	$x + \frac{1}{x} = -2$
$x^2 - x + 1 = 0$	$x^2 + x + 1 = 0$	$x^2 - 2x + 1 = 0$	$x^2 + 2x + 1 = 0$
$D = (-1)^2 - 4 = -3$	$D = 1^2 - 4 = -3$	$(x-1)^2 = 0$	$D_1 = 1^2 - 1 = 0$
$x \in \varnothing \Rightarrow A \neq 1$	$x \in \varnothing \Rightarrow A \neq -1$	$x = 1$	$x = -1$

c) Минимальное количество арифметических операций для вычисления $B_2 - 2$, когда $x = 1$, потому что $B_2 = 1^2 + \frac{1}{1^2}$, а мы знаем, что 1 в любой степени равен одному, то есть остается только поделить и умножить, ещё и делить чисел $\frac{1}{1} = 1$, то есть $B_2 = 2$.

$A = 1 + \frac{1}{1} = 2 \qquad x = 1$

$C = \left(\left(x^{2017} + \frac{1}{x^{2017}}\right) \cdot \frac{1}{2}\right)^{2017}$

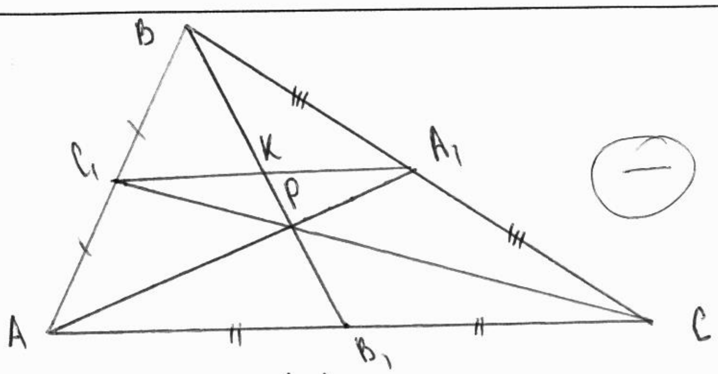
(+)

$C = \left(\left(1^{2017} + \frac{1}{1^{2017}}\right) \cdot \frac{1}{2}\right)^{2017} = \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right)^{2017} = 1^{2017} = 1$

Ответ: a) $B_2 = A^2 - 2$; $\quad B_3 = A^3 - 3A$; $\quad B_4 = A^4 - 4A^2 + 2$;
$B_8 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 2$

b) при $x = 1$ и $A = 2$
при $x = -1$ и $A = -2$

c) при $x = 1$ и $A = 2$
$C = 1$



—

№4,

Дано: $\triangle ABC$; $O \in \triangle ABC$;

$S_{AOB} : S_{BOC} : S_{AOC} = 1:2:3$

Как найти т. O.

Решение:

1) Если провести медианы, то по их св-ву они разделят $\triangle ABC$ на 6 равновеликих треугольника. ($BB_1 \cap AA_1 \cap CC_1 = P$)

Пусть $S_{APB_1} = S_{AC_1P} = \ldots = S_{BPC} = S$, тогда $S_{C_1BK} = \frac{1}{4} \cdot 3S$ (т.к. C_1K – ср. линия в $\triangle ABB_1$) $= \frac{3}{4}S$

Ответ?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

№Э 92-23

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Головацкий

ИМЯ Андрей

ОТЧЕСТВО Константинович

Дата рождения 17.03.2001 **Класс:** 9

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Голов

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

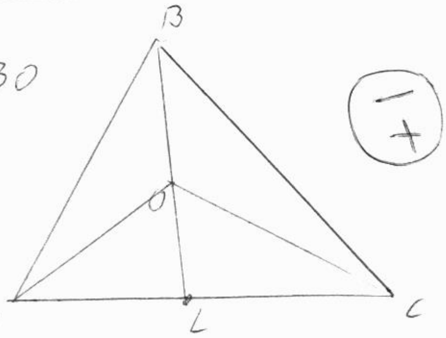
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ НЭ 92-23

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.



Пусть O построена, тогда продлим BO до пересечения с AC (точка L) тогда:

Пусть $S_{AOB}=x$, тогда $S_{BOC}=2x$, $S_{AOC}=3x$; Пусть $S_{AOL}=k$; $S_{OCL}=3x-k$, тогда

$\frac{BO}{OL}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOL}}=\frac{S_{BOC}}{S_{OCL}}$; $\frac{x}{k}=\frac{2x}{3x-k}$;

$x(3x-k)=2xk$; $3x=3k \Rightarrow x=k$ т.е $S_{AOB}=S_{AOL}$; $S_{BOC}=S_{OLC}$ и

$\frac{S_{AOL}}{S_{COL}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AL}{LC}=\frac{1}{2}$. Получим построение:

На AC построим точку L такую, что $\frac{AL}{LC}=\frac{1}{2}$, это можно сделать по обобщенной т. Фалеса.;

В треуг. $\triangle ABL$ и $\triangle BCL$ проведем медианы AO и CO соответственно. Точка O - искомая.

Д-во: Пусть $S_{AOB}=x$, тогда по построению $S_{AOL}=x$; т.к $\frac{AL}{LC}=\frac{1}{2}$ то $S_{BCL}=2S_{ABL}=4x$; при этом $S_{BOC}=S_{OCL}=2x$ т.е $S_{AOB}=x$; $S_{BCO}=2x$; $S_{AOC}=S_{AOL}+S_{OCL}=3x$ Ч.Т.Д

∓/+

№2

∓ не только!

Может. Пусть в месяц A было 2 $м^3$ газа, тогда в следующий за ним месяц B было $6-2=4$ $м^3$ газа; т.е запас газа в месяц B - точный квадрат запасов в месяц A. Заметим, что в любой месяц запас газа либо 2 либо 4 $м^3$ т.е положительный, а зн. такая ситуация возможна. Ч.Т.Д

№5

$f(x)=x^2+px+q$; $D=p^2-4q=100$;

$f(x)+f(x-10)=0$;

$x^2+px+q+(x-10)^2+p(x-10)+q=0$;

$2x^2+(2p-20)x+2q-10p+100=0$;

$D=(2p-20)^2-8(2q-10p+100)=4p^2-80p+400-16q+80p-800=4(p^2-4q)-400$; т.к $p^2-4q=100$ то $4(p^2-4q)-400=0$ т.е $D=0$, а значит корень равно 1.

+

Ответ: 1 корень

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0;$

$2\cdot 3\cdot 4-2\cdot 3\cdot 4x+3\cdot 4(x(x-1))-4x(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)(x-3)=0;$

$24-3\cdot 4x(2-(x-1))-x(x-1)(x-2)(7-x)=0;$

$24-12x(3-x)+(x^2-x)(x^2-9x+14)=0;$

$24-12x(3-x)+(x^4-9x^3+14x^2-x^3+9x^2-14x)=0;$

$24-36x+12x^2+x^4-10x^3+23x^2-14x=0;$

$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0;$

Заметим, что $x=1$ - корень;

$$\begin{array}{l|l} x^4-10x^3+35x^2-50x+24 & x-1 \\ \hline -\;x^4-x^3 & x^3-9x^2+26x-24 \\ \quad -9x^3+35x^2 & \\ \quad -\;-9x^3+9x^2 & \\ \qquad 26x^2-50x & \\ \qquad -\;26x-26x & \\ \qquad\quad -24x+24 & \\ \qquad\quad -\;24x+24 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Получим:

$(x-1)(x^3-9x^2+26x-24)=0;$

Заметим, что $x=2$ - корень у-ния $x^3-9x^2+26x-24=0;$

Получим:

$$\begin{array}{l|l} x^3-9x^2+26x-24 & x-2 \\ \hline -\;x^3-2x^2 & x^2-7x+12 \\ \quad -7x^2+26x & \\ \quad -\;-7x^2+14x & \\ \qquad 12x-24 & \\ \qquad -\;12x-24 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

+

$(x-1)(x-2)(x^2-7x+12)=0;$

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0;$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$

Ответ: $x\in\{1;2;3;4\}$

№1

а) $B_2=x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=A^2-2$

$B_3=x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3x-\frac{3}{x}=A^3-3A$

$B_4=x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=B_2^2-2=(A^2-2)^2-2=A^4-4A^2+2$

$B_8=x^8+\frac{1}{x^8}=(x^4+\frac{1}{x^4})^2-2=B_4^2-2=(A^4-4A^2+2)^2-2=A^8+16A^4+4-8A^6+$
$+4A^4-16A^2=A^8-8A^6+20A^4-16A^2+4$

б) $B_2=B_4=B_8$; т.к $B_4=B_2^2-2$; $B_8=(B_2^2-2)^2-2$ Получим:

$B_2=B_2^2-2=(B_2^2-2)^2-2$

Найдем B_2 если $B_2=B_2^2-2$:

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$B_2^2 - B_2 - 2 = 0$; $D=9$

$\left[\begin{array}{l} B_2 = 2 \\ B_2 = -1 \end{array}\right.$

Проверим, выполняется ли $B_2 = (B_2^2 - 2)^2 - 2$

1) $B_2 = 2$; Получим

$2 = (2^2-2)^2 - 2$;

$2 = 2$ - верно

2) $B_2 = -1$; Получим

$-1 = ((-1)^2 - 2)^2 - 2$

$-1 = -1$ - верно, т.е. $B_2 \in \{2; -1\}$

I $B_2 = 2$; т.к. $B_2 = A^2 - 2$ то

$A^2 - 2 = 2$

$A^2 = 4$

$\left[\begin{array}{l} A = 2 \\ A = -2 \end{array}\right.$

Iа) $A = 2$ тогда

$x + \frac{1}{x} = 2$;

$x^2 - 2x + 1 = 0$;

$x = 1$;

Iб) $A = -2$ тогда:

$x + \frac{1}{x} = -2$;

$x^2 + 2x + 1 = 0$;

$x = -1$;

II $B_2 = -1$ тогда

$A^2 - 2 = -1$

$A^2 = 1$

$\left[\begin{array}{l} A = 1 \\ A = -1 \end{array}\right.$

IIа) $A = 1$ тогда

$x + \frac{1}{x} = 1$

$x^2 - x + 1 = 0$ $D < 0 \Rightarrow \varnothing$

IIб) $A = -1$

$x + \frac{1}{x} = -1$

$x^2 + x + 1 = 0$ $D < 0 \Rightarrow \varnothing$

Ответ: при $x = 1$ и $A = 2$ и $X = -1$ и $A = -2$

c) Т.к $B_2 = A^2 - 2$ то потребуется не менее 2х ~~действий~~ операций, если A-известно; $A = x + \frac{1}{x}$ - потребуется не менее одной арифметической операции (при $x \in \{1; -1\}$) т. е всего не менее 3х операций, при $x \in \{1; -1\}$

1) $x = 1$

$C = ((1^{2017} + \frac{1}{1^{2017}}) \cdot \frac{1}{2})^{2017} = (2 \cdot \frac{1}{2})^{2017} = 1$

+

2) $x = -1$

$C = (((-1)^{2017} + \frac{1}{(-1)^{2017}}) \cdot \frac{1}{2})^{2017} = (-1) = -1.$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

VX 85-42

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ГОЛОФАЕВ ~~МИХАИЛ~~ А

ИМЯ МИХАИЛ

ОТЧЕСТВО АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 04.02.1999 **Класс:** 11

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Голофаев

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1.

$S = \lg(10^4 \, tg\, 2017°) + \lg(10^5 \, tg\, 2018°) + \ldots + \lg(10^{20} \, tg\, 2033°)$

$S = \lg 10^4 + \lg tg\, 2017° + \lg 10^5 + \lg tg\, 2018° + \ldots + \lg 10^{20} + \lg tg\, 2033°$

$S = 4 + \lg tg\, 217° + 5 + \lg tg\, 218° + \ldots + 20 + \lg tg\, 233°$

$S = 204 + \lg(tg\, 217° \cdot tg\, 218° \cdot \ldots \cdot tg\, 233°)$

$S = 204 + \lg(tg\, 217° \cdot \ldots \cdot tg\, 225° \cdot ctg\, 224° \cdot \ldots \cdot ctg\, 217°)$

с $tg\, 226°$ по $tg\, 233°$ заменены на $ctg\, 224°$ по $ctg\, 217°$ по формуле приведения: $tg(\pi + \alpha) = ctg(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$

Тогда

$S = 204 + \lg(1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1)$

$S = 204$; т.к. $tg\, 225° = 1$, а $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

Ответ: 204 +

№ 2

Пусть запас газа в текущем месяце равен x м^3, тогда в следующем месяце равен $(c - 2x)$м^3. Для того чтобы запас газа оказался одинаковым в два различные месяца можно взять, например, текущий и следующий месяц. Тогда должно

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

выполняться условие:

$x = c - 2x$

$3x = c$

$x = \frac{c}{3}$

т.е. в текущем месяце $\frac{c}{3}$ м^3,

а в следующем $c - \frac{2c}{3} = \frac{c}{3}$ м^3

Так же можно заметить, что при таком условии в текущем и во всех последующих месяцах запас будет одинаков.

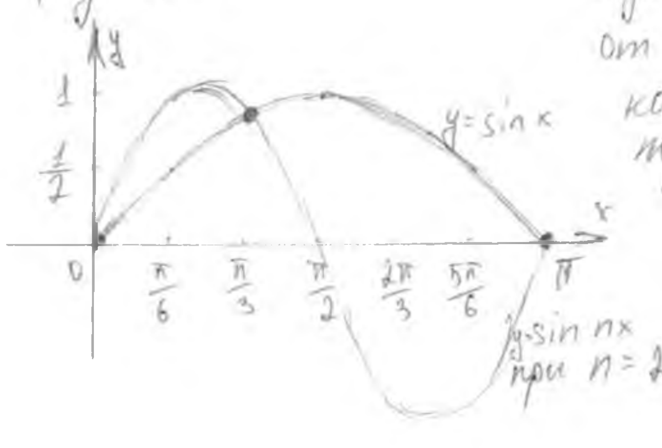
Ответ: да, $\frac{c}{3}$. +

№ 5.

+

$\sin nx = \sin x$

$\begin{cases} y = \sin nx \\ y = \sin x \end{cases}$



Т.к. $n > 1$, то период $\sin nx$ будет изменяться в зависимости от n, а значит и кол-во точек пересечения графиков, т.е

При увеличении n период $\sin nx$ будет уменьшаться, а значит и кол-во пересечений графиков будет увеличиваться по формуле: $(n+1)$, т.к при любом натуральном числе n $\sin(n\cdot 0)$ и $\sin(n\pi)$ всегда равны 0, а остальные корни появляются благодаря „смещению" полупериода в данный интервал $[0;\pi]$

Стоит заметить, что графики могут касаться друг друга в точке $\frac{\pi}{2}$ (когда $\sin x$ и $\sin(nx)$ принимают наибольшее значение), т.е когда $\sin n\cdot\frac{\pi}{2} = 1$. Такое возможно только при выполнении условия, что $n=4k+1$, где $k\in\mathbb{Z}$, $k>0$, т.к. на единичной окружности точки $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$ ... совпадают

Поэтому если $n=4k+1$, где $k\in\mathbb{Z}$; $k>0$ то $S(n)=n$, иначе $S(n)=n+1$

Таким образом $S(n)$ может

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

принимать значение 2017 2 раза: при $n=2016$ и при $n=2017$, т.к. $2017=504\cdot4+1$

Ответ: 2

№4.

$a^2+b^2+c^2=6abc$

$a^2-2abc+b^2-2abc+c^2-2abc=0$

$a(a-2bc)+b(b-2ac)+c(c-2ab)=0$

т.к. a, b, c - положительные числа, а необходимо найти наименьшую сумму чисел (положительных) $a+b+c$, то $\lim\limits_{a,b,c\to0}=0$, тогда можно предположить что числа a, b, c меньше 1 (при этом если $a,b,c>1$ то $a^2+b^2+c^2<6\cdot a\cdot b\cdot c$). Значит, что $(a-2bc)\geq0$; $(b-2ac)\geq0$ и $(c-2ab)\geq0$

Тогда

$$\begin{cases} a(a-2bc)=0 \\ b(b-2ac)=0 \\ c(c-2ab)=0 \end{cases}$$

Т.к. a, b, c - положительные числа, то они не равны нулю. Значит:

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VX 85-42

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} a-2bc=0 \\ b-2ac=0 \\ c-2ab=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2bc & (1) \\ b=2ac & (2) \\ c=2ab & (3) \end{cases}$$

Разделим (1) уравнение на (2)

$\frac{a}{b}=\frac{2bc}{2ac} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{a} \Rightarrow a^2=b^2 \Rightarrow a=b$

т.к. a и b - положительные числа

Аналогично получаем, что $a=b=c$

Тогда заменим (1) уравнении b и c на a. Получаем

$a=2a^2$

$2a^2-a=0$

$a(2a-1)=0$

$2a=1$

$a=\frac{1}{2} \Rightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$

Проверим исходное выражение:

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ верно, тогда $a+b+c=\frac{3}{2}=1,5$

наим(?)

