Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ	2Р 10-98	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ РАЧИНСКИЙ

ИМЯ МАКСИМ

ОТЧЕСТВО ЮРЬЕВИЧ

Дата рождения 06.03.2000 **Класс:** 11, Г-200

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1;

$S = \lg(10^4 \cdot tg 2017^\circ) + \lg(10^5 \cdot tg 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \cdot tg 2033^\circ)$

$S = 4+5+6+\ldots+20 + \lg(tg 2017^\circ \cdot tg 2018^\circ \cdot \ldots \cdot tg 2033^\circ)$;

Тангенс имеет период равный 180°;

Значит: $tg 2017^\circ = tg(1980^\circ + 37^\circ) = tg 37^\circ$;

$tg 2033^\circ = tg(1980^\circ + 53^\circ) = tg 53^\circ$; С оставшимися значениями поступ по аналогии. Тогда:

$S = 4+5+\ldots+20 + \lg\left(\frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} \cdot \frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ} \cdot \ldots \cdot \frac{\sin 53^\circ}{\cos 53^\circ}\right)$;

$2\sin 37^\circ \cdot \sin 53^\circ = \cos 16^\circ - \cos 90^\circ = \cos 16^\circ$;

$2\cos 37^\circ \cdot \cos 53^\circ = \cos 16^\circ + \cos 90^\circ = \cos 16^\circ$;

Значит $\frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} \cdot \frac{\sin 53^\circ}{\cos 53^\circ} = 1$;

С оставшимися парами поступим по аналогии. Также заметим, что количество тангенсов в произведении нечетно, значит останется один тангенс без пары. Это будет тангенс 45°, равный 1; А значит:

$\lg(tg 37^\circ \cdot tg 38^\circ \cdot \ldots \cdot tg 53^\circ) = \lg 1 = 0$;

$S = 4+5+6+\ldots+20 = \frac{4+20}{2} \cdot 17 = 12 \cdot 17 = 204$;

Ответ: 204;

+

№2;

Предположим, что вопрос в текущем всегда равен запросу в предыдущем. Тогда: $x=c-2x$; $x=\frac{c}{3}$; Так как в задаче не требуются все возможные варианты, а „значение", то под ответом можно подразумевать одно из них.

+

Ответ: Да. $\frac{c}{3}$;

№3;

Запишем предположительное уравнение для первой окружности.

$x^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$;

С графиком $x^2=y$ он должен иметь ровно одно пересечение; $y^2=0$; $y=0$. Верно.

Предположим, что y нижн. координата n-ой окружности равна x_n-R_n, где R_n - ее радиус, а центра коорд. у нее n+1-ой окружности x_n+R_{n+1}, где R_{n+1} - ее радиус. Тогда

$$\begin{cases} x^2+(y-x_n-R_{n+1})=R_{n+1}^2; & (1) \\ x^2+(y-x_n+R_n)=R_n^2; & (2) \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что x-вая координата всегда равна 0, так как график симметричен.

Вследствии тривиальных вычислений, получим из уравнения (1) и (2) значение k_n и k_{n+1}, при которых каждый из этих графиков будет иметь ровно 2 пересечения с осью графиком $y=x^2$; это равносильно условию, что при выделении полного квадрата из каждого из них относительно y, дискриминант будет равен 0;

Из уравнения (1): $2k_{n+1}-1=\pm\sqrt{2x_n}$; (3)

Из уравнения (2): $2k_n+1=\pm\sqrt{2x_n}$; (4)

Вычтем из уравнения (3) уравнение (4) и обозначим $k_{n+1}-k_n$ за x; Тогда $2x=2$; $x=1$;

Значит значения родадов образуют арифм. прогрессию с разностью равной 1 и первым членом равным $\frac{1}{2}$; $k_n=k_1+d(n-1)$; Тогда $k_{2017}=\frac{1}{2}+1(2017-1)=\frac{1}{2}+2016=\frac{4033}{2}$;

Ответ: $\frac{4033}{2}$;

(+)

№4;

$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=6abc; & (1) \\ a+b+c \to min; & (2) \end{cases}$

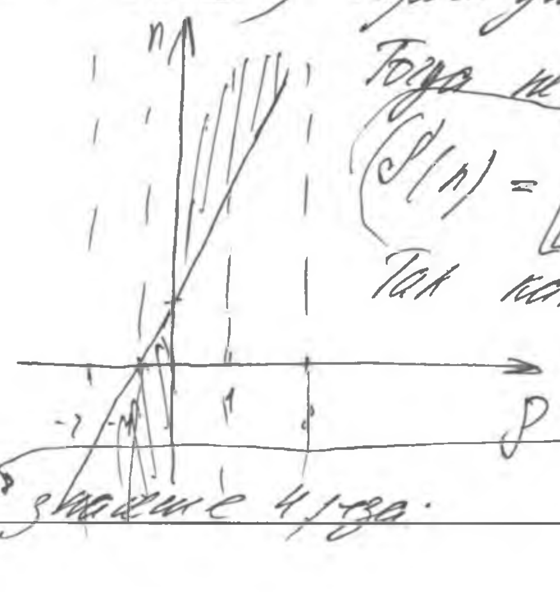
В силу симметрии ~~первое~~ уравнение можно записать в виде $3x^2=6x^3$, где $x = a = b = c > 0$; ~~Значит~~ А второе в виде $3x$; Тогда $2=3x$; $x=\frac{2}{3}$; Значит ~~второе решение~~ $a+b+c=2$; Ответ: 2;

№5;

$\begin{cases} \sin nx = \sin x; \\ x \in [0; \pi]; \end{cases}$ $nx = x + 2k\pi$; при $n=1$, одно 2; $x(n-1) = 2k\pi$; решения $k=0$;

$x = \frac{2k\pi}{n-1} \in [0; \pi]$; Это соотношение равносильно совокупности систем;

$\left[\begin{cases} k>0; \\ n>2k+1; \end{cases} \begin{cases} k<0; \\ n<2k+2; \end{cases}\right.$ ~~Изобразим~~ на плоскости это множество чисел в координатах n и ρ, где ρ - ~~количество~~ число; Проведем прямые $\rho=0; \pm 1; \pm 2 \ldots$;



Тогда нетрудно заметить, что $S(n) = \begin{cases} 2 & \text{при } n=1; \\ \left[\frac{n-1}{2}\right]^* & \text{при } n \neq 1; \end{cases}$ Ответ: 4 раза

Так как в верхней полуплоскости присутствуют числа всех n сходящихся, то ... приписывает каждое свое значение 4 раза.

* $[b]$ - округление до наименьшего

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

2P 62-75

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ РЕЗЕНОВ

ИМЯ ГРИГОРИЙ

ОТЧЕСТВО АЛЕКСЕЕВИЧ

Дата рождения 10.07.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 2 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$S = \lg(10^4 tg 2017°) + \lg(10^5 tg 2018°) + \ldots + \lg(10^{20} tg 2033°)$

$\lg a + \lg b = \lg(ab)$, таким образом, складываем все логарифмы

$S = \lg(10^{4+\ldots+20} \cdot tg 2017° \cdot tg 2018° \cdot \ldots \cdot tg 2033°)$

$4+5+\ldots+20 = \frac{8+1(17-1)}{2} \cdot 17 = 204$, а $tg(2017°) = tg(37° + 11\pi) = tg(37°) = \frac{1}{tg(53°)} = ctg(53°)$

Таким же образом: $tg(38°) = ctg(52°)$; $tg(39°) = ctg(51°)$ … $tg(44°) = ctg(46°)$,

а $tg(45°) = 1$.

Из этого следует, что $tg(2017°) \cdot tg(2018°) \cdot \ldots \cdot tg(2033°) = 1$, следовательно

$S = \lg(10^{204} \cdot tg(2017°) \cdot \ldots \cdot tg(2033°)) = \lg(10^{204}) = \log_{10}(10^{204}) = 204 \log_{10} 10 = 204$.

Ответ: 204. +

№2

Если запас газа данного месяца равен запасу след, тогда:

$c - 2x = x \qquad c = 3x \qquad x = \frac{c}{3}$

Из этого следует, что запас газа может оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца, если он равен $\frac{c}{3}$.

+

Ответ: да, может, при $x = \frac{c}{3}$.

В действительности, при $x \neq \frac{c}{3}$ запас газа рано или поздно станет отрицательным. (?)

№3

$(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ $\quad a=0$ $\quad x^2+(y-b)^2=c^2$

Окр. S_2: $(0;1)\in S_2 \Rightarrow$ $0^2+(1-b)^2=c^2$ $\left[\begin{array}{l} 1-b=c - \text{не подх., т.к. } b>1, \text{ а } c>0 \\ b-1=c \end{array}\right.$

$x^2+(y-b)^2=c^2$ $\quad x^2+y^2-2yb+b^2=c^2$ $\quad y^2-2yb+x^2+b^2-c^2=0$

$\frac{D}{4}=b^2-x^2-b^2+c^2=c^2-x^2$ $\quad y=\frac{b\pm\sqrt{c^2-x^2}}{1}=b\pm\sqrt{(b-1)^2-x^2}$

$b\pm\sqrt{(b-1)^2-x^2}=x^2$

$b+\sqrt{(b-1)^2-x^2}=x^2$ $\qquad b-\sqrt{(b-1)^2-x^2}=x^2$

$(x^2-b)^2=(b-1)^2-x^2$ $\qquad (b-x^2)^2=(b-1)^2-x^2$

$x^4-2x^2b+\cancel{b^2}=\cancel{b^2}-2b+1-x^2$ $\qquad x^4-2x^2b+x^2+2b-1=0$

$x^4-x^2(2b-1)+(2b-1)=0$ $\qquad D=(2b-1)^2-4(2b-1)=(2b-1)(2b-5)$

Т.к. всего 2 точки соприкосн., то $\left[\begin{array}{l} b=\frac{1}{2} - \text{не подх., т.к. } b>1 \\ b=\frac{5}{2} \end{array}\right.$

$c=b-1=\frac{3}{2}$ - радиус S_2

Аналогично находим, что радиусы окр. $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ образуют ~~[illegible]~~ арифм. прогрессию ~~последовательность~~: $\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \dots; \frac{2(n-1)+1}{2}; \dots$

Тогда для S_{2017} имеем: $R_{S_{2017}}=\frac{2(2017-1)+1}{2}=\frac{2\cdot2016+1}{2}=2016{,}5$

Ответ: 2016,5.

+

№4

$a^2+b^2+c^2=6abc$ $\qquad (a+b+c)_{наим.}=?$

Пусть $(a+b+c)=S$, тогда $S^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

$S^2-2ab-2bc-2ac=6abc$ $\qquad S^2=6abc+2ab+2bc+2ac$

$a^2-a\cdot6bc+b^2+c^2=0$ $\qquad \frac{D}{4}=9b^2c^2-b^2-c^2$ $\qquad a=\frac{3bc\pm\sqrt{9b^2c^2-b^2-c^2}}{1}$

$S^2=2a(3bc+b+c)+2bc=2\cdot(3bc\pm\sqrt{9b^2c^2-b^2-c^2})(3bc+b+c)+2bc$ $\quad S=3a$

$a=b=c=0{,}5$ $\quad (a^2(2a-1)=0)$ $\quad S=1{,}5$ $\quad$ Ответ: ~~[illegible]~~ 1,5.

∓

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Лицей №18

Место проведения

ХЫ 23-46

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Рытик

ИМЯ Софья

ОТЧЕСТВО Михайловна

Дата рождения 14.02.2002

Класс: 8Б

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 14081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-46

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

а) Обозначим поле как прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A. Пусть по катету AB идёт первый брат, а по катету AC — второй.

Пусть $AC = x$

Дано:

$\triangle ABC$: $\angle A = 90^\circ$

$\frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$; $AC = x$

Решение:

1) Гипотенуза BC треугольника $ABC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$

~~$BC =$~~ т.к. $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$, то $AB = 1\frac{1}{3}x$

$BC = \sqrt{x^2 + (1\frac{1}{3}x)^2} = 1\frac{2}{3}x$

2) $P_{\triangle ABC} = AC + AB + BC = x + 1\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3}x = 4x$

3) т.к. $P_{\triangle ABC} = 4x$, и каждый брат прошёл половину $P_{\triangle ABC}$, то каждый брат прошёл $2x$ до встречи

4) По катету BC первый брат прошёл $2x - 1\frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$

5) По катету BC второй брат прошёл $2x - x = x$

6) Обозначим место встречи братьев на рисунке буквой D. Проведём прямую ~~отрезок~~ AD

7) $\triangle ABD$ — участок первого брата, $\triangle ACD$ — участок второго брата.

8) Проведём высоты BH и CN к прямой AD

9) $BH \perp AD$, $CN \perp AD$ $\Rightarrow BH \parallel CN \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие углы)

10) Рассм. $\triangle BHD$ и $\triangle DNC$

У них:

1) $\angle BDH = \angle NDC$ (вертик. углы)

2) $\angle 1 = \angle 2$ (из док. выше)

Значит, $\triangle BHD \sim \triangle DNC$ (по 2-ум углам или по 1 признаку подобия треугольников)

11) $BD = \frac{2}{3}x$, $DC = x$ $\Rightarrow k = \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$

$k = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BH}{NC} = \frac{2}{3} \Rightarrow BH < NC$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 19081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-46

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

12) $S_{ABD} = BH \cdot AD$
$S_{ADC} = NC \cdot AD$
$BH < NC$
$\Rightarrow S_{ABD} < S_{ADC}$

Значит площадь участка первого брата меньше площади участка второго.

Ответ: $S_{уч. I брата} < S_{уч. II брата}$

+

№5.

1) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (р.) - было заполнено за 2 ч (с 12 до 14)

2) $\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{12}$ $\left(\frac{р}{час}\right)$ - $v_{I нас} - v_{II нас}$.

3) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ (р.) - была заполнена до 10 часов I насосом.

4) $v_{I нас} - v_{II нас} = \frac{1}{12} \frac{р}{час} \Rightarrow v_{I нас} > \frac{1}{12} \frac{р}{час}$

4) $\frac{1}{3} : \frac{1}{12} = 4$ (ч) - время заполнения $\frac{1}{3}$ рез. I-ым насосом, если $v_{I нас.} = \frac{1}{12} \frac{р}{час}$

⇓

$t_I < 4ч.$

+

5) $10 - 4 = 6$ (ч)

Значит, первый насос включили позже 6 часов утра. Самое раннее время включения - 6 часов 01 сек. утра

Ответ: 06 ч 00 мин 01 сек.

№4.

б) Построенные указанным способом части будут равны по площади только в том случае, когда катеты прямоугольного треугольника относятся как 1:1

№1

$$\begin{cases} 1 + x + y = xy \\ 2 + y + z = yz \\ 5 + z + x = zx \end{cases}$$

Преобразуем данные уравнения:

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-46

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} xy-1=x+y \\ yz-2=y+z \\ zx-5=z+x \end{cases}$$

Методом подбора установим, что $x=3$; $y=2$; $z=4$

Проверка

1) $1+3+2=6$ 2) $2+2+4=8$ 3) $5+4+3=12$
$3\cdot 2=6$ $2\cdot 4=8$ $4\cdot 3=12$

Ответ: $x=3$, $y=2$, $z=4$ – одно из них.

№3.
Вес ~~самых~~ трех самых лёгких приборов и трёх самых тяжелых =
$=31+41=72$ (кг)

⇓

Вес остальных приборов равен $120-72=48$ (кг)
Все приборы не могут весить целое число килограммов.
Пусть самые легкие приборы весят 9,5; 10; 11,5 кг, а самые тяжелые – 13; 13,5; 14,5 кг. Тогда вес остальных ~~приборов~~ приборов должен быть в промежутке (11,5; 13). Всего таких приборов будет 4 т.к. вместе они должны весить 48 кг. (например, их массы равны 11,75; 12,25; 11,85; 12,15 кг.) Значит, всего 10 приборов.

Ответ: 10 приборов

№2
б) $B_2=B_4=B_8$ при $x=\pm 1$. (тогда $A=\pm 2$)
а) при $k=2$
$B_k=A^2-2$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

КРАСНОЯРСК

Место проведения

04310 ИК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ САШКО

ИМЯ МИХАИЛ

ОТЧЕСТВО АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 30.03.2000 **Класс:** 10

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.2.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

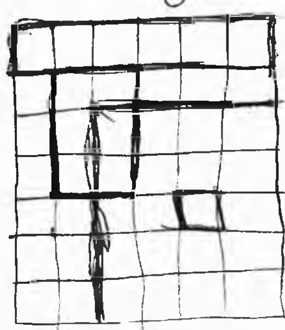
Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 04310 МК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Для начала рассмотрим упрощенную задачу: в прямоугольнике $a \times b$ клеток сколько меньших, границы которых совпадают с клетками:



каждому прямоугольнику соответствуют длины его сторон и его положение в большом:

[1] Легко заметить, что для фиксированной длины и положения в оси b произвольного прямоугольника, есть a вариантов с высотой 1, $(a-1)$ вариантов с высотой 2 и т.д... 1 вариант с высотой a. Аналогично для фиксированного по оси a прямоуг-ка. Получим, что кол-во меньших прямоуг-ков равно

$$(1+2+3+\ldots+a)(1+2+3+\ldots+b) \text{ или}$$

$$\frac{a(a+1)}{2} \cdot \frac{b(b+1)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot (a+1) \cdot (b+1)}{4}$$

(по формуле суммы натуральных чисел от 1 до n)

Переходя в третье измерение, аналогично для каждого из $\frac{a \cdot b(a+1)(b+1)}{4}$ прямоугольников будет $\frac{c(c+1)}{2}$ возможных конфигураций его длины по оси c

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

и гомотетия по оси c.

Получим, что суммарное кол-во прямоуг. параллелеп. равно

$$\frac{a\cdot b\cdot c\cdot(a+1)\cdot(b+1)(c+1)}{8}$$

+

P.S.: докажем, что $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ методом мат. индукции

1) при $n=1$ $1=\frac{1\cdot 2}{2}$ – верно

2) пусть при $n=k$ – верно, докажем для $n=k+1$.

$$1+2+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Преобразуем левую часть

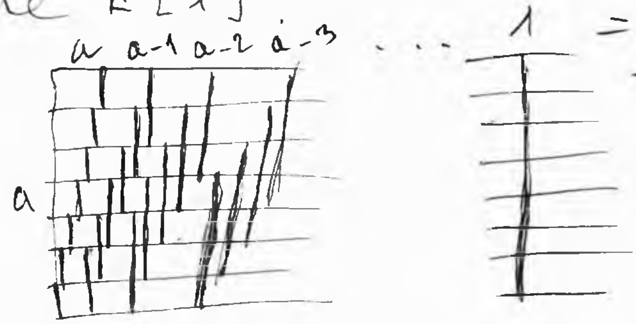
$$\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+k+2k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ – верно, доказано.

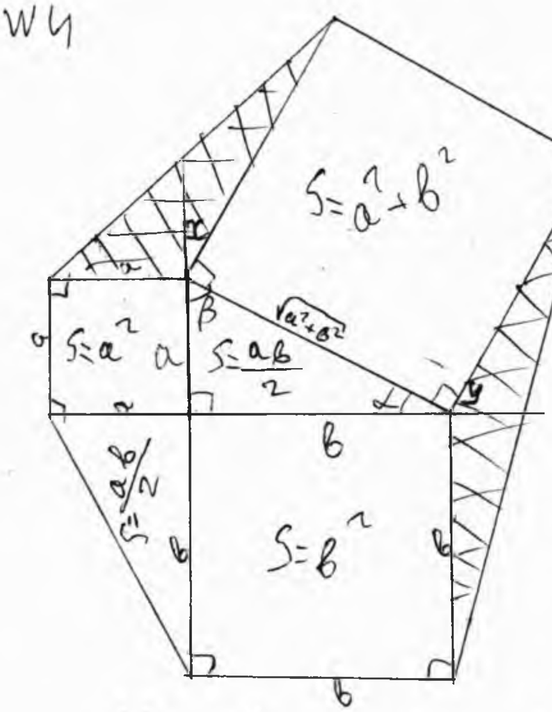
пояснение к [1]:

I – сторона по оси a



$=1+2+3+\ldots+a=\frac{a(a+1)}{2}$

№4



По т. Пифагора гипотенуза $\sqrt{a^2+b^2}$

Впишем в фигуры для наглядности вписываем их площади

Площади всех фигур кроме двух заштрихованных фигур легко найти по формуле ~~квадрата и~~ площади прямоугольника.

Чтобы найти площади этих треуг-ков обозначим угол против a как α, против b как β. Так же обозначим углы X и Y (см. чертеж)

1) ~~В△~~ $\alpha = 90 - \beta$ (из треугольника),

$y = 180 - (90+\alpha) = 90 - \alpha$

$\beta = 90 - \alpha$ (из треуг-ка)

$x = 180 - (90+\beta) = 90 - \beta$ $\Rightarrow$

$y = \beta$, $x = \alpha$.

Площадь левого заштрихованного треуг-ка равна $\frac{a\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(90+\alpha)}{2} = \frac{a\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}\cdot b}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{2}$

Площадь правого заштрихованного

$\frac{b\sqrt{a^2+b^2}\sin(90+\beta)}{2} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}\cos\beta}{2} = \frac{ab}{2}$

Просуммируем площади:

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+a^2+b^2+(a^2+b^2)=$$

$$=2ab+2a^2+2b^2$$

Найдем такой коэф-прос. k, где $a=k\cdot b$, $k>0$

что $\dfrac{2ab+2a^2+2b^2}{\frac{ab}{2}}$ наименьшее.

Подставив вместо a $k\cdot b$, получим:

$$\frac{2kb^2+2k^2b^2+2b^2}{\frac{kb^2}{2}}=4\left(\frac{kb^2+k^2b^2+b^2}{kb^2}\right)=$$

$$=4\left(1+k+\frac{1}{k}\right)$$ $4\left(1+k+\frac{1}{k}\right)$ наименьшее,

когда $\left(k+\frac{1}{k}\right)$ наименьшее.

$\lim\limits_{k\to 0}\left(k+\frac{1}{k}\right)=+\infty$ $\lim\limits_{k\to\infty}\left(k+\frac{1}{k}\right)=+\infty$, функция

на $k>0$ непрерывная, чтобы найти

наименьшее значение $\left(k+\frac{1}{k}\right)$ решим

$$\frac{d}{dk}\left(k+\frac{1}{k}\right)=0$$

$$1-\frac{1}{k^2}=0$$

$k=\pm 1$, т.к. $k>0$, то $k=1$

Ответ: при $a=b$.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0$$

Рассмотрим частный случай при $n=3$

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}=0$$

$$1-\frac{x}{1}\left(1-\frac{(x-1)}{2}+\frac{(x-1)(x-2)}{2\cdot 3}\right)=0$$

$$1-\frac{x}{1}\left(1-\frac{x-1}{2}\left(1-\frac{x-2}{3}\right)\right)=0$$

$$1-\frac{x-1}{2}\left(1-\frac{x-2}{3}\right)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{x-1}{2}\left(1-\frac{x-2}{3}\right)=\frac{x-1}{x}$$

$$x-1\left(\frac{1}{2}-\frac{x-2}{6}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$x=\{1;2;3\}$

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

Гипотеза: $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=$

$$=(x-1)(x-2)\ldots(x-n),$$

$$x\in\{1;2;3;\ldots;n\}$$

~~Докажем методом мат. индукции.~~

~~1) При n~~

Ответ: $x\in\{1;2;3;\ldots;n\}$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$$x=\left|\frac{1}{1-x}\right| \cancel{x}$$

на $x>1$;

$$x=\frac{-1}{1-x}$$

$x^2-x-1=0$

$D=5$

$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Ответ: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ $м^3$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ	OF 94-29
Место проведения	шифр

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ СЕВАСТЬЯНОВ

ИМЯ СЕМЕН

ОТЧЕСТВО АЛЕКСЕВИЧ

Дата рождения 23.09.03 **Класс:** 7

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 7 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: [signature]

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ OF 94-29

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Допустим они закупали ~~на~~ бензина на x недель тогда им хватило его на 2x недель, также если она закупала его на x недель, ~~то им~~ они закупали $31a\,x$ литров т.к. ~~они за~~ каждую неделю ломалась одна машина, то на следующую неделю приходилось ~~потратить~~ потратить ~~больше~~ меньше получаем на один литр

уравнение

$$\underbrace{31a}_{1\text{ неделя}} + \underbrace{31a-1a}_{\text{вторая неделя}} + \overbrace{31a-2a}^{3\text{ неделя}} \ldots + \overbrace{(31-2x+1)}^{2x}a = 31ax$$

~~разд~~ разделим каждую часть на a

получаем что

$$31 + \overset{31-1}{30} + \overset{31-2}{29} + \ldots + (31-2x+1) = 31x$$

$$(31\cdot x\cdot 2) - 1 - 2 - \ldots - 2x+1 = 31x$$

~~складываем~~

$$62x \underbrace{-1-2-\ldots-2x+1}_{\text{переносим влево}} = \overbrace{31x}^{\text{переносим вправо}}$$

получается

$$31x = 1+2+3\ldots+2x-1$$

~~теперь~~

$$31x = 1+2+3+\ldots+2x-3+2x-2+2x-1$$

теперь складываем первое с последним, второе с пред последним и так далее. Т.к. у нас и первое и последнее слаг. нечет. то кол-во слаг. нечетно, и слагаемое

Лист 1 из 7

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ___________ ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ OF 94-29

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

в середине останется без пары, оно является X т.к.

$$1+(X-1)=2X-1-(X-1)$$

$$X=X$$

допустим пар y тогда

$$31X=y\cdot 2X+X$$ отсюда $30X=y\cdot 2X$, $y=15$

~~заметим также что $y=(31-1)$~~

Заметим также что кол-во пар умноженное на 2 ~~равно кол-во~~ и плюс один равно кол-во слаг. получаем что кол-во слаг. $15\cdot 2+1=31$ получ. что $2X-1=31$

отсюда $2X=32$

$X=16$

Получ. что было закуплено на 16 недель и получ было закуплено $16\cdot 31=496$ а литров

Ответ: на 16 недель было куплено 496 а литров

№2

~~Обозначим~~ Допустим девочек X, а мальчиков y ~~Обозн~~ Скажем что каждая девочка это δ пронумеруем их так что Екатерина это δ_1, Ольга это δ_2, Ирина это δ_3, а соответственно Алёна δ_X

Теперь т.к. каждая следующая девочка у которой номер на один больше, будет танцевать больше на один танец, а соответственно больше и на одного кавалера то разность кол-во кавалеров ~~с которыми~~ ~~минус на номер девочки~~ с которыми девочка танцевала минус номер этой девочки, всегда будет одинаковой.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ___________ ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ OF 94-29

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

значит эта разность всегда будет равна ~~...~~ $\underbrace{7-1}_{\text{Екатерина}}=6$

Теперь возьмём Алёну тоесть x она танцевала с y кавалерами соответственно $y-x=6$, а так же мы знаем что $x+y=20$ по усл.

$y-x=6$

$y=x+6$

$y-6=x$

получается что

$x+y=20$

$x=y-6$

значит $\overbrace{y-6}^{x}+y=20$

$2y-6=20$

$2y=20+6$

$2y=26$

$y=13$

$x=20-13$

$x=7$

Ответ: было приглашено 13 танцоров-кавалеров

№5

обозначим 2,0000000000 и за x, а 2,00000000002 за y

получ. $\frac{x}{(x-1)^2+x}$ сравнить с $\frac{y}{(y-1)^2+y}$

$\frac{x}{(x-1)^2+x}=\frac{x}{x^2+1-2x+x}=\frac{x}{x^2-x+1}$ аналогично $\frac{y}{(y-1)^2+y}=\frac{y}{y^2-y+1}$ домножим каждую часть на $(x^2-x+1)(y^2-y+1)$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ___________ ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ OF 94-29

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

получается ~~$y\cdot x$~~ надо сравнить $y\cdot(x^2-x+1)$ и

$x\cdot(y^2-y+1)$

надо сравнить $y\cdot(x^2-x+1)=yx^2-yx+y$ и $x\cdot(y^2-y+1)=xy^2-xy+x$

прибавим ~~вычтем~~ к каждой части xy

надо сравнить

yx^2+y и xy^2+x

вычтем из каждой части x

надо сравнить

$yx^2-0{,}00000000002$ и xy^2

$x\cdot xy-0{,}00000000002$ и $y\cdot xy$

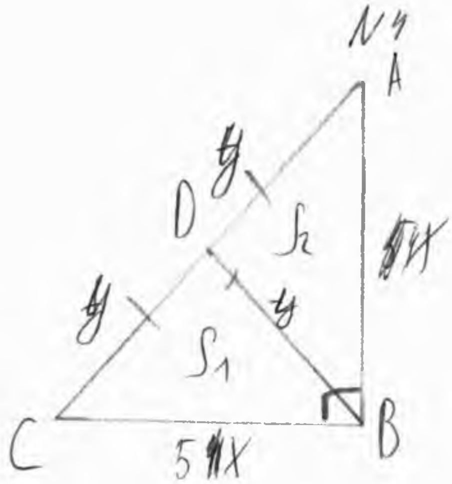
~~докажем что $x\cdot xy$ больше~~ т.к. x больше y на $0{,}00000000002$ то $x\cdot xy$ больше $y\cdot xy$ больше чем на $0{,}00000000002$, а соответственно почему?

$x\cdot xy-0{,}00000000002>y\cdot xy$, поэтому

$$\frac{2{,}00000000004}{(1{,}00000000004)^2+2{,}00000000004}<\frac{2{,}0000000002}{(1{,}00000000002)^2+2{,}00000000002}$$

±

№ 4



Дано
BD медиана
Сравнить S_1 и S_2
сравнить $P_\triangle CDB$ и $P_\triangle ABD$
$\frac{AB}{CB} = \frac{4}{5}$

Докажем что $S_1 = S_2$
мы знаем что $S_\triangle$ = высота на половину стороны к которой она проведена

у $\triangle DCB$ и $\triangle ABD$ ~~одно основание~~ равные стороны CD и AD и одна и тоже высота проведённая к ним, а соответственно $S_1 = S_2$

б) Общеизвестно что медиана в прямоугольном треугольнике к гипотенузе равна новым отрезкам гипотенузы значит $DB = AD = DC = y$ соответственно $P_\triangle DBC = 2y + CB$, а $P_\triangle ABD = 2X + AB$ а т.к. $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}$ то $BC > AB$ соответственно $P_\triangle DBC > P_\triangle ABD$

Ответ: а) да б) нет (+)

№ 3

Либо $x+2+1=y$ либо $x+2=y$
также ~~...~~ $y+2 \neq x$ ~~так~~ как если это ~~тогда~~ ~~так~~ тогда $y \neq x-2$
~~но тогда~~ ...

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ____________ ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ OF 94-29

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$y+z \neq x$

т.к. тогда $y = x-z$ и

$y = x+z$

тогда $z = 0$

тогда z ч. y мин

x ч z мин =

x ч y мин

а нам нужно уч.

и x мин значит это получ.

только при $x=y$ тогда возможна разность

$x-y=0$

еще есть вариант, когда $y+z-60=x$, тогда

$x+z+1=y$

или $x+z+1-24=y$

, а также $y = x-z+60$

получается либо

$x+z+1 = x-z+60$ либо

$x+z+1-60 = x-z+60$ получ.

$x = x-2z+120$

тогда $z=60$, что невозможно

аналогично $x+z-23 = x-z+60$

$x = x-2z+83$

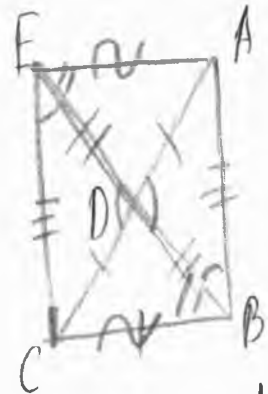
$2z=83$

$z=41{,}5$ что невозможно т.к. $z<24$

Значит X-~~12~~ y всегда ~~равно 0~~ может быть равно только 0 или 12

№4

±



Докажем что $BD = CD$

если $\angle ABD = 90^\circ$

$CD = AB$

$ED = DB$

так. $\triangle ADB = EDC$

т.к. $ED = DB$ и $DC = AD$

и $\angle EDC = \angle ADB$ как вертик.

~~так~~ Аналогично $\triangle EDA = \triangle DCB$, а значит $\triangle EAC = ACB$

т.к. AC общая $CB = AE$ как соответ- ~~как~~ ствен.

и $EC = AB$ как соответственные

$\angle ABC = \angle AEC = 90^\circ$ четырёх.

$EABC$ прямоугол.

$DC = DB = DA$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Лицей № 18

Место проведения

ХБ1 23-42

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Семёнов ~~Ники~~

ИМЯ Никита

ОТЧЕСТВО Радиславич

Дата рождения 28.01.2003

Класс: 8Б

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Сем

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

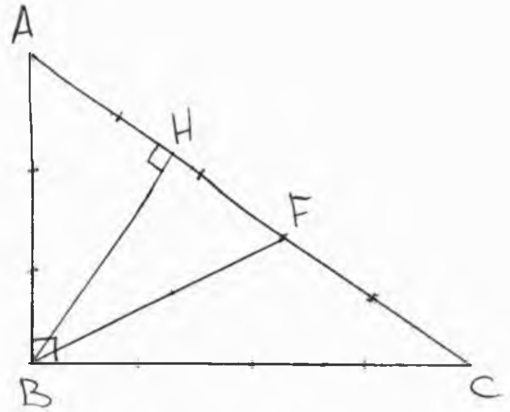
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-42

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



а) Дано:

$\triangle ABC$, $\angle B = 90°$

$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$

$AB + AF = FC + BC$

$S_{\triangle ABF} = S_{\triangle BFC}$?

1) $AC^2 = 3^2 + 4^2$

$AC^2 = 25$

$AC = 5$ (частей) $\Rightarrow$ $AF = 3$ части

$FC = 2$ части

$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{2}$

2) $S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot AF$

$S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot \cancel{A}FC$

$\Downarrow$

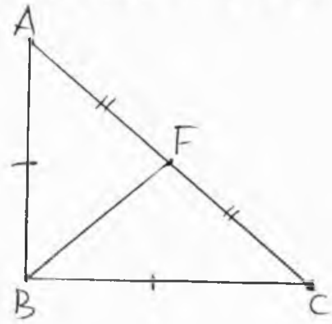
$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle BFC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BH \cdot AF}{\frac{1}{2} \cdot BH \cdot FC} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BFC}} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BFC}} = \frac{3}{2}$

$\Downarrow$

$S_{\triangle ABC} \neq S_{\triangle BFC}$

Ответ: $S_{\triangle ABC} \neq S_{\triangle BFC}$

б)



Чтобы S треугольников $\triangle ABF$ и $\triangle BFC$ были равны, нужно чтобы братья встретились в середине AC в точке F, а т.к.

$AB + AF = BC + CF$

$\Downarrow$

$AB = BC$

нужно чтобы катеты были равны.

+

Во всех прямоугольные треугольники с равными катетами при построении указанным способом части будут равны по площади

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1) Сумма трёх самых лёгких равна 31кг
Сумма трёх самых тяжёлых равна 41кг.

2) Среднее арифм. самых лёгких $\frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$кг

Среднее арифм. самых тяжёлых $\frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}$кг

3) Вес остальных приборов (отдельный) – x кг

$10\frac{1}{3} < x < 13\frac{2}{3}$

Вес остальных приборов (общий) – $120 - (\overset{72}{31+41}) = 48$кг

4) Предположим, что было два прибора, тогда средний вес этих приборов $\frac{48}{2} = 24$

$10\frac{1}{3} < 24 < 13\frac{2}{3}$ Неверно

Предположим, что было четыре прибора, тогда средний вес этих приборов $\frac{48}{4} = 12$

$10\frac{1}{3} < 12 < 13\frac{2}{3}$ верно

⇓

Всего привезли $3+3+4 = 10$ (приборов)

Ответ: 10 приборов

(+)

№5

С 12ч. до 14ч. резервуар наполнился на

$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Значит в 10 часов было $\frac{2}{6}$

В 12 часов было $\frac{3}{6}$

В 14 часов было $\frac{4}{6}$

⇓

За 2часа $\frac{1}{6}$ => За 1 час $\frac{1}{12}$

(+)

Предположим, что насос который откачивает горючее не откачивает горючее

Значит насос который подавал горючее включили в $10 - \frac{2}{6} : \frac{1}{12} = 6$ (часов.)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ХЫ 23-42

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Возможно, что насос который откачивает горючее откачивает по маленькой капельке, тогда насос которы подает горючее, мог включить в 6:05 или 6:10, но не раньше 6 часов.

Ответ: Самое раннее время включения первого насоса может быть 6:01 (не раньше 6 часов)

№1

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases}$$

$x = \frac{1+x+y}{y}$

$x = \frac{5+z+x}{z}$

$\frac{1+x+y}{y}^{\backslash z} = \frac{5+z+x}{z}^{\backslash y}$

$\frac{z+2x+zy-5y-zy-xy}{yz}=0$

$\frac{z+5+z+x+2+y+z-5y-2-y-z-1-x-y}{yz}=0$

$\frac{3z-6y-3}{yz}=0$

$\frac{3(z-2y-1)}{yz}=0$

$z-2y-1=0$

$z-2y=1$

$z=1+2y$

$2+y+1+2y=y(1+2y)$

$2+y+1+2y-y-2y^2=0$

$-2y^2+2y+3=0$

$D=4+\cancel{28}24=28$

$y_1=\frac{-2\pm\sqrt{28}}{-4}=\frac{-2+2\sqrt{7}}{-4}=\frac{1-\sqrt{7}}{2}$ $y_2=\frac{1+\sqrt{7}}{2}$

$$z = \frac{2+y+z}{y}$$

$$z = \frac{5+z+x}{x}$$

$$\frac{2+y+z}{y}^{\backslash x} - \frac{5+z+x}{x}^{\backslash y} = 0$$

$$\frac{2x + \cancel{xy} + zx - 5y - zy - \cancel{xy}}{xy} = 0$$

$$\frac{2x+5+z+x-5y-2-y-z}{xy} = 0$$

$$\frac{3x-4y-3}{xy} = 0$$

$$3(x-1) - 4y = 0$$

$$3x_1 = 4^{2} \cdot \frac{1+\sqrt{7}}{8_1} + 3 \qquad 3x_2 = 4^{2} \cdot \frac{1-\sqrt{7}}{8_1} + 3$$

$$3x_1 = 2 + 2\sqrt{7} + 3 \qquad 3x_2 = 2 - 2\sqrt{7} + 3$$

$$x_1 = \frac{5+2\sqrt{7}}{3} \qquad x_2 = \frac{5-2\sqrt{7}}{3}$$

$$z = \frac{2+y+z}{y}$$

$$z = \frac{5+z+x}{x}$$

$\frac{-}{+}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

05504МК

← **Не заполнять**

Заполняется ответственным работником

шифр

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Сёмушкина

ИМЯ Екатерина

ОТЧЕСТВО Ивановна

Дата рождения 28.11.2002 **Класс:** 7

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Каяпута

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(2) Всего 20 человек

пусть x – кол-во девушек,
тогда $(20-x)$ – кол-во кавалеров.

20 → x, $20-x$

$x-1=(20-x)-7$

$x+6=20-x$

$2x=14$

$x=7$

7 – кол-во девушек

$20-7=13$ – кавалеры

Решая подбором, получаем тот же результат:

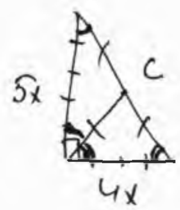
| | | | | | | | | | | | | | – кавалеры 13

| | | | | | | – девушки
7 8 9 10 11 12 13 7

(+)

Ответ: 13 танцоров – кавалеров

(4)



допустим, катеты треугольника – $4x$ и $5x$.

прямая линия, соединяющая вершину прямого угла с серединой противоположной стороны является медианой этого треугольника.

медиана в прямоугольном треугольнике $= \frac{\text{биссектрисе}}{2} = \frac{c}{2}$

$\Rightarrow$ есть 2 равнобедренных △ с 2 идентичными сторонами
и одной разной 1 – c и $5x$
2 – c и $4x$
(две стороны $\frac{c}{2}=c$)

по 3 признаку равенства треугольников, эти треугольники неравны.

У них не равна ни площадь, ни периметр

но равны по пл-ди

а) нет

б) нет

(–)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(5) пусть

1.0000000002 — y

1.0000000004 — x

тогда выражения будут такими:

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} \quad и \quad \frac{y+1}{y^2+y+1} \qquad \underline{x>y}$$

• (1) вариант

$$\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{y+1}{y^2+y+1}$$

$$\frac{(x+1)(y^2+y+1)-(y+1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}=\frac{xy^2+\cancel{xy}+\cancel{x}+y^2+\cancel{y}+\cancel{1}-yx^2-\cancel{yx}-\cancel{y}-x^2-\cancel{x}-\cancel{1}}{(x^2+x+1)(y^2+y+1)}$$

$$\boxed{xy^2+y^2-yx^2-x^2}$$

т.к. $x>y$, результат выходит меньше нуля.

• (2) вариант

$$\frac{y+1}{y^2+y+1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$\frac{(y+1)(x^2+x+1)-(x+1)(y^2+y+1)}{(y^2+y+1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{yx^2+\cancel{yx}+\cancel{y}+x^2+\cancel{x}+\cancel{1}-xy^2-\cancel{xy}-\cancel{x}-y^2-\cancel{y}-\cancel{1}}{(y^2+y+1)\cdot(x^2+x+1)}$$

т.к. $x>y$

$$\boxed{yx^2-xy^2+x^2-y^2}$$

больше нуля. $\Rightarrow$

то второе выражение больше.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(3) Для удобства можно составить таблицу:

z	y	— начальное время
x	z	— время, пока шёл снег
y	x	— конечное время

Отсюда следует, что

x = y и это возможно только при z = 0 и одинаковом значении x и y

нет таких 2 чисел, которые в сумме с третьим давали бы значение друг друга.

00	y
x	00
y	x

больше ничего не даст результата.

на местах x и y могут быть любые числа от 00 до 23.

но так как в условии сказано о возможном значении x − y, а ~~это~~ у них одинаковое значение, то единственное возможное значение — 0. не единств

+

(1) На автобазе 31 машина.

кол-во топлива — a в неделю на одну машину ⇒ 31a литров топлива тратилось в неделю.

пусть x — количество недель, на сколько закупили топливо

31ax — было закуплено.

каждую неделю топлива расходовалось на a меньше

30a 29a 28a 27a ... x

30 29 28 27

+1a +1a

$\frac{31ax}{2}$ = сколько было потрачено

−
+

с начала сложных машин
её неиспользованное топливо уходит в запас, который добавляется к итоговому листу

$\underbrace{30\quad 29}_{+1}\ \underbrace{\quad 28}_{+1}\ \underbrace{\quad 27}_{+1}\ \underbrace{\quad}_{+1} \dots \underbrace{10}_{+20}$

всего

$\frac{20}{10} = 2$

Ответ:
1.
2. 10 недель

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

NJ 51-31

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Сибагатова

ИМЯ Софья

ОТЧЕСТВО Ильдаровна

Дата рождения 18.12.1999

Класс: 10

Предмет Математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2. Если в первом месяце у нас имелось x м³ газа, то во втором месяце будет $\frac{1}{1-x}$, в третьем $\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=$

$=\frac{1-x}{1-x-1}=\frac{x-1}{x}$, в четвертом $\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}=\frac{x}{x-x+1}=x$. Таким образом, каждые 3 месяца у нас будут одинаковые запасы газов и равны они будут x, $\frac{1}{1-x}$ или $\frac{x-1}{x}$

Ответ: x, $\frac{1}{1-x}$ или $\frac{x-1}{x}$

№1. $12x+\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}=35$ ОДЗ: $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

$12x\sqrt{x^2-1}+12x=35\sqrt{x^2-1}$

$(12x-35)\sqrt{x^2-1}=-12x \Rightarrow (12x-35)^2\cdot(x^2-1)=144x^2$

$144x^4-840x^3+1081x^2+840x-1225=144x^2$

$144x^4-840x^3+973x^2+840x-1225=0$

$(3x-5)(4x-5)(12x^2-35x-49)=0 \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l}3x-5=0\ (1)\\ 4x-5=0\ (2)\\ 12x^2-35x-49=0\ (3)\end{array}\right.$

$(1)\Rightarrow x_1=\frac{5}{3}$ – уд.

$(2)\Rightarrow x_2=\frac{5}{4}$ – уд.

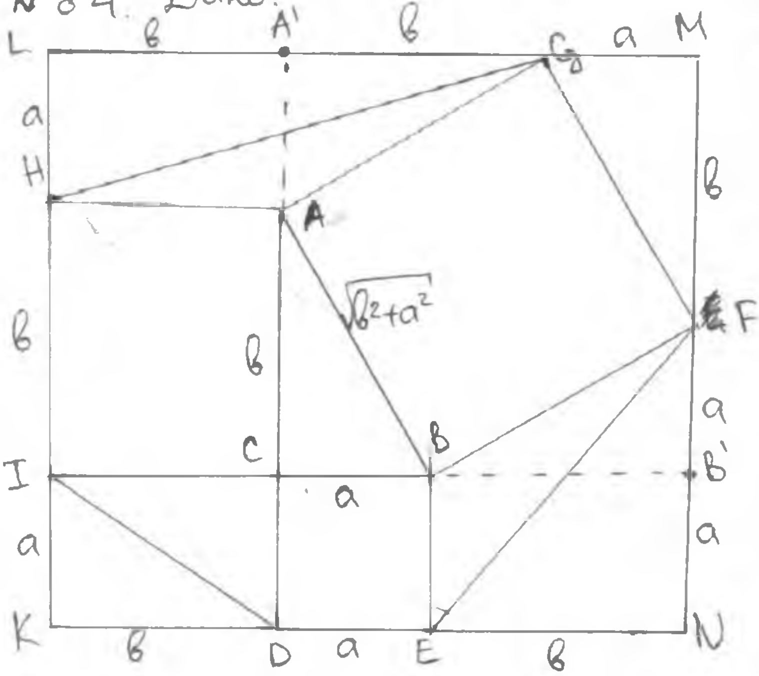
$(3)\Rightarrow D=35^2+4\cdot12\cdot49=3577=7^2\cdot73 \Rightarrow x=\frac{35\pm7\sqrt{73}}{24}$ – не уд. при подстановке в исх. уравнение

Проверка: $12\cdot\frac{5}{3}+\frac{12\cdot\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{25}{9}-1}}=20+\frac{20}{\frac{4}{3}}=35$

$12\cdot\frac{5}{4}+\frac{12\cdot\frac{5}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}-1}}=15+\frac{15}{\frac{3}{4}}=35$

Если x – это и есть прибыль компании за 2016 год, то совет директоров компании не должен верить этому, так как из данного уравнения следует, что возможны две различные прибыли. Если же 35 млн. – это прибыль, то, раз у данного уравнения есть решение, то, видимо совет может поверить этому. Странный некорректный вопрос.

№4. Дано:



Решение: Достроим наш исходный шестиугольник до прямоугольника, как показано на рисунке слева

$LG \parallel IB$, $LG \parallel HA$

$GM \parallel IB$, $GM \parallel HA$

$LH \parallel AC$, $IK \parallel AC$

$KD \parallel HA$, $EN \parallel HA$

$NF \parallel BE$, $MF \parallel BE$

Тогда площадь нашего шестиугольника будет равна: $S_{KLMN} - S_{HLG} - S_{GMF} - S_{FNE} - S_{IKD}$

Найти: S; $\frac{a}{b}$ так что $\frac{S_{HGFEDI}}{S_{ABC}} = \min$

Заметим, что квадрат $CA'MB'$ – квадрат из которого выводится теорема Пифагора $\Rightarrow$ $A'G = b$, $GM = a$, $MF = b$, $FB' = a$,

$B'N = BE = IK = CB = a$, $LA' = HA = KD = AC = b$

$EN = BB' = b$, $LH = AA' = a$

Таким образом, прямоугольник KLMN имеет стороны $2b+a$ и $2a+b$

$$S_{HGFEDI} = (2b+a)(2a+b) - \frac{2ba}{2} - \frac{ab}{2} - \frac{2ab}{2} - \frac{ab}{2} =$$

$$= 4ab + 2a^2 + 2b^2 + \cancel{ab} - \cancel{ab} - ab - ab = 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 2(a^2+b^2+ab)$$

$$\frac{S_{HGFEDI}}{S_{ABC}} = \frac{4(a^2+b^2+ab)}{ab}.$$ Она будет минимальна при $a=b$

$$\frac{4(a^2+a^2+a^2)}{a^2} = 12$$

Ответ: $S = 2a^2 + 2b^2 + 2ab$, $a = b$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NJ 51-31

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3. $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}-\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0$

Подходят все целые числа от 1 до n+1.

(+)

при $x=1$ $\quad 1-\frac{1}{1!}+0\ldots+0\ldots=0$

при $x=2$ $\quad 1-\frac{2}{1!}+\frac{2}{2!}+0\ldots+0=1-2+1=0$

при $x=3$ $\quad 1-\frac{3}{1!}+\frac{3\cdot 2}{2!}-\frac{3\cdot2\cdot1}{3!}+0\ldots+0=1-3+3-1=0$

при $x=4$ $\quad 1-\frac{4}{1!}+\frac{4\cdot3}{2!}-\frac{4\cdot3\cdot2}{3!}+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{4!}+0\ldots+0=1-4+6-4+1=0$

и т.д.

Ответ: все целые числа от 1 до n+1

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

02511 МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Смолин

ИМЯ Сергей

ОТЧЕСТВО ИВАНОВИЧ

Дата рождения 20.01.2000

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) По свойству логарифма:

$\lg(10^4\, tg\, 2017^\circ) + \lg(10^5\, tg\, 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20}\, tg\, 2033^\circ) =$

$= \lg(10^4 \cdot 10^5 \cdot \ldots \cdot 10^{20} \cdot tg\, 2017^\circ \cdot tg\, 2018^\circ \cdot \ldots \cdot tg\, 2033^\circ) =$

$= \lg(10^4 \cdot 10^5 \cdot \ldots \cdot 10^{20}) + \lg(tg\, 2017^\circ \cdot tg\, 2018^\circ \cdot \ldots \cdot tg\, 2033^\circ)$

Найдем значение каждого члена. $10^4 \cdot 10^5 \cdot \ldots \cdot 10^{20} = 10^{\frac{(4+20)17}{2}} = 10^{204}$.

$\lg 10^{204} = 204$.

период функции $tg\, x$ равен $\pi = 180$, поэтому

$tg\, 2017^\circ = tg\, 37^\circ$,

$tg\, 2018^\circ = tg\, 38^\circ$,

$\vdots$

$tg\, 2033^\circ = tg\, 53^\circ$.

Найдем произведение тангенсов

$$tg\, 37^\circ \cdot tg\, 38^\circ \cdot \ldots \cdot tg\, 53^\circ = \frac{\sin 37^\circ \cdot \sin 38^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 53^\circ}{\cos 37^\circ \cdot \cos 38^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 53^\circ}.$$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \Rightarrow \sin x \sin y = \cos x \cos y - \cos(x+y)$.

$\sin 37^\circ \cdot \sin 53^\circ = \cos 37^\circ \cdot \cos 53^\circ - \cos(\underbrace{37^\circ + 53^\circ}_{=90^\circ}) = \cos 37^\circ \cdot \cos 53^\circ$.

$\sin 38^\circ \cdot \sin 52^\circ = \cos 38^\circ \cdot \cos 52^\circ - \cos(\underbrace{38^\circ + 52^\circ}_{=90^\circ}) = \cos 38^\circ \cdot \cos 52^\circ$

и так далее для остальных 6 пар.

Таким образом все сомножители, кроме $\sin 45^\circ$, в числителе меняются на косинусы. Получаем:

$$\frac{\cos 37^\circ \cdot \cos 38^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 44^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 46^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 53^\circ}{\cos 37^\circ \cdot \cos 38^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 53^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = tg\, 45^\circ = 1.$$

$\lg 1 = 0$.

⊕

Ответ: 204.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 02511МК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) пусть для каких-то n и x $\sin nx = \sin x$. по св-вам синуса это возможно, если

$$\left[\begin{array}{l} nx = x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ nx = \pi - x + 2\pi t,\ t \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

1) рассмотрим первое ур-е.

$nx = x + 2\pi k \Leftrightarrow x(n-1) = 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{n-1}$ $(n>1 \Rightarrow n-1 \neq 0)$.

~~Оценка~~

т.к. $0 \le x \le \pi$, то $0 \le x(n-1) \le \pi(n-1)$. Заметим, что если (для какого-то k) $0 \le 2\pi k \le \pi(n-1)$, то решение для этого k и n существует, единственно (которого такого, что $2\pi k \le \pi(n-1)$) и лежит на $[0;\pi]$. если $2\pi k < 0$, то соответствующий $x < 0$, если $2\pi k > \pi(n-1)$, то соответствующий $x > \pi$.

$0 \le 2\pi k \le \pi(n-1) \Leftrightarrow 0 \le 2k \le n-1 \Rightarrow k \le \frac{n-1}{2}$. то есть для каждого неотрицательного k, удовлетворяющего неравенству, существует решение первого уравнения, удовлетворяющее условию.

~~если $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, то ...~~

если $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$, то существует $\frac{n-1}{2} + 1$ решений первого уравнения.

потому что k может быть $= 0$

если $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, то $\frac{n-1}{2}$ - полуцелое, поэтому возьмем ~~...~~ предыдущее ~~целое~~ нечетное число $\Rightarrow$ существует $\frac{n-2}{2} + 1$ решений первого ур-я.

2) рассмотрим второе ур-е. аналогично:

$nx = \pi - x + 2\pi t \Leftrightarrow x(n+1) = \pi(2t+1) \Leftrightarrow x = \frac{\pi(2t+1)}{n+1}$.

подходят (имеют по одному решению) все t, удовлетворяющие $t \le \frac{n}{2}$ $\left((2t+1)\pi \le \pi(n+1) \Leftrightarrow 2t+1 \le n+1 \Leftrightarrow t \le \frac{n}{2}\right)$. для нечетных n, чтобы ~~нечетное~~ кол-во решений не было полуцелым, возьмём $t \le \frac{n-1}{2}$.

таким образом, для $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$ существует $\frac{n}{2} + 1$ решений, для $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ существует $\frac{n-1}{2} + 1$ решений.

Найдем кол-во решений для каждого n.

$n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$: имеем: $\frac{n-1}{2} + 1 + \frac{n-1}{2} + 1 = n+1$.

$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$: имеем $\frac{n-2}{2} + 1 + \frac{n}{2} + 1 = n+1$.

(+)

Однако некоторые решения мы учли дважды, а именно случаи, когда $x = \frac{\pi}{2}$, т.к. $\frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2}$. Определим, когда такие x получаются.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$n\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi k \Leftrightarrow \frac{n}{2}=\frac{1}{2}+2k \Leftrightarrow n=4k+1$. поскольку для ~~разных~~ каждого n все решения ~~единств~~ уникальны (т.к. мы получаем их как $\frac{2\pi k}{n-1}$ или $\frac{\pi(2t+1)}{n+1}$, а все $2\pi k$ и $\pi(2t+1)$ при различных k и различных t различны), но для фиксированного n может существовать только один $x=\frac{\pi}{2}$, и только при n вида $4k+1$, $k\in\mathbb{N}$ ($k=0$ не подходит, потому что $n>1$).