Ответ: 1,5.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

НЭ 92-22

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Демитраку

ИМЯ Елизавета

ОТЧЕСТВО Георгиевна

Дата рождения 30.10.2001

Класс: 9

Этап: заключительный

Предмет математика

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. $A = x + \frac{1}{x}$ $x \neq 0$

(*) $\left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 2$, т.к. при $x>0$ $x+\frac{1}{x} \underset{\text{нер Коши}}{\geq} 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, при $x<0$, домнож. -1: $-x - \frac{1}{x} \geq 2$, т.е. $x+\frac{1}{x} \leq 2$, при $x<0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \left|x+\frac{1}{x}\right| \geq 2$

а) $B_k = x^k + \frac{1}{x^k}$

$k=2$ $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = A^2 - 2$

$k=3$ $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) = A(A^2-4)$

$k=4$ $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = (A^2-2)^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2$

$k=8$ $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2 - 2 = (A^4 - 4A^2 + 2)^2 - 2$

б) $B_2 = B_4 = B_8$

$A^2 - 2 = (A^2-2)^2 - 2 = ((A^2-2)^2-2)^2 - 2;$

$A^2 = (A^2-2)^2 = ((A^2-2)^2-2)^2$

реш. ур-ния будет реш. сист: $\begin{cases} A^2 = (A^2-2)^2 \\ (A^2-2)^2 = ((A^2-2)^2-2)^2 \end{cases}$ пусть $A^2-2=t$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = A^2-2 \\ -A = A^2-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t = t^2-2 \\ -t = t^2-2 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A^2-A-2=0 \\ A^2+A-2=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t^2-t-2=0 \\ t^2+t-2=0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A=1 \\ A=-1 \\ A=2 \\ A=-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \\ t=2 \\ t=-2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A=1 \\ A=-1 \\ A=2 \\ A=-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} A^2-2=1 \\ A^2-2=-1 \\ A^2-2=-2 \\ A^2-2=2 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A=1 \\ A=-1 \\ A=2 \\ A=-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} A^2=3 \\ A^2=1 \\ A^2=4 \\ A^2=0 \end{array}\right. \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A=1 \\ A=-1 \\ A=2 \\ A=-2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} A=\sqrt{3} \text{ — не уд} \\ A=-\sqrt{3} \text{ — не уд} \\ A=1 \\ A=-1 \\ A=2 \\ A=-2 \\ A=0 \text{ — не уд} \end{array}\right. \end{cases}$ т.к. нет в перв совокуп.

$\left[\begin{array}{l} A=1 \\ A=-1 \\ A=2 \\ A=-2 \end{array}\right.$ но (*) $A=1$ и $A=-1$ не подх., тогда при $A=2$ $x+\frac{1}{x}=2$; $x^2-2x+1=0$; $x=1$

при $A=-2$ $x+\frac{1}{x}=-2$; $x^2+2x+1=0$; $x=-1$

Ответ: при $A=2$ $x=1$
при $A=-2$ $x=-1$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ № Э 92-22

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. С при $x = 1$ $x = -1$ - почему?

$C = \left(\left(x^{2017} + \frac{1}{x^{2017}}\right) \cdot \frac{1}{2}\right)^{2017} =$

$C(1) = 1$

$C(-1) = -1$

±

2. Пусть в текущем месяце 1 $м^3$, тогда в следующем будет 5 $м^3$, тогда в 3 месяце будет $(6-5) = 1$ $м^3$. Получается, запас в тек. месяце равен точн квадр запаса в 3-м месяце $1 = 1^2$

При таких знач. запас газа всегда будет полож, т.к. он опр. по форм $x_n = 6 - x_{n-1}$, $x_1 = 1$, n - номер месяца

и при $x_{n-1} < 6$ запас полож. т.е. $x_n > 0$

т.к. $0 < x_1 < 6$, то $x_2 > 0 \Rightarrow x_3 > 0$ и т.д.

Отв. нет

—

3. $f(x) = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 0$

Наивысшая степень перемен. 4, следов, корней не может быть более 4. (Если корней больше 4, то наивыс степень была бы больше 4, т.к. м/б было разложена $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)\ldots(x-a_n) = x^n + \ldots$ ← наименьш. не сокр и $n > 4$, а в нашей ф-ции $f(x)$ наивысш степ 4, т.к. $\frac{x}{1}$ - I степ, 1 - 0 степ, $\frac{x(x-1)}{2}$ - II степ, $\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$ - III степ, $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}$ - IV степ)

$f(1) = 1 - 1 + 0 + 0 = 0$

$f(2) = 1 - 2 + 1 + 0 + 0 = 0$

$f(3) = 1 - 3 + 1 + 1 + 0 = 0$

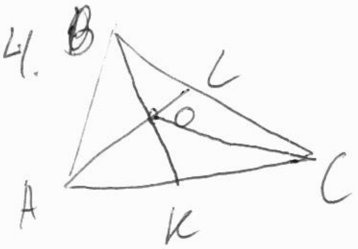
$f(4) = 1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$

Таким образом мы нашли все корни

Ответ: $\{1; 2; 3; 4\}$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4. 

$S_{AOB} : S_{BOC} : S_{AOC} = 1:2:3$

пусть BO пересек AC в K

AO пересек BC в L

$\frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle BKC}} = \frac{AK}{KC}$, т.к. у них общ выс

$\frac{S_{\triangle AOK}}{S_{OKC}} = \frac{AK}{KC}$, т.к. общ выс

+

$\frac{S_{ABK} - S_{AOK}}{S_{BKC} - S_{OKC}} = \frac{S_{ABO}}{S_{BOC}} = \frac{AK}{KC}$, аналог. $\frac{S_{AOC}}{S_{ABO}} = \frac{LC}{LB}$

$\frac{S_{ABO}}{S_{BOC}} = \frac{1}{2}$, т.е. K делит AC в отн $1:2$, считая от A

$\frac{S_{AOC}}{S_{ABO}} = \frac{3}{1}$, т.к. L делит BC в отн $3:1$, счит от C

таким образом, чтобы найти O, нужно постр K на AC, что $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{2}$ и точ L на BC что $\frac{LC}{LB} = 3$ и на пересеч BK и AL будет O

№5. $f(x) = x^2 + px + q$ $\quad p^2 - 4q = 100$

$f(x) + f(x-10) = 0$

$x^2 + px + q + (x-10)^2 + p(x-10) + q = 0;$

$2x^2 + (2p-20)x + 2q - 10p + 100 = 0$

$x^2 + (p-10)x + q - 5p + 50 = 0$

+

$D = (p-10)^2 - 4q + 20p - 200 = p^2 - 20p + 100 - 4q + 20p - 200 =$

$= p^2 - 4q + 100 - 200 = 100 + 100 - 200 = 0$

т.к. дискриминант равен нулю, то корень есть и есть 2 совпад. корня, т.е. 1 раз.

Ответ: 2 совпадающих корня, т.е. 1 корень

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа	ЭН 64-66	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ДЕНИСКО

ИМЯ ВЛАДЕНА

ОТЧЕСТВО ВЛАДИМИРОВНА

Дата рождения 23.06.1999 **Класс:** 11

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№ 1.

$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ)$

сумма логарифмов преобразуется следующим образом:

$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ \cdot 10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ \cdot \ldots \cdot 10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ)$.

$S = \lg\left(10^4 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \ldots \cdot 10^{20} \cdot \frac{\sin 2017^\circ \cdot \sin 2018^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 2033^\circ}{\cos 2017^\circ \cdot \cos 2018^\circ \ldots \cos 2033^\circ}\right)$

$S = \lg\left(10^{204} \cdot \frac{\sin 2017^\circ \cdot \sin 2018^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 2033^\circ}{\cos 2017^\circ \cdot \cos 2018^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 2033^\circ}\right)$

представим тригонометрические функции следующим образом:

$\sin 2017^\circ = \sin(360^\circ \cdot 5 + 217^\circ) = \sin 217^\circ$

$\sin 2018^\circ = \sin(360^\circ \cdot 5 + 218^\circ) = \sin 218^\circ$

$\ldots \qquad \ldots$

$\sin 2033^\circ = \sin(360^\circ \cdot 5 + 233^\circ) = \sin 233^\circ$

$\cos 2017^\circ = \cos(360^\circ \cdot 5 + 217^\circ) = \cos 217^\circ$

$\cos 2018^\circ = \cos(360^\circ \cdot 5 + 218^\circ) = \cos 218^\circ$

$\ldots$

$\cos 2033^\circ = \cos(360^\circ \cdot 5 + 233^\circ) = \cos 233^\circ$

$\Downarrow$

$S = \lg\left(10^{204} \cdot \frac{\sin 217^\circ \cdot \sin 218^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 233^\circ}{\cos 217^\circ \cdot \cos 218^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 233^\circ}\right)$

Снова преобразуем наши тригонометрические функции:

$\left.\begin{array}{l}\sin 217^\circ = \sin(180^\circ + 37^\circ) = -\sin 37^\circ \\ \sin 218^\circ = \sin(180^\circ + 38^\circ) = -\sin 38^\circ \\ \ldots \\ \sin 233^\circ = \sin(180^\circ + 53^\circ) = -\sin 53^\circ\end{array}\right\}$ количество множителей нечетно => их произведение имеет знак „–"

$\left.\begin{array}{l}\cos 217^\circ = -\cos 37^\circ \\ \cos 218^\circ = -\cos 38^\circ \\ \ldots \\ \cos 233^\circ = -\cos 53^\circ\end{array}\right\}$ количество множителей нечетно => их произведение имеет знак „–"

$\Downarrow$

частное этих двух произведений имеет знак „+"

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Заметим, что

$\sin 37^\circ = \sin(90^\circ - 53^\circ) = \cos 53^\circ$

$\sin 38^\circ = \sin(90^\circ - 52^\circ) = \cos 52^\circ$

...

$\sin 53^\circ = \sin(90^\circ - 37^\circ) = \cos 37^\circ$

⇓

+

$$S = \lg\left(10^{204} \cdot \frac{\cos 53^\circ \cdot \cos 52^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 38^\circ \cdot \cos 37^\circ}{\cos 37^\circ \cdot \cos 38^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 52^\circ \cdot \cos 53^\circ}\right) = \lg 10^{204}$$

$\Rightarrow S = 204$

Значит, прибыль компании 204 млн. рублей.

Ответ: 204

№ 4

$a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$; $a, b, c > 0$

±

т.к. $a, b, c > 0$, мы можем разделить обе части уравнение на abc:

$$\frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{c^2}{abc} = 6 \Rightarrow \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ba} = 6.$$

По неравенству Коши:

$$\begin{cases} \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} \geq 2\sqrt{\frac{ab}{abc^2}} = \frac{2}{c} \\ \frac{a}{bc} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{b} \\ \frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} \geq \frac{2}{a} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$$

⇓

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \leq 6$$

Заметим, что чем меньше a, b и c, тем больше значение суммы, а максимальное её значение равно 6.

Значит, чтобы найти $a+b+c$ минимальное, приравняем сумму к 6: $\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 6$. $\Rightarrow \frac{ab + ac + cb}{abc} = 6 \Rightarrow$

$ab + ac + bc = 6abc \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

по неравенству Коши:

$a^2+b^2 \geqslant 2ab$

$a^2+c^2 \geqslant 2ac$ $\Rightarrow$ $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc$,

$b^2+c^2 \geqslant 2bc$

причем равенство достигается при $a=b=c$.

$$\begin{cases} a=b=c \\ \frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=6 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=6 \Rightarrow \frac{3}{a}=6 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$a=b=c=\frac{1}{2} \Rightarrow a+b+c=\frac{1}{2}\cdot 3=1,5.$

Ответ: $\frac{3}{2}$

№2.

1 месяц: x

2 месяц: $c-2x$

3 месяц: $c-2(c-2x)=4x-c$

4 месяц: $c-2(4x-c)=3c-8x$

5 месяц: $c-2(3c-8x)=16x-5c$

6 месяц: $c-2(16x-5c)=-32x+11c$

...

Из этих условий нетрудно вывести рекуррентное соотношение: $S_n=2S_{n-2}-S_{n-1}$

Пусть значение месяцов i и j совпадают, тогда:

$S_i=S_j \Rightarrow 2S_{i-2}-S_{i-1}=2S_{j-2}-S_{j-1}$

т.е $2(S_{i-2}-S_{j-2})=S_{i-1}-S_{j-1}$

$2(S_{i-2}-S_{j-2})=2S_{i-3}-S_{i-2}-2S_{j-3}+S_{j-2}$

$3S_{i-2}-3S_{j-2}=2S_{i-3}-2S_{j-3}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Откуда несложно вывести новое рекуррентное соотношение:

$$aS_{i-b}-aS_{j-b}=(a-1)S_{i-b-1}-(a-1)S_{j-b-1}.$$

Пусть, без ограничения общности $i>j$ (если $j>i$, случаи симметричны)

Тогда рано или поздно настанет момент, что

$$S_{j-k-1}=S_1:$$

$$kS_{i-j+2}-kS_{j-j+2}=(k-1)S_{i-j+2-1}-(k-1)S_{j-j+2-1}$$

$$kS_{i-j+2}-kS_2=(k-1)S_{i-j+1}-(k-1)S_1$$

$$kS_{i-j+2}-kc+2kx=(k-1)S_{i-j+1}-kx+x.$$

$$kS_{i-j+2}-(k-1)S_{i-j+1}=kc+x-3kx$$

$$kS_{i-j+2}-(k-1)S_{i-j+1}=kc+x(1-3k).$$

Заметим, что показания двух месяцев могут совпадать только в том случае, если $c=3x$, а тогда показания во всех месяцах будут равными x.

Также из примеров и рекуррентного соотношения нетрудно заметить, что $S_n=2^{n-1}x-\frac{(2^{n-1}-1)}{3}c$ для $n \not\vdots 2$.

и $S_n=-2^{n-1}x+\frac{(2^{n-1}+1)c}{3}$ для $n \vdots 2$.

Рассмотрим случаи:

① $2^{n-1}x-\frac{2^{n-1}-1}{3}c=-2^{k-1}x+\frac{2^{k-1}+1}{3}c$

$x(2^{n-1}+2^{k-1})=\frac{2^{n-1}+2^{k-1}}{3}c$

$\Downarrow$

$c=3x$

② $2^{n-1}x-\frac{2^{n-1}-1}{3}c=2^{m-1}x-\frac{2^{m-1}-1}{3}c$

$x(2^{n-1}-2^{m-1})=\frac{2^{n-1}-2^{m-1}}{3}c$

$\Downarrow$

$c=3x$.

③ $-2^{n-1}x+\frac{2^{n-1}+1}{3}c=-2^{m-1}x+\frac{2^{m-1}+1}{3}c$

$x(2^{m-1}-2^{n-1})=\frac{2^{m-1}-2^{n-1}}{3}c \Rightarrow c=3x$.

это неверно.

Значит, значение могут совпадать лишь при $3x=c$, и тогда все показатели будут равных x, при $c\neq 3x$ совпадать не будут.

±

№5.

$n > 1, \ n \in \mathbb{N}$

$\sin nx = \sin x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} nx = x \\ nx = x + 2\pi k, \ k \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \text{ - не уд. усл.} \\ x(n-1) = 2\pi k \end{array}\right.$

$x = \frac{2\pi k}{n-1}$, причем именно k будет влиять на кол-во решений

$\pi \geq \frac{2\pi k}{n-1} \geq 0 \Rightarrow \pi n - \pi \geq 2\pi k \geq 0 \quad |:\pi.$

$n - 1 \geq 2k \geq 0$

т.к. k влияет на количество решений $\Rightarrow$ k сопоставимо с $S(n)$: $k = S(n)$, причем $k \in Z$, а т.к. в данном промежутке $k \geq 0 \Rightarrow k = S(n) \in \mathbb{N}_0$.

$\frac{n-1}{2} \geq S(n) \geq 0$

$0 \leq S(n) \leq \frac{n-1}{2}, \ S(n) \in \mathbb{N}_0$

$0 \leq S(n) \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$, где $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ - целая часть от этой дроби.

$S(n) = 2017 \Rightarrow \left[\frac{n-1}{2}\right] = 2017$

$\Downarrow$

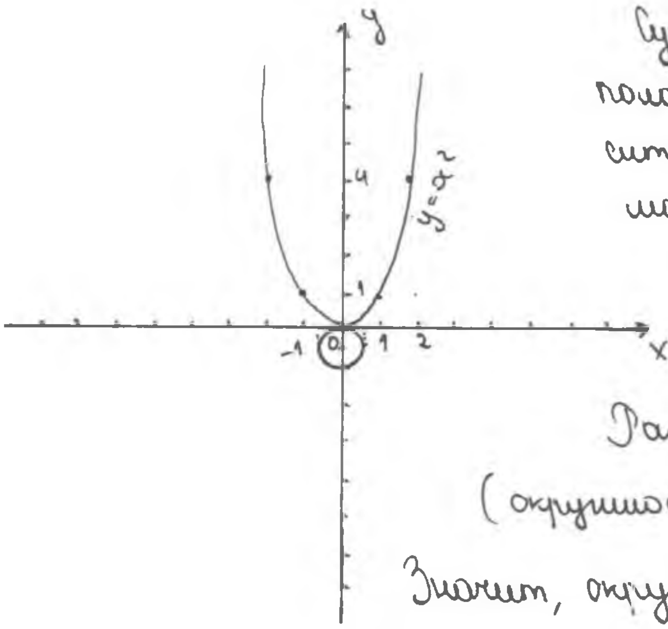
$\left[\begin{array}{l} n = 4034 + 1 \\ n = 4035 + 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = 4035 \\ n = 4036 \end{array}\right.$

при $n < 4035 \quad \left[\frac{n-1}{2}\right] < 2017$

а при $n > 4036 \quad \left[\frac{n-1}{2}\right] > 2017$

Значит $S(n) = 2017$ принимается ровно 2 раза.

№3



Существует два варианта расположение окружности S_1 относительно параболы: окружность может касаться её, лежа „под" осью OX или, лежа „над" осью OX.

Рассмотрим случай I (окружность S_1 лежит „под" OX).

Значит, окружность S_2 касается S_1 в точке (0;0). А т.к. ветви параболы симметричны, то очевидно, что центр S_2 (как и любой S_i) лежит на оси OY:

$x^2+(y-a)^2=r^2$ - уравнение этой окружности, $a>0$.

Окружность проходит через точку (0;0) и касается ветвей параболы $y=x^2$, т.е. имеет с ней ровно 3 общие точки (включая (0;0)).

$x^2+(y-a)^2=r^2$

(0;0) - решение $\Rightarrow 0+(-a)^2=r^2 \Rightarrow a^2=r^2 \Rightarrow |a|=|r|$.