Итого получаем:

$$S(n)=\begin{cases} n, & n=4k+1,\ k\in\mathbb{N} \\ n+1, & n\neq 4k+1,\ k\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

$S(n)=2017$ при $n=2016$ и $n=2017$ (т.к. $2017=4\cdot504+1$).
при $n<2016$ $S(n)\leq 2016$, при $n>2016$ $S(n)>2017$.

Ответ: $S(n)=\begin{cases} n, & n=4k+1,\ k\in\mathbb{N}, \\ n+1, & n\neq 4k+1,\ k\in\mathbb{N}; \end{cases}$

2 раза.

4) По неравенству о средних:

1) ср. арифм. $\geq$ ср. геом.

$\frac{a^2+b^2}{2}\geq\sqrt{a^2b^2} \Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab$.

аналогично: $a^2+c^2\geq 2ac$, $b^2+c^2\geq 2bc$. отсюда:

$a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2\geq 2ab+2ac+2bc \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$.

2) ср. геом. $\geq$ ср. гармоническое $\Rightarrow$ ср. арифм. $\geq$ ср. гармон.:

$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{3}{\left(\frac{ab+bc+ac}{abc}\right)}=\frac{3abc}{ab+bc+ac}$. По условию, $6abc=$
$=a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow 3abc=\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \Rightarrow \frac{3abc}{ab+bc+ac}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ac)}$.

по нер-ву, доказанному в пункте 1), $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.
если в знаменателе выражение в скобках поменять на $a^2+b^2+c^2$, значение дроби может только уменьшиться (или не измениться).

$\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ac)}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{1}{2}$. получаем:

$\frac{a+b+c}{3}\geq\frac{1}{2} \Leftrightarrow a+b+c\geq\frac{3}{2}$. $\frac{3}{2}$ — наименьшее значение. Оно достигается, например, при $a=b=c=\frac{1}{2}$, тогда $a+b+c=\frac{3}{2}$,
$6abc=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=a^2+b^2+c^2$.

(+)

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 02511 МК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

+

2) например, если $x = \frac{c}{3}$ (для какого-то месяца), то в следующем месяце будет $c - \frac{2c}{3} = \frac{c}{3}$, и в дальнейшем константным.

3) Диаметр первой окружности, один из концов которого — вершина параболы, другим концом имеет $(0, 1)$.
пусть r_i — радиус i-той окружности, y_i — точка с наибольшей координатой по y i-той окружности,
тогда $y_i = y_{i-1} + r_i$, и $r_i^2 = y_i$ (т.к. координата по x касания параболы по модулю равна r_i).
найти r_i можно тогда из уравнения $r_i^2 = y_{i-1} + r_i \Leftrightarrow r_i^2 - r_i - y_{i-1} = 0$
решив 2016 таких уравнений (для i от 2 до 2017), найдем радиус 2017-ой окружности и, соответственно, диаметр.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССТ Мытищи

Место проведения

ЕР 53-13

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Смольская

ИМЯ Диана

ОТЧЕСТВО Владимировна

Дата рождения 03.11.2000

Класс: 10

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

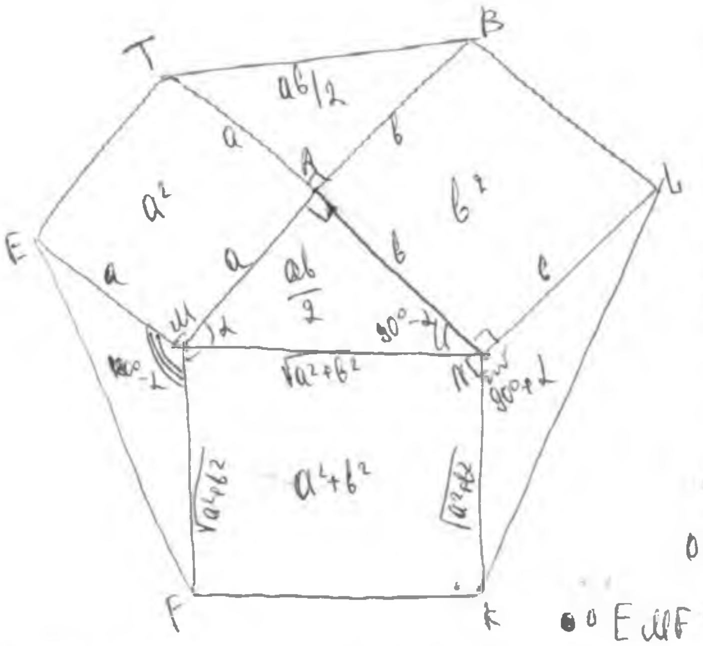
Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Дсм

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4



$S_{\triangle AMN}$ (исход) $= \frac{ab}{2} = S_{\triangle TAB}$, т.к. его $\angle TAB = \angle MAN = 90°$ (верт.); $TA = MA = a$ и $AB = AN = b$ (как стороны квадратов).

S квадрата $FTAM = a^2$;

S квадрата $ABLN = b^2$.

по теореме Пифагора:

MN (гипот) $= \sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow S_{FMNK} = a^2+b^2$;

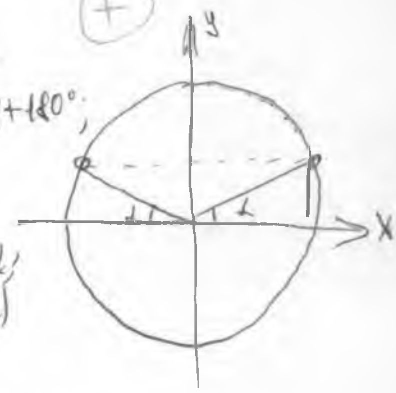
остались $\triangle EMF$ и $\triangle NLK$:

$\triangle EMF$: $EM = a$; $FM = \sqrt{a^2+b^2}$;

$\angle EMA + \angle AMN + \angle NMF + \angle EMF = 360°$, $\angle EMA = \angle FMN = 90° \Rightarrow \angle EMF = 180° - \angle AMN$, $\angle AMN$ обозначим $\alpha \Rightarrow \angle EMF = 180° - \alpha$

$S_{\triangle EMF} = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} a\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin\alpha$;

(+)



$\triangle NLK$: рассуждая аналогично; $\angle LNK = \angle ANM + 180°$;

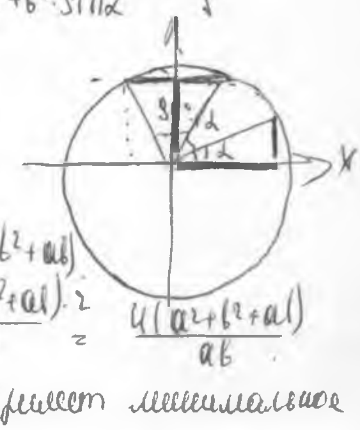
$\angle LNK = 180° - \angle ANM = 180° - (90° - \alpha) = 90° + \alpha$

$\Rightarrow S_{\triangle LNK} = \frac{1}{2} b\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(90°+\alpha)$; но $\sin(90°+\alpha) = \sin(90°-\alpha)$

а $\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$; $S_{\triangle LNK} = \frac{1}{2} b\sqrt{a^2+b^2} \cos\alpha$,

$S_{общ} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + a^2 + b^2 + (a^2+b^2) + \frac{1}{2} b\sqrt{a^2+b^2} \cdot \cos\alpha + \frac{1}{2} a\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin\alpha$

$\Rightarrow S_{общ} = ab + 2(a^2+b^2) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\,(b \cdot \cos\alpha + a \sin\alpha)$



$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $S_{общ} = ab + 2(a^2+b^2) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = ab + 2(a^2+b^2) + ab = 2(a^2+b^2+ab)$

S_2 (конечн) $= 2(a^2+b^2+ab)$, S_1 (начальн) $= \frac{ab}{2}$; $\frac{S_2}{S_1} = \frac{2(a^2+b^2+ab) \cdot 2}{ab} = \frac{4(a^2+b^2+ab)}{ab}$

$\frac{S_2}{S_1} = 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)$, (разделим почленно); $\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow$ примет минимальное значение при $a = b$ (значение 2), $\Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = 4(2+1) = 12$

Ответ: $S_2 = 2(a^2+b^2+ab)$; $\left(\frac{S_2}{S_1}\right)_{min} = 12$ при $a = b$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EP 58-13

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$12x+\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}=35$; $\frac{12x\sqrt{x^2-1}+12x}{\sqrt{x^2-1}}=35$; $12x\sqrt{x^2-1}+12x=35\sqrt{x^2-1}$;

$23\sqrt{x^2-1}=12x$; по О.Д.З: $x\neq\pm1$.

~~да~~ обе части равенства неотрицательны, т.к. прибыль не может быть меньше 0, в таком случае исходное равенство не имело бы решения, т.к. 35 равнялось бы сумме 2-х отриц. чисел.

⇒ можно возвести в квадрат.

$529(x^2-1)=144x^2$; $529x^2-529=144x^2$; $529=385x^2\Rightarrow x=\sqrt{\frac{529}{385}}$;

$529=23^2$; 23 - простое число; 385 не кратно 23; ~~извлечь из иррационального числа ⇒ прибыль компании~~ $385=5\cdot77=5\cdot7\cdot11$;

5, 7 и 11 - простые числа; 529 не кратно ни одному из них; x = корень из иррационального числа ⇒ прибыль компании выражается иррациональным числом, не содержащим даже целое число копеек. Совету директоров компании не следует этому верить.

№2.

Исследуем 1-е несколько ~~лет~~ месяцев:

1-й мес: x ($м^3$)
2-й мес: $\frac{1}{1-x}$ ($м^3$)
3-й мес: $\frac{x-1}{x}$ ($м^3$)
4-й мес: x

1-й: x

2-й: $\frac{1}{(1-x)}$

3-й: $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{1-x}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{1-x-1}{1-x}\right)}=\frac{1-x}{-x}=\frac{x-1}{x}$

4-й: $\frac{1}{\left(1-\frac{x-1}{x}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{x-x+1}{x}\right)}=\frac{x}{1}=x$

то есть, исходя из формулы, каждый 3-й месяц запас газа будет повторяться; но учтем того, что $x_{газ}$ всегда >0:

если $x>0$, то $\begin{cases}\frac{x-1}{x}>0\ (3)\\ x>0\ (4)\end{cases}\Rightarrow x-1>0\Rightarrow x>1$; но тогда для 2-ого месяца:

$\begin{cases}x>0\\ \frac{1}{1-x}>0\end{cases}$ $\begin{cases}x>1\text{ (только что нашли)}\\ 1-x>0\ (2)\Rightarrow x<1\end{cases}$ $\begin{cases}x>1\\ x<1\end{cases}\Rightarrow\{\varnothing\}$; также $x\neq1$, т.к. во 2-м мес $(1-x)\neq0$ ⇒ противоречие.

Ответ: запас газа так изменяться не может, т.к. в некоторые месяцы будет становиться отрицательным, без привязки к газу $x_{1мес}=x_{4мес}$.

№3.

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\dots+\frac{(-1)^n x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}=0$$

• при $n=1$ $x=1$

• при $n=2$ решениями являются числа 1 и 2.

(+)

• при $n>2$: заметим, что в последнем слагаемом можно сделать так, чтобы его значение было $=1$. Для этого: $x=n$. тогда в числителе и знаменателе дроби будут входить одни и те же числа. При чётном n значения дробей (посчитаем дробью и 1), стоящих на нечётных местах, будут в сумме равны сумме тех, что на чётных местах. При n-неч. числе: 1-я единица будет давать 0 при сложении с дробью со знаменателем $n!$ (у неё знак минус); дробь во знам. $=2!$ + дробь со знам. $(n-x)!=0$.

• Также всегда подойдёт $x=1$.

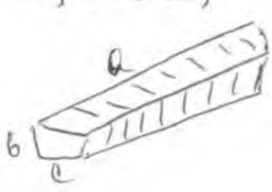
Ответ: $x=1$ и $x=n$.

№5.

рассмотрим 3 случая.

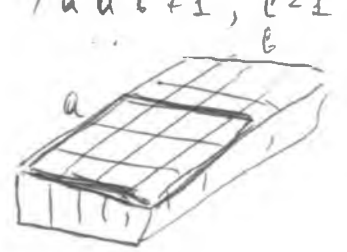
1) без ограничения общности: $a=b=c=1$; ни одного другого пар-да

2) $a\neq1$, $b=c=1$;



количество параллелепипедов $=(a-1)$

3) a и $b\neq1$; $c=1$



2 случая: 1) $a=b$; тогда формула: $\boxed{b^2-(1+2+\dots+(b-1))-1+(a-b-1)\cdot b-1}$

2) $a\neq b$; формула: $\boxed{b^2-(1+2+\dots+(b-1))+(a-b-1)\cdot b-1}$

решение: без огранич. общности: $a>b \Rightarrow$ выделим квадрат $a\times b$ (при $c=1$). Мы можем взять a раз по пар-ду со 2-мя сторонами 1 и 1, a раз по пар-ду с 2-мя стор. 1 и 2 и т.д. до b.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

если $a=b$, то последний будет совпадать с исходным ⇒ вычитаем дополнительно 1; (b по b раз $-(1+2+\ldots+(b-1)$; ⇒

за пар-дом ~~ax~~ $b \times b$, выделенном из $a \times b$: кол-во дополнительных: $(a-b-1)\cdot b-1$ (вычитаем ещё 1, исходный)

Ответ: для $a \neq 1$; $b \neq 1$; $c=1$: • если $a=b$, то кол-во $= b^2-(1+2+\ldots+(b-1))+(a-b-1)b-2$,
• если $a \neq b$, то кол-во $= b^2-(1+2+\ldots+(b-1))+(a-b-1)\cdot b-1$

3) если ~~ax~~ a, b и $c \neq 1$.

делаем аналогично.

если ~~если~~ $c \leq a$ и $c \leq b$, то мы не должны учитывать

парал-ды со сторонами, одна из которых $=1$; иначе

если $c=a$, и $a>b$, то такой учитываем.;

простейшая формула $= abc-1$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВЗФ МЭИ

Место проведения

DУ 63-17

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

шифр

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Носков

ИМЯ Никита

ОТЧЕСТВО Валерьевич

Дата рождения 10.06.2001 **Класс:** 9

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Н. Нос

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

а) $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow B_2 = A^2 - 2$, т.к. $A^2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$.

$\cancel{B_3} \; A^3 = x^3 + 2x + \frac{1}{x} + x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} =$

$= x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow B_3 = A^3 - 3A$

$A^4 = x^4 + 3x^2 + 3 + \frac{1}{x^2} + x^2 + 3 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} =$

$= x^4 + \frac{1}{x^4} + 4x^2 + \frac{4}{x^2} + 6 \Rightarrow \cancel{A^4} \; B_4 = A^4 - 4(A^2-2) - 6 =$

$= A^4 - 4A^2 + 8 - 6 = A^4 - 4A^2 + 2.$

$A^8 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^8 = x^8 + 8x^6 + \frac{8}{x^6} + 28x^4 + \frac{28}{x^4} + 56x^2 + \frac{56}{x^2} + 70.$

~~А~~ Для того чтобы выразить B_8, через A, нам надо выразить A^6 ~~и потом $B6$~~.

$A^6 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + 6x^4 + \frac{6}{x^4} + 15x^2 + \frac{15}{x^2} + 20 + \frac{1}{x^6} =$

$= \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) + 6\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 15\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 20.$

$A^8 = x^8 + \frac{1}{x^8} + 8\left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) + 28\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) + 56\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 70 \Rightarrow$

$\Rightarrow B_8 = A^8 - 8(A^6 - 6(A^4 - 4A^2 + 2) - 28(A^4 - 4A^2 + 2) - 56(A^2 -$

$- 2) - 70 =$

$= A^8 - 8A^6 + 48A^4 - 248A^2 + 138$

~~а) Отв~~

б) $B_2 = B_4$

$A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2$

$A^4 - 5A^2 + 4 = 0$

$A^2 = t$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

По теореме Виетта:

$\begin{cases} t_1 + t_2 = 5 \\ t_1 \cdot t_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} A = \pm 1 \\ A = \pm 2 \end{matrix}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ DY 63-17

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$B_4 = B_8$

$A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - 8A^6 + 48A^4 - 248A^2 + 138$

$A^8 + 47A^4 - 8A^6 - 248A^2 + \cancel{18}136 = 0$

$A^2 = t$

$t^4 + 47t^2 - 8\overset{t}{\cancel{A}}{}^3 - 248t + 136 = 0$

При $t = 4 \Rightarrow A = \pm 2$

Если $A = \pm 2$, то $x = \pm 1$

в) $B^2 = A^2 - 2 =$ почему?

$= x^2 + \frac{1}{x^2}$ При $x = 1 \Rightarrow C = 1$

Ответ: а) $\cancel{A} B_2 = A^2 - 2$

$B_3 = A^3 - 3A$

$B_4 = A^4 - 4A^2 + 2$

$B_8 = A^8 - 8A^6 + 48A^4 - 248A^2 + 138.$

б) При $A = \pm 2$ и $x = \pm 1$

в) $C = 1$ $(x = 1)$.

№2

В первый месяц запас газа равен x м^3, а во второй $(6-x)$м^3, тогда в третий $6-(6-x) = x$ м^3, в четвертый $(6-x)$м^3, образовался определенный цикл, т.е. запасы ~~нефти~~ газа всегда либо x, либо $(x-6)$ $\Rightarrow$ что запасы газа никогда не составят полный квадрат запаса в другом месяце. Ответ: Нет.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}+\frac{(x)(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=0$$

$$^{24/}(1-x)+\frac{^{12/}(x^2-x)}{2}-\frac{^{4/}(x^3-3x^2+2x)}{6}+\frac{x^4-6x^3+11x^2-6x}{24}=0$$

$$\frac{24-24x+12x^2-12x-4x^3-12x^2+8x+x^4-6x^3+11x^2-6x}{24}=0$$

$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$

рассмотрим делители свободного члена: $24=\pm1;(\pm2);\pm3;\pm6;\pm4;\pm12;\pm8;\pm24$

При $x=1$;

$1-10+35-50+24=0$

$0=0$

Выполним почленное деление;

$$
\begin{array}{l|l}
x^4-10x^3+35x^2-50x+24 & x-1 \\
\underline{x^4-x^3} & x^3-9x^2+26x-24 \\
\quad -9x^3+35x^2 & \\
\quad \underline{-9x^3+9x^2} & \\
\qquad 26x^2-50x & \\
\qquad \underline{26x^2-26x} & \\
\qquad\quad -24x+24 & \\
\qquad\quad \underline{-24x+24} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$x^3-9x^2+26x-24=0$

Рассмотрим делители свободного члена:

$\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm8;\pm12;\pm24$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

При $x=1$:

$1-9+26-24=0$

$27-33=0$

$-6=0$ – не подходит

При $x=-1$

$-1-9-26-24=0$

$-60=0$ – не подходит

При $x=2$

$8-36+52-24=0$

$60-60=0$

$0=0$

Выполним почленное деление:

$x^3-9x^2+26x-24=0$

$$
\begin{array}{l|l}
x^3-9x^2+26x-24 & x-2 \\
\underline{x^3-2x^2} & x^2-7x+12 \\
\quad -7x^2+26x & \\
\quad \underline{-7x^2+14x} & \\
\qquad 12x-24 & \\
\qquad \underline{12x-24} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

+

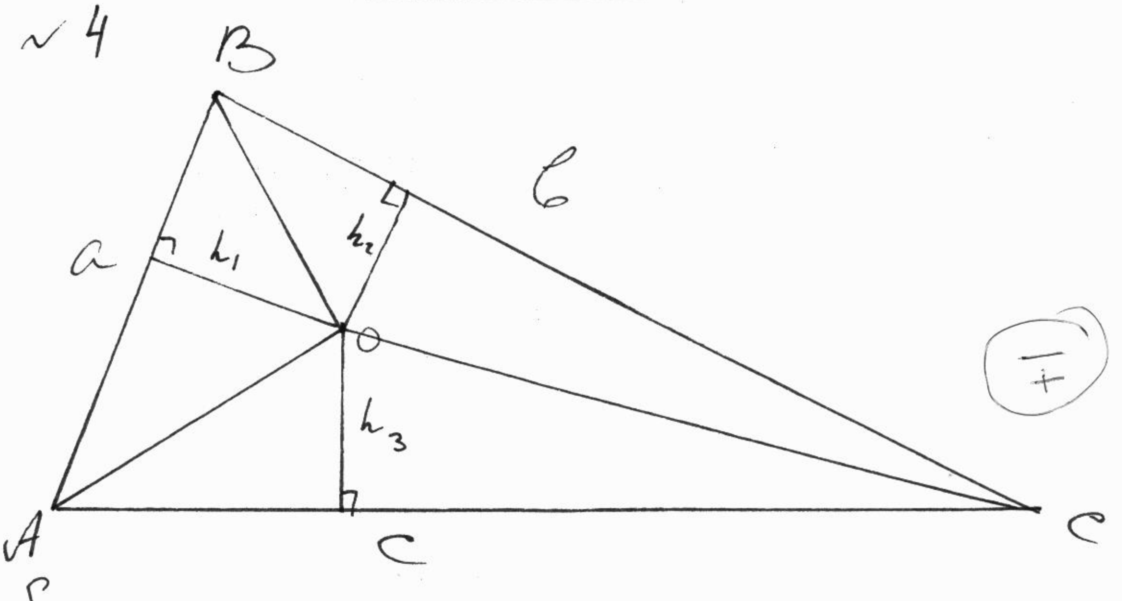
$x^2-7x+12=0$

Из теоремы Виетта следует:

$\begin{cases} x_1+x_2=7 \\ x_1\cdot x_2=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=3 \\ x_2=4 \end{matrix}$

Ответ: $x=1, 2, 3, 4$.

№ 4



$$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{1}{2}; \quad \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{1}{3}; \quad \frac{S_{BOC}}{S_{AOC}} = \frac{2}{3}$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} h_a \cdot a$$

коэффициент подобия площадей двух треугольников равен квадрату коэффициента подобия сторон. Высоты треугольника относятся так же, как и стороны треугольника.

$$\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot h_2} = \frac{a h_1}{b h_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} \cdot a; \; h_2 = \sqrt{2} \cdot h_1$$

$$\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot c \cdot h_3} = \frac{a h_1}{c h_3} = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \sqrt{3} a; \; h_3 = \sqrt{3} h_1$$

То есть точка O, должна располагаться на расстоянии $h\sqrt{2}$, от стороны BC; $h\sqrt{3}$ от стороны AC, от стороны AB, на расстоянии h.

h можно найти, если известны стороны треугольника.

№5

$f(x)=x^2+px+q$

$D=p^2-4q=100.$ (1)

$f(x)+f(x-10)=0$

$x^2+px+q+(x-10)^2+p(x-10)+q=0$

$x^2+px+q+x^2-20x+100+px-10p+q=0$

$2x^2+2px-20x-10p+2q+100=0$

$x^2+px-10x-5p+q+50=0$

$x^2+(p-10)x-(5p-q-50)=0$ (+)

$D=(p-10)^2+4(5p-q-50)=$

$=p^2-20p+100+20p-4q-200=$

$=p^2-4q-100.$ (2)

Подставим (1) уравнение во второе:

$D=100-100=0$

Так как дискриминант равен 0, то уравнение $(f(x)+f(x-10)=0)$ будет иметь только одно решение.

Ответ: Один корень $\left(\frac{10-p}{2}\right)$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО	GЯ 97-43
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ СУДАРЕВА

ИМЯ АЛЕКСАНДРА

ОТЧЕСТВО АНДРЕЕВНА

Дата рождения 21.08.1999 **Класс:** 11

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1

- $S = \lg(10^4 tg 2017^\circ) + \lg(10^5 \cdot tg 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} tg 2033^\circ) =$
$= (4+5+6+\ldots+19+20) + \lg(tg 2017^\circ \cdot tg 2018^\circ \cdot tg 2019^\circ \cdot \ldots \cdot tg 2033^\circ)$
- Заметим, что $2017 = 360 \cdot 5 + 217^\circ$, т.е. $tg 2017^\circ = tg 217^\circ$. Аналогично $tg 218^\circ = tg 2018^\circ, \ldots, tg 2033^\circ = tg 233^\circ$
- $tg\,\alpha = ctg(90-\alpha)$

$tg 217^\circ = ctg(90^\circ - 217^\circ) = ctg(-127^\circ) = ctg(360^\circ - 127^\circ) =$
$= ctg 233^\circ = \frac{1}{tg 233^\circ}$

Т.е. мы получили:

$tg 217^\circ \cdot tg 233^\circ = 1 \Leftrightarrow tg 2017^\circ \cdot tg 2033^\circ = 1$

Аналогично: $tg 2018^\circ \cdot tg 2032^\circ = 1$
$tg 2019^\circ \cdot tg 2031^\circ = 1$
$\ldots$
$tg 2024^\circ \cdot tg 2026^\circ = 1$

- Найдем $tg 2025^\circ$

$tg 2025^\circ = tg 225^\circ = tg(180^\circ + 45^\circ) = 1$

Т.о. $tg 2017^\circ \cdot tg 2018^\circ \cdot \ldots \cdot tg 2033^\circ = tg 217^\circ \cdot tg 218^\circ \cdot \ldots \cdot tg 233^\circ = 1$

- $S = 204 + \lg 1 = 204 + 0 = 204$

Ответ: $S = 204$ +

Задача 2

Ответ: Да, может. Запас, равный $\frac{c}{3}$.

Это несложно показать:

Если в каком-либо месяце установится запас топлива $x = \frac{c}{3}$, то в следующем месяце запас топлива станет равен: $c - 2x = c - 2\cdot\frac{c}{3} = \frac{c}{3} = x$.

Т.е. запасы топлива в этих двух месяцах будут одинаковы.

(+)

Задача 4.

Ответ: $\frac{3}{2}$. $(a=b=c=\frac{1}{2})$

(+)

Решение:

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2ab-2bc-2ac = 6abc$$

$$(a+b+c)^2 = 6abc+2ab+2bc+2ac$$

$$(a+b+c)^2 = 2(a+1)(b+1)(c+1) - 2a-2b-2c-2+4abc$$

$$(a+b+c)^2+2(a+b+c) = 2(a+1)(b+1)(c+1)+4abc-2$$

Нетрудно понять, что числа $a=b=c=\frac{1}{2}$ подходят под условие:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

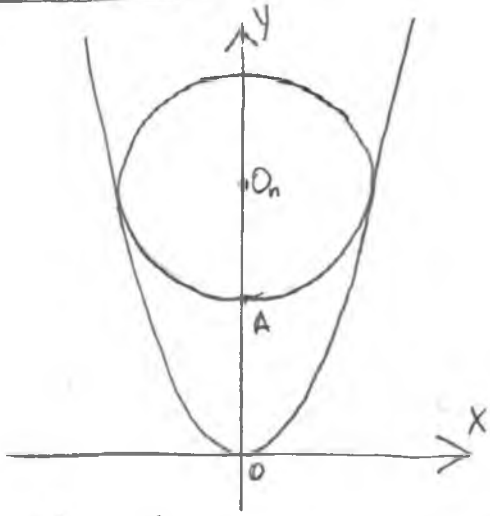
$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

И одновременна сумма чисел a, b, c - наименьшая при $a=b=c=\frac{1}{2}$:

$$(a+b+c) \geq \frac{3}{2}$$

Т.о. $(a+b+c)_{min} = \frac{3}{2}$

Задача 3



1. Для начала заметим, что окружность S_1 лежит выше оси OX, касаясь её в т. (0;0), т.е. она касается параболы „внутренним образом". Иначе окр-ть S_2 не могла бы касаться сразу и окружности S_1 и 2х ветвей параболы

2. В силу симметричного расположения всех окружностей и параболы относительно прямой OY, центры всех окружностей лежат на оси OY, и все точки касания двух окружностей лежат также на оси OY.

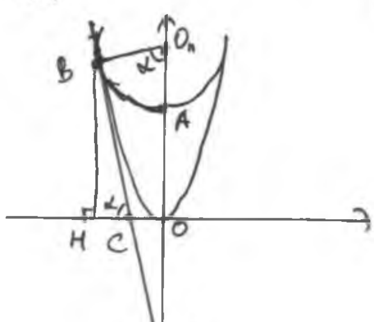
3. Рассмотрим произвольную окр-ть S_n с центром в т. O_n. т. A – точка касания окр-ти S_n с окр-тью S_{n-1} (т. $A \in OY$)

Обозначим за d – координату т. A по оси OY $\boxed{A(0;d)}$
R – радиус окр-ти S_n
тогда координаты т. $O_n(0;d+R)$

4. Т.к. т. $A \in$ окр-ти S_n, то:

$$(0-0)^2+(d+R-\cancel{d})^2=R^2$$
$$R^2=R^2$$

5. Нарисуем касат. к параболе и окр-ти S_n, проходящую через т. $B(x_0;y_0)$ – т. касан. параболы и окр-ти S_n



$f(x_0)=x_0^2$

$f'(x_0)=2x_0$ – коэф. наклона касат. $=tg\alpha$

$tg\alpha=\frac{x_0^2}{HC}$ (из $\triangle BHC$ – п/у)

$HC=\frac{x_0^2}{2x_0}=\frac{x_0}{2}=OC$

$\triangle BHC \sim \triangle DOC$ (по 2 угл.) $\Rightarrow \triangle BHC=\triangle DOC \Rightarrow$

$\Rightarrow OD=BH=x_0^2$

Задача 3 (продолжение)

$\triangle DCO \sim \triangle DO_nB$ (по 2м угл.):

$\frac{OC}{BO_n} = \frac{OD}{BD} \Leftrightarrow \frac{\frac{x_0}{2}}{R} = \frac{x_0^2}{BD} \Leftrightarrow BD = \frac{2R \cdot x_0^2}{x_0} = 2Rx_0$

из п/у $\triangle BHC$

$BC = \sqrt{x_0^4 + \frac{x_0^2}{4}} = \frac{x_0}{2}\sqrt{5x_0^2+1} = \frac{1}{2} BD \Leftrightarrow BD = x_0\sqrt{5x_0^2+1}$ $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow 2R = \sqrt{5x_0^2+1}$

$4R^2 = 5x_0^2+1$

$x_0 = \frac{4R^2-1}{5}$

Одновременно из того, что т. $B \in$ Окр-ти S_n:

$x_0 = \frac{2R+2d-1-\sqrt{4R^2-4R-4d+1}}{2}$

получаем: $\frac{2R+2d-1-\sqrt{4R^2-4R-4d+1}}{2} = \frac{4R^2-1}{5}$

отсюда выражаем R через d

Не сложно понять, что d - сумма диаметров всех предыдущих окружностей

Т.к. мы найдем R_{2017} и где это значит?

—

Задача 5

$n \in N$, $n > 1$

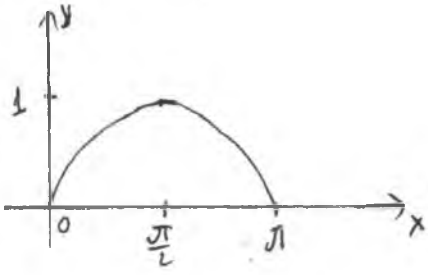


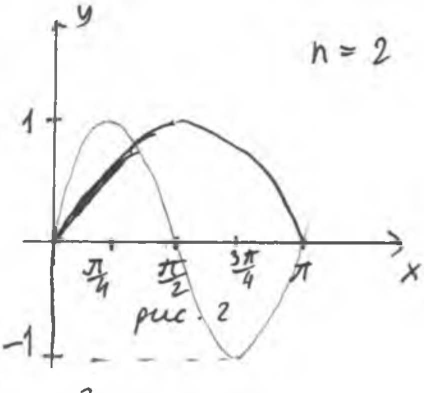
рис. 1.

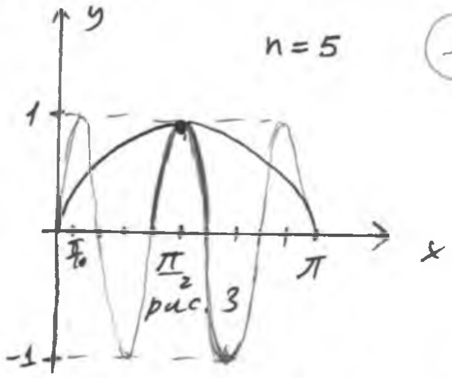
1. Заметим, что функция $y = \sin x$ принимает только ~~положительные~~ неотрицательные значения на отрезке $[0; \pi]$ (см. рис. 1)

2. Т.к. $n \in N, n > 1$, то в отрезке $[0; \pi]$ будет помещаться целое кол-во дуг графика $y = \sin nx$

Заметим, что графиком функции $y = \sin nx$ будет являться сжатый по оси OX с коэф. n график функции $y = \sin x$

3. Т.о. каждая нечётная дуга (1я, 3я, 5я...) графика $y = \sin nx$ будет давать 2 пересечения с графиком функции $y = \sin x$ (см. рис. 2). Исключением будет являться случай, когда $n \equiv 1 \pmod 4$ в этом случае одна из дуг графика $y = \sin nx$ (а именно центральная) не будет давать ни 1 пересечения с графиком $y = \sin x$, зато будет давать 1 касание с этим графиком (см. рис. 3)





Заметим, что если ~~последняя~~ n - чётн, то последняя дуга даёт нам ещё 1 пересечение с графиком $y = \sin x$ в $x = \pi$ ($\sin \pi = \sin n \cdot \pi = 1$, $n \in Z$)

Т.о. получаем:

При n - чётн. : $S(n) = n+1$

При $n \equiv 3 \pmod 4$ $S(n) = n+1$

при $n \equiv 1 \pmod 4$ $S(n) = n$

Т.е. $S(n) = 2017$ при $n = 2016$ ($S(2016) = 2016+1 = 2017$) и $n = 2017$ ($S(2017) = 2017$) ⇒ 2 раза

Ответ: при $n \equiv 1 \pmod 4$ $S(n) = n$; в ост. случ. $S(n) = n+1$; 2 раза $S(n)$ принимает знач. 2017

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

06908МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Сухрунец

ИМЯ Вадим

ОТЧЕСТВО Васильевич

Дата рождения 14.03.2002

Класс: 8

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases} 1+x+y=xy & (1) \\ 2+y+z=yz & (2) \\ 5+z+x=zx & (3) \end{cases}$$

Выразим из 1 уравнения системы x:

$1+y=xy-x$

$1+y=x(y-1)$

$x=\frac{1+y}{y-1}$, если $y-1\neq 0$ $y\neq 1$. Если $y=1$, то

$1+y=x(y-1)$

$1+1=x(1-1)$

$2=x\cdot 0$

$2=0$

противоречие

$\Downarrow$

$y\neq 1$

Из 2 уравнения системы выразим z:

$2+y=yz-z$

$2+y=z(y-1)$

$z=\frac{2+y}{y-1}$; $y\neq 1$

Подставим полученные значения в 3 уравнение системы:

$$5+\frac{2+y}{y-1}+\frac{1+y}{y-1}=\frac{2+y}{y-1}\cdot\frac{1+y}{y-1}$$

$$\frac{5(y-1)^2+(2+y)(y-1)+(1+y)(y-1)}{(y-1)^2}=\frac{(2+y)(1+y)}{(y-1)^2}\ \Big|\cdot(y-1)^2$$

$$5(y-1)^2+(2+y)(y-1)+(1+y)(y-1)=(2+y)(1+y)$$

$$5y^2-10y+5+y^2+y-2+y^2-1=y^2+3y+2$$

$$7y^2-9y+2=y^2+3y+2$$

$$6y^2-12y=0$$

$$6(y^2-2y)=0$$

$$y^2-2y=0\ (a=1;\ b=-2;\ c=0)$$

$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 0=4$ $\sqrt{D}=\pm 2$ $y_1=\frac{2-2}{2}=0$ $y_2=\frac{2+2}{2}=2$

1) $y=0 \Rightarrow x=\frac{1+y}{y-1}=\frac{1+0}{0-1}=-1$; $z=\frac{2+0}{0-1}=-2$

2) $y=2 \Rightarrow x=\frac{1+y}{y-1}=\frac{1+2}{2-1}=3$; $z=\frac{2+2}{2-1}=4$

Ответ: $(y=0;\ x=-1;\ z=-2)$; $(y=2;\ x=3;\ z=4)$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 0690/ЛК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

а) $A = x + \frac{1}{x}$ возведем в квадрат:

1) $A^2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow A^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = B_2$

2) $A^3 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$, но $3A = 3x + \frac{3}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^3 - 3A = x^3 + \frac{1}{x^3} = B_3$

3) $B_4 = (B_2)^2 - 2$, но т.к $B_2 = A^2 - 2$, то $B_4 = (A^2-2)^2 - 2$

4) $B_8 = (B_4)^2 - 2$, т.к $B_4 = (A^2-2)^2 - 2 \Rightarrow B_8 = ((A^2-2)^2-2)^2 - 2$

б) $B_2 = B_4 = B_8$

$B_2 = B_4$ (заменим B_2 и B_4 на (A^2-2) и $((A^2-2)^2-2)$

$A^2 - 2 = (A^2-2)^2 - 2$ (пусть $A^2 - 2 = t$)

$t = t^2 - 2$

$t^2 - t - 2 = 0$ $(b=-1;\ a=1;\ c=-2) \Rightarrow D = (-1)^2 - 4\cdot1\cdot(-2) = 9$

$t_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ $\quad t_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

$A^2 - 2 = -1$ $\quad A^2 - 2 = 2$

$A^2 = 1$ $\quad A^2 = 4$

$A^2 = \pm 1$ $\quad A = \pm 2$

$A = \pm 1$

подставим вместо A — $x + \frac{1}{x}$: 1) $x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 1 = 0 \mid \cdot x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$ $\quad D = (-1)^2 - 4\cdot1\cdot1 = -3 \Rightarrow$ корней нет, аналогично: $x + \frac{1}{x} = -1$ $\quad x + \frac{1}{x} + 1 = 0 \mid \cdot x$ $\quad x^2 + x + 1 = 0$ $\quad D = 1^2 - 4\cdot1\cdot1 = -3 \Rightarrow$ корней нет. 2) $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} - 2 = 0 \mid \cdot x$ $\quad x^2 + 1 - 2x = 0$ $\quad D = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot1 = 0$ $\quad x_1 = \frac{2-0}{2} = 1$; $x + \frac{1}{x} = -2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} + 2 = 0 \mid \cdot x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$ $\quad D = 2^2 - 4\cdot1\cdot1 = 0$. $\quad x_2 = \frac{-2-0}{2\cdot1} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow$ Получаем 2 пары чисел при которых $B_2 = B_4 = B_8$: $A = 2\ x = 1$ и $A = -2;\ x = -1$

Ответ: $A = 2;\ x = 1$ и $A = -2;\ x = -1$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Пусть a, b, c – самые легкие приборы, $a(d, e, f)$ – самые тяжелые. Средних привезли n штук, тогда: $a<b<c<\underbrace{\dots}_{n}<d<e<f$.

$a+b+c=31$; $d+e+f=41$ => вес 1 среднего прибора будет больше $\frac{31}{3}$ и меньше $\frac{41}{3}$ => $\frac{31}{3}<\frac{48}{n}<\frac{41}{3}\ \Big|\cdot 3$ → т.к $120-31-41=48$ и n приборов средних

$$31<\frac{144}{n}<41 \mid \text{перевернем}$$

$$\frac{1}{31}>\frac{n}{144}>\frac{1}{41} \Leftrightarrow \frac{1}{41}<\frac{n}{144}<\frac{1}{31}\ \Big|\cdot 144 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{144}{41}<n<\frac{144}{31} \Leftrightarrow 3\frac{21}{41}<n<4\frac{20}{31}$, т.к n – целое число, то n может быть равно только 4. Пример:

$\underbrace{9;\ 10,8;\ 11,2}_{\text{легкие}} \mid \underbrace{11,3;\ 11,4;\ 12,6;\ 12,7}_{\text{средние}} \mid \underbrace{12,9;\ 13,1;\ 15}_{\text{тяжелые}}$

Всего: $3+4+3=10$ приборов

+

Ответ: 10 приборов.

№5

Пусть объем резервуара – V; x – производительность в час первого насоса; y – производительность в час второго насоса; t – часов работал 1 насос до 10 часов утра.

1) $tx+2x-2y=\frac{V}{2}$ в 12 часов
2) $tx+4x-4y=\frac{2}{3}V$ в 14 часов

$\frac{2V}{3}-\frac{V}{2}=\frac{1}{6}V$ – заполняется за 2 часа при работе 14 2 насосов.

$$2x-2y=\frac{1}{6}V \mid \cdot 3 \quad (\text{с } 12\text{ч до } 14\text{ч})$$

$$6x-6y=\frac{V}{2} \text{ приравняем к 1 уравнению;}$$

$$6x-6y=tx+2x-2y$$

$$tx=4x-4y$$

$$t=4-4\frac{y}{x} \Rightarrow t\leq 4 \text{ т.к } x\geq 0 \text{ и } y\geq 0$$

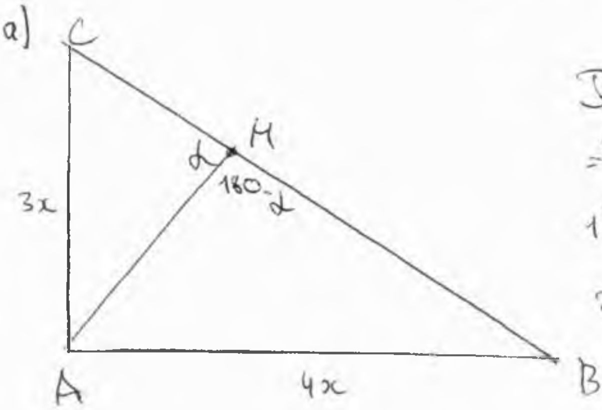
$10-4=6$ часов утра

+

Ответ: в 6 часов утра.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

а) 

Рассмотрим ΔABC – прямоугольный
Пусть $AB = 4x$, а $CA = 3x$; $\angle CHA = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AHB = 180 - \angle CHA = 180 - \alpha$.

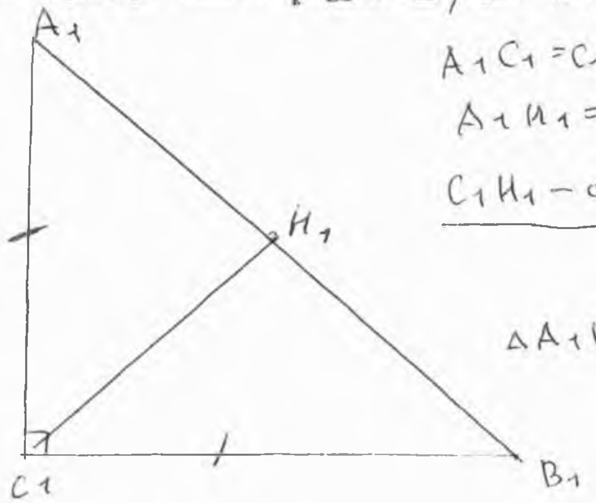
1) $S_{CHA} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AH \cdot \sin\alpha$

2) $S_{AHB} = \frac{1}{2} AH \cdot HB \cdot \sin 180 - \alpha$

AH – общая и $\sin\alpha = \sin 180 - \alpha \Rightarrow$

$S_{CHA} = S_{AHB}$, если $HB = CH$, но т.к скорости братьев одинаковы и $AB > CA$, то CH не может быть равно HB по условию $\Rightarrow S_{CHA} \neq S_{AHB}$.

б) $S_{CHA} = S_{AHB}$, если $HB = CH$, но учитывая, что скорости братьев одинаковы, то $HB = CH$ только в том случае, если $CA = AB$ (то есть относятся как 1:1). Поэтому таким образом на 2 треугольника равных по площади можно разрезать любой прямоугольный треугольник у которого равны катеты (относятся как 1:1). И таких треугольников бесконечно много. Док-во, что их площади будут равны: В $\Delta A_1B_1C_1$



$A_1C_1 = C_1B_1$ (по условию)
$A_1H_1 = H_1B_1$ (т.к скорости братьев одинаковы)
C_1H_1 – общая

$\Downarrow$

$\Delta A_1H_1C_1 = \Delta H_1B_1C_1 \Rightarrow S_{A_1H_1C_1} = S_{H_1B_1C_1}$

Ответ: а) нет, части неодинаковой площади б) бесконечно много (катеты у них должны быть равны).

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

УЫ 60-80

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Сысоев

ИМЯ Кирилл

ОТЧЕСТВО Романович

Дата рождения 04.09.2000

Класс: 10

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 4 листах

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ УЫ 60-80

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35 \quad | : 12x$ Проверим, не является ли $x=0$. $x=0$

$0+0=35$

$0=35$

ОНЗ

$1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12x}$

$\begin{cases} y = \frac{35}{12x} \Rightarrow x \neq 0 \\ y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow x \neq \pm 1 \end{cases}$ $x^2-1 \geq 0$ $(x+1)(x-1) \geq 0$ Найдем нули и точки разрыва.

$(x+1)(x-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

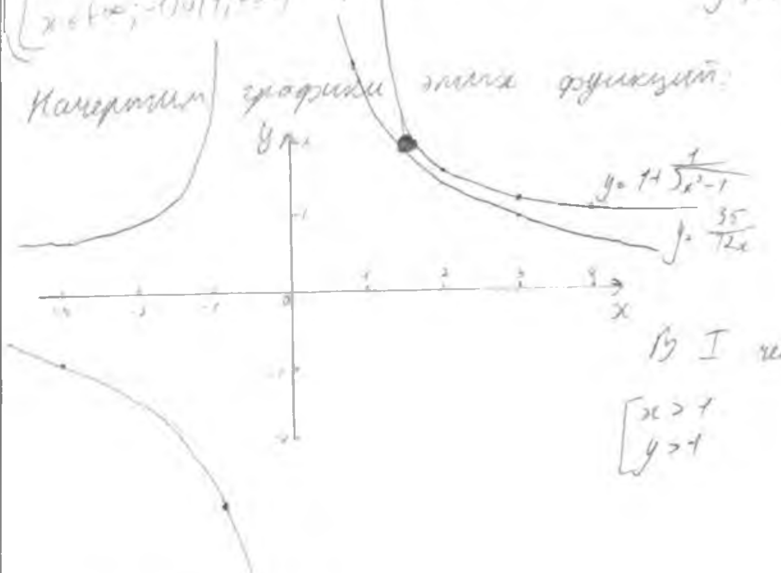
$\begin{cases} y = \frac{35}{12x} \\ x \neq 0 \end{cases}$ – это гипербола

x	-1	1	-3	3	$1,1$	2	$1,5$
(примерно) y	≈ -3	≈ 3	≈ -1	≈ 1	$\approx 2,7$	$\approx 1,4$	≈ 2

$\begin{cases} y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \end{cases}$ – (~~[illegible]~~)

x	$1,1$	2	3	4	$1,5$
y	≈ 11	$\approx 1,5$	$\approx 1,3$	$\approx 1,25$	$1,9$

Начертим графики этих функций:



$y = \frac{35}{12x}$ находится в I и III четверти, а $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ в I и II $\Rightarrow$ рассмотрим только I четверть на их пересечение, т.к. больше нигде они пересечься не смогут.

В I четверти $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ограничена

$\left[\begin{array}{l} x > 1 \\ y > 1 \end{array}\right.$

Проверим точку $x=1,5$.

$y = \frac{35}{18}$ $\quad 35,0 : 18 = 1,94$ $\quad 1,95 > \frac{35}{18} > 1,94$

$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2,25-1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1,25}} =$

$= 1 + \sqrt{\frac{100}{125}} = 1 + \sqrt{\frac{4}{5}} = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{0,8} + 1 \approx$

$\approx 1,9$

$1,8 < \sqrt{0,8} + 1 < 1,9$

Они пересекаются примерно возле точки $x = 1,5$. (т.к. $y = \frac{35}{12x}$ возле $x=1,5$ находится выше $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$) $\Rightarrow$ Они имеют как минимум 2 точки пересечения. $\Rightarrow$ За месяц 2 прибыли $\Rightarrow$ не верно, т.к. должно быть касание, а не пересечение.

Ответ: (~~[illegible]~~) не должны поверить (т.к. 2 решения)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ УЫ 60-30

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$I - x\ м^3$ Рассмотрим несколько месяцев и ~~тра~~ попробуем найти зависимость:

$II = \frac{1}{1-x}\ м^3$

$III = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}\ м^3$

$IV = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x\ м^3$ (дальше будет то же самое: $\frac{1}{1-x}$ и т.д.)

⇓

Может запас года оказаться одинаковым.

Одинаковые: $I - IV - VII$ (через каждые 2 месяца)

Возможно только 3 варианта: x; $\frac{1}{1-x}$; $1-\frac{1}{x}$.

№3.

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = 0$$

Рассмотрим данное уравнение.

При $x=0 \Rightarrow 1=0$ ОНП

При $x=1 \Rightarrow$ 3 член равен 0 и последующие тоже $\Rightarrow 1-1=0$ $\underset{ОВП}{0=0}$

При $x=2 \Rightarrow$ 4 член равен 0.

и т.д.

Можно заметить, что если взять $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$, то какой-то (последний^*^ предпоследний) после которого все последующие числа равняются 0, числитель сворачивается в $x!$

⇓

$x=1 \quad 1 - \frac{1}{1!}^{\to 1!}$

$x=2 \quad 1 - \frac{2}{1!}^{\to 2!} + \frac{2\cdot 1}{2!}^{\to 2!}$

$x=3 \quad 1 - \frac{3}{1!} + \frac{3\cdot 2}{2!}^{\to 3!} - \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3!}^{\to 3!}$

$x=4 \quad 1 - \frac{4}{1!} + \frac{4\cdot 3}{2!} - \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}^{\to 4!} + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!}^{\to 4!}$

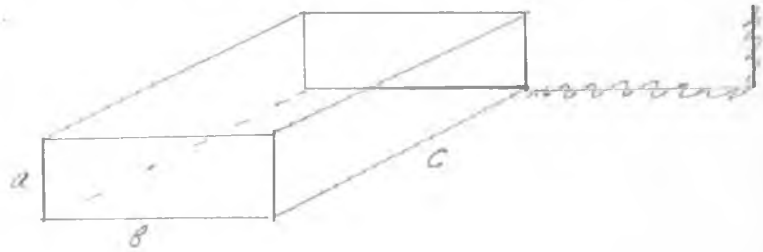
⇒ Последнее число всегда „1". И ~~при~~ всегда получается ОВП.

Ответ: $x = n$, $n \in N$ (натуральное число).

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.



Т.к. этот параллелепипед составлен из кубиков со стороной 1, то $a, в, c \in \mathbb{N}$.

Минимальное количество меньших параллелепипедов будет количество всех кубиков, из которых составлен данный параллелепипед.

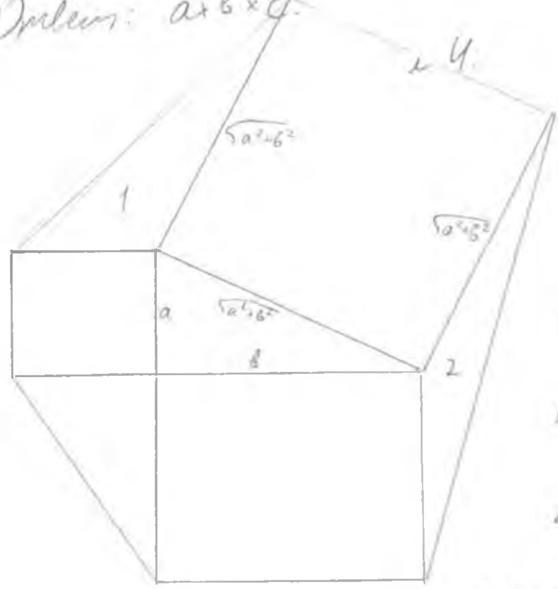
$\Rightarrow n_{куб} = \frac{a \cdot в \cdot c}{1} = a \cdot в \cdot c$ ⊖

$V_{парал.} = a \cdot в \cdot c$

$V_{куб} = 1$

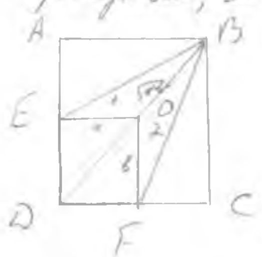
Ответ: $a \times в \times c$.

№4.



Рассмотрим △1 и △2.

Сторона 1 треугольника $\sqrt{a^2+в^2}$ = стороне 2 треугольника $\sqrt{a^2+в^2}$ ⇒ перечертим рисунок, соединив эти стороны.



Рассмотрим EOFD

$OD = \sqrt{a^2+в^2} = OB$.

$\frac{S_{EOFD}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$

$AE = FD = в$

$DF = FC = a$

Нам нужно найти S_{BEOF}.

$S_{BEOF} = S_{ABCD} - S_{EOFD} - S_{ABE} - S_{FCB} = (2a \cdot 2в) - aв - \frac{2a \cdot в}{2} - \frac{2в \cdot a}{2} =$
$= 4aв - aв - aв - aв = \underline{aв}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ Ybl 60-80

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 (продолжение)

$S_{нов} = ab + (\sqrt{a^2+b^2})^2 + a^2 + b^2 + \frac{2(ab)}{(2)} = ab + a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + ab =$

$= 2(a^2 + ab + b^2) = a^2 + b^2 + (a+b)^2$

$S_{стар} = \frac{ab}{2}$

$\frac{S_{нов}}{S_{стар}} = min = \frac{2a^2 + 2ab + 2b^2}{\frac{ab}{2}} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2}{ab} = 4\frac{a}{b} + 4 + 4\frac{b}{a} = 4 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$

сумма взаимно обратных чисел ≥ 2. Т.к. нам нужно минимально, то сумма должна $= 2$.