$\Downarrow$

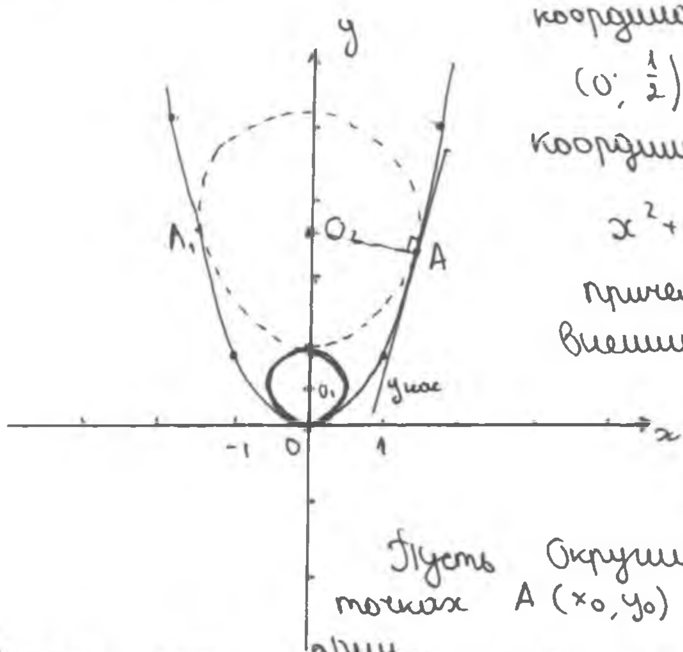
$\begin{cases} x^2+(y-|r|)^2=r^2 \\ y=x^2 \end{cases}$ - ровно 3 решение.

$\begin{cases} x^2+y^2-2y|r|+r^2=r^2 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow y^2-2y|r|+y=0.$

$y(y-2|r|+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y-2|r|+1=0. \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} y=0 \\ r=\frac{y+1}{2} \\ r=-\frac{y-1}{2} \end{array}\right.$

Но в таком случае, касающаяся S_1, окружность S_2 не может касаться ветвей параболы. Значит, S_1 лежит „над" осью Ox.



координаты O_1 - центра S_1 - $(0; \frac{1}{2})$

координаты O_2 - $(0; a)$.

$$x^2 + (y-a)^2 = r^2$$

причем, чтобы S_1 и S_2 касались внешним образом, нужно, чтобы

$$r = a - 1.$$

$$x^2 + (y-a)^2 = (a-1)^2$$

Пусть окружность S_2 касается параболы в точках $A(x_0, y_0)$ и $A_1(-x_0, y_0)$ - в силу симметрии.

Тогда радиус S_2 будет равен расстоянию от O_2 до точки A или A_1, т.е. по касательной к $y = x^2$ в этой точке.

$y_{кас} = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = -x_0^2 + x.$

Расстояние от O_2 до A: $r = \sqrt{(0-x_0)^2 + (a-y_0)^2} = \sqrt{x_0^2 + (a-y_0)^2}$

Причем $x_0^2 + (a-y_0)^2 = (a-1)^2 \Rightarrow x_0^2 + a^2 - 2ay_0 + y_0^2 = a^2 - 2a + 1 \Rightarrow$

$x_0^2 + y_0^2 - 2ay_0 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a(2 - 2y_0) = 1 - x_0^2 \Rightarrow a = \frac{1-x_0^2}{2-2y_0}.$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИЭЭ

Место проведения

VX 62-56

шифр

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Зиникир БА

ИМЯ Кирилл

ОТЧЕСТВО Романович

Дата рождения 02.05.1999

Класс: 11

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VX 68-56

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.

~~$S = \lg(10^4 \cdot tg 2017^\circ) + \lg(10^5 \cdot tg 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \cdot tg 2033^\circ) =$~~

~~$= \lg 10^4 + \lg 10^5 + \ldots + \lg 10^{20} + \lg(tg 2017^\circ) + \lg(tg 2018^\circ) + \ldots + \lg(tg 2034^\circ) =$~~

~~$= 4 + 5 + \ldots + 20 + \lg tg 37^\circ + \lg(tg 38^\circ)$~~

$S = \lg(10^4 \cdot tg 2017^\circ) + \lg(10^5 \cdot tg 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \cdot tg 2033^\circ) =$

$= \lg(10^4 \cdot tg 37^\circ) + \lg(10^5 \cdot tg 38^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \cdot tg 53^\circ) =$

$= \lg 10^4 + \lg 10^5 + \ldots + \lg 10^{20} + \lg(tg 37^\circ) + \lg(tg 38^\circ) + \ldots + \lg(tg 53^\circ) =$

$= 4 + 5 + \ldots + 20 + \lg(tg 37^\circ \cdot tg 53^\circ \cdot tg 38^\circ \cdot tg 52^\circ \cdot \ldots \cdot tg 45^\circ) =$

$= \frac{20 \cdot 21}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} + \lg(tg 37^\circ \cdot ctg 37^\circ \cdot tg 38^\circ \cdot ctg 38^\circ \cdot \ldots \cdot tg 45^\circ) =$

$= 210 - 6 + \lg(1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1) = 204.$

Ответ: $S = 204$.

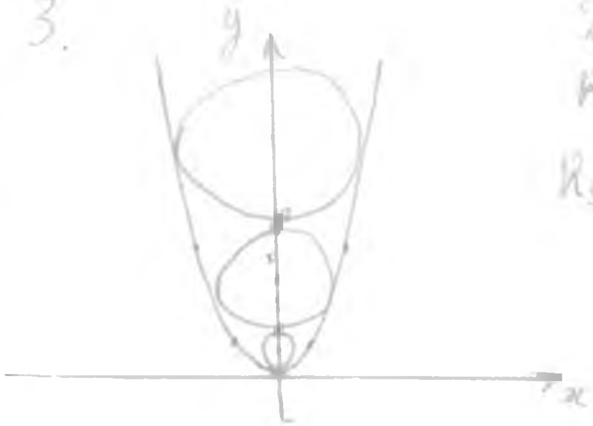
+

2. Да может, например, если в первый месяц расход газа $\frac{c}{3}$ м³, то во второй – $c - 2 \cdot \frac{c}{3} = \frac{c}{3}$ м³, и значит, и во все остальные месяцы расход газа тоже $\frac{c}{3}$. Значит расход газа одинаков [illegible] для 1 и 10 месяцев и равен $\frac{c}{3}$.

+

Ответ: да; $\frac{c}{3}$.

3.



Докажем, что $R_{S_n} = n - \frac{1}{2}$; где R_{S_n} - радиус окружности S_n;

Докажем по индукции.

База: при $n = 1$;
$R_{S_1} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ - верно.

Шаг: пусть мы доказали для всех $n \le n_0$; докажем теперь для $n = n_0 + 1$

пусть $R_{S_{n_0+1}} = R$ - радиус S_{n_0+1} окружности,

тогда ордината центра S_{n_0+1} - вычисляется как $1 + 3 + \ldots + 2n_0 - 1 + R = \frac{2n_0 - 1 + 1}{2} \cdot n_0 + R =$

$= n_0^2 + R$;

тогда сама окружность задаётся уравнением: $x^2 + (y - n_0^2 - R)^2 = R^2$

Теперь нам осталось доказать, что при $R = (n_0 + 1) - \frac{1}{2} = n_0 + \frac{1}{2}$; система:

$$\begin{cases} x^2 + (y - n_0^2 - R)^2 = R^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$ - имеет ровно два решения.

$$\begin{cases} y + y^2 + R^2 + n_0^4 - 2yR - 2yn_0^2 + 2Rn_0^2 = R^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} y^2 - (2R + 2n_0^2 - 1)y + 2Rn_0^2 + n_0^4 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

теперь подставим $R = n_0 + \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y^2 - (2n_0 + 1 + 2n_0^2 - 1)y + (2n_0+1)n_0^2 + n_0^4 = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 2(n_0^2 + n_0)y + 2n_0^3 + n_0^4 + n_0^2 = 0 \ (1). \\ y = x^2 \end{cases}$$

(1) $y^2 - 2(n_0^2 + n_0)y + 2n_0^3 + n_0^4 + n_0^2 = 0$

$D_1 = n_0^4 + 2n_0^3 + n_0^2 - 2n_0^3 - n_0^4 - n_0^2 = 0$

$y = n_0^2 + n_0.$

$$\begin{cases} y = n_0^2 + n_0 \\ y = x^2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = n_0^2 + n_0 \\ x = \sqrt{n_0^2 + n_0} \end{cases} \\ \begin{cases} y = n_0^2 + n_0 \\ x = -\sqrt{n_0^2 + n_0}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Значит, окружность S_{n_0+1} имеет радиус $R_{S_{n_0+1}} = R = (n_0+1) - 1.$

Мы доказали, что наше предположение верно при $n = 1$ и из его истинности при $n = n_0$ следует его истинность при $n = n_0 + 1$. Значит, наше предположение верно при $n \in \mathbb{N}$, по аксиоме индукции.

тогда $R_{S_{2017}} = 2017 - \frac{1}{2} = 2016\frac{1}{2}.$

+

Ответ: $R_{S_{2017}} = 2016\frac{1}{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. $a^2+b^2+c^2=6abc$ (1)

По неравенству Коши $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

с учётом первого; (1).

имеем:

$6abc \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$8a^3b^3c^3 \geq a^2b^2c^2$

$abc \geq \frac{1}{8}$ (2)

теперь применим неравенство Коши для $a+b+c$; $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \geq \frac{3}{2}$.

$a+b+c=\frac{3}{2}$; например; при $a=b=c=\frac{1}{2}$;

Ответ: $\frac{3}{2}$.

5. $\sin(nx)=\sin x$; $[0;\pi]$.

$\sin(nx)-\sin x=0$.

$2\cdot\sin\left(\frac{n-1}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)=0$.

$\left[\begin{array}{l}\frac{n-1}{2}x=\pi k\\ \frac{n+1}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right.$; $k\in Z$; $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2\pi k}{n-1}\\ x=\frac{\pi+2\pi k}{n+1}\end{array}\right.$; $k\in Z$;

т.к. $x\in[0;\pi]$ получаем условие на k; $\left[\begin{array}{l}0\leq k\leq\frac{n-1}{2}\\ -\frac{1}{2}\leq k\leq\frac{n}{2}\end{array}\right.$ т.е. $k\in\{0;1;\ldots;[\frac{n}{2}]\}$;

где $[\frac{n}{2}]$ - целая часть от $\frac{n}{2}$; тогда

$S(n)=[\frac{n}{2}]+1$; $S(n)=2017 \Rightarrow$ $n=1032$, $n=4033$.

Ответ: $S(n)=2017$; два раза $S(n)=2017$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

2Р 10-71

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ДИМЕНТМАН

ИМЯ Михаил

ОТЧЕСТВО Викторович

Дата рождения 21.03.1999

Класс: 11 (Г-200)

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1

$S = \lg(10^4 \cdot \lg 2019^\circ) + \lg(10^5 \cdot \lg 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \cdot \lg 2035^\circ)$

$\lg f(x) = \lg x$ – периодична с периодом π $\Rightarrow$ $\lg 2019^\circ = \lg(11\pi + 39^\circ) = \lg 39^\circ$

по св-вам логарифмов: $\lg 10^4 = 4$

$4 + 5 + \ldots + 19 + 20 = 8 \cdot (20+4) + 12 = 204$

$\Rightarrow S = 204 + \sum_{i=1}^{17} \lg(\lg(36+i))$

Т.к. всего 17 членов в сумме $\Rightarrow$ средний член $= \lg\lg(36+9)^\circ = \lg\lg 45 = \lg 1 = 0$

Рассмотрим сумму 2-х симметричных относительно среднего члена:

$\lg\lg 44 + \lg\lg 46$

Из опр. производной: $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Rightarrow$ $f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x$

$\Rightarrow \lg\lg 44^\circ + \lg\lg 46^\circ = \lg\lg(45-1) + \lg\lg(45+1) = 0 + \dfrac{1}{\lg 1 \cdot \ln 10}\cdot\dfrac{2\pi}{360} + 0 - \dfrac{1}{\lg(1)\cdot\ln 10}\cdot\dfrac{\pi}{180} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{8}\left(\lg\lg(45+i) + \lg\lg(45-i)\right) = 0$

⇓

$S = 204 + 0 = 204$

Ответ: $S = 204$

№4

$a^2 + b^2 + c^2 = 2abc \cdot 3$

$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} = 2abc$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}} = \sqrt{2abc}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \sqrt{2abc}$

$a, b, c > 0$

по неравенству о средних

, причём равенство достигается только при $a = b = c$ $\Rightarrow$

~~причём это значение достигается только при $a = b = c \Rightarrow$~~

$\Rightarrow 3a^2 = 6a^3$

$2a^3 - a^2 = 0$

$a^2(2a-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \text{ – не подх., т.к. } a, b, c > 0 \text{ (по усл.)} \\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b + c = \frac{3}{2} \end{array}\right.$

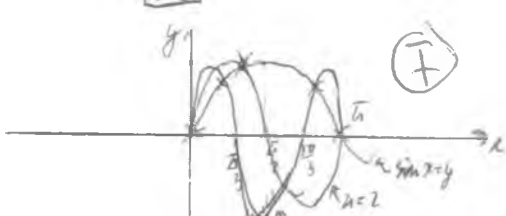
Ответ: $\frac{3}{2} = a + b + c$.

№5

$n > 1$, $n \in N$

$\sin nx = \sin x$

$x \in [0; \pi]$



$\Rightarrow$ ~~y_n на $\sin nx = \sin x$~~

$y = \sin nx$ $\Rightarrow$ период уменьшается в n раз $\Rightarrow$ $S(n) = n + 1$

$S(n) = 2017 \Rightarrow n = 2017 - 1 = 2016$

Ответ: $S(n) = n + 1$; 1 раз при $n = 2016$.

№2

1	2	3	4	5	6	7	...
x	$c-2x$	$4x-c$	$3c-8x$	$-5c+32x$	$11c+64x$	$-21c+128x$	

k_1 – коэфф. при x ⇒ $k_1 = (-2)^{n-1}$

~~k_2 – коэффициент~~ c_n – коэффициент при c в n месяц $(n>1)$ ⇒ $(1-2c_{n-1}) = c_n$ ⇒ $c = const$; c_n – всегда нечётно; k_1 – чётно только 2 ⇒

т.к. $c_1 = 1$

⇒ ~~запас не может быть~~ запас может быть равен в первых 3-х месяцах при $c = 3x$ и значение: x м³.

Ответ: может (при $c=3x$); зап x м³; $x = ?$ (+0)

и может при $c = 4$ тыс.

№3

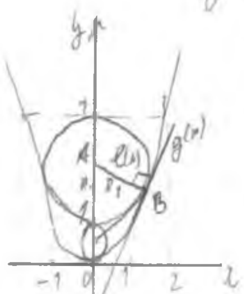
$y = x^2$

$2R_0 = 1$

$R_{2017} - ?$

Ур-ие касательной $g(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f(x_0)$

$g(x) = 2x_0(x-x_0) + f(x_0)$



$l(x) \perp g(x_0)$

$l(x) = k_1 x + b$

$A(0; 2R_0+R_1)$ ⇒ $\begin{cases} b = 2R_0 + R_1 \\ x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}\cdot x_0 + 2R_0 + R_1 \end{cases}$ ⇒ $R_1 = x_0^2 + \frac{1}{2} - 1 = x_0^2 - \frac{1}{2}$

$l(x) \perp g(x)$

$k_1 \cdot 2x_0 = -1 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2x_0}$

$AB^2 = R_1^2 = ((1+R_1) - x_0^2)^2 + x_0^2$

$R_1^2 = (1+R_1)^2 - 2x_0^2(1+R_1) + x_0^4 + x_0^2$

$\cancel{R_1^2} = 1 + 2R_1 + \cancel{R_1^2} - 2x_0^2(1 + x_0^2 - \frac{1}{2}) + x_0^4 + x_0^2$

$0 = \cancel{1} + 2x_0^2 - \cancel{1} - 2x_0^2(x_0^2 + \frac{1}{2}) + x_0^4 + x_0^2$

$0 = 3x_0^2 - 2x_0^4 - x_0^2 + x_0^4$

$x_0^4 - 2x_0^2 = 0$

$x_0^2(x_0^2 - 2) = 0$ ⇒ $\left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$ ⇒ $R_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$R_1^2 = (1 + x_0^2 + \frac{1}{2} - 1 - x_0^2)^2 + x_0^2 = \frac{1}{4} + x_0^2$

$x_0^4 - x_0^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + x_0^2$

$x_0^4 - 2x_0^2 = 0$

$R_1 = x_0^2 + \frac{1}{2} - 2R_0$ ⇒ $R_{2017} = x_{0_{2017}}^2 + \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{2016} 2R_i$ ⇒ ?

⇒ $R_n = x_0^2 + \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} 2R_i$

$R_2 = x_{0_2}^2 + \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{3-1=2} iR_i = x_{0_2}^2 + \frac{1}{2} - 1 - 3 = x_{02}^2 - \frac{7}{2}$

$R_2^2 = \Big(\underbrace{(1 + 3 + R_2)}_{x_0^2 + \frac{1}{2} - 3 - 1} - x_1^2\Big)^2 + x_0^2$

$R_2^2 = \left(x_0^2 + \frac{1}{2} - 4x_0^2\right)^2 + x_0^2 = \frac{1}{4} + x_0^2$

$\cancel{\left(x_0^2 + \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{2} iR_i\right)^2 = \frac{1}{4} + x_0^2}$

$\cancel{x_0^4 = \frac{1}{4} + \left(\sum\right)^2 + x_0}$

$x_0^4 - 7x_0^2 + \frac{49}{4} = \frac{1}{4} + x_0^2$

$x_0^4 - 8x_0^2 + \cancel{48\frac{3}{4}=0}\ \frac{48}{4} = 0$

$\cancel{4x_0^4 - 32x_0^2 + 195 = 0}$

$\cancel{D = 64 - 4\cdot\frac{195}{4}} < 0$

$D = 64 - 4\cdot\frac{48}{4} = 16$

$\left[\begin{array}{l} x_{0}^2 = \frac{8+4}{2} = 6 \Rightarrow R_2 = 36 - \frac{7}{2} = 36 - 3{,}5 = 32{,}5 \\ x_{0_2} = \frac{8-4}{2} = 4 \end{array}\right.$

$\cancel{1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) + \ldots + R_{106} =}$

$R_{2017} = 2016 + \frac{1}{2}\cdot 2016 = 2016 + 1008 = 3024$

Ответ: $3024 = R_{2017}$.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

№ группы	Место проведения
	КГЭУ

шифр: NG 47-26 ← Не заполнять. Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ ДМИТРИЕВ

ИМЯ МАКСИМ

ОТЧЕСТВО СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 31.07.2002

Класс: 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 листах

Дата выполнения работы: 11.02.2017 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ______________________

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NG 47-26

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. $\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases}$, $\begin{cases} x=\frac{y+1}{y-1} \\ z=\frac{y+2}{y-1} \\ 5+z+x=zx \end{cases}$,

Подставим x и z, выраженные через y в 3 уравнение, и решим его:

$5+\frac{y+2}{y-1}+\frac{y+1}{y-1}=\frac{(y+1)(y+2)}{(y-1)^2} \quad |\cdot(y-1)^2$

$5y^2-10y+5+y^2+y-2+y^2-1=y^2+3y+2$

$6y^2-12y=0$

$6y(y-2)=0$

$y=0;2$

При $y=0$:

$x=\frac{0+1}{0-1}$

$x=-1$

$z=\frac{0+2}{0-1}$

$z=-2$

При $y=2$:

$x=\frac{2+1}{2-1}$

$x=3$

$z=\frac{2+2}{2-1}$

$z=4$

(+)

Ответ: $x=-1, y=0, z=-2$; или: $x=3, y=2, z=4$.