$\Downarrow$

$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ или $\frac{a}{b} = 1$

Ответ: $S = a^2 + b^2 + (a+b)^2$

$\frac{a}{b} = 1.$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ	KL 37-34
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Тарасов

ИМЯ Денис

ОТЧЕСТВО Олегович

Дата рождения 05.04.2002 **Класс:** 8

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases} \quad \begin{cases} 1+x=xy-y \\ 2+y+z=yz \\ 5+x=zx-z \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{x+1}{x-1} \\ 2+\frac{5+x}{x-1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{5+x}{x-1}\cdot\frac{x+1}{x-1} \\ z=\frac{5+x}{x-1} \end{cases}$$

$$2+\frac{5+x}{x-1}^{(x-1)}+\frac{x+1}{x-1}^{(x-1)}=\frac{(5+x)(x+1)}{(x-1)^2} \qquad D: R\setminus\{1\}$$

$$2+\frac{4x-2x^2-6-5x-5-x^2-x}{(x-1)^2}=0$$

$$\frac{x^2-2x-11+2x-4x+2}{(x-1)^2}=0$$

$$\frac{3x^2-6x-9=0}{(x-1)^2}$$

$$3x^2-6x-9=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+(-1)+y=-y \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+(-1)=-z \end{cases} \\ \begin{cases} 1+3+y=3y \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+3=3z \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=-y \\ 2+y+z=yz \\ 4=-2z \end{cases} \\ \begin{cases} 4=2y \\ 2+y+z=yz \\ 8=2z \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ 2+0+(-2)=0\cdot(-2) \\ z=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ 2+2+4=2\cdot 4 \\ z=4 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \\ z=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=3 \\ z=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(x=-1; y=0; z=-2)$; $(x=3; y=2; z=4)$ +

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ____________

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ КЛ 37-34

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

а) Дано:

$A = x + \frac{1}{x}$

$B_k = x^k + \frac{1}{x^k}$

$k = 2; 3; 4; 8$

Выразить B_k через A

Решение:

$B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 + 2$

$B_2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

$B_2 = A^2 - 2$

$B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3}$

~~$A = x - \frac{1}{x}$~~

~~$A^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)($~~

$B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$B_3 = A(A^2 - 2 - 1)$

$B_3 = A(A^2 - 3)$

$B_3 = A^3 - 3A$

$B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4}$

$B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 - 2$

$B_4 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2$

$B_4 = (A^2 - 2)^2 - 2$

$B_4 = A^4 - 4A^2 + 4 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2$

$B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8}$

$B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8} + 2 - 2$

$B_8 = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2$

$B_8 = (A^4 - 4A^2 + 2)^2 - 2$

$B_8 = A^8 - 4A^6 + 2A^4 + 16A^4 - 8A^2 + 2$

~~$B_8 = A^8 - 4A^6 + 2A^4 + 16A^4 - 8A^2 + 4 - 2 =$~~

~~$A^8 - 4A^6 + 18A^4 - 8A^2 + 2$~~

Ответ: $\boxed{B_2 = A^2 - 2;\ B_3 = A^3 - 3A;\ B_4 = A^4 - 4A^2 + 2;\ \cancel{B_8 = A^4}\ B_8 = (A^4 - 4A^2 + 2)^2 - 2\ \ B_8 = A^8 - 4A^6 + 2A^4 + 16A^4 - 8A^2 + 2\ \ B_8 = A^8 - 4A^6 + 18A^4 - 8A^2 + 2}$

б)

~~$A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - 4A^6 + 18A^4 - 8A^2 + 2$~~

~~$A^8 - 4A^6 + 18A^4 - 8A^2 + 2 - A^4 + 4A^2 - A^2 - 2 + 2 = 0$~~

~~$A^8 - 4A^6 + 17A^4 - 5A^2 + 2 = 0$~~

б) $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^4 + \frac{1}{x^4} = x^8 + \frac{1}{x^8}$

если $x = 1$, то $1 + 1 = 1 + 1 = 1 + 1$

$A = x + \frac{1}{x} = 1 + 1 = 2$

$A^2 - 2 = (A^2 - 2)^2 - 2 = (A^4 - 4A^2 + 2)^2 - 2$

$2^2 - 2 = (2^2 - 2)^2 - 2 = (2^4 - 4 \cdot 2^2 + 2)^2 - 2$

$4 - 2 = (4 - 2)^2 - 2 = (16 - 16 + 2)^2 - 2$

$2 = 4 - 2 = 4 - 2$

$2 = 2 = 2$

Ответ: при $x = 1$; $A = 2$ $B_2 = B_4 = B_8$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

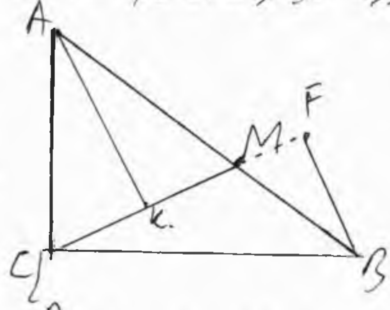
Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ KL 37-34

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Если катеты прям треугольника относятся 3:4, то он египетский и его гипотенуза будет относиться к катетам как 5:4;3.



Пусть k - коэф. подобия. если белки двигались с одной скоростью то обе они пройдут 6k и встретятся в точке M. Периметры ΔAMC и ΔMBC равны, но площадь у них разная т.к. $BF \neq AK$. Площадь ΔAMC больше площади ΔCMB, т.к. $AK > BF$.

Для того чтобы их площадь была равная CM должно быть медианой, а так как они двигаются с равной скоростью то ~~треугольник~~ прямоугольный треугольник должен быть равнобедренный.

Ответ: 1) площадь не равна 2) существует только одно ~~треугольник~~ отношение катетов (1:1), для того чтобы площадь была равна.

№5

Весь объем резервуара - 1, тогда между 12 и 14 часами заполнилось $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ объема, тогда скорость заполнения (вместе с откачиванием) равна $\frac{1}{12}$ объема в час. Значит в 10 часов резервуар был заполнен на $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Допустим скорость откачивания равна 0, тогда время, когда включили насос - 10 - 4 = 6ч. Соответственно раньше 6ч. включить насос не могли.

Ответ: самое раннее время - 6ч.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3
Средний вес самых легких приборов равен $\frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$ кг.
Средний вес самых тяжелых приборов равен $\frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}$ кг.
Приборов со средним весом (не относится не к самым тяжелым, не к самым лёгким) осталось $120 - 31 - 41 = 48$ кг.
Их средний вес находится между $10\frac{1}{3}$ кг и $13\frac{2}{3}$ кг.
Допустим их средний вес 12 кг. тогда ~~легких~~ средних приборов $\frac{48}{12} = 4$.
Если их 3 тогда их средний вес $\frac{48}{3} = 16$ кг, но такого быть не может т.к. он должен быть меньше $13\frac{2}{3}$ кг. Если их 5, то ср. вес. $\frac{48}{5}$ - меньше 10, но такого быть не может т.к. их ср. вес должен быть больше $10\frac{1}{3}$ кг. Соответственно средних приборов 4. Значит всего приборов $3+4+3=10$
Ответ: всего 10 приборов.

7

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССТ. Мытищи.

Место проведения

GE 78-43

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Тарасов ~~Дмитрий~~

ИМЯ Дмитрий

ОТЧЕСТВО Андреевич

Дата рождения 09.02.2003.

Класс: 7

Предмет МАТЕМАТИКА.

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 03 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2003.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Решение: За первую неделю (когда все машины целы), они потребляют 31л; за вторую 30л ... за предпослед-нею 1л. Т.Е. Всё топливо = (31л + 30л + 29л ... + 1л + 0л)

Всё топливо = 496л. Т.К. его хватило на 2 срока (32 ~~дн~~ недели), значит его закупили на 16 ~~дней~~ недель (31 × 16 = 496)

Ответ: Топлива было (496л), закупили на 16 ~~дней~~ недель.

№2.

Решение: Нам нужно найти число кавалеров. У нас некое число девушек. Они танцевали с числом кавалеров большим на 1 чем у ~~предыдущей~~ предыдущей. Т.Е у 1 ~~дв~~ семь кавалеров, у 2 восемь, у 3 ~~девять~~ девять и т.д. Мы должны найти число девушек так чтобы оно не нарушало условию. И это число 7.

7 девушек и 13 кавалеров.

$(7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13)$ (Последняя девушка танцевала со всеми кавалерами).

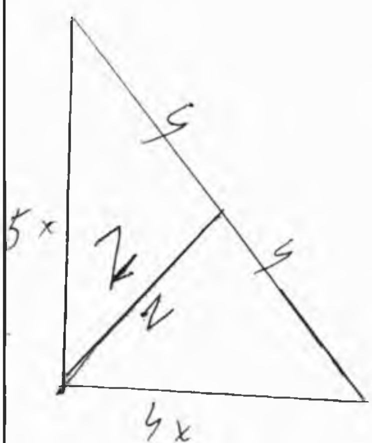
Ответ: Кол-во кавалеров = 13.

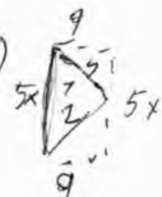
№3

Решение: Мы видим, что и x и y повышаются в иксах, значит их максимальное значение $= 23$, а минимальное $= 0$. Далее следует, что $x - y$: $\pm 23, \pm 22, \pm 21, \pm 20, \pm 19, \pm 18, \pm 17, \pm 16, \pm 15, \pm 14, \pm 13, \pm 12, \pm 11, \pm 10, \pm 9, \pm 8, \pm 7, \pm 6, \pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.

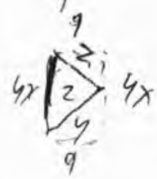
—

№4



A) 

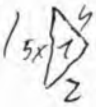
$\boxed{S_1 = 5x \cdot 9}$ $\quad S_1 > S_2$



$\boxed{S_2 = 4x \cdot 9}$

В обоих случаях есть 9, т.к. у треугольников 2 стороны равны.

Ответ: Нет. ошибка.

Б) 

Ограда $= P$

$P_1 = 5x + 4 + 2 \qquad P_1 > P_2$

$P_2 = 4x + 4 + 2$.

Ответ: Нет.

—

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Решение: 2,000000000004 и 2,00000000002 в обоих дробях сокращаются. Остаётся (1,000000000004)^2 и (1,0000000000002)^2. Мы видим, что на концах этих нецелых чисел есть цифры. Это значит, что в не ~~зависимости~~ зависимости от кол-ва нулей результат будет одинаков. То число, которое больше, и при 100 нулях и при 1 нуле будет больше. Сократить. Получается $(1,4)^2$ и $(1,2)^2$. Т.Е нули. Можно $(1,2 \cdot 1,2 = 1,44)$. $(1,4 \cdot 1,4 = 1,96)$. Т.Е $(1,4)^2 > (1,2)^2$.

Ответ:

$$\frac{2,000000000004}{(1,000000000004)^2 + 2,000000000004}$$

больше чем

$$\frac{2,0000000000002}{(1,0000000000002)^2 + 2,0000000000002}$$

~~2,00000000002 / (1,00000000002)^2 + 2,…~~

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск	067 07 МК
Место проведения	шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Гаскина

ИМЯ Арина

ОТЧЕСТВО Алексеевна

Дата рождения 15.04.2003 **Класс:** 7

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Агр-

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 06704 МК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. 20 человек - всего

Допустим:

10 девочек

Екатерина - 7 кав.
Ольга - 8 кав.
Ирина - 9 кав.
Карина - 10 кав.
Елена - 11 кав.
Мария - 12 кав
Марина - 13 кав.
Анастасия - 14 кав.
Елизаветта - 15 кав.
Алина - 16 кав.

① Каждый раз начиная с ~~Екатерины~~ Ольги у девочек увеличивается число кавалеров на 1.

Значит если пригласили 10 девочек, то было 16 кавалеров.

Но $10+16=26$, поэтому девочек было меньше.

② Берём трех девочек: Елизаветту, Анастасию и Марину.

Тогда получается, что пригласили 7 девочек. и 13 кавалеров

$7+13=20$ (человек)

+

Ответ: 13 кавалеров пригласили в гости.

5. $(1{,}0000000004)^2 = 1{,}00000000000000000016$

① $(1{,}0000000002)^2 = 1{,}00000000000000000004$

② $$\begin{array}{r} 1{,}00000000000000000016 \\ +\ 2{,}00000000004000000000 \\ \hline 3{,}00000000004000000016 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1{,}00000000000000000004 \\ +\ 2{,}00000000002000000000 \\ \hline 3{,}00000000002000000004 \end{array}$$

③ $$\frac{2{,}0000000004}{3{,}00000000004000000016} < \frac{2{,}0000000002}{3{,}00000000002000000004}$$

+

Ответ. 1 дробь < 2 дробь

1. а - литр в неделю на каждую машину

31 - машины на автобазе

если каждую неделю одна из машин выходила из строя, а ~~то~~ топлива закуплено на 31 машину, то топлива было закуплено на 31 неделю

31 - недели
31 - машины

1) $31:31=1$ (л) - в неделю на каждую машину;

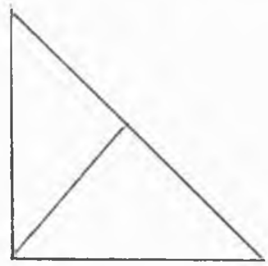
2) $1\times 31=31$ (л) - на все машины.

+

Ответ: 31 л - топлива
31 неделю - период

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.



4:5

А) Нет, т.к. 4:5

Б) Нет, т.к. площадь одной части не равна площади другой части.

–

3. Допустим:

$$\left.\begin{array}{ll} z = 02 & y = 00 \\ x = 22 & z = 02 \\ y = 00 & x = 22 \end{array}\right\}$$ такого быть не может

$$\left.\begin{array}{ll} z = 00 & y = 05 \\ x = 02 & z = 00 \\ y = 05 & x = 5 \end{array}\right\}$$ такого быть не может

–

Ответ: нет решения.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Лицей №18

Место проведения

УЮ 74-73

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Тишаков

ИМЯ Данил

ОТЧЕСТВО Романович

Дата рождения 23.06.2000

Класс: 10

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

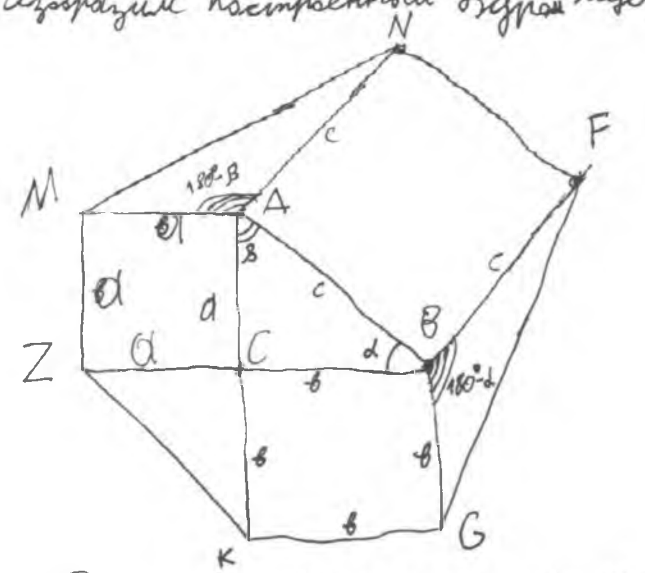
Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УЮ 74-73

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Изобразим построенный ~~Бурли~~ Шуем дом:



Дано: ZMAC - квадрат
ABFN - квадрат
KGBC - квадрат
$AC = a$; $CB = в$;

Площадь исходного дома равна $\frac{aв}{2}$;

Площадь построенного дома будет равна сумме площадей всех составляющих его фигур:

$S = S(\triangle MNA) + S(ANFB) + S(\triangle BFG) + S(KGBC) + S(\triangle KCZ) + S(ZCAM) + S(\triangle ABC)$;

1) треугольники ZCK и ABC равны:

а) $\angle BCK = \angle ZCA = 90°$ т.к. KCBG и ZCAM-квадраты

$\Downarrow$

$\angle ZCK = \angle ACB$ т.к. вертикальные

б) $ZC = AC = a$ т.к. ZMAC - квадрат

в) $CB = CK = в$ т.к. KGBC - квадрат

$\Rightarrow \triangle ZCK = \triangle ABC$ по 2-ум сторонам и углу между ними.

~~CK~~

$\Downarrow$

$S(\triangle ZKC) = S_{\triangle} ABC = \frac{aв}{2}$;

2) $S(KGBC) = в^2$ т.к. KGBC-квадрат;

3) $S(ZCAM) = a^2$ —11—;

4) $S(ABFN) = c^2$ —11—;

5) $S(\triangle GBF) = \frac{в \cdot c \cdot \sin(180° - \alpha)}{2}$ — $(180° - \alpha)$ - это $\angle FBG$

* Угол берется $(180° - \alpha)$ т.к. $\angle\alpha + \angle ABF + \angle FBG + \angle CBG = 360°$, но $\angle ABF = \angle CBG = 90° \Rightarrow \angle\alpha + \angle FBG = 360° - 180° = 180°$

$\Downarrow$

$\angle FBG = 180° - \alpha$

И, как известно, для $\alpha \in (0°; 90°]$ $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

$\Downarrow$

$S(\triangle GBF) = \frac{в \cdot C \cdot \sin\alpha}{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

6) Аналогично выходит для $\triangle MAN$:

$$S(\triangle MAN) = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{2}$$

7) но $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, а $\sin\beta = \frac{b}{c}$ $\Rightarrow S(\triangle GBF) = \frac{ab}{2}$

$S(\triangle MAN) = \frac{ab}{2}$

8) тогда $S(MNFGKZ) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + a^2 + b^2 + c^2$,

но $c^2 = a^2 + b^2$ (т. Пифагора) $\Rightarrow S(MNFGKZ) = 2ab + 2a^2 + 2b^2$

$= (a+b)^2 + a^2 + b^2$

+

Теперь найдем отношение их площадей:

$$\frac{S(MNFGKZ)}{S(ABC} = \frac{4(ab + a^2 + b^2)}{ab} = 4 + 2\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)$$

т.к. здесь нас интересует только изменение $\frac{a^2+b^2}{ab}$, то отбросим коэффициент 2 и слагаемое 4 и получим $\frac{a^2+b^2}{ab}$. Здесь нужно найти $\frac{a}{b}$ такое, при котором данное выражение принимает наименьшее значение: $\cancel{\frac{a^2+b^2}{ab}}$ $\min\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)$. Выразим b через a, тогда $b = ka$, где k – искомый коэффициент (>0). Если k растет, то значение выражения тоже растет. 1) при $k=1$ з.в. $=2$; при $k=2$ з.в. $=2{,}5$. Если взять $k<1$, то это можно представить как: $k=\frac{1}{n}$ $(n>1)$, тогда $b = \frac{a}{n} \Rightarrow a = bn$ т.е. та же самая ситуация просто $a(b)$ заменили на $b(a)$.

$\Downarrow$

$\min\left(\frac{(kb)^2 + b^2}{kb^2}\right) = \min\left(\frac{k^2+1}{k}\right) = 2$, при $k=1$. Ответ: при $a:b = 1:1$.

№2

При данном уравнении: $\frac{1}{1-x}$ теплостанция не может проработать более 2х ~~меся~~ месяцев: ±

1) первый месяц запас x м³ ($x>0$ по условию)

2) второй месяц запас $\frac{1}{1-x}$ м³ ($\frac{1}{1-x} > 0 \Rightarrow x<1$ по условию)

3) третий месяц запас $\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x}$ ($\frac{1-x}{-x} > 0 \Rightarrow x>1$ или $x<0$,

но это противоречит условиям первых двух месяцев

$\Downarrow$

Станция работает всего два месяца, а условие

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УЮ 74-73

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x=\frac{1}{1-x}$; $x-x^2=1$; $x^2-x+1=0$ не имеет решения для $x\in(0;1)$ => Ответ: нет не может. (P.S. если это в нашей вселенной, то Vгазов, наверняка, — действительное число).

№3.

Берем любое $x \in$ ~~0; n~~ $[1;n]$, тогда

1) при $x=1$:

$1-\frac{1}{1}+\frac{1(1-1)}{2}\ldots$ ~~уравнен~~ каждый член суммы (после I-го в данном случае) будет содержать в числителе часть $(x-1)$ и, следовательно, обратится в ноль, тогда получается $1-1=0$, т.е. подходит.

2) при $x=2$:

$$1-\frac{2}{1}+\frac{2(2-1)}{2}-\frac{2(2-1)(2-2)}{6}=1-2+1=0$$ ~~не подходит~~ подходит

3) при $x=3$:

~~$1-3+1-\frac{3(3-1)(3-2)}{6}+\frac{3(3-1)(3-2)(3-3)}{24}=$~~

~~$1-3+1+1$~~ $1-3+1-1+$

$$1-\frac{3}{1}+\frac{3(3-1)}{2}-\frac{3(3-1)(3-2)}{2\cdot3}+\frac{3(3-1)(3-2)(3-3)}{2\cdot3\cdot4}=$$

$=1-3+3-1=0$. подходит

4) при $x=4$:

~~$1-4+6-4+$~~ $$1-\frac{4}{1}+\frac{4(4-1)}{1\cdot2}-\frac{4(4-1)(4-2)}{2\cdot3}+\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{2\cdot3\cdot4}-\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)(4-4)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}=$$

$1-4+6-4+\frac{1}{2}\neq0$ — не подходит.

⇓

нет прямой закономерности от четности x.

~~5) при $x=n$~~

±

№1.

Т.к. доход может являться любым действительным числом (и отрицательным и иррациональным), то нужно просто доказать, что данное уравнение имеет решение ($x\notin\varnothing$).

$12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35$; $(12x-35)\sqrt{x^2-1} + 12x = 0$

$12x\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = 35$; $(144x^2+840x+1225)(x^2-1)+12x=0$

$144x^4+840x^3+1225x^2-144x^2-840x-1225+12x=0$

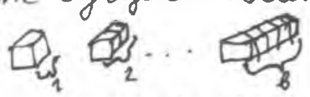
$144x^4+840x^3+1081x^2 \cancel{-840x}\ 828x-1225=0$ ⊖

Можно решить по схеме Горнера, но времени не хватит...

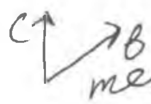
№5.

Начнем с 1-го измерения:

может существовать в параллелепипедов (длиной от 1 до в)

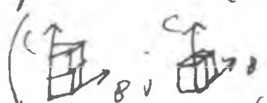
~~Дл~~ 

Дополним это 2-ым измерением (с)



теперь при с = 1 в вариантов

при с = 2 (2в − 1) вариантов

( − это одно и то же)

при с = 3 (3в − 3) вариантов ⊖

⇓

Всего может быть ~~а(в−1)~~ (а − 1)(в − 1)(с − 1) вариантов.

Выдан доп. лист

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

№ Э 92-21

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Ткач

ИМЯ Александр

ОТЧЕСТВО Вадимович

Дата рождения 20.05.2001 **Класс:** 9

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ТАВ

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1 а) $B_2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = A^2-2$

$A^3 = x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$; т.е. $B_3 = A^3-3A$;

$A^4 = x^4+\frac{1}{x^4}+4x^2+6+\frac{4}{x^2}$, т.е. $B_4 = A^4-4B_2-6 =$

$= A^4-4A^2+2$;

$A^8 = x^8+1+4x^6+6x^4+4x^2+1+\frac{1}{x^8}+\frac{4}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{4}{x^6}+$

$+4x^6+\frac{4}{x^2}+16x^4+24x^2+16+6x^4+\frac{6}{x^4}+24x^2+36+\frac{24}{x^2}+$

$+4x^2+\frac{4}{x^6}+16+\frac{24}{x^2}+\frac{16}{x^4} = x^8+\frac{1}{x^8}+8x^6+28x^4+56x^2+$

$+\frac{56}{x^2}+\frac{28}{x^4}+\frac{8}{x^6}+70 = B_8+8\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)+28\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+$

$+56\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+70 = B_8+8B_6+28B_4+56B_2+70;$

$A^6 = x^6+3x^4+3x^2+1+3x^4+9x^2+9+\frac{3}{x^2}+3x^2+9+$

$+\frac{9}{x^2}+\frac{9}{x^4}+1+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^6} = B_6+12\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+12B_2+$

$+20 = B_6+12B_4+12B_2+20;$

$B_6 = A^6-12A^4+48A^2-24-12A^2+24-20 = A^6-12A^4+36A^2-20;$

$B_8 = A^8-8A^6+96A^4-288A^2+160-28A^4+112A^2-56-$

$-56A^2+112-70 = A^8-8A^4+68A^4-232A^2+146$

б) $B_2 = B_4$; $A^2-2 = A^4-4A^2+2$; $A^4-5A^2+4=0$;

$x^2+\frac{1}{x^2} = x^4+\frac{1}{x^4}$; $x^6+x^2 = x^8+1$; $x^8-x^6-x^2+1=0$;

$x^8-x^6-x^2+1 \mid x-1$

$-\ x^8-x^7$ | x^7+x^6-x-1

x^7-x^6

$-\ x^7-x^6$

$0-x^2+1$

$-\ -x^2+x$

$-x+1$

-[illegible]

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x^7+x^6-x-1 \,|\, x+1$; x^7+x^6; $0-x-1$; x^6-1

Если $x^6-1=0$, то $x=\pm1$;

Итак; ~~при~~ $B_2=B_4$, $x=\pm1$; и при

$x^2+\frac{1}{x^2}=x^8+\frac{1}{x^8}$; $x^{16}-x^{10}-x^6+1=0$

$x^{16}-x^{10}-x^6+1 \,|\, x-1$; $x^{16}-x^{15}$; $x^{15}-x^{10}$; x ... $x^{15}+x^{14}$ и т.д.

Получаем, что $B_2=B_4=B_8$ при $\boxed{x\in\{1;-1\}}$

При $x=1$; $A=2$; при $x=-1$; $A=-2$

Т.е. $\boxed{A\in\{2;-2\}}$?

c) Таких операций всегда 3: возведение в квадрат, деление и сложение. Т.е. искомые значения: $\boxed{x\in Z;\ A\in Q}$, где Q - множество рациональных чисел. (Т.к. если x дробное или иррациональное, операций наверняка будет больше.) Также $\boxed{x>0}$; + то логично. Вообще по сути операций 4, но 2 операции одинаковые: возведение в квадрат.

±

~~Рассмотрим~~ Рассмотрим $\boxed{x\in\{1;-1\}}$. Тогда: $\boxed{C=1}$; это при $\boxed{A\in\{2;-2\}}$;

почему?

N2. 1-ый: x; 2-ой: 6-x; 3-ий: 6-6+x=x ... и т.д.

Т.е. чередование по месяцам x и (6-x).

1а) $x=x^2$; тогда $x=1$

2а) $x=(6-x)^2 \Leftrightarrow x^2-13x+36=0$; $D=169-144=25$; т.е

$\left[\begin{array}{l} x=9 \text{ - неуд} \\ x=4 \text{ - уд.} \end{array}\right.$

3а) $6-x=x^2$; $x^2+x-6=0$; $D=25$; $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2 \text{ - уд.} \end{array}\right.$

Ответ: при $x=1$ и 3 месяца одинаковой четности;

при $x\in\{2\}$; если $6-x=x^2$;

при $x\in\{4\}$; если $x=(6-x)^2$

не все

±

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5. $f(x)+f(x+10)=2x^2+2(p-10)x+2(q-5p+50)$;

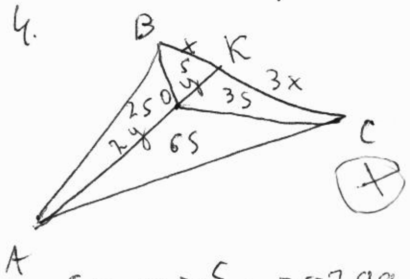
Для $f(x)=0$: $D=p^2-4q=100$;

Для $f(x)+f(x+10)=0$: $D=p^2-4q-100=0$; (+)

Значит уравнение $f(x)+f(x+10)=0$ имеет единственный корень.

Ответ: 1.

№4.



Проведём AK к BC так, чтобы $KC=3BK$; Проведем BO к AK, так чтобы $AO=2OK$. Пусть $S_{BOK}=S$; тогда $S_{COK}=3S$; тогда $S_{AOC}=6S$; $S_{AOB}=2S$.

И получаем, что $S_{AOB}:S_{BOC}:S_{AOC}=1:2:3$.

№3. $1-x+\frac{x(x-1)}{2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}=0$;

$24-24x+12x^2-12x-4x^3+12x^2-8x+x^4-3x^3+2x^2-3x^3+$

$+9x^2-6x=0$; (+)

$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$;

$$\begin{array}{l|l} x^4-10x^3+35x^2-50x+24 & x-1 \\ \hline x^4-x^3 & x^3-9x^2+26x-1 \\ -9x^3+35x^2 & \\ -9x^3+9x^2 & \\ 26x^2-50x & \\ 26x^2-26x & \\ -24x+24 & \end{array}$$

— больше нет рациональных решений кроме 1.

Заметим, что исходное уравнение:

$C_x^0-C_x^1+C_x^2-C_x^3+C_x^4=0$;

Т.к. каждое ~~число~~ слагаемое — число сочетаний и их сумма равна целому числу, то и никакое отдельное слагаемое не может быть не целым числом. Поэтому x — целое.

Ответ: $x=1$;

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

OF 94-31

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Токарь

ИМЯ Дмитрий

ОТЧЕСТВО Сергеевич

Дата рождения 30.10.2003 **Класс:** 7

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Т. Дм

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Был расход 31a л. Каждую неделю оставалось меньше a л. После того, как сломалось 30 машин, осталось 30a л ~~за этот время~~ На этом топливе машина могла ездить 30 недель, и она уже проездила 30 недель 30 + 30 = 60 это только недель всего могла проездить машина с закупки топлива, до его заканчивания. Это в 2 раза больше, чем было запланировано. 60 : 2 = 30 недель запланировали при покупке топлива.