2. а) $B_2=x^2+\frac{1}{x^2}$

$B_3=x^3+\frac{1}{x^3}$

$B_4=x^4+\frac{1}{x^4}$

$B_8=x^8+\frac{1}{x^8}$

$A^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$

$B_2=A^2-2$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NG 47-26

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$A^3 = x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3} = x^3+\frac{1}{x^3}+3(x+\frac{1}{x})$

$B_3 = A^3-3A$

$A^4 = x^4+\frac{1}{x^4}+4(x^2+\frac{1}{x^2})+6$

$B_4 = A^4-4A^2+8-6 = A^4-4A^2+2$

$A^8 = x^8+\frac{1}{x^8}+8(\frac{1}{x^6}+x^6)+28(x^4+\frac{1}{x^4})+56(x^2+\frac{1}{x^2})+68 = B_8+8B_6+28B_4+56B_2+68$

$A^6 = x^6+\frac{1}{x^6}+6(x^4+\frac{1}{x^4})+15(x^2+\frac{1}{x^2})+20$

$B_6 = A^6-6A^4+24A^2-12-15A^2+30-20 = A^6-6A^4+9A^2-2$

$B_8 = A^8-8A^6+48A^4-72A^2+16-28A^4+112A^2-56-56A^2+112-68 =$

$= A^8-8A^6+20A^4-16A^2+4$

б) $x^2+\frac{1}{x^2} = x^4+\frac{1}{x^4} = x^8+\frac{1}{x^8}$

Это равенство выполняется только при $x=\pm 1$.

Следовательно $A=\pm 2$.

Ответ: $x=1, A=2$; или $x=-1, A=-2$

+

3. Примем за x среднюю массу средних ~~ящиков~~ приборов. Т.к. $120-31-41=48$кг, следовательно ~~ящиков~~ приборов больше 6.

$\frac{31}{3}кг < x < \frac{41}{3}кг$

$10\frac{1}{3}кг < x < 13\frac{2}{3}кг$

Если средние приборы весят как маленькие, то их $\frac{48}{\frac{31}{3}} = 4\frac{20}{31}$ шт.

Если средние приборы весят как большие, то их $\frac{48}{\frac{41}{3}} = 4\frac{21}{41}$ шт.

$4 < 4\frac{20}{31} < 5$

$4 < 4\frac{21}{41} < 5$

±

Приборов не может быть 5, т.к. в этом случае средняя масса будет равна $9\frac{3}{5}$кг, что меньше $10\frac{1}{3}$кг.

Если приборов будет 4, то средняя масса будет ~~меньше~~ больше $10\frac{1}{3}$кг и меньше $13\frac{2}{3}$кг.

Следовательно всего приборов $3+3+4=10$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NG 47 - 26

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Ответ: 10 приборов.

5. $\frac{2}{3}$об. $-$ $\frac{1}{2}$об. $=$ $\frac{1}{6}$(об.) – заполнилось за 2 ч

$\dfrac{\frac{1}{6}}{2}\,\dfrac{об.}{ч} = \frac{1}{12}$(об/ч) – скорость заполнения.

$\frac{4 \cdot 1}{12} = \frac{1}{3}$(об.) – было заполнено с 10 ч до 14 ч.

$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$(об.) было заполнено до 10 ч.

Минимальная скорость заполнения резервуара равна $\frac{1}{12}\,\frac{об.}{ч}$.

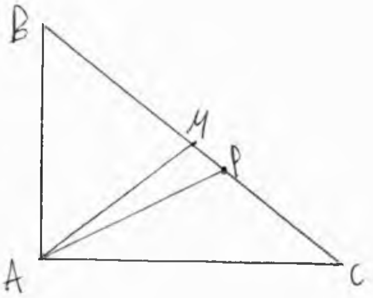
$\dfrac{\frac{1}{3}\,об.}{\frac{1}{12}\,\frac{об.}{ч}} = 4$(ч.) – работал насос.

$10 - 4 = 6$(ч)

+

Ответ: самое раннее время включения первого насоса – 6 часов утра.

4. а)



Дано: AB : AC = 3 : 4.

$AB = 3x$; $AC = 4x$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9x^2 + 16x^2 = 25x^2$

$BC = 5x$

+

$5x + 3x + 4x = 12x$ – периметр

$\frac{12x}{2} = 6x$ – прошел каждый

$6x - 3x = 3x$ – ~~пот~~ расстояние от B до точки встречи

$6x - 4x = 2x$ – расстояние от C до точки встречи.

Проведем медиану AM. $BM = CM = 2{,}5x$. Т.к. AM медиана ΔABC, значит площади треугольников ΔABM и ΔACM равны. $BM \neq BP$, $CM \neq CP$, следовательно площадь ΔABP больше площади ΔACP (т.к. $3x > 2x$) на $2 \cdot S_{\Delta AMP}$.

б) Полученные указанным способом части будут равны если соотношение катетов будет равным 1 : 1, то есть если треугольник будет равнобедренным.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССТ „Мытищи"

Место проведения

ЈФ 40-47

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ ДРОБЧЕНКО

ИМЯ ЕКАТЕРИНА

ОТЧЕСТВО ДМИТРИЕВНА

Дата рождения 03.11.2001

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ЕДД

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

1. $A = X + \frac{1}{X} \Rightarrow X \neq 0$, т.к. на 0 делить нельзя

а) $B_2 = X^2 + \frac{1}{X^2} = X^2 + \frac{1}{X^2} + 2 - 2 = (X + \frac{1}{X})^2 - 2 = A^2 - 2$

$B_3 = X^3 + \frac{1}{X^3} = (X + \frac{1}{X})(X^2 - 1 + \frac{1}{X^2}) = (X + \frac{1}{X})((X + \frac{1}{X})^2 - 3) = A(A^2 - 3)$

$B_4 = X^4 + \frac{1}{X^4} = (X^2)^2 + \frac{1}{(X^2)^2} + 2 - 2 = (X^2 + \frac{1}{X^2})^2 - 2 = (A^2 - 2)^2 - 2$

$B_8 = X^8 + \frac{1}{X^8} = (X^4)^2 + \frac{1}{(X^4)^2} + 2 - 2 = (X^4 + \frac{1}{X^4})^2 - 2 = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2$

с) $X = 1 \Rightarrow A = 2$
$X = -1 \Rightarrow A = +2$

В остальных случаях нужно приводить дроби к общему знаменателю, на что потребуется больше арифметических операций.

$C = ((X^{2017} + \frac{1}{X^{2017}}) \cdot \frac{1}{2})^{2017}$

$X = 1 \Rightarrow C = ((1 + 1) \cdot \frac{1}{2})^{2017} = 1^{2017} = 1$

$X = -1 \Rightarrow C = ((-1 - 1) \cdot \frac{1}{2})^{2017} = (-1)^{2017} = -1$

Можно сделать вывод, что при данных значениях x $C = X$.

б) Ни при каких

$A^2 - 2 = (A^2 - 2)^2 - 2 = ((A^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2$

$A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 = A^{16} - 8A^8 + 20A^4 - 16A^2 + 4$??

$A^{16} - 8A^8 + 19A^4 - 11A^2 = 0$

$A \neq 0 \Rightarrow$ можно разделить на A^2 (не отр.)

$A^8 - 8A^4 + 19A^2 - 11 = 0$

Если взять $A \geq 1$ не подходит, т.к. есть большое слагаемое $19A^2$.

Подошло бы $A = 0$, но $A \neq 0$, т.к. $x + \frac{1}{X} \geq 1$

$(\frac{X^2 + 1}{X} \neq 0;\ X^2 \geq 0,\ X^2 + 1 \geq 1)$

±

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. $f(x)=x^2+px+q$

$D=100;\quad D=p^2-4q \Rightarrow p^2-4q=100$

$f(x)+f(x-10)=0$

Чтобы сумма двух чисел была равна нулю, эти числа должны быть противоположными

$f(x)=-f(x-10)$

$x^2+px+q=-(x-10)^2-p(x-10)-q$

$x^2+px+q=-x^2+20x-100-px+10p-q$

$2x^2+2px-20x-10p+2q+100=0$

$2x^2+x(2p-20)-10p+2q+100=0$

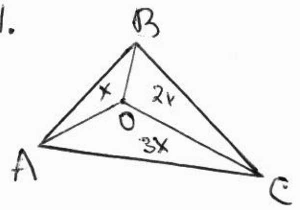
$D=(2p-20)^2-8(2q-10p+100)=4p^2-80p+400-16q+$
$+80p-800=4p^2-16q-400=4(p^2-4q)-400$

Т.к. $p^2-4q=100$, $D=4\cdot 100-400=0 \Rightarrow$ 1 решение

<u>Ответ</u>: 1 корень.

+

4.



$S_\triangle=\frac{a\cdot b\cdot \sin(\hat{a\,b})}{2}$

$S_{AOB}=\frac{AO\cdot OB\cdot \sin\angle BOA}{2}=x$

$S_{BOC}=\frac{BO\cdot OC\cdot \sin\angle BOC}{2}=2x$

$S_{COA}=\frac{CO\cdot OA\cdot \sin\angle COA}{2}=3x$

$\frac{AO\cdot OB\cdot \sin\angle BOA}{2}=\frac{BO\cdot OC\cdot \sin\angle BOC}{4}$

$2AO\cdot \sin\angle BOA=OC\cdot \sin\angle BOC \Rightarrow \frac{OC}{\sin\angle BOA}=\frac{2AO}{\sin\angle BOC}$

$\frac{AO\cdot OB\cdot \sin\angle BOA}{2}=\frac{CO\cdot OA\cdot \sin\angle COA}{6}$

$3\cdot OB\cdot \sin\angle BOA=CO\cdot \sin\angle COA \Rightarrow \frac{CO}{\sin\angle BOA}=\frac{3OB}{\sin\angle COA}$

$\frac{OC}{\sin\angle BOA}=\frac{2AO}{\sin\angle BOC}=\frac{3OB}{\sin\angle COA}$

<u>Ответ</u>: $\frac{OC}{\sin\angle BOA}=\frac{2AO}{\sin\angle BOC}=\frac{3OB}{\sin\angle COA}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. Ответ: может при запасе 2 - в чётные месяцы, при запасе 4 - в нечётные месяцы.

1 месяц - x

2 месяц - 6-x

Теперь за x будет 6-x, тогда

3 месяц $6-(6-x)=x$

4 месяц $6-x$

И так будет чередоваться.

2 случая:

1) $(6-x)^2=x$

$x^2-13x+36=0$

$x=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\left[\begin{array}{l}9 \text{ не подх. т.к. } 6-9=-3\\ 4\end{array}\right.$

2) $x^2=6-x$

$x^2+x-6=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\left[\begin{array}{l}2\\ -3 \text{ не подходит}\end{array}\right.$

$\frac{+}{-}$

не все реш найдены

3. $1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=0$

$1+x(x-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{(x-2)(x-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\right)=x\left(1+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}\right)$

$x=0$ - не подходит => не является решением => можно сократить

$\frac{1}{x}+(x-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{(x-2)(x-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\right)=1+\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}$

$(x-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{(x-2)(x-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{x-2}{1\cdot2\cdot3}\right)=\frac{x-1}{x}$

$(x-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{x-2}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x-3}{4}-1\right)\right)=\frac{x-1}{x}$ $\quad |:(x-1)$ $\quad x=1$ - решение

$\frac{1}{2}+\frac{x-2}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x-3}{4}-1\right)=\frac{1}{x}$

$\frac{x-2}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x-3}{4}-1\right)=\frac{2-x}{2x}$ $\quad |:(2-x)$ $\quad x=2$ - решение

$\frac{-1}{1\cdot2\cdot3}\left(\frac{x-3}{4}-1\right)=\frac{1}{2x}$ $\quad |\cdot2\cdot3$

$1-\frac{x-3}{4}=\frac{3}{x}$ $\quad |\cdot4x$

$4x-x^2+3x=12$

$x^2-7x+12=0$

$x=\frac{7\pm1}{2}=\left[\begin{array}{l}4\\3\end{array}\right.$

+

Ответ: 1, 2, 3, 4

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

VX 85-55

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ЕВТЮШКИНА

ИМЯ АНАСТАСИЯ

ОТЧЕСТВО АЛЕКСАНДРОВНА

Дата рождения 05.08.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1

$S = \lg(10^4 \mathrm{tg}\,2017^\circ) + \lg(10^5 \mathrm{tg}\,2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \mathrm{tg}\,2033^\circ) =$

$= \lg 10^4 + \lg|\mathrm{tg}\,2017^\circ| + \lg 10^5 + \lg|\mathrm{tg}\,2018^\circ| + \ldots + \lg 10^{20} + \lg|\mathrm{tg}\,2033^\circ| =$

$= 4 + \lg|\mathrm{tg}\,2017^\circ| + 5 + \lg|\mathrm{tg}\,2018^\circ| + \ldots + 20 + \lg|\mathrm{tg}\,2033^\circ| =$

$= 204 + \lg|\mathrm{tg}\,2017^\circ| + \lg|\mathrm{tg}\,2018^\circ| + \ldots + \lg|\mathrm{tg}\,2033^\circ| =$

$= 204 + \lg|\mathrm{tg}\,2017^\circ \cdot \mathrm{tg}\,2018^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}\,2033^\circ| =$

$= 204 + \lg\left|\frac{\sin 2017 \cdot \sin 2018 \cdot \ldots \cdot \sin 2033^\circ}{\cos 2017 \cdot \cos 2018 \cdot \ldots \cdot \cos 2033^\circ}\right| =$

$= 204 + \lg\frac{\sin 37 \cdot \sin 38 \cdot \ldots \cdot \sin 53^\circ}{\sin 53^\circ \cdot \sin 52^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 37^\circ} = 204 + \lg 1 = 204 + 0 =$

$= 204$

+

Ответ: $S = 204$.

№2

n-1-ый месяц: $\frac{c-x}{2}$ м³

n-ый месяц: x м³

n+1-ый месяц: $c-2x$ м³

n+2-ой месяц: $-c+4x$ м³

Предположим, что запас газа может оказаться одинаковым в 2 различных месяца, т.е:

$-c+4x = \frac{c-x}{2}$

$3c = 9x$

$c = 3x$

Или возьмем другие 2 месяца:

$c - 2x = -c + 4x$

$2c = 6x$

$c = 3x$.

То есть запас газа может оказаться одинаковым, если $c = 3x$.

(+.)

Запас, одинаковый для двух разных месяцев, равен x м³.

Ответ: запас газа может оказаться одинаковым, он равен x м³

$x = ?$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1) $x^2+(y-0,5)^2=0,5^2$ – уравнение 1-ой окружности (S_1)

$\begin{cases} y=x^2 \text{ – ~~уравн~~ парабола} \\ x^2+(y-a)^2=r_2^2 \ (1) \text{ уравнение 2-ой окр. } (S_2) \text{, где } a=D_1+r_2 \text{, т.е. } a=1+r_2 \\ D=0 \text{, т.к. окр. касается ветвей параболы, а не пересекает их} \end{cases}$

D_1 – диаметр 1-ой окр.

(1) $y+(y-a)^2=r_2^2$

$y+y^2-2ay+a^2=r_2^2$

$y^2+y(1-2a)+a^2-r_2^2=0$

$D=(1-2a)^2-4(a^2-r_2^2)=~~4c~~\ 1-4a+4a^2-4a^2+4r_2^2=$
$=4r_2^2-4a+1$

но $a=1+r_2$, поэтому

$\cancel{D=4r_2^2-4a+1}$
$\cancel{4r_2^2-4a+1=0}$

$D=4r_2^2-4(1+r_2)+1=$
$=4r_2^2-4r_2-3=0$

$r_2=\frac{2\pm4}{4}$, но $r_2>0$, поэтому

$r_2=1,5$ – радиус окр. S_2

$x^2+(y-2,5)^2=1,5^2$ – уравнение 2-ой окр. (S_2)

2) $\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-b)^2=r_3^2 \text{ – уравнение 3-ей окр. } (S_3) \text{, где } b=D_2+D_1+r_3 \text{, т.е. } b=3+1+r_3=4+r_3 \\ D=0 \end{cases}$

$y+(y-b)^2-r_3^2=0$

$y+y^2-2by+b^2-r_3^2=0$

$y^2+y(1-2b)+b^2-r_3^2=0$

$D=(1-2b)^2-4(b^2-r_3^2)=1-4b+4b^2-4b^2+4r_3^2=$
$=4r_3^2-4b+1$, но $b=4+r_3$

$D=4r_3^2-4(4+r_3)+1=4r_3^2-16-4r_3+1=4r_3^2-4r-15=0$

$r_3=\frac{2\pm8}{4}$, но $r_3>0$, поэтому $r_3=2,5$

Аналогично и для радиусов следующих окружностей.

Радиус каждой следующей окружности

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

больше предыдущего на 1.

$r_1 = 0,5$; $r_2 = 1,5$; $r_3 = 2,5$

$r_{2017} = r_1 + 2016 \cdot 1$

$r_{2017} = 2016,5$

Ответ: 2016,5

+

№4

$a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$, $a>0$, $b>0$, $c>0$

$a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 2abc - 2abc = 0$

$a(a-2bc) + b(b-2ac) + c(c-2ab) = 0$

a, b, c - положительные числа, значит $(a-2bc)$, $(b-2ac)$ и $(c-2ab)$ либо равны 0, либо отрицательные.

Предположим, что $a-2bc=0$ $(a=2bc)$:

$b(b-2ac) = c(2ab-c)$

$b^2 - 2abc = 2abc - c^2$

$b^2 + c^2 = 4abc$

$b^2 + c^2 = 8b^2c^2$

$b^2 - 4b^2c^2 + c^2 - 4b^2c^2 = 0$

$b^2(1-4c^2) + c^2(1-4b^2) = 0$

+

b и c - положительные, значит

$\begin{cases} 1-4c^2=0 \\ 1-4b^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} c = \pm\frac{1}{2} \\ b = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$, но b и $c > 0$, значит, $\begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$

$a = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2}$

$(a+b+c)_{наим} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

Ответ: 1,5

№5.

$n>1$, $n \in N$; $\sin nx = \sin x$, $[0;\pi]$, $S(n)$ - число решений

$n=2$

$\sin 2x = \sin x$

$\sin 2x - \sin x = 0$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Если $n=2$, то на $[0;\pi]$ $S(2)=3$

−

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

ЭН 64-92

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ЕМЕЦ

ИМЯ ЕВГЕНИЙ

ОТЧЕСТВО СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения 01.02.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

1.

$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017°) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018°) + \ldots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033°)$

по свойству логарифма $\lg(10^4 \operatorname{tg} 2017°) = \lg(10^4) + \lg(\operatorname{tg} 2017°) = 4 + \lg(\operatorname{tg} 2017°)$

аналогично поступим со остальными слагаемыми и получим:

$S = 4 + 5 + 6 + \ldots + 20 + \lg(\operatorname{tg} 2017°) + \lg(\operatorname{tg} 2018°) + \ldots + \lg(\operatorname{tg} 2033°)$

т.к. $\operatorname{tg}\alpha$ – периодичная функция $T = 180°$, то $\operatorname{tg} 2017° = \operatorname{tg} 37°$ и т.д.

с учетом этого $S = 4+5+6+\ldots+20 + \lg(\operatorname{tg}37° \cdot \operatorname{tg}38° \cdot \operatorname{tg}39° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}53°)$

Из тригонометрии: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}$

будем группировать тангенсы с концов к середине:

$\operatorname{tg}37° \cdot \operatorname{tg}53° = \frac{\cos 16° - \cos 90°}{\cos 16° + \cos 90°} = 1$

$\operatorname{tg}38° \cdot \operatorname{tg}52° = \frac{\cos 14° - \cos 90°}{\cos 14° + \cos 90°} = 1$

....

$\operatorname{tg}44° \cdot \operatorname{tg}46° = \frac{\cos 2° - \cos 90°}{\cos 2° + \cos 90°} = 1$

$\operatorname{tg}45° = 1$

Тогда $S = 4+5+6+\ldots+20 + \lg(1 \cdot 1 \cdot 1) = 4+5+6+\ldots+20+0 = \frac{4+20}{2} \cdot 17 = 12 \cdot 17 = 204$

Ответ: 204.

+

2. Запишем, чему равны объемы газа за 12 месяцев.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	$c-2x$	$-c+4x$	$3c-8x$	$16x-5c$	$11c-32x$	$64x-21c$	$43c-128x$	$256x-85c$	$171c-512x$	$1024x-341c$	$683c-2048x$

Заметим, что объем всегда больше 0 $\Rightarrow$

$\begin{cases} x > \frac{341}{1024}c \text{ (из 11)} \\ x < \frac{1}{2}c \text{ (из 2)} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left(\frac{341}{1024}c; \frac{1}{2}c\right)$

допустим объемы равны во 2 и 3 месяце, тогда:

$c - 2x = 4x - c \Leftrightarrow 2c = 6x \Rightarrow x = \frac{c}{3}$ $\quad \frac{c}{3} \in \left(\frac{341}{1024}c; \frac{1}{2}c\right) \Rightarrow$ может

запас составляет $c - \frac{2c}{3} = \frac{c}{3}$ (при $\frac{c}{3}$ запас газа каждый месяц равны)

Ответ: может; $\frac{c}{3}$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. $\sin nx = \sin x \quad n>1$

$S(2)$: $\sin 2x = \sin x \Leftrightarrow$

$2\sin x \cos x = \sin x$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cos x = 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi \\ x=\frac{\pi}{3} \end{array}\right. \quad S(2)=3.$

(+)

$S(3)$: $\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow$

$3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x \Leftrightarrow$

$\sin x(3 - 4\sin^2 x) = \sin x$

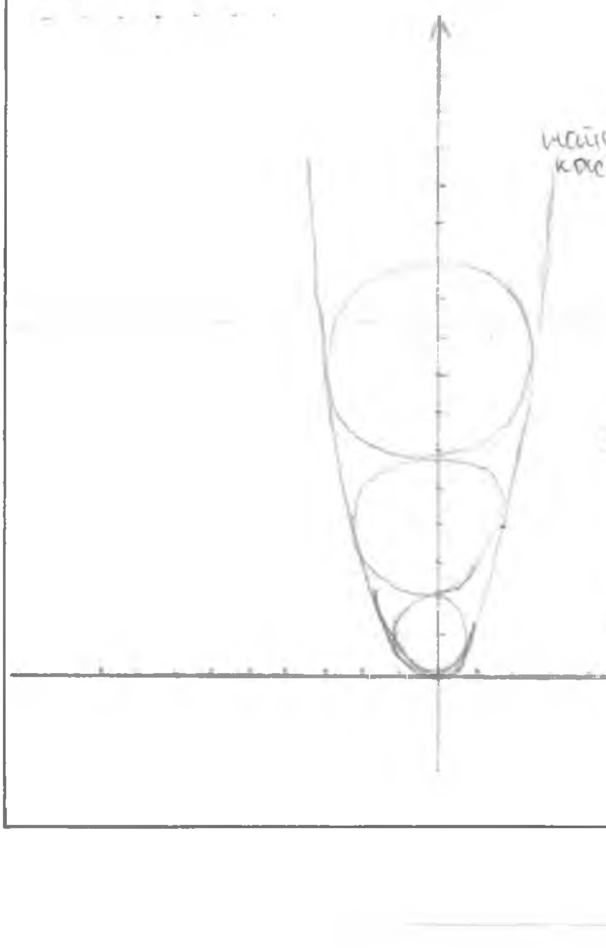
$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 3-4\sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pi \\ x=\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{3\pi}{4} \end{array}\right. \quad S(3)=4.$

Для каждого n, мы будем получать уравнение n-ой степени. и $(n+1)$ решений (т.к. $\sin x=0$ дает 2 решения)

Т.е. $S(n)=n+1$ и $S(n)=2017$ только при $n=2016$.

Ответ: $S(n)=n+1$; один раз.

3.



найдем т. касания

Ур 1-й окр $x^2+(y-1)^2=1$

$x^2+(x^2-1)^2=1$

$x^2=t \geq 0$

$t^2-t+1=1$

$t^2-t=0$

$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$

Ур 2-й окр $x^2+(y-n)^2=(n-2)^2$

найдем т касания $x^2+(x^2-n)^2=(n-2)^2$

$x^2=t \geq 0$

$t^2-2nt+t+n^2=n^2-4n+4$

$t^2+(1-2n)t+4n-4=0$

$D=1-4n+4n^2-16n+16=0$ (т.к. т. кас-2 вида $x=\pm a \Rightarrow$ 1 корень но t)

$4n^2-20n+17=0$

$D_1=100-4\cdot17=32.$

$n=\frac{10\pm4\sqrt{2}}{4}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. $a^2+b^2+c^2=6abc$

по Th(Коши) $a^2+b^2+c^2=3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (экстрим. вариант)

$6abc=3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$abc=\frac{1}{8}$ =>

$a^2+b^2+c^2=\frac{3}{4}$

Мин. знач $a+b+c$ будет при $a=b=c$ (вследствие симетрии)

т.е все по $\frac{1}{2}$. => $a+b+c=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Ответ: $\frac{3}{2}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

город Красноярск

Место проведения

0331IМК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17/11

ФАМИЛИЯ ЕПИФАНЦЕВ

ИМЯ Виталий

ОТЧЕСТВО Витальевич

Дата рождения 28.02.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Епиф

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 $\lg a + \lg b = \lg ab$, тогда

$S = \lg(10^4 \cdot \ldots \cdot 10^{20} \cdot tg\, 2017^\circ \cdot \ldots \cdot tg\, 2033^\circ)$

~~Также $tg\, x = tg\, 2\pi + x$~~

Также $tg\, x^\circ = tg(180^\circ + x^\circ)$

$2017 = 180 \cdot 11 + 37 \Rightarrow tg\, 2017^\circ = tg\, 37^\circ$

Также применяем для остальных.

$S = \lg(10^4 \cdot \ldots \cdot 10^{20} \cdot tg\, 37^\circ \cdot \ldots \cdot tg\, 53^\circ)$

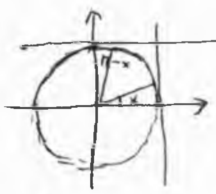
$tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$ctg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ $\quad tg\, x \cdot ctg\, x = 1$

при умножении степени складываются, поэтому

$10^4 \cdot \ldots \cdot 10^{20} = 10^{(4+\ldots+20)}$

Заметим:



$tg\, x = ctg(\pi - x)$

Тогда $tg\, 53^\circ = ctg\, 37^\circ$

Отсюда $tg\, 37^\circ \cdot \ldots \cdot tg\, 53^\circ = tg\, 45^\circ \cdot tg\, 37^\circ \cdot ctg\, 37^\circ \cdot tg\, 38^\circ \cdot ctg\, 38^\circ \ldots$

$tg\, x \cdot ctg\, x = 1$, тогда $tg\, 37^\circ \cdot \ldots \cdot tg\, 53^\circ = tg\, 37^\circ \cdot \ldots tg\, 44^\circ \cdot tg\, 45^\circ \cdot ctg\, 44^\circ \ldots ctg\, 37^\circ =$

$= 1 \cdot tg\, 45^\circ = 1$

(+)

Отсюда $S = \lg 10^{(4+\ldots+20)} = 4 + \ldots + 20 = \frac{4+20}{2} \cdot 17 = 204$

Ответ: $S = 204$

№4.

$a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (нер-во Коши) можем применить, т.к. $a, b, c > 0$

$(a+b+c)^3 \geq 27abc$ Возводим в куб (знак не изменится)

$(a+b+c)^2(a+b+c) \geq 27abc$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$2ab \leq a^2 + b^2$ (Коши; $a^2, b^2, c^2 > 0$, поэтому можем применить

$2ac \leq a^2 + c^2$

$2bc \leq b^2 + c^2$

Можем увеличивать левую часть, т.к. не повлияет на знак. Тогда

$3(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \geq 27abc \iff 18abc(a+b+c) \geq 27abc$ (замена по усл.)

$a+b+c \geq \frac{27abc}{18abc} = 1,5 \Rightarrow a+b+c \geq 1,5$

Ответ: Наим. знач. $a+b+c = 1,5$

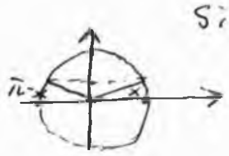
(±)

есть оценка, но не min

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$\sin(nx) = \sin(x)$ $\quad x \in [0; \pi]$ $\quad \sin x = \sin(\pi - x)$



Запишем совокупность удовл. условию

$\left[\begin{array}{l} \cancel{nx = x + 2\pi k} \\ \cancel{nx = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k} \end{array}\right.$

$\cancel{x(n-1) = 2\pi k}$

$\cancel{x(n+1) = \pi(\frac{1}{2} + 2\pi k)}$

$\left[\begin{array}{l} nx = x + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}; \; k \\ nx = \pi - x + 2\pi p; \quad p \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x(n-1) = 2\pi k \\ x(n+1) = \pi(1+2p) \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi k}{n-1} \quad (1) \\ x = \frac{\pi(2p+1)}{n+1} \quad (2) \end{array}\right.$

Но при $k > 0$, т.к. $(n-1)x = 2\pi k$, а $n > 1$, то ($>0 \Rightarrow >0$), $p > \frac{1}{2}$

и $(n+1)x = \pi(2p+1)$ ($>0 \Rightarrow >0 \Rightarrow p > \frac{1}{2}$)

Тогда в рассм. далее нер-вах $x > 0$ и рассм. этот сл. отдельно

Т.к. $x \in [0; \pi]$, то $n-1 \geq 2k$, иначе $\frac{2\pi k}{n-1} > \pi$, что противоречит условию

Также $n+1 \geq 2p+1$, иначе $\frac{\pi(2p+1)}{n+1} > \pi$, что также противоречит условию

Рассмотрим первое уравнение

(1) $x = \frac{2\pi k}{n-1}$; $\quad n-1 \geq 2k \rightarrow \frac{n-1}{2} \geq k$

Попробуем выявить зависимость у ~~этого~~ кол-ва решений от n, пусть n - нечетн.

Тогда $\frac{n-1}{2} \geq k$ $\quad \frac{n-1}{2}$ – всегда целое, значит при n-неч. в этом уравнении будет $\frac{n-1}{2} + 1$ решение (я натуральное от 1 до n + решение от „0" т.к. мы не учитываем, когда $k = 0$, т.к. по усл. $n > 1$ и $k = 0$)

Пусть n - четное, тогда $\frac{n-1}{2} \geq k$, но при таких $\frac{n-1}{2}$ – k - не целое $\Rightarrow$ нужно брать $\frac{n-2}{2} \geq k$, т.к. $\frac{n}{2}$ мы никогда не достигнем (из-за огр. $\frac{n-1}{2} \geq k$)

И также мы здесь не учитываем $x = 0$, поэтому кол-во реш. $= \frac{n-2}{2} + 1$

(2) Пусть n - нечетн.

$n + 1 \geq 2p + 1$; $\quad \frac{n}{2} \geq p$, тогда $\frac{n-1}{2} \geq p$ (иначе p-нецелое), а $\frac{n+1}{2}$ мы не достигнем, но также $p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ что мы не учитываем „0" как решение, тогда кол-во решений $\frac{n-1}{2} + 1$

Пусть n - четн.

$\frac{n}{2} \geq p$, p - целое, но $p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ мы не учитываем „0" как решение, тогда кол-во решений $\frac{n}{2} + 1$.

Мы рассмотрели зависимости для n-четных и n-нечетных в разных уравнениях

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Теперь найдем общую зависимость для нечётных n

$\frac{n-1}{2}+1+\frac{n-1}{2}+1=n+1$

Для четных n:

$\frac{n}{2}+1+\frac{n-2}{2}+1=n+1$

Заметим, что зависимость одинаковая, тогда для любого n

$S(n)=n+1$

Но в т. $\frac{\pi}{2}$ уровнения ① и ② совпадают => в этих точках мы учитываем корень 2 раза. Найдем общий вид этих точек:

$\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

$\frac{n}{2}=\frac{1}{2}+2k$

$n=1+4k$, => если $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$, то мы учитываем один корень дважды.

Теперь найдем точки $S(n)=2017$

$S(2016)=2017$; точке $2017\equiv 1\,\mathrm{mod}\,4$, тогда

$S(2017)=2018-1=2017$ когда $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$

$S(2018)>2017$ и т.д.; $q>1$; $S(q+2017)>q+2017-1$ => $S(q+2017)>$ $q\in\mathbb{Z}$

$>q+2016>2017$ $(q>1)$

$S(q)\leq 2016$ => точек $S(n)$ всего два $q<2016$

(+)

Ответ: зависимость $S(n)=n+1$, но при $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ $S(n)=n$

$S(2016)=2017$

$S(2017)=2017$

№2.

1) x
2) $c-2x$
3) $c-2(c-2x)=-c+4x$
4) $c-2(-c+4x)=3c-8x$
5) $c-2(3c-8x)=-5c+16x$
...

Рассмотрим как задается x:

Поэтапно подставляя предыдущее значение кол-ва кубометров в закон для следующего мес. $4a(-2)^{n-1}x$, т.к. предыдущ. знач. мы подставляем в $-2(x)\to -2((-2)^0x)=-2x\to -2((-2)x=$ $(-2)^2x$ и т.д.

Теперь рассмотрим зависимость $c\to$

В первом месяце c не будет, тогда в и месяце $2, (-2^0)c$ далее

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$(-2)^0 c - 2((-2)^0 c) = -2^0 c + (-2)^1 c$

$-2^0 c - 2((-2)^0 c + (-2)^1 c) = -2^0 c + (-2)^1 c + (-2)^2 c)$

И так далее подставляя предыдущее значение мы умножаем его на -2 и прибавляем $(-2)^0 c$ $(c + 2(x))$, тогда коэффициент при $c = k_n$, где $k_n = (-2)^0 + (-2)^1 + \ldots + (-2)^{n-2}$ (до $n-2$, т.к. в первом месяце нет c)

$(-2)^{n-1} x + c k_n = (-2)^{n-1} x + c((-2)^0 + (-2)^1 + \ldots + (-2)^{n-2}) =$

$= (-2)^{n-1} x + \frac{c(-2-1)((-2)^0 + \ldots + (-2)^{n-2})}{(-2-1)} = \frac{((-2)^{n-1} - 1)c}{-3} + (-2)^{n-1} x$

Тогда приравняем любые знач. в месяцах

$\frac{((-2)^{n-1} - 1)c}{-3} + (-2)^{n-1} x = \frac{((-2)^{k-1} - 1)}{-3} + (-2)^{k-1} x$. Пусть $(-2)^{n-1} = a$, $(-2)^{k-1} = b$

$\frac{(a-1)c}{-3} + ax = \frac{(b-1)c}{-3} + bx$

$x(a-b) = \frac{c(b-1-a+1)}{-3} = \frac{c(b-a)}{-3}$

$\frac{-3x(a-b)}{(b-a)} = c$; $c = 3x$

±

Запас может оказаться одинаковым

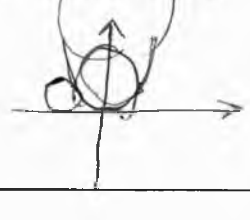
И тогда значение запаса равно:

$\frac{((-2)^{n-1} - 1)3x}{-3} + (-2)^{n-1} x = x - \cancel{(-2)^{n-1} \cdot x} + \cancel{(-2)^{n-1} x} = x$

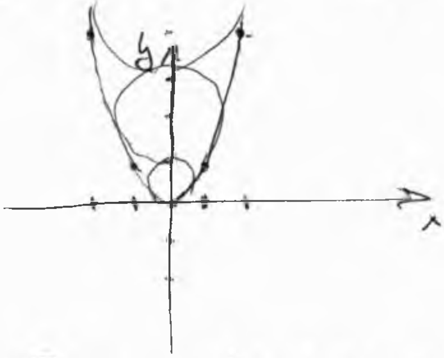
~~Ответ~~: Может и тогда запас равен x. = ?