№2

Названо 4 девушки, значит общее кол-во девушек не менее 4. Если их 4, то последняя танцевала с 10, но последняя должна станцевать со всеми кавалерами, а осталось 6 человек. Значит 4 девушек быть не может. Если их 5, то последняя танцевала с 11, и осталось 4 кавалера. Если девушек 6, то Алёна танцевала с 12, и осталось 2 кавалера. Если девушек 7 то Алёна танцевала со всеми 13 кавалерами. Значит кавалеров - 13 человек

№3

$z + y \leq 23 \Rightarrow y + z = x \;;\; x - z = y \qquad x \leq 46$

~~$x = z +$~~

~~$z + y = y$ если это так, но $y + z = x \Rightarrow z \;\; x\,z = y$~~

$x + z = y = x - z$ это равенство верно если $z = 0$, тогда

$x - y = 0$

если $x + z = 24 + y$, а $x - z = y$

$(x + z) - (x - z) = 24 + y - y$

$x + z - x + z = 24$

$2z = 24$

$z = 12$

$12 + x = 24 + y$

$x - y = 24 - 12$

$x - y = 12$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17011 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ OF 94-31

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

или $x+z=48+y$, а $x-z=y$

$(x+z)-(x-z)=48+y-y$

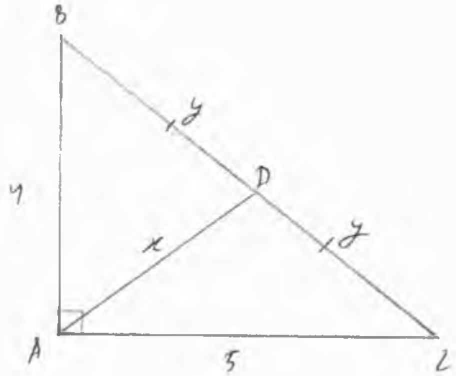
$2z=48$

$z=24$ (невозм)

+

Ответ: 0; 12

№4



А) $S_{ABD}=\frac{xy}{2}$

$S_{ADC}=\frac{xy}{2}$

$\frac{xy}{2}=\frac{xy}{2}$

$S_{ABD}=S_{ADC}$

Ответ: да

Б) $P_{ABD}=y+x+4$

$P_{ADC}=y+x+5$

$y+x+4\neq y+x+5$

$P_{ADC}\neq P_{ABD}$

Ответ: нет.

+

№5

$$\frac{2{,}000000000034}{(1{,}00000000017)^2+2{,}00000000004} > \frac{2{,}00000000002}{(1{,}000000000021)^2+2{,}00000000002}$$

почему?

−

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССП Мытищи

Место проведения

ЕР 58-65

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ ~~Топорков~~ ТОПОРКОВ

ИМЯ АРКАДИЙ

ОТЧЕСТВО ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 19.12.2000 **Класс:** 10

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.2.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: АТ

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EP 58-65

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 Если в первом месяце запас равен $x>0$, то во втором $\frac{1}{1-x}>0 \Rightarrow 1-x>0 \Rightarrow x<1 \Rightarrow x\in(0;1)$

в третьем $\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}>0 \Rightarrow (x-1)x>0;\ x\neq 0$

$x\in(1;\infty)$

$\begin{cases} x\in(0;1)\\ x\in(1;\infty)\end{cases}$

x не существует

№3 $1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=0$

a - числовая последовательность

$a_n=\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$

±

$S_n=a_1+a_2+\ldots a_n+1$

$S_1=a_1+a_0=\cancel{\frac{x(-1)^1}{}}\ (-1)^0+\frac{(-1)^1\cdot x}{1!}=\frac{(-1)^1(x-1)}{1!}$

$S_2=S_1+a_2=\frac{(-1)^1(x-1)}{1!}+\frac{(-1)^2\cdot x(x-1)}{1!\cdot 2}=\frac{(-1)^1\cdot 2\cdot(x-1)+(-1)^2\cdot x(x-1)}{2!}=$

$=\frac{(-1)^2(x-1)(x-2)}{2!}$

Предположение: $S_n=\frac{(-1)^n(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}$

$n=1$ $S_1=\frac{-1\cdot(x-1)}{1}=1-\frac{x}{1!}=-(x-1)$ - истина $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$

$S_{n+1}=\frac{(-1)^n(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)(x-n+1)}{(n+1)!}=$

$=\frac{(-1)^{n+1}\cdot x\cdot(x-1)(x-2)\ldots(x-n)-(-1)^{n+1}(n+1)(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!\cdot(n+1)}=$

$=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(x-1)(x-2)\ldots(x-n)(x-(n+1))}{(n+1)!}$ ⇒ Предположение верно. ⇒

$S_n=1-\frac{x}{1!}+\frac{x(x-1)}{2!}+\ldots+\frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}=$

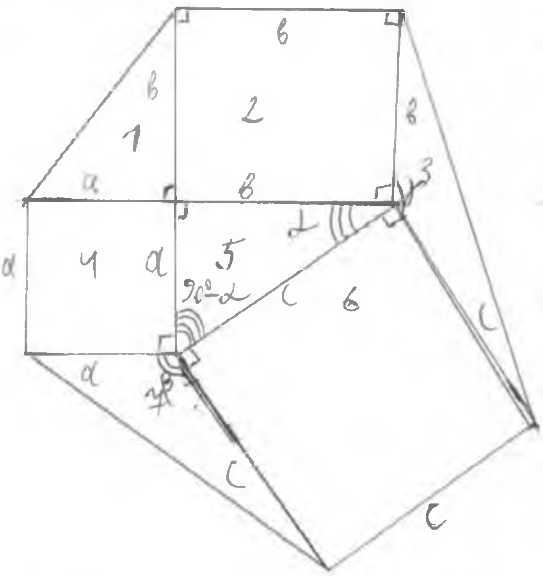
$=\frac{(-1)^n(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!}=0$ $(-1)^n\neq 0;\ n!\neq 0 \Rightarrow$

$(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)=0 \Rightarrow x=1;2;3;\ldots;n$

Ответ: $x=1;2;3;\ldots;n$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4



S_n – площадь фигуры в которой стоит цифра n

S – площадь шестиугольника

$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7$

По теореме Пифагора

$c^2 = a^2 + b^2$

$S_1 = \frac{ab}{2}$; $S_2 = b^2$; $S_3 = \frac{1}{2} bc \sin\gamma$;

$S_4 = a^2$; $S_5 = \frac{ab}{2}$; $S_6 = c^2 = a^2 + b^2$

$S_7 = \frac{1}{2} ac \sin\beta$

$S = \frac{ab}{2} + b^2 + \frac{1}{2} bc\sin\gamma + a^2 + \frac{ab}{2} + a^2 + b^2 + \frac{1}{2} ac\sin\beta =$

$= ab + 2(a^2 + b^2) + \frac{c}{2}(b\sin\gamma + a\sin\beta)$

+

Как видно из рисунка

$\beta + 180° + 90° - \alpha = 360°$, $\gamma + \alpha + 180° = 360° \Rightarrow$

$\beta - \alpha = 90°$

$\beta = 90° + \alpha = \cancel{90°}\, 180° - (90° - \alpha) \Rightarrow \sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c}$

$\gamma = 180° - \alpha \Rightarrow \sin\gamma = \sin\alpha = \frac{a}{c}$

$S = ab + 2(a^2 + b^2) + \frac{c}{2}\left(\frac{b \cdot a}{c} + \frac{ab}{c}\right) = 2(a^2 + ba + b^2)$

Отношение пл. нового дома к пл. исходного равно $\frac{S}{S_5} = 4\frac{a^2 + ab + b^2}{ab} = 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)$ – минимально при $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ – мин.

a, b – длины $\Rightarrow a > 0;\ b > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ т.к $x + \frac{1}{x} \geq 2$ при $x > 0$

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ наим $\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$; $\frac{a}{b} = t$, $t + \frac{1}{t} = 2$, $t \neq 0$

$\frac{t^2 + 1}{t} = 2$

$t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 = 0$

$t = \frac{a}{b} = 1$

Ответ: $S = 2(a^2 + b^2 + ab$; $\frac{a}{b} = 1$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EP 58-65

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 $12x+\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}}=35$

$|x|>1$

$12x\sqrt{x^2-1}+12x=35$

$\sqrt{x^2-1}=\frac{35-12x}{12x}=\frac{35}{12x}-1$

$x^2-1=\frac{1225}{144x^2}-\frac{35}{6x}+1$

$\frac{1}{x}=t$

$\frac{1}{t^2}-1=\frac{1225t^2}{144}+\frac{35t}{6}+1$

$\frac{1225t^4}{144}+\frac{35t^3}{6}+2t^2-1=0$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

ЭН 64-20

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Топчу

ИМЯ Ясемин

ОТЧЕСТВО Мустафаевна

Дата рождения 27.04.1999

Класс: 11

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Топ

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Решение:

$\lg x = \log_{10} x$ (1)

$\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$ (2)

$\operatorname{tg} 2017° = \operatorname{tg}(11\pi + 37°) = \operatorname{tg} 37°$

$\operatorname{tg} 2018° = \operatorname{tg}(11\pi + 38°) = \operatorname{tg} 38°$ (3)

И так далее.

$\operatorname{tg} 2033° = \operatorname{tg}(11\pi + 53°) = \operatorname{tg} 53°$

Учитывая (1), (2), (3) перепишем выражение:

$\log_{10}(10^4 \operatorname{tg} 37°) + \log_{10}(10^5 \operatorname{tg} 38°) + \ldots + \log_{10}(10^{20} \operatorname{tg} 53°) =$

$= \log_{10}(10^4 \cdot 10^5 \cdot \ldots \cdot 10^{20} \cdot \operatorname{tg} 37° \cdot \operatorname{tg} 38° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 53°) = \log_{10}(10^{204}) +$

$+ \log_{10}(\operatorname{tg} 37° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 53°)$

Вычислим отдельно второй логарифм, учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$;

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$;

$\log_{10}(\operatorname{tg} 37° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 53°) = \log_{10}\left(\frac{\sin 37° \cdot \ldots \cdot \sin 53°}{\cos 37 \cdot \ldots \cdot \cos 53°}\right)$

$\sin 37° \cdot \sin 53° = \frac{1}{2}(\cos 16° - \cos 90°) = \frac{1}{2}\cos 16°$

$\sin 38° \cdot \sin 52° = \frac{1}{2}(\cos 14° - \cos 90°) = \frac{1}{2}\cos 14°$

И так далее...

Аналогично поступим со знаменателем

$\cos 37° \cdot \cos 53° = \frac{1}{2}(\cos 16° + \cos 90°) = \frac{1}{2}\cos 16°$

$\cos 38° \cdot \cos 52° = \frac{1}{2}(\cos 14° + \cos 90°) = \frac{1}{2}\cos 14°$

И так далее...

В итоге после сокращения получим дробь: $\frac{\sin 45°}{\cos 45°}$

$\log_{10}\left(\frac{\sin 45°}{\cos 45°}\right) = \log_{10} 1 = 0$ (4)

Подставим это в наше выражение. Получим:

$\log_{10}(10^{204}) + \log_{10} 1 = 204 + 0 = 204$

Ответ: 204

№4

Решение: $a^2+b^2+c^2=6abc$

Формула Коши гласит, что:

$a^2+b^2+c^2 = 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \iff 6abc = 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2}$; Возведем обе части равенства в куб:

$8a^3b^3c^3 = a^2b^2c^2$ (±)

Разделим обе части равенства на $a^2b^2c^2$

Получим: $8abc=1$

$abc=\frac{1}{8}$; $8=2^3$

Выражение $a+b+c$ будет минимальным при $a=b=c=2$ ✓

$\Rightarrow a+b+c = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1,5$

Ответ: 1,5

№2

Решение:

Предположим, что в первый месяц запас газа составил $x=\frac{1}{3}c$.
Тогда во второй месяц запас газа составит $c-2x=c-\frac{2}{3}c=\frac{1}{3}c$.
Получается, что запасы в первом и во втором месяцах равны, а значит ситуация возможна: запас газа может оказаться одинаковым в два различных месяца. (+)

Ответ: возможно; запас имеет значение $\frac{1}{3}c$

№3

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ — ур-е окружности

ур-е для S_1: $x^2+(y-0,5)^2=0,25$

Координата y $S_2=1+a$ $\quad 1=R_{S_1}$, $z=R_{S_2}$

Т.к. $y=x^2$ и $x^2+(y-1-z)^2=z^2$

$y=1+z$
$x=z$ $\Rightarrow 1+z=z^2$ $\quad z^2-z-1=0$
$D=5$
$z=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ — Радиус окр-ти S_2

(−)

Ответ: 2017 ? отказ

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$n > 1$; $x \in [0; \pi]$

$\sin(nx) = \sin(x)$

$\left[\begin{array}{l} nx = x + 2\pi k \\ nx = \pi - x + 2\pi k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l} n = 1 + \frac{2\pi k}{x} \\ n = \frac{\pi(1+2k)}{\cancel{x}} - 1 \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$. Выразим x:

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi k}{n-1} \\ x = \frac{\pi(1+2\pi k)}{n+1} \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$

F

1) для $n = 2$ $\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k \\ x = \frac{\pi(1+2k)}{3} \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ 1 решение при $k = 0$; $\rightarrow$ 2 решения при $k = 0; 1$ > всего 2 различ. решения (в теории)

если подставить в начальное равенство $n = 2$, получим:

$\sin(2x) = \sin x$

$2\sin x\cos x - \sin x = 0$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$ $\sin x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pi l, l \in \mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad l \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l \text{ — не удовл, т.к. } x \in [0; \pi] \end{array}\right.$

$\Downarrow$ $\left(\frac{\pi}{6}; \pi\right)$

Всего 2 решения (на практике)

2) для $n = 3$ $\left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ x = \frac{\pi(1+2k)}{4} \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$ $\rightarrow$ 2 решения при $k = 0; 1$; $\rightarrow$ 2 решения при $k = 0; 1$ > всего 3 различ. решения (в теории)

если подставить в начальное равенство $n = 3$, получим:

$\sin(3\cancel{x}) = \sin(\cancel{x})$

$\sin\cancel{x}(3 - 4\sin^2\cancel{x}) - \sin(\cancel{x}) = 0$ $\sin\cancel{x} = 0$ или $\sin^2\cancel{x} = \frac{1}{2}$

$\cancel{x} = \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$ $\sin\cancel{x} = \pm\frac{1}{2}$ ~~это не удовл. также~~

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \pi l \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + \pi l \end{array}\right.$ $l \in \mathbb{Z}$

$\Downarrow$ $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi\right)$

Всего 3 решения (на практике)

$\Downarrow$

$S(2) = 2$; $S(3) = 3$; $S(n) = n$ $\Rightarrow$ $S(n) = 2017$ ровно при одном n

$\Rightarrow$ $S(n)$ может принять значение „в" при одном n $\Rightarrow$ один раз.

Ответ: $S(n)$ принимает значение 2017 один раз

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

ЭФ 19-63

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Терёшин

ИМЯ Александр

ОТЧЕСТВО Иванович

Дата рождения 31.07.2002

Класс: 8

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 02 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭФ 19-63

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=zx \end{cases}$$

$xy-(x+y)=1$

$y=0$, т.к. чтобы произведение 2-х чисел — их сумма $=1$, то 1 из чисел $=0$.

$x=-1$

$5+z-1=-z$

$4=-2z$

$z=-2$

Ответ: $y=0, x=-1, z=-2$. — одно из реш.

(+)

№2

а) $A=x+\frac{1}{x}=x^1-x^{-1}$

$B_2=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+x^{-2}=A\,x-1+x^{-2}$

$B_3=Ax^2-x+x^{-3}$

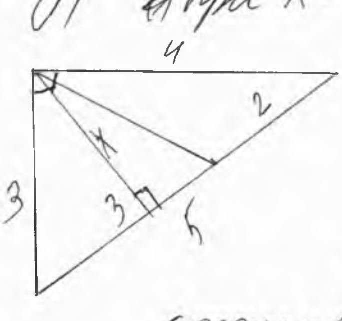
$B_4=Ax^3-x^2+x^{-4}$

$B_8=Ax^7-x^6+x^{-8}$

(−)

б) ~~А~~ при $x=1$; $A=2$, т.к. $1^k=1$.

№4



$v_1=v_2=1$

$S_1=3 \quad S_2=4 \quad S_3=\sqrt{3^2+4^2}=5$

1) Весь путь $=3+4+5=12$ => они пройдут его за 6 единиц времени.

$S_2>S_1$ на 1 =>

2) 1-й пройдет 6 и 2-й пройдет 6, но ~~это только на-то~~

=> по гипотенузе 1-й пройдет 3, а 2-й 2.

а) X-высота $S_{\Delta\,1\text{-го}}=\frac{3X}{2}$, а $S_{\Delta\,2\text{-го}}=\frac{2X}{2}$ => $S_{\Delta\,1\text{-го}}>S_{\Delta\,2\text{-го}}$, но наоборот...

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭР 19-63

ВНИМАНИЕ! Проверяется только **то**, что записано с этой стороны листа в рамке спр**ава**

б) Так как $V_1 = V_2$, и, чтобы $S_{D1} = S_{D2}$ у них должны быть равные основания и высоты ⇒ т.к. высоты равные, то основания тоже должны равняться ⇒ $\frac{\text{катет 1-го}}{\text{катет 2-го}} = 1$, только в этом случае каждая из них пройдет по $\frac{1}{2}$ гипотенузы, значит только 1 случай. (+)

№3

$V_1 - V_2 = \frac{4}{6} - \frac{3}{6}$ р за 2 часа $= \frac{1}{12}$ резервуара/ч ⇒ $V_1 > \frac{1}{12}$ Р/ч.

~~V_1 может быть $> \frac{3}{24}$, $\frac{4}{48}$, то есть $> \frac{1}{12}$~~ Чем меньше V_1 тем больше t ⇒ Надо, чтобы V_1 была $> \frac{1}{12}$ Р/ч, но как можно меньше ⇒ ~~наименьшая $V_1 = \frac{1(1)}{12}$ Р/ч.~~ наименьшая $V_1 = \frac{1{,}01}{12}$ Р/ч ⇒ самое раннее время включения насоса 1 $= 10 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{12}{1{,}01}\right) = 10 - \frac{4}{1{,}01} \approx 6$ ч, то есть V высасывания 2-го насоса практически $= 0$. (+)

№3

Средний вес 3-х легких $= \frac{31}{3} = 10(3)$ кг, а 3-х тяжелых $= \frac{41}{3} = 13(6)$ кг, остальные 48 кг и их больше 3-х, т.к. 3 тяжелых весят < 48 кг. Допустим их 4 ⇒ их средний вес $= \frac{48}{4} = 12$ кг — подходит! Однако, допустим что их 5 ⇒ Средний вес $= \frac{48}{5} = 9{,}6$ — не подходит, т.к. < ср. веса 3-х легких.

Всего: $3 + 3 + 4 = 10$ (+)

Ответ: 10 приборов.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

2Р 62-27

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ФАЛЬКОВСКАЯ

ИМЯ НАТАЛЬЯ

ОТЧЕСТВО ИЛЬИНИЧНА

Дата рождения 26.11.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: 2

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1.

$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ) =$

$= (\lg 10^4 + \lg \operatorname{tg} 2017^\circ) + (\lg 10^5 + \lg \operatorname{tg} 2018^\circ) + \ldots +$

$+ (\lg 10^{20} + \lg \operatorname{tg} 2033^\circ) = (\lg 10^4 + \lg 10^5 + \ldots + \lg 10^{20}) +$

$+ (\lg \operatorname{tg} 2017^\circ + \lg \operatorname{tg} 2018^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg} 2033^\circ) =$

$= (4+5+6+\ldots+20) + \log_{10} \frac{\sin 2017^\circ \cdot \sin 2018^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 2033^\circ}{\cos 2017^\circ \cdot \cos 2018^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 2033^\circ} =$

$= \overset{192}{24 \cdot 8} + 12 + \log_{10} \ldots {}^* = 204 + 0 = \boxed{204}$

(у нас $20-4+1=17$ слагаемых $\Rightarrow$ 8 пар, которые в сумме дают 24 и остаётся 12)

* ~~log₁₀ …~~ $\operatorname{tg} 2017^\circ = 180^\circ \cdot 11 + 37^\circ$

$\operatorname{tg} 2018^\circ = 180^\circ \cdot 11 + 38^\circ$ и т.д.

сл, $\operatorname{tg} 2017^\circ = \operatorname{tg} 37^\circ$, $\operatorname{tg} 2018^\circ = \operatorname{tg} 38^\circ$ и т.д.

т.к. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\pi n + x)$, $n \in Z$

сл, $\log_{10} \frac{\sin 2017 \cdot \sin 2018^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 2033^\circ}{\cos 2017^\circ \cos 2018^\circ \ldots \cos 2033^\circ} =$

$= \log_{10} \frac{\sin 37^\circ \sin 38^\circ \cdot \ldots \cdot \sin 53^\circ}{\cos 37^\circ \cos 38^\circ \cdot \ldots \cdot \cos 53^\circ}$

т.к. мы имеем 17 слагаемых: $20 \overset{16}{-} 4 + 1 = 17$

сл, последнее − $37 + 16 = 53^\circ$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ при $\cos(\frac{\pi}{2} - x) \geq 0$ у нас все углы $< 90^\circ$

сл, $\sin 37^\circ = \cos(90 - 37^\circ) = \cos 53^\circ$

$\sin 38^\circ = \cos 52^\circ$ и т.д.

получится, все множители сокращаются, т.к. у нас по 17 множит. − ср. − 45°.

имеем: $\log_{10} 1 = 0$

Ответ: 204. +

14.

$a^2+b^2+c^2=6abc$

$\frac{a}{bc}+\cancel{\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}=6}$

$\cancel{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+cb+ac)=}$

$\cancel{=6abc+2(ab+cb+ac)=2(3abc+ab+cb+ac)}$

$1=\frac{a^2+b^2+c^2}{6abc}$

$(a+b+c)\cdot 1=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{6abc}$

$\begin{cases} a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc} \\ a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\end{cases}$ — по нер-ву о средних

↓ перемножим

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geq 9abc \quad a+b+c\geq\frac{9abc}{a^2+b^2+c^2}$

$a+b+c\geq\frac{9abc}{6abc}=\frac{3}{2}$ ← см $a^2+b^2+c^2=6abc$

Например,

$a=b=c=\frac{1}{2}$

$a+b+c=\frac{3}{2}$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

12.

если запасов $x=\frac{c}{3}$ $\left[\begin{array}{l} x=c-2x \\ c=3x\end{array}\right]$

то в след. месяц

$c-\frac{2}{3}c=\frac{c}{3}$ и так далее, то есть они равны

если $x\neq\frac{c}{3}$, то разница

между x и $\frac{c}{3}=\frac{c}{3}-x$

на след. шаге будет $\frac{2}{3}c-2x$, то есть

разница стала больше, x — удаляется от $\frac{c}{3}$

а, если это возможно, то запас $=\frac{c}{3}$. Ответ: $\frac{c}{3}$.

1 5.

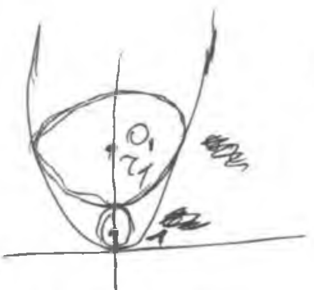
$\sin nx = \sin x$

$\left[\begin{array}{l} nx = x + 2\pi k \\ nx = \pi - x + 2\pi k \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} n = 1 + \frac{2\pi k}{n} \\ n = \frac{\pi}{x} - 1 + \frac{2\pi k}{x} = -1 + \frac{(2\pi k + \pi)}{x} \end{array}\right.$

(—)

№ 3.

$-x^2 + y = 0 - \ell$?



$\rho(0, \ell) = \frac{|Ax + By|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$

$= \frac{|0 + 1 + r_1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1 + r}{\sqrt{2}}$

$O_1(0, 1 + r_1)$

$\rho = r \quad r = \frac{1+r}{\sqrt{2}} \quad r_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}}$?!

$O_2(0, 1 + r_1 + r_2) \quad \rho(O_2, \ell) = \frac{|0 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + r_2|}{\sqrt{2}}$

$r = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + r_2}{\sqrt{2}} \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + r_2 = \sqrt{2}\, r_2$

$\frac{\sqrt{2} - 1 + 1}{\sqrt{2} - 1} = r_2(\sqrt{2} - 1) \quad r_2 = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}}$

$O_3(0, 1 + r_1 + r_2 + r_3) \quad \rho = \frac{|0 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} + r_3|}{\sqrt{1+1}} =$

$\frac{(\sqrt{2} - 1)(3 - 2\sqrt{2}) + 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{(\sqrt{2} - 1)(3 - 2\sqrt{2})} = r_3(\sqrt{2} - 1)$

$\frac{3\sqrt{2} - 4 - \cancel{3} + \cancel{2\sqrt{2}} + \cancel{3} - \cancel{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 4 - 3 + 2\sqrt{2}} = r_3(\sqrt{2} - 1)$

(—)

$\frac{5\sqrt{2} - 4}{(5\sqrt{2} - 7)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{5\sqrt{2} - 4}{10 - 12\sqrt{2} + 7} = \frac{5\sqrt{2} - 4}{17 - 12\sqrt{2}} = r_3$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ	OF 94 - 96	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Фарафонова

ИМЯ Дания

ОТЧЕСТВО Викторовна

Дата рождения 10.02.2004. **Класс:** 7

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1.

Дано: 31 машина.

а топлива в неделю.

Каждую неделю 1 машина ломалась.

1) 31м · 1 = 31+1 недели (так как каждую неделю ломалась 1 машина)

2) 32 : 2 = 16 (топлива хватило на двойной срок)

3) 31а - кол-во топлива на все машины в неделю.

4) 31а · 16 = 496а (л) - было закуплено.

5) Так как 32 : 2 = 16 топливо было закуплено на 16 недель.

Ответ: было закуплено 496а л, рассчитано на 16 недель.

№2.

Было 20 человек.

Так как Ирина танцевала с девятью кавалерами, а в задаче сказано про 4 девушек, можно из 20 вычесть 9+4=13. 20-13=7.

С каждой девушкой прибавился 1 кавалер. Чтобы узнать кол-во неизвестных девушек и кавалеров надо вычесть из 7 1 и разделить это число на два (кол-во девушек и кол-во кавалеров), так как последний человек добавился с Алёной. (7-1):2 = 6:2 = 3

3 девушки и 3 парня. К 9 кавалерам надо прибавить ещё 4 (3 и 1, который добавился с Алёной). 9+4 = 13 кавалеров-танцоров.

Ответ: 13 танцоров-кавалеров.

№3

$0 \le z \le 23$ (z - кол-во часов), $0 \le z \le 59$ (z - кол-во минут); z(кол-во часов) = z(кол-во минут) $\Rightarrow 0 \le z \le 23$.

$0 \le x \le 23$ (x - кол-во часов), $0 \le x \le 59$ (кол-во минут); x(кол-во часов) = x(кол-во минут) $\Rightarrow 0 \le x \le 23$

$0 \le y \le 59$ (кол-во минут), $0 \le y \le 23$ (y - кол-во часов); y(кол-во минут) = y(кол-во часов) $\Rightarrow 0 \le y \le 23$

Наименьшее значение выражения: $x - y$ ($0 \le x \le 23$, $0 \le y \le 23$) $= 0 - 23 = -23$.