№3.

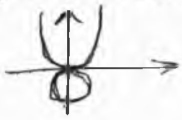
① Чтобы окружность касалась обеих ветвей параболы она должна находиться внутри нее, т.к., если окружность касается ветви с внешней стороны, то она ~~...~~ не касается второй



ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



Также самая первая окружность касается центра извне, иначе она также будет касаться ветвей, пересекать их



② Также первая окружность имеет центр лежащий на оси Oy, иначе она не будет касаться центр или будет пересекать параболу.

Тогда вторая окружность, чтобы касаться с первой и иметь касание с обеими ветвями также лежать на главной оптической оси и из п. ① находится внутри параболы.

(−)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

Уы 60-14

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 1710

ФАМИЛИЯ Зажигина

ИМЯ Елизавета

ОТЧЕСТВО Андреевна

Дата рождения 20.08.2000

Класс: 10

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 2 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Заж

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ Ybl 60-14

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$12x+\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}=35$ $D: x^2-1>0$, $x^2>1$

$D: \frac{|x|>1}{\sqrt{x^2-1}}$ (прибыль т.о везде).

X неотрицателен, т.к. $12x<0$, $\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}<0$, а $35>0$ (значит, они не в убытке)

Если $x\in Z$, то $\sqrt{x^2-1}\in I$ (x^2-1 не является квадратом числа).

тогда $\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}\in I$, а $Q+I\neq Q$ (где Q-рациональное число, I-иррациональное, число) $12x\in Q$

Очевидно, что $x\notin I$, тогда $I+Q\neq Q$, где $I=12x$.

Тогда $x\in Q$ и оно будет дробно. Пусть $x=\frac{m}{n}$, тогда $\sqrt{\frac{m^2}{n^2}-1}=$ $=\sqrt{\frac{m^2-n^2}{n^2}}$, и это должно быть квадратом, очевидно, что числа m, n и $\sqrt{m^2-n^2}$ составляют Пифагорову тройку, ~~так с всоответствии~~. Первая Пифагорова тройка = 3,4,5. Пусть тогда $m=5$, $n=4$, тогда $x=\frac{5}{4}$; $\frac{12\cdot5}{4}+\frac{12\cdot5}{4\sqrt{\frac{25-16}{16}}}=$ $=15+\frac{15\cdot4}{3}=35$ ~~верно~~ верно. Значит, ~~да~~ совет директоров должен поверить этому и прибыль составит 1,25млн руб. [1]

[1] Необходимо также, чтобы $\frac{12\cdot m}{n}$ - было целым числом и $12\vdots n$

Также $\frac{12\cdot m\cdot n}{n\cdot\sqrt{m^2-n^2}}$, $12\vdots\sqrt{m^2-n^2}$. Такое возможно только если тройка = 5,4,3 (т.к. следующая 5,12,13- не уд. условию во вставке 1)

Ответ: да, должен поверить

(+)

№2

Пусть x м³- в Iм месяце, $\underline{x>0}$.

$\frac{1}{1-x}$ м³ во IIм месяце $\frac{1}{1-x}>0$ $1-x>0$ $x<1$

Значит, $\underline{0<x<1}$

$\frac{1}{1-x}=b$, тогда в IIIм месяце $\frac{1}{1-b}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{1-x-1}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}$ м³.

Но $\frac{x-1}{x}>0$

Из систем

$\begin{cases} x<0 \\ x>1 \\ x<1 \\ x>0 \end{cases}$ получается, что такого x не существует, если эту формулу использовать для III-го месяца и далее.

Предположим, что в I-е два месяца это возможно

$x=\frac{1}{1-x}$

$x(1-x)=1$

$x-x^2=1$

$x^2-x+1=0$

$D<0$ решений нет.

Ответ: невозможно, не может.

(+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УЫ 60-14

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\dots+\frac{(-1)^n x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}=0$$

0 1 2 . . . n

Пронумеруем слагаемые, начиная с 0. $i=0\dots n$;

В каждом слагаемом, начиная со второго присутствует множитель $(x-1)$. Если предположить, что $x-1=0$, то останутся слагаемые 0 и 1

$1-\frac{x}{1!}+0+0\dots+0=0$ $\underline{\underline{x=1}}$ из $x-1=0$. Подставим: $1-\frac{1}{1!}=0$ - верно.

$x=1$ - одно из решений уравнения.

Предположим $x=n$:

$$1-\frac{n}{1!}+\frac{n(n-1)}{2!}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n-1}\cdot n(n-1)\cdots 1}{n!}=0$$

0 1 2 . . . n-1 n

Очевидно, что последнее слагаемое $=\pm 1$, т.к. $\frac{(-1)^{n-1}\cdot n!}{n!}=\pm 1$.

$(n-1)$е слагаемое $=\pm n$, по модулю, так же, как и 1-е по $\left(\frac{n}{1!}=n\right)$

$(n-2)$е слагаемое $=\pm\frac{n(n-1)}{2}$, также, как и 2е слагаемое.

У нас получается △ник Паскаля, где чередуются знаки коэффициентов

$n=1$ $+1-1$

$n=2$ $+1-2+1$

$n=3$ $+1-3+3-1$

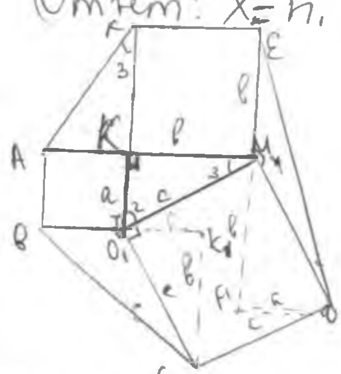
- - - - - - - -

$n=n$ $+1\dots\dots -1$

Учитывая, что знаки чередуются, то их сумма будет равна нулю.

Значит $x=n$, где $n\in N$. ($x=1$ - частный случай)

Ответ: $x=n$, $n\in N$



№4

A..F - новый дом

KON - старый дом.

Заметим, что $S_{OKM}=S_{\triangle KF}$ (катеты равны)

Пристроим к △ку BOC △ OKM, а к △EMO △AFK

Сделаем это из предположения, что $\angle 1+\angle 2=180°$, а $\angle 3+\angle 4=180°$

Сторону c совмещаем со стороной c

Мы сможем найти площади △ BK_1C и △EFD

$S_{BK_1C}=\frac{2a\cdot b}{2}=ab$; $S_{EFD}=\frac{2b\cdot a}{2}=ab$ Сумма площадей этих △ов = сумме площадей △ов △AFK+△EMD+△BOC+△KON $=2ab$. Сумма площадей квадратов $=a^2+b^2+(a^2+b^2)^2$

$S_{нового\,дома}=2ab+a^2+b^2+(a^2+b^2)^2=(a+b)^2+(a^2+b^2)^2$.

$S_{старого\,дома}=\frac{ab}{2}$ Если $a=b=1$, то отношение площадей будет минимальным Ответ $(a+b)^2+(a^2+b^2)^2$; $a=b$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

УГИО	RQ 41-69
Место проведения	шифр

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ ЗАЙЦЕВ

ИМЯ АЛЕКСЕЙ

ОТЧЕСТВО ВИКТОРОВИЧ

Дата рождения 17 июля 2001 **Класс:** 9

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ЗАВ

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RQ 41 - 69

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.

a) $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2 = (x+\frac{1}{x})^2 - 2 = A^2 - 2$

$B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - 3x - 3\frac{1}{x} = (x+\frac{1}{x})^3 - 3(x+\frac{1}{x}) =$

$= A^3 - 3A$

$B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2)^2 + (\frac{1}{x^2})^2 = (x^2)^2 + 2 + (\frac{1}{x^2})^2 - 2 = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2 =$

$= B_2^2 - 2 = (A^2-2)^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 4 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2$

$B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8} = (x^4)^2 + (\frac{1}{x^4})^2 = (x^4)^2 + 2 + (\frac{1}{x^4})^2 - 2 = (x^4 + \frac{1}{x^4})^2 - 2 =$

$= B_4^2 - 2 = (A^4 - 4A^2 + 2)^2 - 2 = A^8 - 8A^6 + 16A^4 + 16A^2 + 4 - 2 =$

$= A^8 - 8A^6 + \overset{20}{\cancel{16}}A^4 - 16A^2 + 2$

b) $B_2 = B_4 = B_8 \Leftrightarrow \begin{cases} B_2 = B_4 & (1) \\ B_4 = B_8 & (2) \end{cases}$

(1) $B_2 = B_4 \Leftrightarrow A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 \Leftrightarrow A^4 - 5A^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (A^2-4)(A^2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A^2 = 4 \\ A^2 = 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} A = \pm 2 \\ A = \pm 1 \end{array}\right.$

по нер. Коши: при $x>0$ $x + \frac{1}{x} \geq 2$; при $x<0$ $x + \frac{1}{x} \leq -2 \Rightarrow A \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \Rightarrow$

$A = \pm 2 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

(2) $B_4 = B_8 \Leftrightarrow A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - 8A^6 + \overset{20}{\cancel{16}}A^4 - 16A^2 + 2$, при подст. ± 2

$256 - 512 + \overset{320}{\cancel{256}} - 64 + 2 = 16 - 16 + 2 = 2$ (верно)

при $x = \pm 1$ и $A = \pm 2$. — почему?

c) при $x = \pm 1$

$C_1 = ((1 + \frac{1}{1}) \cdot \frac{1}{2})^{2012} = 1^{2012} = 1$

$C_{-1} = ((-1 + \frac{1}{-1}) \cdot \frac{1}{2})^{2012} = (-1)^{2012} = -1$

Ответ: ± 1

2.

Заметим, что если в любом месяце запас был x м³, в следующем будет $6 - x$ м³, в следующем будет $6-(6-x) = x$ м³, и так меняется каждый месяц. Заметим, что запас может иметь только 2 значения. Одно из них должно быть квадратом другого значения, $x^2 = 6 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$

$x = -3; 2$. $x > 0 \Rightarrow x = 2$, значит другой запас в следующем после будет $6-x=6-2=4$; $2^2=4$ не только (∓)

Ответ: да потом, при запасе $=4$ и в каждом втором месяце.

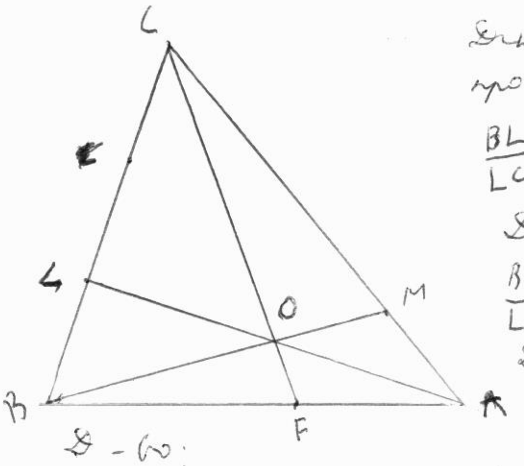
3. $1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0 \;\Big|\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$

$24-24x+12x^2-12x-4x^3+12x^2-8x+x^4-6x^3+11x^2-6x=0$

$x^4-10x^3+35x^2-50x+24 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=2\\ x=3\\ x=4\end{array}\right.$

(±)

Ответ: $x=1;2;3;4$.

4. 

Для того, чтобы это сделать нужно провести чевианы AL, BM и CF; где $\frac{AF}{FB}=\frac{2}{3}$; $\frac{BL}{LC}=\frac{1}{2}$; $\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$ их пересечение и есть точка O

Дано: $\triangle ABC$; AL, BM, CF — чевианы; $\frac{AF}{FB}=\frac{2}{3}$; $\frac{BL}{LC}=\frac{1}{2}$; $\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$; $AL\cap BM\cap CF=O$.

Д-ть: $S_{\triangle AOB}:S_{\triangle BOC}:S_{\triangle AOC}=1:2:3$

(±)

Д-во:

т.к. $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}=1 \xRightarrow{\text{по теор. Чевы}} AL\cap BM\cap CF=O$.

$\frac{AF}{FB}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle BOF}}=\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}}=\frac{2}{3}$ $\qquad \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AOF}}=$

по теор. о пр. отр. $\frac{CO}{OF}=\frac{CL}{BL}\left(\frac{BF}{FA}+1\right)=\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}+1\right)=2\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{1} \Rightarrow \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle BOF}}=\frac{5}{1}$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle BOF}+S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{AOBC}}=\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOB}+S_{AOBC}}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle AOB}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}$

$\frac{AF}{FB}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle BOF}}=\frac{S_{\triangle ACF}}{S_{\triangle BCF}}=\frac{2}{3}$ $\Big| \Rightarrow S_{\triangle BOF}=\frac{3}{5}S_{\triangle AOB}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{10}S_{\triangle ABC}$

$\frac{CO}{OF}=\frac{5}{1}$

$\Rightarrow S_{\triangle COB}=\frac{5}{10}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$

$S_{\triangle AOC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AOB}-S_{\triangle BOC}=S_{\triangle ABC}-\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}-\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \Rightarrow$

$S_{\triangle AOB}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle BOC}=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}:\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}:\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=1:2:3$ ч.т.д.

5. $f(x)-f(x-10)=x^2+px+q+x^2-20x+100+px-10p+q=0 \Leftrightarrow$

$2x^2+(2p-20)x+2q-10p+100=0 \Leftrightarrow x^2+(p-10)x+q-5p+50=0$ (+)

$D=p^2-20p+100-4q+20p-200=p^2-4q-100=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow$ 1 корень

по условию $D_0=p^2-4q=100$

Ответ: 1 корень

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

NУ 61-10

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Зиганшин ЗИГАНШИН

ИМЯ Алим АЛИМ

ОТЧЕСТВО Инзарович ИНЗАРОВИЧ

Дата рождения 24.08.2003 **Класс:** 7Б

Предмет математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

т.к. а-литров в неделю на 1 машину, то 31а – в I неделю на все машины
30а – во II неделю на все машины

пусть x – недель, тогда топлива всего куплено: $31ax$

$31ax = 2\cdot(31a+30a+\ldots+n)$

$31x = 2\cdot(31+30\ldots+n)$

$31x = (31+n)(31-n)$

$31x = 31^2-n^2$

$\vdots 31 = 31^2 - n^2 \Rightarrow n^2 \vdots 31 \Rightarrow n^2 \vdots 31$ (т.к 31 – простое число)

$\vdots 31$

I сл $n=31$:

$31x = 31^2-31^2$

$31x=0$

$x=0$ тогда топлива: $31ax=0$ – не уд

II сл $n=0$:

$31x=31^2$

$x=31$ тогда топлива 31^2a

Ответ: 31 неделя
31^2a – топлива

+

№2

пусть x – кавалеров
y – дам

$\begin{cases} x+y=20 \\ x=y+6 \end{cases}$ (т.к 1 дама – 7 кавалеров
2 дама – 8 кавалеров ...)

$2y+6=20$

$2y=14$

$y=7$

$x=20-7=13$

Ответ: 13 кавалеров.

+1

№3

I сл: $y+z<60$:

тогда: $\begin{cases} y+z=x & (1) \\ z+x=y & (2) \end{cases}$

$z+x+z=x$

$2z=0$

$z=0$

(1) $y+0=x$

$y=x$

~~$y=x$~~ $x-y=0$

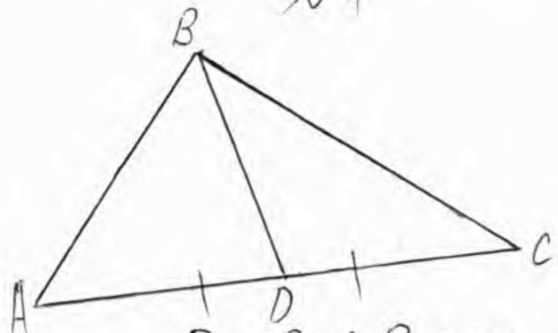
II сл: $y+z\geq 60$ заметим что $y<24$, $z<24$ (т.к часы не могут показывать 24 часа)

$\begin{cases} y+z\leq 48 \\ y+z\geq 60 \end{cases} \Rightarrow 48\geq 60$ - не уд, значит $y+z<60$

Ответ: 0 - один из ответов (+)

№4

Б)



неравенства $P_\triangle ABD \neq P_\triangle BDC$ т.к

1) $AD = DC$

2) BD - общая сторона

3) $AB\neq BC$.