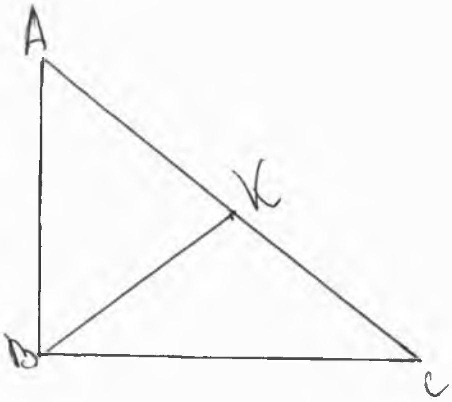
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Наибольшее значение выражения:
$x-y\,(0\le x\le 23;\ 0\le y\le 23) = 23-0=23$

Ответ: $-23\le x-y\le 23$

(—)

№4.



Дано: $\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}$

А) $S_{\triangle ABK} < S_{\triangle BKC}$

$S_{\triangle ABK} = AK\cdot BK\cdot AB$

$S_{\triangle BKC} = BK\cdot KC\cdot BC$

$AK=KC=x$, $BK=y$

$\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5} \Rightarrow AB=4, BC=5$

$S_{\triangle ABK}=4xy$

$S_{\triangle BKC}=5xy$

$4xy<5xy$

Ответ: нет. ошибка

Б) Нет, так как $S_{\triangle ABK} < S_{\triangle BKC}$, значит ограда BKC больше ограды ABK

Ответ: нет.

(+)

№5

$$\frac{2{,}0000000004}{(1{,}0000000004)^2+2{,}0000000004} > \frac{2{,}0000000002}{(1{,}0000000002)^2+2{,}0000000002}$$

$1{,}0000000004^2 = (1{,}0000000002+0{,}0000000002)^2$

$(1{,}0000000002+0{,}0000000002)^2 > (1{,}0000000002)^2$

$2{,}0000000004 > 2{,}0000000002$

$(1{,}0000000004)^2+2{,}0000000004 > (1{,}0000000002)^2+2{,}0000000002$

Числитель первого числа больше числителя второго.

$2{,}0000000004 > 2{,}0000000002$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ OF 94 - 96

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

А знаменатель первого числа больше знаменателя второго.

$(1,0000000004)^2+2,0000000004 > (1,0000000002)^2+2,0000000002$

Значит ~~не значит~~ $\frac{2,0000000004}{(1,0000000004)^2+2,0000000004} > \frac{2,0000000002}{(1,0000000002)^2+2,0000000002}$

Ответ: $\frac{2,0000000004}{(1,0000000004)^2+2,0000000004}$ ~~2,000000~~ больше.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

ЭН 64-28

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ФАТТАХОВ

ИМЯ ЭЛЬДАР

ОТЧЕСТВО МАРАТОВИЧ

Дата рождения 11.04.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ) =$

$= 4 + \ldots + 20 + \lg(\operatorname{tg} 2017^\circ \cdot \operatorname{tg} 2018^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 2033^\circ) =$

т.к. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi k)$, то $\operatorname{tg} 2017^\circ = \operatorname{tg} 37^\circ$,

$\operatorname{tg} 2018^\circ = \operatorname{tg} 38^\circ, \ldots, \operatorname{tg} 2033^\circ = \operatorname{tg} 53^\circ$

$\operatorname{tg} 2018^\circ \cdot \operatorname{tg} 2033^\circ = \operatorname{tg} 3\cancel{7}^\circ \operatorname{tg} 53^\circ = \frac{\operatorname{tg} 37^\circ}{\operatorname{ctg} 53^\circ} = \frac{\operatorname{tg} 37^\circ}{\operatorname{tg} 37^\circ} = 1$,

т.к. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x)$. Всего будет 8 пар и $\operatorname{tg} 45^\circ$

Тогда $S = 4 + \ldots + 20 + \lg \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{17(4+20)}{2} +$

$+ \lg 1 = 17 \cdot 12 = 204$

+

Ответ: $S = 204$

№2

Пусть в марте – x м^3, тогда в феврале:

$c - 2x$ м^3. Что мешает оказаться запасу газа одинаковым в январе и феврале.

$c - 2x = x$

$x = \frac{c}{3}$

+

(Лично я так понял условие задачи: c — константа. По моей логике в марте должен был остаться следующий запас газа: $c - 2(c - 2x)$)

Итого, ответ ~~тто~~ будет равен $x = \frac{c}{3}$

Ответ: $x = \frac{c}{3}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭН 64 - 28

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

$a^2+b^2+c^2=6abc$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a^2+b^2}{2}\ge ab \\ +\ &\frac{a^2+c^2}{2}\ge ac \\ +\ &\frac{b^2+c^2}{2}\ge bc \end{aligned}\right\}\text{ по нер-ву Коши}$$

(+)

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac$

По неравенству Коши:

$$\frac{ab+bc+ac}{3}\ge\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

$$ab+bc+ac \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

~~Условию~~, $(6abc)$ По условию наличия равенства $6abc\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$$abc\ge\frac{1}{8}$$

Наименьшее выражения значение $a+b+c$ будет при $abc=\frac{1}{8}$ и $a=b=c$.

$a^2+a^2+a^2=6a^3$

$a^2(a-0,5)=0$

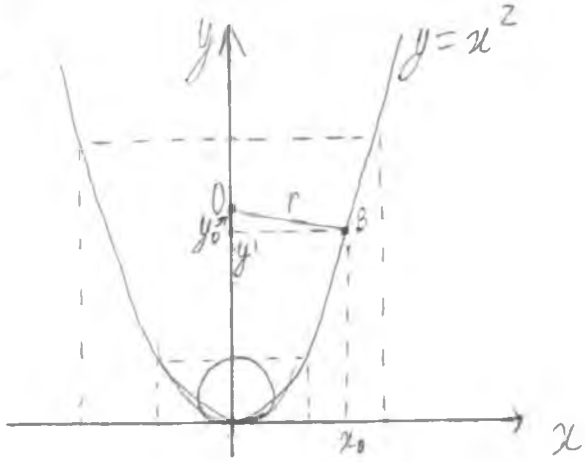
$a=0,5$

Сл-но, наша наименьшая сумма будет равна $3a=1,5$

Ответ: 1,5

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3.



Пусть O – центр второй ок-ти, и O имеет координаты $O(0; y_0)$

$$y_0^2 - 2y'y_0 + y'^2 + x_0^2 = r^2,$$

где $r = OB$, $r = y_0 - 1$ по условию

$$y_0^2 - 2y'y_0 + y'^2 + x_0^2 = y_0^2 - 2y_0 + 1$$

$$y'^2 - 2y'y_0 + 2y_0 + x_0^2 - 1 = 0$$

По построению $y' = x_0^2$

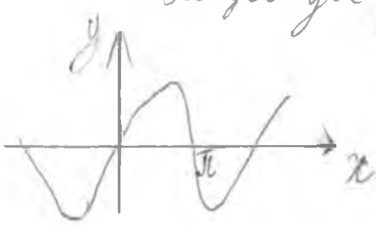
$$x_0^4 - 4x_0^2 y_0 + 2y_0 + x_0^2 - 1 = 0$$

(–)

№ 5

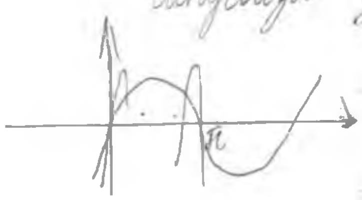
$\sin nx = \sin x$ на инт. $[0, \pi]$

Синусоида $y = \sin x$ будет выглядеть так



(–/+)

Синусоида $y = \sin nx$



Итого, у синусоиды $y = \sin nx$ будет n пересечений $2n - 1$

$$S(n) = 2n - 1$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

ЬIF 91-13

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ФЕКЛИСТОВА

ИМЯ АЛЕКСАНДРА

ОТЧЕСТВО АЛЕКСЕЕВНА

Дата рождения 12.12.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 2 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

1. $S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ)$;

I. Всего слагаемых: $20-4+1=17$;

II. $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$,

поэтому $S = \lg(10^4 \cdot 10^5 \cdot \ldots \cdot 10^{20} \cdot \operatorname{tg} 2017^\circ \cdot \operatorname{tg} 2018^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 2033^\circ)$;

III. $S_{17} = \frac{4+20}{2} 17 = 12 \cdot 17 = 204$;

IV. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}$;

(+)

V. $180^\circ \cdot 11 = 1800^\circ + 180^\circ = 1980^\circ$, т.к. периодичность $\operatorname{tg}\alpha = \pi$, $\operatorname{tg}(2000^\circ+\alpha) = \operatorname{tg}(20^\circ+\alpha)$

VI. $S = \lg 10^{204} + \lg(\operatorname{tg} 37^\circ \cdot \operatorname{tg} 38^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 53^\circ)$.

VII. $37^\circ + 53^\circ = 90^\circ$, для каждого $\operatorname{tg}\alpha$, кроме $\operatorname{tg}(37^\circ + \frac{17-1}{2}) = \operatorname{tg}(45^\circ)$, есть $\operatorname{tg}(90^\circ-\alpha)$.

~~поэтому~~ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ-\alpha) = \frac{\cos(2\alpha-90^\circ) - \cos(90^\circ)}{\cos(2\alpha-90^\circ) + \cos(90^\circ)} = 1$

$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

поэтому $\lg(\operatorname{tg} 37^\circ \cdot \operatorname{tg} 38^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 53^\circ) = \lg 1 = 0$.

VIII. $S = 204 \lg 10 = 204$.

Ответ: 204.

2. Пусть в 1 месяце x м³ газа.

Очевидно, что запас газа не может быть <0.

Посмотрим, как изменяется запас газа:

(+)

месяц	запас газа, м³	c
1	x	—
2	$c-2x>0$	$\frac{c}{x}>3-\frac{1}{1}$
3	$c-2(c-2x) = 4x-c>0$	$\frac{c}{x}<3+\frac{1}{1}$
4	$c-2(4x-c) = 3c-8x>0$	$\frac{c}{x}>3-\frac{1}{3}$
5	$c-2(3c-8x) = 16x-5c>0$	$\frac{c}{x}<3+\frac{1}{5}$
6	$c-2(16x-5c) = 11c-32x>0$	$\frac{c}{x}>3-\frac{1}{11}$
7	$c-2(11c-32x) = 64x-21c>0$	$\frac{c}{x}<3+\frac{1}{21}$
8	$c-2(64x-21c) = 43c-128x>0$	$\frac{c}{x}>3-\frac{1}{43}$
9	$c-2(43c-128x) = 256x-85c>0$	$\frac{c}{x}<3+\frac{1}{85}$

...

Видно, что $3-\frac{1}{n} < \frac{c}{x} < 3+\frac{1}{k}$, где n и $k \in \mathbb{N}$

значит $c = 3x$, т.к.

$\lim_{n\to+\infty}(3-\frac{1}{n}) = +3(-0)(!)$

$\lim_{k\to+\infty}(3+\frac{1}{k}) = +3(+0)(!)$

Приравняем 2 любых значения запасов газа: I $c-2x = x \Rightarrow x = \frac{c}{3} = \frac{3x}{3} = x$.

II $x = 16x - 5 \cdot c \Rightarrow x = \frac{15x}{15} = x$.

III. $4x - c = 16x - 5c \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 3x}{12} = \frac{12x}{12} = x$

Обозначим запас газа в n-ом месяце, как $f_n = 3 - 2f_{n-1} = 3x - 2f_{(n-1)}$;

т.к. $f_1 = x$, $f_2 = 3x-2x = x \Rightarrow f_3 = 3x-2x = x \Rightarrow f_n = 3x-2x = x$.

Ответ: да, может. ~~количество~~ значение запаса в эти месяцы равно значению запасов газа в первый месяц.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4 Допустим, что $a \le b \le c$, тогда $a+b+c \ge 3a$.

Значит наименьшая сумма при $a=b=c$ $(a+b+c=3a)$.

тогда $a^2+b^2+c^2=6abc$ имеет вид $3a^2=6a^3 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Значит $a+b+c=3a=\frac{3}{2}=1,5$.

Ответ: 1,5.

+

5. т.к. $\sin(nx)=\sin x$.

$$nx=\left[\begin{array}{l} x+2\pi p_1,\ p\in\mathbb{Z} \\ \pi-x+2\pi p_2,\ p\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$x=\left[\begin{array}{l} \frac{2\pi p_1}{n-1} \\ \frac{(2p_2+1)\pi}{n+1} \end{array}\right.,\ p_1,p_2\in\mathbb{Z}.$$

+

$0\le\frac{2\pi p_1}{n-1}\le\pi\ /:\frac{2\pi}{n-1}>0$, т.к. $n>1$ (по условию)

$0\le p_1\le\frac{n-1}{2} \Rightarrow p_1\in[0;[\frac{n-1}{2}]]$

и $0\le\frac{(2p_2+1)\pi}{n+1}\le\pi\ /:\frac{\pi}{n+1}>0$, т.к. $n>1$ (по условию).

$0\le 2p_2+1\le n+1$

$-\frac{1}{2}\le p_2\le\frac{n}{2} \Rightarrow p_2\in[0;[\frac{n}{2}]]$.

$S(n)=p_1+p_2=2+[\frac{n-1}{2}]+[\frac{n}{2}]$.

~~если n 2k, k∈N, то S(k) = 2 +~~

Ответ: $S(n)=2+[\frac{n-1}{2}]+[\frac{n}{2}]$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ	ZP 18-64	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Филатов

ИМЯ Андрей

ОТЧЕСТВО Алексеевич

Дата рождения 23.11.1999 **Класс:** 11 Г-200

Предмет Математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Филат

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 2Р 18-64

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$S = \lg(10^4 \cdot tg\,2017^\circ) + \lg(10^5 \cdot tg\,2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \cdot tg\,2033^\circ) =$

$= \lg(10^4) + \lg(tg\,2017^\circ) + \lg(10^5) + \lg(tg\,2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20}) + \lg(tg\,2033^\circ) =$

$= 4+5+\ldots+20 + \lg(tg\,2017^\circ \cdot tg\,2018^\circ \cdot \ldots \cdot tg\,2033^\circ) =$

$= 204 + \lg(tg\,217^\circ \cdot tg\,218^\circ \cdot \ldots \cdot tg\,233^\circ) = 204 + \lg(tg\,37^\circ \cdot tg\,38^\circ \cdot \ldots \cdot tg\,53^\circ) =$

$= 204 + \lg(tg\,37^\circ \cdot ctg\,37^\circ \cdot tg\,38^\circ \cdot ctg\,38^\circ \cdot \ldots \cdot tg\,44^\circ \cdot ctg\,44^\circ \cdot tg\,45^\circ) =$

$= 204 + \lg(1) = 204$

Ответ: 204. +

№2.

Посмотрим на два подряд идущих месяца. В первый из них запас $= x\,м^3$, во второй $c - 2x\,м^3$. Посмотрим, может ли при каком-то x эти запасы быть равны? Да, может, при $x = \frac{c}{3}$.

Ответ: $\frac{c}{3}$.

+

№5.

Посмотрим, какие решения может иметь ур-ие:

$\sin nx = \sin x$

$\sin nx - \sin x = 0.$

$2\sin\frac{(n-1)x}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2} = 0$

$\frac{n-1}{2}x = \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $\frac{n+1}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi r,\ r\in\mathbb{Z}$

$x = \frac{2\pi k}{n-1},\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ $x = \frac{\pi + 2\pi r}{n+1},\ r\in\mathbb{Z}$

Посмотрим, при каких n корни левого и правого ур-ия могут совпасть?

$\frac{2\pi k}{n-1} = \frac{\pi + 2\pi r}{n+1}$ $\qquad$ $\boxed{k, r \in \mathbb{Z}}$

$2kn + 2k = n - 1 + 2rn - 2r$

Заметим, что если n четное, равенство невозможно, потому что левая часть $\vdots\, 2$, а правая — нет.

$2k(n+1) = 2r(n-1) + n - 1$

Заметим, что если $n \equiv 3 \pmod 4$ то равенство тоже невозможно, потому что $2k(n+1) \vdots 4$, $2r(n-1) \vdots 4$, а $n-1 \not\vdots 4$.

Но при $n \equiv 1 \pmod 4$ корни могут совпадать.

Сначала запишем явные ответы $S(n)$ для четных n и $n \equiv 3 \pmod 4$, а потом разберемся с $n \equiv 1 \pmod 4$

Если $n \vdots 2$.

$0 \le \frac{2\pi k}{n-1} \le \pi$ $\quad$ $0 \le \frac{\pi + 2\pi r}{n+1} \le \pi$

То есть подойдут $\forall\ k, r \in \mathbb{Z}$ и удовл. нер-вам.

$0 \le k \le \frac{n-1}{2}$ $\quad$ $0 \le r \le \frac{n}{2}$

То есть все возможные варианты k дадут ($n \vdots 2$ и $k \in \mathbb{Z}$) $\frac{n-2}{2} + 1$ различный ответ

Все варианты r дадут $\frac{n}{2} + 1$ различный ответ

То есть $S(n) = \frac{n-2}{2} + 1 + \frac{n}{2} + 1 = n+1$ для $n \vdots 2$

Если $n \equiv 3 \pmod 4$

$0 \le k \le \frac{n-1}{2}$ $\quad$ $0 \le r \le \frac{n}{2}$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$\frac{n-1}{2} + 1$ разл. отв. $\quad$ $\frac{n-1}{2} + 1$ разл отв (т.к $r \in \mathbb{Z}$, $n \not\vdots 2$)

То есть $S(n) = \frac{n-1}{2} + 1 + \frac{n-1}{2} + 1 = n+1$ для $n \equiv 3 \pmod 4$.

Теперь докажем, что при $n \equiv 1 \pmod 4$ при $\forall\ 0 \le k, r \le \frac{n-1}{2}$, мы посчитаем дважды ровно один корень.

$$\frac{2\pi k}{n-1} = \frac{\pi + 2\pi r}{n+1}$$

$$\frac{2k}{n-1} = \frac{2r+1}{n+1}$$

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{2r+1}{2k}$$

$$1 + \frac{2}{n-1} = \frac{2r+1}{2k}$$

Заметим, что при $k = r = \frac{n-1}{4}$ равенство выполняется, значит хотя бы один корень будет посчитан дважды. Докажем, что больше таких нет. ПП, пусть есть еще.

Предположим, что $k > r$, т.е $k \ge r+1$, тогда левая часть равенства больше одного, а правая меньше $\Rightarrow$ ⓦ.

Значит $k \le r$.

Предположим, что $r > k$, т.е $r \geqslant k+1$, тогда:

$$1+\frac{2}{n-1} \geqslant \frac{2r+3}{2r}$$

$$1+\frac{2}{n-1} \geqslant 1+\frac{3}{2r}.$$

$$\frac{2}{n-1} \geqslant \frac{3}{2r}.$$

Вспомним, что один корень у равенства достигается, когда $k=r$, в этом случае $1+\frac{2}{n-1} = 1+\frac{1}{2k_0}$, т.е $\frac{2}{n-1} = \frac{1}{2k_0}$, а $\frac{2}{n-1} = const \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2k_0} \geqslant \frac{3}{2r} \Rightarrow 2r \geqslant 6k_0 \Rightarrow r \geqslant 3k_0$, вспомним, что $k_0 = \frac{n-1}{4} \Rightarrow r \geqslant \frac{3(n-1)}{4} > \frac{n-1}{2}$ ⓦ.

Значит $r=k$. А такой корень можно очевидно найти и он уже найден.

Значит при $n \equiv 1 \pmod 4$

$$S(n) = \left(\frac{n-1}{2}+1\right)+\left(\frac{n-1}{2}+1\right)-1 = n.$$

Т.е. явный вид зависимости $S(n)$ от n:

$$\left[\begin{array}{ll} S(n) = n+1, & n \not\equiv 1 \pmod 4 \\ S(n) = n, & n \equiv 1 \pmod 4 \end{array}\right.$$

То есть $S(n) = 2017$ при $n = 2016$ и при $n = 2017$.

Больше такого очевидно не бывает. Т.е 2 раза.

Ответ: 2 раза.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4.

$a^2+b^2+c^2=6abc$

По нер-ву Коши:

$a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$2abc \geq \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$abc \geq \frac{1}{8}$. ~~При $a=b=c=\frac{1}{2}$ все верно и сумма $a+b+c=\frac{3}{2}$~~

~~Предположим, что [illegible] наименьшую сумму~~

$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ (нер-во Коши)

$3\sqrt[3]{abc} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{3}{2}$.

То есть $a+b+c \geq \frac{3}{2}$.

Равенство достигается при $a=b=c=\frac{1}{2}$. При подставлении в начальное условие будет верное числовое равенство

То есть ответ $\frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

ЭН 64-70

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ХАКИМОВ

ИМЯ АРСЕН

ОТЧЕСТВО ИЛЬДАРОВИЧ

Дата рождения 30.08.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 2 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЭН 64-70

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4. По неравенству Коши:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$$, но по условию $a^2+b^2+c^2=6abc$

Значит

$$2abc \geq \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}$$

$$8a^3b^3c^3 \geq a^2 \cdot b^2 c^2$$, т.к a, b, c - положительные,

то можно разделить на правую часть обе части

±

$$8abc \geq 1$$

$$abc \geq 1/8.$$ Применим неравенство Коши еще раз

$$\frac{(a+b+c)^3}{27} \geq abc \geq 1/8$$

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{1}{2}$$

$$a+b+c \geq \frac{3}{2}$$, значит минимальное значение $\frac{3}{2}$

Ответ: $\frac{3}{2}$

1. $\lg(10^4 \cdot tg 2017^\circ) = \lg(10^4) + \lg(tg 2017^\circ)$

+

$tg 2017^\circ = tg(11\pi + 37^\circ) = tg 37^\circ$

$tg 2033^\circ = tg(12\pi - 37^\circ) = ctg 37^\circ$

$\lg(tg 2017^\circ) + \lg(tg 2033^\circ) = \lg(tg 37^\circ \cdot ctg 37^\circ) = 0$

Т.к мы взяли крайние значения, то с которыми шагом будем иметь пару вида: $\lg(tg\alpha \cdot ctg\beta)$.

Всего таких пар 8, но также есть $\lg(tg 2025) = \lg(tg 45^\circ) = 0$

Остаются только логарифмы степени 10. $4+5+6+...+19+20 = 204$. Ответ: 204

Лист 01 из 02

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. При $c=3x$ мы получаем, что в первом месяце запас x, а во втором $3x-2x=x$ Значит запас будет всегда x.

3. ~~Докажем~~ Пусть n - порядковый номер окружности. Докажем, что $r_n = n-0,5$, тогда её центр имеет координаты $(0; n^2-n-0,5)$ ~~(...)~~

Верхняя точка S_n, лежащая на оси ординат, имеет ординату n^2. Значит центр S_{n+1} с $r=n+0,5$ имеет координаты $(0; n^2+n+0,5)$. Составим уравнение окружности S_{n+1}

$x^2+(y-n^2-n-0,5)^2=(n+0,5)^2$

$x^2+(y-n^2)^2-2(y-n^2)(n+0,5)+n^2=0$ Подставим $x^2=y$

$y+(y-n^2)^2-2(y-n^2)(n+0,5)+n^2=0$

Получаем $(y-n^2-n)^2=0$, а это уравнение имеет лишь 1 решение $y=n^2+n$, значит S_{n+1} имеет 2 общ точки с параболой $y=x^2$ с указанной координатой это и означает, что она касается параболы $\Rightarrow r_{2017}=2017-0,5=$

$=2016,5$ (т.к. мы это и доказывали)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа

Место проведения

ЭН 64-78

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Хуснутдинова

ИМЯ Карина

ОТЧЕСТВО Маратовна

Дата рождения 14.02.1999 **Класс:** 11

Предмет математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Карина Хуснутдинова

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$S=\lg(10^4\operatorname{tg}2017^\circ)+\lg(10^5\operatorname{tg}2018^\circ)+\ldots+\lg(10^{20}\operatorname{tg}2033^\circ)$

$\operatorname{tg}2017^\circ=\operatorname{tg}(11\pi+37^\circ)=\operatorname{tg}37^\circ$

$\operatorname{tg}2033^\circ=\operatorname{tg}(11\pi+53^\circ)=\operatorname{tg}53^\circ$

$S=\log_{10}(10^4\operatorname{tg}37^\circ)+\ldots+\log_{10}(10^{20}\operatorname{tg}53^\circ)=$

$=\log(10^4\cdot10^5\cdot\ldots\cdot10^{20}\cdot\operatorname{tg}37^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}53^\circ=\log_{10}(10^{204})+$

$+\log_{10}(\operatorname{tg}37^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}53^\circ)=\underline{204}$

$\operatorname{tg}37^\circ\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}53^\circ=\dfrac{\sin37^\circ\cdot\ldots\cdot\sin53^\circ}{\cos37^\circ\cdot\ldots\cdot\cos53^\circ}=\dfrac{\frac12(\cos16-\cancel{\cos90})\cdot\ldots\cdot\sin45^\circ}{\frac12(\cos16+\cancel{\cos90})\cdot\ldots\cdot\cos45^\circ}$

$=1$

$\Rightarrow\log_{10}(1)=0$

Ответ: $\underline{204}$

№4 $a,b,c>0$ $\quad a^2+b^2+c^2=6abc$ $\quad \min a+b+c=?$

из ф. Коши $\quad a^2+b^2+c^2=3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$6abc=3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$2abc=\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$8a^3b^3c^3=a^2b^2c^2$

$8abc=1$

$abc=\frac18$

$a=b=c=\frac12$

$\Rightarrow a+b+c=\frac12\cdot3=1{,}5$

Ответ: $\underline{1{,}5}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Допустим, в первый месяц запас газа $= x = \frac{1}{3}c$ тогда в след. месяце будет равен (+)

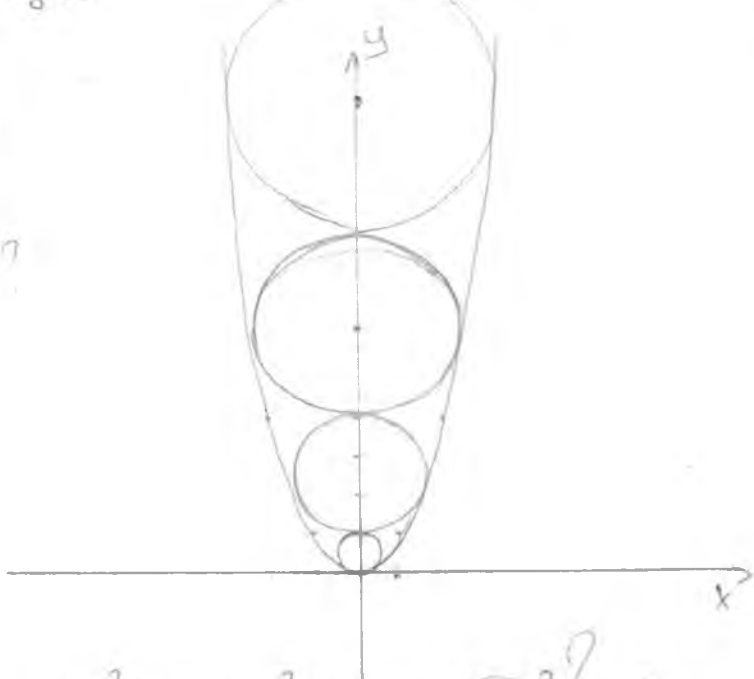
$c - 2x = c - 2\cdot\frac{1}{3}c = \frac{1}{3}c$, что равно значению запаса газа в первом месяце, т.е запас газа может оказаться одинаковым в два различных месяца.