~~Продолжение~~

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

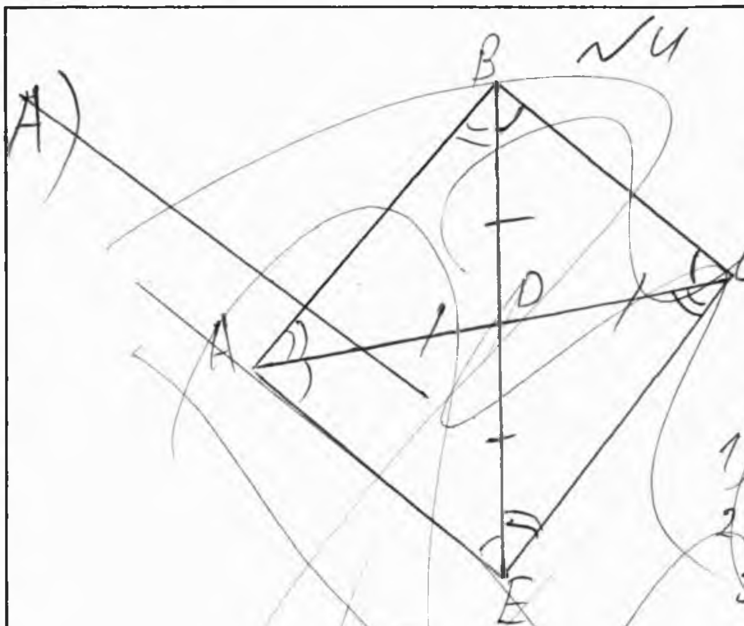
Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NY 61-10

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

А)



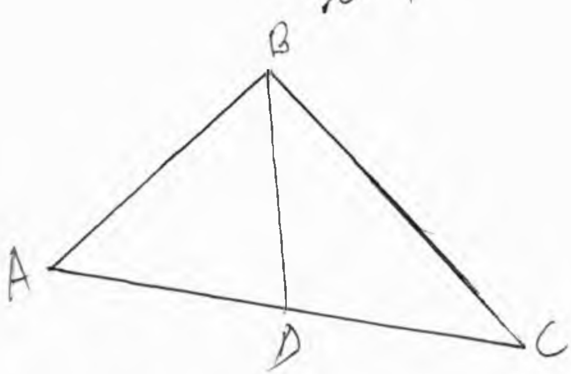
Достроим △ABC до ~~четырехугольника~~ прямоугольника ABCE

~~Рассмотрим четырехугольник BCE равный △ABC по III признаку:~~
~~1) AB=CE — по постр.~~
~~2) AC=AE — по постр.~~
~~3) AC=BE — как диагонали в прямоугольнике~~

Заметим что AC=BE — как диагонали в прямоугольнике, а раз отрезки равны, то и их половины равны

№4

А)



Заметим что BD - общая сторона, AD=DC, а раз в треугольниках все стороны кроме 1-й равны, то площади не равны.

№5

$$\frac{2,0\ldots04}{(1,0\ldots04)^2+(2,0\ldots4)} \vee \frac{2,0\ldots02}{(1,0\ldots02)^2+2,0\ldots02}$$

$(1)\ 2,0\ldots02\cdot(1,0\ldots04)^2 \vee (2)\ 2,0\ldots04\cdot(1,0\ldots02)^2\ ?$

(1)

$$\begin{array}{r} \times 2,000000000002 \\ \times 1,000000000004 \\ 1,000000000004 \\ \hline +12000000000012 \\ +20000000000002 \\ +16000000000016 \\ 20\ldots002 \\ \hline 2,0000000000360000000001920000000000032 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r} 2,0000000000004 \\ \times 1,000000000002 \\ \times 1,000000000002 \\ \hline +80000000000016 \\ +80000000000016 \\ 2000000000004 \\ \hline 2,0000000001200000000024000000000016 \end{array}$$

$(1) > (2) \Rightarrow 2,0\ldots02\cdot(1,0\ldots04)^2 > 2,0\ldots04\cdot(1,0\ldots02)^2$

$$\frac{2,0\ldots02}{(1,0\ldots02)^2+2,0\ldots02} > \frac{2,0\ldots04}{(1,0\ldots04)^2+2,0\ldots04}$$

~~[illegible]~~

(+)

5 $-5C+16x$ -8

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

город Красноярск

Место проведения

02711МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Зубров

ИМЯ Иван

ОТЧЕСТВО Евгеньевич

Дата рождения 18.08.1999

Класс: 11

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

1) $S=\lg(10^4\,tg\,2017^\circ)+\lg(10^5\,tg\,2018^\circ)+\ldots+\lg(10^{20}\,tg\,2033^\circ)$

Заметим, что ~~По формуле приведения~~: $tg\,2017^\circ=tg\,37^\circ,\ tg\,2018^\circ=tg\,38^\circ \ldots\ tg\,2033^\circ=tg\,53^\circ$

По формуле приведения: $tg\,53^\circ=ctg\,37^\circ$, тогда $tg\,37^\circ\cdot ctg\,37^\circ=1$

$\lg(10^4\,tg\,37^\circ)+\lg(10^5\,tg\,38^\circ)+\ldots+(\lg 10^{20}\,tg\,53^\circ)=$

$=\lg(10^4\,tg\,37^\circ\cdot 10^5\cdot tg\,38^\circ\ldots 10^{11}\,tg\,44^\circ\cdot 10^{12}\,tg\,45^\circ\cdot ctg\,44^\circ\cdot 10^{13}\cdot\ldots\cdot 10^{20}\,ctg\,37^\circ)=$

$=\lg(10^{204}\cdot tg\,45^\circ)=\lg 10^{204}=204.$

Ответ: 204.

(+)

2)

№ месяца	кол-во газа	на сколько изменяется „a" в сравнении с прошлым месяцем
1	x	0
2	$c-2x$	+1
3	$-c+4x$	−2
4	$3c-8x$	+4
5	$-5c+16x$	−8
6	$11c-32x$	+16
7	$-21c+64x$	−32

Пусть:

a – коэф-нт перед c

b – коэф-нт перед x, тогда:

1) $b_n=(-2)^{n-1}$

2) $a_n-a_{n-1}=(-2)^{n-2}=b_{n-1}$

Пусть в месяце n и месяце m – равные кол-во газа, тогда:

$a_n c+b_n x=a_m c+b_m x$

$c(a_n-a_m)=x(b_m-b_n)$

т.к. $a_n-a_{n-1}=b_{n-1}$, то

$c(b_{n-1}+b_{n-2}+\ldots+b_m)=x(b_m-b_n)$; из $b_n=(-2)^{n-1}$ получаем:

$c((-2)^{n-2}+(-2)^{n-3}+\ldots+(-2)^{m-1})=x((-2)^{m-1}-(-2)^{n-1})$

$(-2)^{m-1}\cdot c((-2)^{n-m-1}+(-2)^{n-m-2}+\ldots+1)=(-2)^{m-1}x(1-(-2)^{n-m})\quad \Big|:(-2)^{m-1}$

$c((-2)^{n-m-1}+(-2)^{n-m-2}+\ldots+1)=x(1-(-2)^{n-m})$; из $b_n=(-2)^{n-1}$ получаем:

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$c(b_{n-m}+b_{n-m-1}+\ldots+b_1)=x(1-b_{n-m+1})$; из $a_n-a_{n-1}=b_{n-1}$ получаем:

$c(a_{n-m+1}-a_1)=x(1-b_{n-m+1})$; $(a_1=0)$, значит

$a_{n-m+1}\cdot c=x-b_{n-m+1}x$, пусть $(n-m+1)=k$

$a_k c+b_k x=x$, это значит, что в месяце k кол-во газа равняется x, также, как и в первом месяце.

Ответ: Может, x.

$x=?$

4) $a^2+b^2+c^2=6abc$

Применим неравенство Коши (т.к. a,b,c - положительные):

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$ $\quad a^2+b^2\geq 2ab$ $\quad b^2+c^2\geq 2bc$ $\quad a^2+c^2\geq 2ac$

$(a+b+c)^3\geq 27abc$

$(a+b+c)^2(a+b+c)\geq 27abc$

$(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac))(a+b+c)\geq 27abc$, заменим $2(ab+bc+ac)$ на $2(a^2+b^2+c^2)$, т.к $2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+bc+ac)$, то левая часть неравенства может только увеличиться, тогда

$3(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geq 27abc$

$18abc(a+b+c)\geq 27abc$

$a+b+c\geq\frac{27}{18}$

$a+b+c\geq\frac{3}{2}$

Ответ: $\frac{3}{2}$

это оценка, пит не обоснован

±

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) $x \in [0; \pi]$

$\left[\begin{array}{l} nx = x + 2\pi k; \\ nx = \pi - x + 2\pi k; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} nx - x = 2\pi k; \\ nx + x = \pi + 2\pi k \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x(n-1) = 2\pi k; \\ x(n+1) = \pi(1+2k) \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi k}{(n-1)} \\ x = \frac{\pi(1+2k)}{n+1} \end{array}\right.$

; заметим, что если $n-1 < 2k$, то $x \notin [0;\pi]$, значит $n-1 \geq 2k$

; заметим, что если $n+1 < 2k+1$, то $x \notin [0;\pi]$, значит $n+1 \geq 2k+1$

Будем рассматривать отдельно две группы корней:

1) $n-1 \geq 2k$

$\frac{n-1}{2} \geq k$

а) если n-нечёт., то

$\frac{n-1}{2} \geq k$

б) если n-чёт., то

$\frac{n-2}{2} \geq k$, т.к. k – целое

2) $n+1 \geq 2k+1$

$\frac{n}{2} \geq k$

а) если n-нечёт., то

$\frac{n-1}{2} \geq k$

б) если n-чёт., то

$\frac{n}{2} \geq k$

Но мы не рассматривали случай, когда $x=0$; тогда n-любое, значит к каждому неравенству нужно прибавить +1 в левой части:

$\frac{n-1}{2} + 1 \geq k$ – для нечёт.

$\frac{n-2}{2} + 1 \geq k$ – для чёт.

$\frac{n-1}{2} + 1 \geq k$ – для нечёт

$\frac{n}{2} + 1 \geq k$ – для чёт.

+

складываем решения для n-нечёт и n-чёт.:

$\frac{n-1}{2} + 1 + \frac{n-1}{2} + 1 = n+1$

$\frac{n-2}{2} + 1 + \frac{n}{2} + 1 = n+1$, значит нет разницы при n-чёт. или нечёт, значит зависимость $S(n) = n+1$, но при переборе случаев мы дважды учитывали один и тот же корень $\frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k = \pi - \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, значит: в $S(n)$

$n\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow n = 1 + 4k$, т.е. для всех n, которые при делении на 4 дают остаток 1 один корень мы учитывали два раза, $2017 = 4 \cdot 504 + 1$

$S(2016) = 2017$ $S(2017) = 2018 - 1 = 2017$ Ответ: два раза.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Лицей № 18	ХЫ 23-75	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Иванов

ИМЯ Александр

ОТЧЕСТВО Сергеевич

Дата рождения 31. 05. 2002 **Класс:** 8

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11. 02. 2017 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Иванов

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-75

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases}$$

1) $1+x+y=xy$
$xy-x=1+y$
$x(y-1)=1+y$
$x=\frac{1+y}{y-1}$

2) $2+y+z=yz$
$yz-z=2+y$
$z(y-1)=2+y$
$z=\frac{2+y}{y-1}$

3) $5+z+x=xz$
$5^{(y-1)^2}+\frac{2+y}{y-1}^{\backslash y-1}+\frac{1+y}{y-1}^{\backslash y-1}=\frac{(2+y)(1+y)}{(y-1)^2}$

$$\frac{5y^2-10y+5-2y-2+y^2-y+y-1+y^2-y^2-2-2y-y-y^2}{(y-1)^2}=0$$

$$\frac{6y^2-16y}{(y-1)^2}=0$$

ОДЗ: $y\neq 1$

Р. У. $6y^2-16y=0$
$6y(y-16)=0$
$y=16$ или $y=0$.

4) при $y=0$: $x=\frac{1+y}{0-1}=-1$
$z=\frac{2+0}{0-1}=-2$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$$

5) при $y=16$: $x=\frac{17}{15}=1\frac{2}{15}$
$z=\frac{18}{15}=1\frac{3}{15}=1\frac{1}{5}$

$$\begin{cases} x=1\frac{2}{15} \\ y=16 \\ z=1\frac{1}{5} \end{cases}$$

±

частичное реш.

Ответ: $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=1\frac{2}{15} \\ y=16 \\ z=1\frac{1}{5} \end{cases}$ −

№3.

1) $120-31-41=48$ (кг) - вес „средних" - „С"

2) Т.к. лёгких - „Л" 3 шт и их ~~вес~~ масса - 31 кг, то средняя масса груза сост. $\frac{31}{3}=10\frac{1}{3}$ кг, т.е. среди самых лёгких будут приборы тяжелее и легче $10\frac{1}{3}$ кг.

3) Аналогично п.2): среди тяжёлых - „Т" будут ~~грузы~~ приборы тяжелее и легче $13\frac{2}{3}$ кг

4) Если $N_{ср}=3$, то 16 кг - средн. вес „С", т.е. среди „С" будут грузы тяжелее 16; но среди „Т", по услов, будут грузы и легче $13\frac{2}{3}$ => $N_{ср}\neq 3$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-75

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

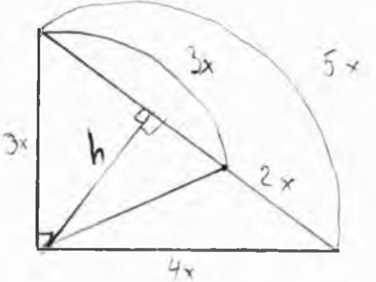
5) Если $N_{ср}=5$, то 9,6 кг – средн. масса „С", т.е. среди 5 приборов будут и те, что тяжелее 9,6 кг, а среди „Л", по условию, будут приборы и тяжелее $10\frac{1}{3} \Rightarrow N_c \neq 5$

6) Из 4) и 5) – $N_{ср}=4$ (т.к. $N\neq3$ и $N\neq5$ и $3<N<5$, т.к. при увеличении и уменьшении кол-ва „средних" средн. масса „С" будет более уменьшаться или увелич. соответственно). (+)

7) $3+4+3=10$ приборов.

Ответ: 10 приборов.

№4



а) 1) гипотенуза равна $5x$ (из „Пифагоровых троек")

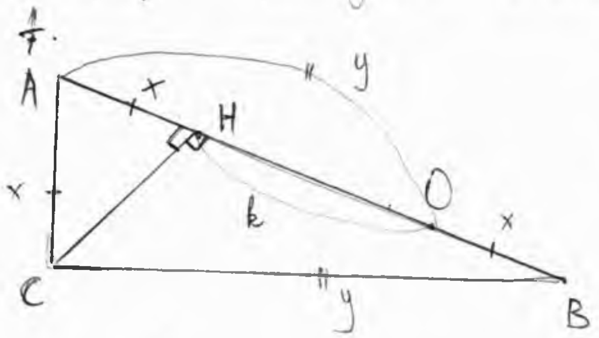
2) $3x+4x+5x=12x$ – весь путь; P участка

3) $\frac{12x}{2}=6x$ – пройдёт кажд. брат

4) $6x-4x=2x$; $6x-3x=2x$ (Отметим это на рисунке)

5) $S_{I}=\frac{3xh}{2}=1,5xh$
$S_{II}=\frac{2xh}{2}=2xh$ $\Rightarrow$ площади не равны, т.е. у братьев не получились одинаков. площади.

б) Нарисуем прямоугольн. $\triangle ABC$, с отношением катетов, не равным $\frac{1}{1}$.



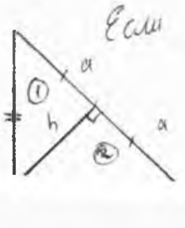
$AC=y$
$BC=x$

Значит, I брат прошёл $x+y$
II – $y+x$; Встреча в точке O

Проведем $CH\perp AB$; $CH=h$

$S_{ACO}=\frac{hy}{2}$
$S_{BCO}=\frac{h(x+k)}{2}$

Если $S_{ACO}=S_{BCO}$, то $\frac{hy}{2}=\frac{h(x+k)}{2} \Rightarrow y=k+x \Rightarrow AH=X \Rightarrow$
$\Rightarrow AH=CH$ и $\triangle ACH$ – р/б с ~~углами~~ углом при основании равным 90°, что невозможно по сумме углов $\triangle$-ка $\Rightarrow$ отношен катетов кроме $\frac{1}{1}$ не существует.



Если отношение катетов равно $\frac{1}{1}$, то $S_{①}=S_{②}$, т.к. $a=a$, т.к. h – высота в р/б $\triangle$-ка $\Rightarrow$ h – медиана. (+)

Ответ: а) Нет; б) Один. Отношен. катетов $=\frac{1}{1}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-75

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

1) В 10ч Р (резервуар) заполнен max
2) В 12ч Р заполнен на $\frac{1}{2}V$
3) В 14ч Р - на $\frac{2}{3}V$

Из 2) и 3): за 2ч Р заполнился на $\frac{2}{3}V - \frac{1}{2}V = \frac{1}{6}V$, при том, что с Р ещё и выкачивали ~~во~~ горючее

$V = \frac{1}{2}V - \frac{1}{6}V = \frac{1}{3}V \Rightarrow$ в 10ч Р заполнен на $\frac{1}{3}$

С t(неизв. время) до 10ч на $\frac{1}{3}V = \frac{2}{6}V$

Т.к. с включением насоса II (выкачивающего) Р заполнялся ~~на~~ за 2ч на $\frac{1}{6}V$, то без н.II, он заполнялся на тот же объём ($\frac{1}{6}$) менее чем за 2ч (т.к. не откачивали горючее) $\Rightarrow$ Р заполнится на $\frac{2}{6}V$ менее чем за 4ч $\Rightarrow$ насос I включили Позже 6 утра.

Ответ: Позже 6 утра (Например 6ч 1мин или 6ч 0м 1с.) +

$A = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

№2.

а) $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4+1}{x^2} = A^2 - 2$ $\left(\text{т.к. } \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 - 2 = \frac{x^4+2x^2+1}{x^2} - \frac{2x}{2} = \frac{4x^2+1}{x^2}\right)$

$B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = \frac{x^6+1}{x^3} = \cancel{A^3 - 3A}$ $A^3 - 3x - \frac{3}{x} = A^3 - 3A$

$B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4} = \frac{x^8+1}{x^4} = A^4 - 4x^2 - 6 - \frac{4}{x^2} = A^4 - 4A^2 + 2$

$\cancel{A^4 = A^2 \cdot A_2}$ $A_3 = \frac{(x^2+1)^3}{x^3} = \frac{x^6+3x^4+3x^2+1}{x^3}$

$A_4 = A^2 \cdot A^2 = \frac{(x^4+2x^2+1)(x^4+2x^2+1)}{x^4} = \frac{x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1}{x^4}$

+

$B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8} = \frac{x^{16}+1}{x^8} = A^8 - 8A^4 + 4$

$A^8 = A_4 \cdot A_4 = \frac{(x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1)(x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1)}{2} = A^8 - \left(8\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right)\right.$
$\left. + 28\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 56\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 70\right)$

↖ Здесь представлены Вk через x, где из A^y вычитается что-либо, для выражения Bk только через A

б) $B_2 = B_4 = B_8$

$A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - 8A^4 + 4$

Пусть $A = y$, тогда $y^2 - 2 = y^4 - 4y^2 + 2 = y^8 - 8y^4 + 4$

$y^2 - 2 = (y^2-2)^2 = (y^4-2)^2 \Rightarrow$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант 17081

ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-75

$y^2-2=0$ $\qquad$ $y^2-2=1$

$y^2=2$ $\qquad$ $y^2=3$

$y=\pm\sqrt{2}$ $\qquad$ $y=\pm\sqrt{3}$

$A=\pm\sqrt{2}$ $\qquad$ $A=\pm\sqrt{3}$

$\pm\sqrt{2}=x+\frac{1}{x}$ $\qquad$ $\pm\sqrt{3}=x+\frac{1}{x}$

$(\pm\sqrt{2})^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ $\qquad$ $(\pm\sqrt{3})^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

$2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ $\qquad$ $3=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

$x^2=\frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $x^2+\frac{1}{x^2}=1$

$x=1$ $\qquad$ $x^2+\frac{1}{x^2}-1=0$

$\frac{x^4+1-x^2}{x^2}=0$

$x^4-x^2+1=0$

$(x^2)^2-(x^2)+1=0$

По теор. Виета

$\left.\begin{array}{l} x_1^2+x_2^2=1 \\ x_1^2\cdot x_2^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ не существ. x.

Ответ: а) см. выше

б) При $A=\pm\sqrt{2}$ и $x=1$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

СФ МЭИ

Место проведения

ИЮ87-26

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ ИВАНОВ

ИМЯ Максим

ОТЧЕСТВО Игоревич

Дата рождения 26.02.2001

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Иван

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5. $f(x) = x^2 + px + q$

$D = p^2 - 4q = 100 \quad \ldots(1)$

$f(x-10) = (x-10)^2 + p(x-10) + q = x^2 - 20x + 100 + px - 10p + q =$

$= x^2 + x(p-20) + 100 - 10p + q$

$f(x) + f(x-10) = 0 \Rightarrow x^2 + px + q + x^2 + x(p-20) + 100 - 10p + q =$

$= 0 \;;\; 2x^2 + x(2p-20) + 100 - 10p + 2q = 0$

+

$x^2 + x(p-10) + 50 - 5p + q = 0$

$D' = p^2 - \cancel{20p} + 100 - 200 + \cancel{20p} - 4q =$

$= p^2 - 4q - 100$, но $p^2 - 4q = D = 100$ – по усл. $\Rightarrow$

$D' = 100 - 100 = 0 \Rightarrow$ Ответ 1 корень.

№3. Если раскрыть все скобки, получим уравнение четвертой степени, т.к. в последнем слагаемом 4 раза умножаются x $\Rightarrow$ данное ур-ие имеет не более 4 корней. (А больше чем 4 раза x не умножаются)

Заметим, $x_1 = 1$ – корень, т.к.

$1 - \frac{1}{1} + \frac{1\cdot 0}{1\cdot 2} - \frac{1\cdot 0\cdot(-1)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1\cdot(0)\cdot(-1)(-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0$, также очевидно, что $x_2 = 2, 3, 4$ – также корни:

+

$1 - \frac{2}{1} + \frac{2\cdot 2}{1\cdot 2} - \frac{2\cdot 1\cdot 0}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2\cdot 1\cdot 0\cdot(-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0$

$1 - \frac{3}{1} + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} - \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0$

$1 - \frac{4}{1} + \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0.$

Т.к. корней не более 4, то Ответ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

№2. Очевидно, что $x \in (0, 6)$, иначе если ~~x<1~~ $x \le 0$, то запас неположительный – противоречие с условием, а если $x \ge 6$, то уже в следующем месяце ~~x = 6~~ $6 - x \le 0$ – противоречие с условием. Пусть запас в текущем месяце равен x, тогда на следующем будет $6 - x$, а на следующем $6 - (6 - x) = x$, т.е. запасы образуют такую последовательность: $x, 6-x, x, 6-x \ldots$

Покажем, что для $x=2$, условие выполняется

1 месяц: $x=2$

2 месяц: $x=6-2=4$

3 месяц: $x=2$

$\vdots$

2k месяц: $x=4$

2k+1 месяц: $x=2$

$\Rightarrow$ Очевидно, что кол-во запаса в четных месяцы равно ~~5~~ квадрату кол-ва запаса в нечетные месяцы (Отсчет начинается с текущего месяца).

Аналогично для $x=4$:

1 месяц: $x=4$

2 месяц: $x=2$

$\vdots$

2k месяц: $x=2$

2k+1 месяц: $x=4$.

Т.к. запасы повторяются, остальные варианты найдем через уравнения:

Пусть четный месяц $(6-x)$ – квадрат нечетного (x);

т.е. $x^2=6-x$

$x^2+x-6=0$

$D=1+4\cdot6=5^2$; $x=\frac{-1\pm5}{2}=2; -3$

2 → Уже нашли

−3 → Не подходит по условию $x\in(0;6)$.

Пусть теперь нет. месяц (x) – квадрат чет. $(6-x)$:

$(6-x)^2=x$

$36-12x+x^2=x$

$x^2-13x+36=0$

$D=\cancel{9}\,169-4\cdot36=169-144=25=5^2$

$x=\frac{13\pm5}{2}=9; 4$

4 → Уже нашли

9 → $x\notin(0;6)$

Поэтому ответа всего 2:

Это возможно при $x=2$ и $x=4$. При $x=2$, квадрат кол-ва запаса нечетного месяца равен кол-ву запаса четного, при $x=4$ – наоборот.

Не только

(+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 170 91

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ПН087-26

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. $B_k = x^k + \frac{1}{x^k} = \frac{x^{2k}+1}{x^k}$, ~~если $k \vdots 2$, то~~

$\cancel{B_{k/2} = \frac{x^k+1}{}}$

$B_k^2 = x^{2k} + 2x^k \cdot \frac{1}{x^k} + x^{-2k} = x^{2k} + \frac{1}{x^{2k}} + 2$

$B_{2k} = x^{2k} + \frac{1}{x^{2k}} \Rightarrow B_{2k} = B_k^2 - 2$, т.к. $B_1 = A = x + \frac{1}{x}$, то

а) $\boxed{B_2 = A^2 - 2}$

$\boxed{B_4 = B_2^2 - 2 = (A^2-2)^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2}$

$\boxed{B_8 = B_4^2 - 2 = A^8 + 16A^4 + 4 - 8A^6 + 4A^4 - 16A^2 - 2 =}$

$= A^8 - 8A^6 + 20A^4 + 2$

$\boxed{B_3 = \frac{1}{x^3} + x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) =$

$= B_1(B_2 - 1) = A(A^2 - 3) = \boxed{A^3 - 3A}$

$B_2 = B_4 = B_8 \Rightarrow \begin{cases} A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 \\ A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 + 2 \end{cases}$,

$\begin{cases} A^4 - 5A^2 + 4 = 0 \\ A^8 - 8A^6 + 19A^4 + 4A^2 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} A^2 = 1; 4 - \text{По т. Виета} \\ \cancel{A^2 = 0, A = 0} \\ (A^6 - 8A^4 + 19A^2 + 4) \cdot A^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} A = \pm 1 \\ A = \pm 4 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ A^6 - 8A^4 + 19A^2 + 4 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} B_2 = B_4 \\ B_4 = B_8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + \frac{1}{x^4} \\ x^4 + \frac{1}{x^4} = x^8 + \frac{1}{x^8} \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^6 + x^2 = x^8 + 1 \\ x^4 + \frac{1}{x^4} = x^8 + \frac{1}{x^8} \end{cases}$, $\begin{cases} x \neq 0 \\ x^6(x-1)(x+1) - (x-1)(x+1) = 0 \\ x^4 + \frac{1}{x^4} = x^8 + \frac{1}{x^8} \end{cases}$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ (x-1)(x+1)(x^3-1)(x^3+1)=0 \\ x^4+\frac{1}{x^4}=x^8+\frac{1}{x^8} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ (x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)=0 \\ x^4+\frac{1}{x^4}=x^8+\frac{1}{x^8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x^4+\frac{1}{x^4}=x^8+\frac{1}{x^8} \ (2) \end{cases}$$

Заметим, что $x=\pm1$ – корни (2) $\Rightarrow$ Решением системы являются числа 1 и −1.

в) При $x=\pm1$, $A=\pm2$

с) $B_2=x^2+\frac{1}{x^2}$, ~~пусть $a=x^2$.~~

~~$B_2=a+\frac{1}{a}$, Если $a\neq1$, то $B_2=a+\frac{1}{a}=\frac{a^2+1}{a}$~~

Если $x^2\neq1$, то чтобы из x получить x^2 нужно 1 операцию, чтобы получить $\frac{1}{x^2}$ еще одна, x^2 – еще одна и $x^2+\frac{1}{x^2}$ – еще одна, – т.е. всего 4 операции.

Если же $x=1$, то $x^n=1$ – т.е. не нужно вычислять степени $\Rightarrow$ кол-во операций снижается до двух

~~Если $x=1$, то $x^2=1$~~

А при $x=1$, $C=\left(\left(1^{2017}+\frac{1}{1^{2012}}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2012}=1.$

(+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ИЮ87-26

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Дано:

$\triangle ABC$

$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}=\frac{1}{2}$

$\frac{S_{BOC}}{S_{AOC}}=\frac{2}{3}$

O – ?

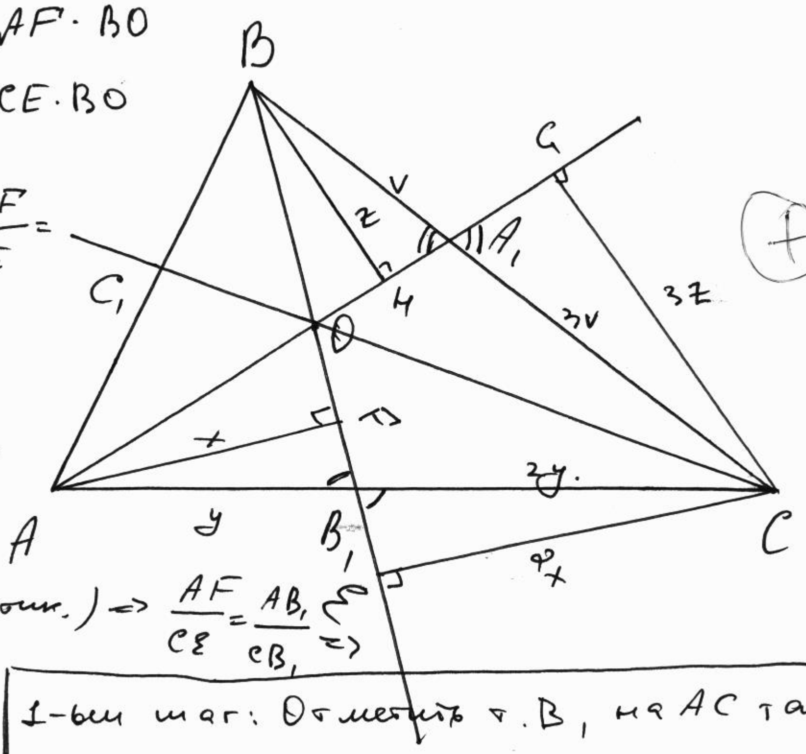
Д.и. $AF \perp BO$; $CE \perp BO$.

$S_{AOB}=\frac{1}{2}AF\cdot BO$

$S_{BOC}=\frac{1}{2}CE\cdot BO$

⇓

$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}=\frac{AF}{CE}=\frac{1}{2}$;



$\triangle AFB_1 \sim \triangle CEB_1$ (по двум углам – $\angle E=\angle F=90^\circ$, $\angle AB_1F=\angle EB_1C$ – вертик.) $\Rightarrow \frac{AF}{CE}=\frac{AB_1}{CB_1}$ ⇒

$\Rightarrow \frac{AB_1}{CB_1}=\frac{1}{2}$, т.е. 1-ый шаг: Отметить т. B_1 на AC так, что $\boxed{\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{1}{2}}$

Аналогично для $\triangle ABO$ и $\triangle AOC$: $S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot BH$; $S_{AOC}=\frac{1}{2}CG\cdot AO$

$\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}=\frac{BH}{CG}=\frac{1}{3}$ – по усл. $\triangle CGA_1 \sim \triangle BHA_1$ (по двум уг.) ⇒

$\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{BH}{CG}=\frac{1}{3}$ ⇒ 2-ой шаг отметить точ. A_1 на BC так, что $\boxed{\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{1}{3}}$;

Пусть перес. AA_1 и BB_1 – т. O. ~~точка пересечения AA_1 и BB_1~~ – Докажем что т. O – искомая ~~искомая~~ т. O:

$\frac{S_{ABO}}{S_{BOC}}=\frac{1}{2}$ – ~~Из построения~~. т.к. у тр. общее основание, а высоты относятся как $\frac{1}{2}$

$\frac{S_{ABO}}{S_{AOC}}=\frac{1}{3}$ – Аналогично.

⇓

$\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}=\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}=\frac{S_{BOC}}{S_{AOC}}$ – Все удовлетворяет усл.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

06108МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Ивенсен

ИМЯ Михаил

ОТЧЕСТВО Михайлович

Дата рождения 11.05.2002 **Класс:** 8

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2014
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 0618МК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases}$$

Из 1 уравнения, выразим x:

$xy-x=1+y$

$x=\frac{1+y}{y-1}$

Из 2 уравнения, выразим z:

$zy-z=2+y$

$z=\frac{2+y}{y-1}$

Полученные переменные подставим в третье уравнение:

$5+\frac{2+y}{y-1}+\frac{1+y}{y-1}=\frac{(2+y)\cdot(1+y)}{(y-1)^2}$, преобразуем.

$5y-5+2+y+1+y=\frac{2+3y+y^2}{y-1}$

$(7y-2)\cdot(y-1)=2+3y+y^2$

$7y^2-4y-2y+2=2+3y+y^2$

$6y^2-12y=0$ — квадратное уравнение

$D=(12)^2-4\cdot6\cdot0=12^2$

$y_1=\frac{12-12}{12}=0$

$y_2=\frac{12+12}{12}=2$, полученные значения подставим в уравнения:

$x_1=\frac{1+0}{0-1}=-1$ $x_2=\frac{1+2}{2-1}=3$

$z_1=\frac{2+0}{0-1}=-2$ $z_2=\frac{2+2}{2-1}=4$

Ответ: $\begin{cases} y=0 \\ x=-1 \\ z=-2 \end{cases}$ и $\begin{cases} y=2 \\ x=3 \\ z=4 \end{cases}$ +

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Суммарный вес приборов больше, чем сумма трех самых лёгких и трёх самых тяжёлых, значит приборов больше 6.

Давайте разложим сумму трёх самых лёгких, на подряд идущие целые числа, невозможно, но ближайшая: $9+10+11=30$.

Также невозможно разложить и сумму трёх самых тяжелых, но можно также найти ближайшую: $15+14+13=42$.

Заметим, что от II суммы надо отнять 1, а ко второй прибавить 1. Это можно сделать разными способами, но надо что-бы max число в I сумме и min во II отличались как можно больше.

Единственный вариант это: max в 1 сумме – 11, а min во II – 13. Пример: $14.5+13.5+13=41$ и $9.5+10.5+11=31$

В промежуток между 13 и 11 вмещается столько приборов, что их суммарная сумма равна 48. А середина этого промежутка $=12$, значит для каждого числа должна быть пара, которая дополнит (вместе с которой сумма чисел будет равна 24) сумму этих чисел до 24, таких пар будет две $\left(\frac{48}{24}=2\right)$.

В итоге: Три самых лёгких, три самых тяжелых и две пары по 24кг каждая, всего 10 приборов

Ответ: 10 приборов

(+)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

а) Нет, потому что: проводя биссектрису в треугольнике мы делим его площадь напополам, т.е. получаем два равных треугольника по площади. Также биссектриса прямоугольного треугольника делит катет на две стороны отношение которых равно отношению катетов (противолежащих). А в данном треугольнике отношение сторон $\frac{2}{3}$, а отношение катетов: $\frac{3}{4}$.

b) Такой треугольник существует только 1, когда медиана совпадает с биссектрисой, т.е равнобедренный: отношение катетов 1:1

Ответ: а) Нет б) 1:1, один треугольник.

№5

Мы знаем что при работе двух насосов за два часа наполняется $\frac{1}{6}$ бака, т.к. с 12 до 14ч резервуар наполнился на $\frac{1}{6}$ $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\right)$ значит и с 10ч до 12ч резервуар успел наполниться на $\frac{1}{6}$, Значит в 10ч, он был заполнен на $\frac{1}{3}$.

Скорость первого насоса ~~не меньше~~ больше $\frac{1}{6}$ бака в 2 часа, иначе скорость второго насоса равна 0, либо он тоже закачивает, а не откачивает. Из этого следует, что первый насос начал работу не раньше 6ч, но и не в 6ч ровно, поскольку за определенное время он накачал $\frac{1}{3}$ бака, а его min скорость больше $\frac{1}{12}$ бака в час.

Ответ: не раньше 6ч, но и не в 6ч ровно.

(+)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

b) $B_2 = B_4 = B_8$, это будет выполняться только при $x = \pm 1$, поскольку при возведении 1 в любую степень получится единица, а при возведении другого числа отличного и от 0, и от 1, и от −1, получается другое число. Мы можем сказать, что $x = \pm 1$, поскольку степень чётная.

Из того что $x = \pm 1$, можно сделать вывод, что $A = 0$ и $A = 2$. ~~Но подходит нам только 2~~

$B_k = \frac{x^{2k+1}}{x^k}$

$A = \frac{x+1}{x}$ $B_1 = A$

Ответ: b) $x = \pm 1$, $A = 0, 2$