№3

$y = x^2$

$D_{S_1} = 1$

$R_{S_{2017}} = ?$



$x^2 + (y-0{,}5)^2 = 0{,}25$

ур-ие S_1

коорд. y у $S_2 = 1 + a$

$1 = D_{S_1}$ $a = R_{S_2}$

т.к $y = x^2$ и $x^2 + (y - (1-a))^2 = a^2$ им 2 общ. точки

$y = 1 + a$ $x = a$?! $\Rightarrow$ $1 + a = a^2$ $a^2 - a - 1 = 0$

$D = 5$

$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ радиус S_2

$\Rightarrow$ y коорд y $S_3 = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} + b$, где $b = R_{S_3}$

$1{,}5 + \frac{\sqrt{5}}{2} + b = b^2$ $D = 7 + \frac{\sqrt{5}}{2}$ $b = \frac{1 + \sqrt{7 + \frac{\sqrt{5}}{2}}}{2}$

$\Rightarrow$ $b = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

$c = R_{S_3} = 1 + \sqrt{\frac{1 + 2 + \sqrt{1+4a}}{2}}$ (−)

...

№5 $n > 1$ $S(n)$ число решений

$\sin nx = \sin x$ $x \in [0; \pi]$ $\Rightarrow$ $0 \le \sin x \le 1$

при $n = 2$ $\sin 2x = \sin x$

$2\sin x \cos x - \sin x = 0$

$\sin x = 0$ $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pi k$ $k \in \mathbb{Z}$ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ (2 реш)

$\sin nx = \sin x$

$\left[\begin{array}{l} nx = x + 2\pi k \\ nx = \pi - x + 2\pi k \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l} n = 1 + \frac{2\pi k}{x} \\ n = \frac{\pi(1+2k)}{x} - 1 \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi k}{n-1} \\ x = \frac{\pi(1+2\pi k)}{n+1} \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$

при $n = 3$ $\sin 3x = \sin x$

$\sin x(3 - 4\sin^2 x) - \sin x = 0$

$\sin x = 0$ $\sin x = \pm\frac{1}{2}$

$x = \pi k$ $\sin x = -\frac{1}{2} \notin$ ОДЗ

$k \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \pi k \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + \pi k \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \pi k \\ x = \pi\frac{(1+2k)}{4} \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z}$ (3 реш)

$\Rightarrow$ $S(2) = 2$ $\Rightarrow$ $S(2017) = 2017$

$S(3) = 3$ один раз

...

$S(n) = n$

Ответ один раз.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

02611МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Шеремет

ИМЯ Анастасия

ОТЧЕСТВО Сергеевна

Дата рождения 02.05.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Шеря

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$S=\lg(10^4\,tg\,2017^\circ)+\lg(10^5\,tg\,2018^\circ)+\ldots+\lg(10^{20}\,tg\,2033^\circ)=$$

$$=\lg 10^4+\lg(tg\,2017^\circ)+\lg 10^5+\lg(tg\,2018^\circ)+\ldots+\lg 10^{20}+$$

$$+\lg(tg\,2033^\circ)=4+\lg(tg\,37^\circ)+5+\lg(tg\,38^\circ)+\ldots+20+$$

$$+\lg(tg\,53^\circ)=4+5+\ldots+20+\lg(tg\,37^\circ\cdot tg\,38^\circ\cdot\ldots\cdot tg\,53^\circ)=$$

$$=\frac{4+20}{2}\cdot 17+\lg\left(\frac{\sin 37^\circ\cdot\sin 38^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 45^\circ\cdot\ldots\cdot\sin 53^\circ}{\cos 37^\circ\cdot\cos 38^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 45^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 53^\circ}\right)=$$

$$=204+\lg\left(\frac{\frac{1}{2}(\cos 2^\circ-\cos 90^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos 4^\circ-\cos 90^\circ)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}(\cos 16^\circ-\cos 90^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 2^\circ+\cos 90^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos 4^\circ+\cos 90^\circ)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}(\cos 16^\circ+\cos 90^\circ)}\right)=$$

$$=204+\lg\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\cos 2^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 16^\circ}{\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\cos 2^\circ\cdot\cos 4^\circ\cdot\ldots\cdot\cos 16^\circ}\right)=204+\lg 1=$$

$$=204$$

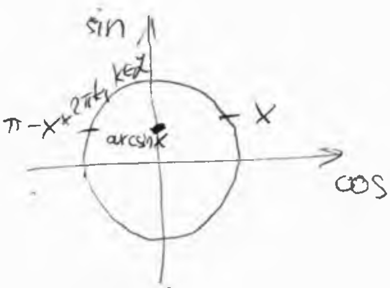
Ответ: 204

№5

$$\sin nx=\sin x\quad,\ n>1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} nx=x\quad(1)\\ nx=\pi-x+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$



Т.к. $n>1$, то (1) не выполняется.

Ур-е имеет вид: $nx=\pi-x+2\pi k$

$x(n+1)=\pi+2\pi k$

~~От кол-ва значения k зависит кол-во решений ур-я.~~

~~Т.к. слева величина всегда ...~~

$x=\dfrac{\pi+2\pi k}{n+1}$. По условию $x\in[0;\pi]$, поэтому

$$0\le\frac{\pi+2\pi k}{n+1}\le\pi\ \Big|:\pi$$

$$0\le\frac{1+2k}{n+1}\le 1\ .$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

От кол-ва значений k зависит кол-во решений ур-я, а именно их кол-ва равны. Величина, заключенная в промежуток положительна, знаменатель дроби положительный, зн. и числитель - положительной. Отсюда $k>0$, поэтому его можно заменить на искомое число $S(n)$.

$0 \le \frac{1+2S(n)}{n+1} \le 1 \iff 1+2S(n) \le n+1$, т.к. $n>0$, $S_n>0$.

$S(n) \le \frac{n}{2}$; $S(n) = \mathrm{mod}\left(\frac{n}{2}\right)$ - зависимость $S(n)$ от n.

$S(n) = 2017$, ~~тогда~~ $2017 \le \frac{n}{2}$

достигается при $\left[\begin{array}{l} n = 2017\cdot 2 = 4034 \\ n = 2017\cdot 2+1 = 4035 \end{array}\right.$

т.к. из формулы $S(n) \le \mathrm{mod}\left(\frac{n}{2}\right)$ видно, что фиксированное значение $S(n)$ достигается при двух разных значениях n: четном числе t и при нечетном числе на единицу больше предыдущего $-(t+1)$ некорректно

Ответ: $S(n) = \mathrm{mod}\left(\frac{n}{2}\right)$; 2 раза ±

№2

Да, если в текущем месяце запас равен 0, то и в следующем месяце запас равен 0. $x=0$, $0=0$, $2x=0$, $0=0$(в)

Ответ: Да; 0.

№4

$a^2+b^2+c^2=6abc$, a, b, c - положительные числа

$a^2-6abc+b^2+c^2=0$, ~~допустим~~ допусть c - число, a, b - переменные.

$\frac{D}{4} = 9b^2c^2-b^2-c^2$, чтобы ур-е имело корни $\frac{D}{4}$ должен быть не отриц.

$\frac{D}{4} \ge 0$, т.е. $9b^2c^2-b^2-c^2 \ge 0$, $b^2(9c^2-1) \ge c^2$

$b^2(3c-1)(3c+1) \ge c^2$ (*)

Отсюда $c > \frac{1}{3}$. Если проделывать так же с каждым числом, то получим, что $a > \frac{1}{3}$, $b > \frac{1}{3}$

Но при значении c, стремящимся к $\frac{1}{3}$, левая часть (*) стремится к нулю и тогда оно не будет больше c^2, стремящимся, в свою очередь, к $\frac{1}{9}$.

Поэтому условие выполняется при равных числах a, b, c и только тогда их сумма будет наименьшей.

Остаётся решить ур-е: $a^2+a^2+a^2=6a\cdot a\cdot a$

+

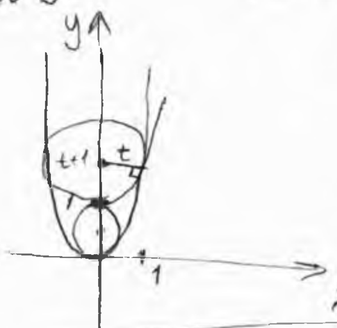
$3a^2=6a^3$

$1=2a$, $a=\frac{1}{2}$.

Тогда $a+b+c=3a=3\cdot\frac{1}{2}=1{,}5$

Ответ: 1,5.

№3



$R_2=t$, тогда $(0;\ t+1)$, $R=t$ - окр №2.

её ур-е имеет вид: $x^2+(y-(t+1))^2=t^2$

$y-(t+1)=\sqrt{t^2-x^2}$, $y=\sqrt{t^2-x^2}-t-1$

$y'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{t^2-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{t^2-x^2}}$

У параболы и второй окружности 2 общих касательных в точках x_{01} и x_{02}, $x_{01}>0$, $x_{02}<0$, $|x_{01}|=|x_{02}|$

$y_{кас}=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$

$y_{кас}$ параболы $=-x_{01}^2+2x_{01}x$, $y_{кас}$ окр №2 $=\sqrt{t^2-x_{01}^2}-t-1-\frac{x_{01}}{\sqrt{t^2-x_{01}^2}}(x-x_{01})$

Отсюда значение $y_{кас}$ параболы $=y_{кас}$ окр №2 при $x=x_{01}$ и $x=x_{02}$.

$x=x_{01}$

$$-x_{01}^2+2x_{01}^2=\sqrt{t^2-x_{01}^2}-t-1-\frac{x_{01}}{\sqrt{t^2-x_{01}^2}}(x_{01}-x_{01})$$

$x_{01}^2=\sqrt{t^2-x_{01}^2}-t-1$. Пусть $x_{01}^2=k$, тогда

$k=\sqrt{t^2-k}-t-1$, $k+t+1=\sqrt{t^2-k}$, $k^2+t^2+1+2kt+2t+2k=t^2-k$

$k^2+2kt+3k+2t=0$, $k^2+(2t+3)k+2t=0$

$D=4t^2+9+24t-8t^2=-4t^2+24t+9$

$$\left[\begin{array}{l} k=-2t-3-\sqrt{-4t^2+24t+9} \text{ - пост. т.к. } k>0 \\ k=-2t-3+\sqrt{-4t^2+24t+9} \end{array}\right.$$

$x_{01}^2=-2t-3+\sqrt{-4t^2+24t+9}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

KL 37-53

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ ШЕРСТЮГИНА

ИМЯ АНАСТАСИЯ

ОТЧЕСТВО АНДРЕЕВНА

Дата рождения 14.01.2003.

Класс: 8

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1

$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \\ 5+z+x=xz \end{cases}$; $\begin{cases} xy-x-y=1 \\ yz-y-z=2 \\ xz-z-x=5 \end{cases}$; $\begin{cases} xy-x-y+1=1+1 \\ yz-y-z+1=2+1 \\ xz-z-x+1=5+1 \end{cases}$; $\begin{cases} x(y-1)-(y-1)=2 \\ y(z-1)-(z-1)=3 \\ z(x-1)-(x-1)=6 \end{cases}$;

$\begin{cases} (x-1)(y-1)=2 \\ (y-1)(z-1)=3 \\ (z-1)(x-1)=6 \end{cases}$;

Пусть $x-1=a$; $y-1=b$; $z-1=c$, Получаем:

$\begin{cases} ab=2 \\ bc=3 \\ ac=6 \end{cases}$; $\begin{cases} a=\frac{2}{b} \\ b=\frac{3}{c} \\ ac=6 \end{cases}$;

Подставим значение $b=\frac{3}{c}$ в $a=\frac{2}{b}$:

$\begin{cases} a=\frac{2c}{3} \\ b=\frac{3}{c} \\ ac=6 \end{cases}$;

Подставим значение $a=\frac{2c}{3}$ в $ac=6$:

$\begin{cases} a=\frac{2c}{3} \\ b=\frac{3}{c} \\ \frac{2c^2}{3}=6 \end{cases}$, $\begin{cases} a=\frac{2c}{3} \\ b=\frac{3}{c} \\ c^2=9 \end{cases}$, $\begin{cases} a=\frac{2c}{3} \\ b=\frac{3}{c} \\ c=3 \end{cases}$, $\begin{cases} a=\frac{2\cdot 3}{3} \\ b=\frac{3}{3} \\ c=3 \end{cases}$, $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases}$;

$x-1=a$, $x-1=2$; $x=3$

$y-1=b$; $y-1=1$, $y=2$

$z-1=c$; $z-1=3$; $z=4$

Ответ: $x=3$; $y=2$; $z=4$ — одно из реш.

(±)

№2

а) $A=x+\frac{1}{x}$

а) $B_k=x^k+\frac{1}{x^k}$

При $k=2$: $B_2=x^2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+\cancel{2-2}=2\cdot\frac{x}{x}-2\cdot\frac{x}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=A^2-2$

При $k=3$: $B_3=x^3+\frac{1}{x^3}=x^3+\left(\frac{1}{x}\right)^3=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-\frac{x}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-1\right)=$
$=A(A^2-3)=A^3-3A$

При $k=4$ $B_4=x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^2=(x^2)^2+2\frac{x^2}{x^2}+\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^2-2\frac{x^2}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=$
$=\left(x^2+2\frac{x}{x}+\frac{1}{x^2}-2\frac{x}{x}\right)^2-2=\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)^2-2=(A^2-2)^2-2=A^4-4A^2+4-2=$
$=A^4-4A^2+2$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

При $k=8$: $B_8 = x^8+\frac{1}{x^8} = (x^4)^2+\left(\frac{1}{x^4}\right)^2 = (x^4)^2+2\frac{x^4}{x^4}+\left(\frac{1}{x^4}\right)^2-2\frac{x^4}{x^4} = \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2-2 =$

$= (B_4)^2-2 = (A^4-4A^2+2)^2-2 = \cancel{A^8-16A^4+4-2 = A^8-16A^4+2.}$

$= A^8+16A^4+4-8A^6-16A^2+4A^4-2 = \cancel{A^8+20A^4} - \cancel{A^8-8A^6+20A^4+4}$

$= A^8-8A^6+20A^4-16A^2+4.-2 = A^8-8A^6+20A^4-16A^2+2.$

б) $B_2 = B_4 = B_8$

$A^2-2 = A^4-4A^2+2 = A^8-8A^6+20A^4-16A^2+2$

Рассмотрим $B_2 = B_4$

$A^2-2 = A^4-4A^2+2$

$5A^2 = A^4+4$

~~Пусть~~ $A^2 = a$ $\quad 5A^2 = (A^2)^2+2^2$

$a^2-5a+4=0$ $\quad 5A^2 = (A^2+2)^2-4A^2$

$9A^2 = (A^2+2)^2$

$(3A)^2 = (A^2+2)^2$

$3A = A^2+2$

$A^2-3A+2=0$

$D = 9-8 = 1$

$A_{1,2} = \frac{3\pm1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} A_1 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ A_2 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right.$

Возможные значения A: $A=2$; $A=1$. Тогда x:

1) $x+\frac{1}{x} = A = 2$; домножим левую и правую части на x.

$x^2+1 = 2x$

$x^2-2x+1=0$

$D = 4-4 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2\pm0}{2} = 1$

2) $x+\frac{1}{x} = A = 1$, домножим левую и правую части на x.

~~$x^2+1 = x$~~

~~$x^2=0$~~ $\quad$ ~~$x^2-x+1=0$~~

~~$x=0$~~

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x^2+1=x$

$x^2-x+1=0$

$D=\frac{1-4}{2}=-1,5$ => корней нет.

То есть $A=1$ – невозможно.

Ответ: а) $B_2=A^2-2$ $B_4=A^4-4A^2+2$

$B_3=A^3-3A$ $B_8=A^8-8A^6+20A^4-16A^2+2$

б) При $A=2$ и $x=1$.

№3

1) $120-31-41=48$ кг (В суммарный вес грузов без 3х самых легких и 3х самых тяжелых), обозначим эту группу грузов X)

~~Который груз~~ ~~Третий~~ Самый тяжелый из 3х самых легких грузов весит $>\frac{31}{3}$ кг, а самый легкий из 3х самых тяжелых грузов $<\frac{41}{3}$ кг

Тогда кол-во грузов в X $<48:\frac{31}{3}=\frac{48\cdot3}{31}=\frac{144}{31}=4\frac{20}{31}$, но ~~>48~~

$>48:\frac{41}{3}=\frac{48\cdot3}{41}=\frac{144}{41}=3\frac{21}{41}$. Т.к кол-во грузов целое, то при

$4\frac{20}{31}>x>3\frac{21}{41}$ $x=4$. Тогда всего грузов $3+4+3=10$.

(+)

Ответ: 10 грузов

№5

~~с 12ч до 14ч~~ Т.к в 12ч ~~ре~~ была ~~по~~ заполнена $\frac{1}{2}$ резервуара, а ~~за~~ в 14ч – $\frac{2}{3}$ резервуара, то с 12ч до 14ч резервуар заполнился на ~~$\frac{1}{2}$~~ ~~$\frac{2}{3}$~~ $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$ => скорость заполнения с двумя включенными насосами $=\frac{1}{12}$ ~~бака~~ резервуара в час.

В 12ч он был заполнен наполовину => в 10ч $=\frac{1}{2}-\frac{2}{12}=$

$=\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ резервуара

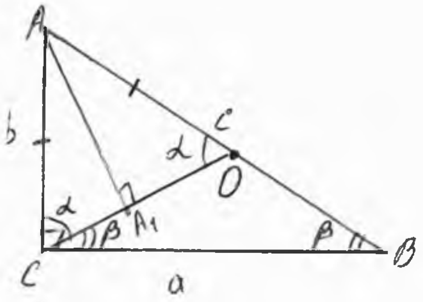
$\frac{1}{3}:\frac{1}{12}=\frac{1\cdot12}{12\cdot1}=4$ часа

(+)

$10-4=6$ часов

Ответ. 6 часов

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



№ 4

O - т. встречи

$\cancel{AB}$ $\frac{AC}{AB} = \cancel{\frac{3}{4}}$ $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$

Пусть 1 часть $= x$, тогда $b = 3x$, $a = 4x$

По теореме Пифагора:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 9x^2 + 16x^2$

$c^2 = 25x^2$

$c = \sqrt{25x^2} = 5x$

$P_{\triangle ABC} = a + b + c = 3x + 4x + 5x = 12x$. Т.к комары двигался с одной и той же скоростью и равное время, то они прошли равные расстояния по $\frac{12x}{2} = 6x$ комары. Т.е первый прошел $AC + AO = 6x$; $3x + AO = 6x$; $AO = 3x$

а второй $CB + BO = 6x$; $4x + BO = 6x$; $BO = 2x$.

$\triangle ACO$ - равнобедренный, т.к $AC = OA = 3x$.

а) Пусть $S_{\triangle ACO} = S_{\triangle OCB}$. ~~Проведем~~ Тогда каждая из площадей равна ≠ $\cancel{\frac{S_{\triangle ABC}}{2} = \frac{ab}{4} = \frac{3x \cdot 4x}{4} = 3x^2}$ $\cancel{S_{\triangle ABC} : 2 = \frac{ab}{2} : 2 = \frac{3x \cdot 4x}{2} : 2 = 12x\,61}$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{2} = \frac{ab}{4} = \frac{3x \cdot 4x}{4} = 3x^2$

Проведем AA_1 - высоту в $\triangle AOC$. Ее ~~$S_\triangle AA$~~

$S_{\triangle AA_1C} + S_{\triangle AA_1O} = 3x \cdot A_1C = 3x^2 \Rightarrow A_1C = x \Rightarrow OC = 2x$.

Тогда $\triangle OCB$ равнобедренный, т.к $OC = CB = 2x$

Получаем, что $\angle ACO = \angle AOC$ и $\angle OCB = \angle CBO$

~~α~~ $\angle COB = 180° - 2\beta$ (по т. о сумме $\angle$-ов $\triangle$-ка)

$180° - 2\beta + \alpha = 180°$ (смежные)

~~$90°$~~ $\alpha = 2\beta$

$90° = 3\beta$

$\beta = 60°$

(+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

~~2~~ZP 10-12

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ШИПИЛОВ

ИМЯ АРТЁМ

ОТЧЕСТВО ВАДИМОВИЧ

Дата рождения 09.07.1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ZP 10-12

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

① $\lg(10^4 \cdot tg 2017^\circ) + \lg(10^5 tg 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} tg 2033)$

1) т.к. $tg x$ - ф-ция периодичная (с периодом 180°),

то $tg(2017^\circ) = tg(1800+180+37) = tg 37^\circ$

2) по св-ву логарифмов: ~~tg~~ $\lg a + \lg b = \lg ab$

Учитывая (1) и (2) получаем:

$\lg(10^4 tg 2017) + \ldots + \lg(10^{20} tg 2033) = \lg(10^{4+5+\ldots+20} \cdot tg 37 \cdot tg 38 \cdot \ldots \cdot tg 53) =$

$=$

Заметим, что $tg 37 \cdot tg 53 = \frac{\sin 37 \cdot \sin 53}{\cos 37 \cdot \cos 53} = \frac{\frac{1}{2}(\cos(-20) - \cos 90)}{\frac{1}{2}(\cos -20) + \cos 90)} = 1$

и, учитывая что $tg 45^\circ = 1$, получаем, что произвед всех тангенсов $= 1$. $\Rightarrow$

$= \lg(10^{4+5+\ldots+20} tg 37 \cdot \ldots \cdot tg 53) = \lg(10^{4+5+\ldots+20}) =$

$= 4+5+\ldots+20 = \frac{4+20}{2} \cdot 17 = 194$

Ответ: 194.

+.

④ Дано: $a^2+b^2+c^2 = 6ab$ Найти $\min(a+b+c)$ - ?

1) $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \le a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2$

(т.к. средн. геом. $\le$ средн. арифм $\sqrt{a^2b^2} \le \frac{a^2+b^2}{2}$)

$\Rightarrow (a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2) = 18abc \Rightarrow a+b+c \le 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{abc}$

2) $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$ (ср. арифм $\geqslant$ ср. геом) $a+b+c \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{abc}$

3) Сопоставляя (1) и (2) получаем: $3 \cdot \sqrt[3]{abc} \le a+b+c \le 3 \cdot \sqrt{2} \sqrt{abc}$

$\Rightarrow 3 \cdot \sqrt[3]{abc} \le 3\sqrt{2}\sqrt{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \le \sqrt{2}\sqrt{abc} \Rightarrow \sqrt[6]{abc} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{abc} \geqslant \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow a+b+c \le \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2}$ Ответ: 1,5.

(2) $\exists$ в 1-вый месяц запас газа $= x$. Тогда:

$1 = x$
$2 = c - 2x$
$3 = 2x - c$
$4 = 2c - 4x$
$5 = 8x - 3c$
...

Может ли запас газа оказ. одинак.?
Да, может.
Например: в 1-вый месяц $x = \frac{c}{3}$
$\Rightarrow$ Во 2-ой месяц запас $= c - \frac{2c}{3} = \frac{c}{3}$
Или в 1-вый месяц $x = c$
$\Rightarrow$ в 3-тий месяц запас $= 2x - c = c$

(+)

(5) 1) $n = 2$ $\quad \sin 2x = \sin x \rightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0$, $x \in [0; \pi]$

2 реш $\quad$ 1 реш.

Всего: 3

2) $n = 3$ $\quad \sin 3x - \sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x = 0$

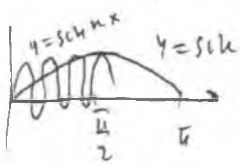
$\sin x(3 - 4\sin^2 x - 1) = 0$

2 реш $\quad$ 2 реш.

т.к. $\left[\begin{array}{ll} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} & - 2 \text{ реш} \\ \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} & - \text{н/у.} \end{array}\right.$

(+)

3) Заметим закономерность, что $S(n) = n + 1$
Однако: могут быть случаи:



когда в $\frac{\pi}{2}$ $y = \sin x$ будет равно 1, тогда

$S(n) = n$.

$\sin \frac{\pi n}{2} = 1$

$\frac{\pi}{2} n = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$n = 1 + 4k$, $k \in \mathbb{Z}$.

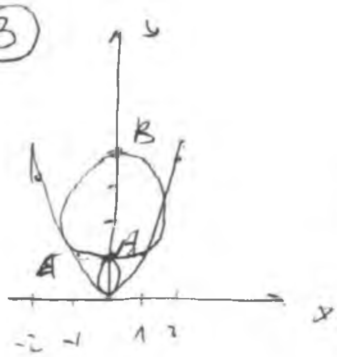
$n = 5, 9, \ldots 2017, \ldots$

$\Rightarrow S(n) = 2017$ будет дважды.

когда $\left[\begin{array}{l} n = 2016 \\ n = 2017. \end{array}\right.$

Ответ: 2 раза.

3



т.к. $x_B = 0$ (у $y=x^2$), то

все окружн. будут иметь вид $x^2+(y-y_n)^2=r_n^2$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2+(y-y_{0n})^2 = r_n^2 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ реш.}$$

$$x^2+x^4+y_{0n}^2-2x^2y_{0n}-r_n^2=0$$

$$x^4+(1-2y_{0n})x^2+y_{0n}^2-r^2=0$$

$$D=(1-2y_{0n})^2-4y_{0n}^2+4r_n^2=$$

$$=1-4y_{0n}+4r_n^2$$

Дискриминант должен быть равен "0" иначе окружн. будет пересекать параболу.

$$\Rightarrow 4r_n^2-4y_{0n}+1=0$$

$$\boxed{r_n^2-4y_{0n}+\frac{1}{4}=0}$$

S_1 : $r_1=\frac{1}{2}$ $A(0;1)$

S_2 : $y_0=1+r$

$r^2-1-r+\frac{1}{4}=0$ $B(0;4)$

$r^2-r-\frac{3}{4}=0$

$r=\frac{3}{2}$

+

S_3 : $y_0=4+r$

$r^2-4-r+\frac{1}{4}=0$

+

$r^2-r-\frac{15}{4}=0$

$D=16$

$r=\frac{5}{2}$.

Видим закономерность $\Rightarrow$ $r_n=\frac{n+2}{2}$ $\Rightarrow$

ошибка

$\Rightarrow r_{2017}=\frac{2019}{2}$

$\pm$

Ответ: 1009,5

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

04610МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Широкова

ИМЯ Мария

ОТЧЕСТВО Германовна

Дата рождения 23.02.2000

Класс: 10

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №2.

$0<x<1$, т.к. иначе $\frac{1}{1-x}<0$, а по условию запас не может быть отрицательным или $=0$.

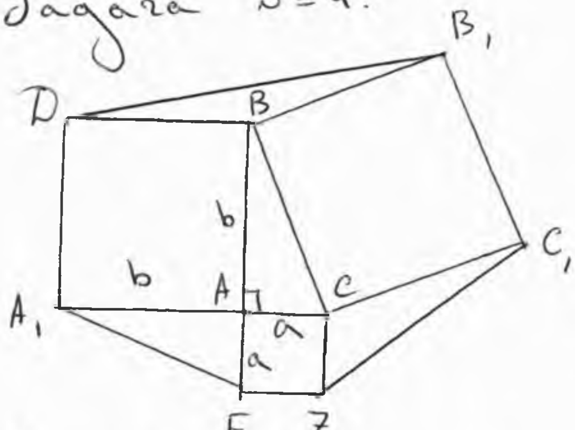
В 1ый месяц запас $=x$.

Во 2ой запас $=\frac{1}{1-x}$

В 3ий запас $=1:\left(1-\frac{1}{1-x}\right)=1:\left(\frac{1-x-1}{1-x}\right)=$
$=1:\left(\frac{-x}{1-x}\right)=\frac{x-1}{x}>0$ по условию $\Rightarrow x>1$. Противоречие с 1ым выводом. $\Rightarrow$ Запас не может меняться по данной схеме и оставаться положительным одновременно.

Но если запас мог бы быть и отрицательным, то в 4ом месяце запас $=1:\left(1-\frac{x-1}{x}\right)=$
$=1:\left(\frac{x-x+1}{x}\right)=1:\frac{1}{x}=x=$ запас в 1ом месяце.

Задача №4.



Дано:
$\angle A=90^\circ$
$AB=b$
$AC=a$.
A_1ABD, BB_1C_1C, $ACZF$ – квадраты.
S – ?

$S=S_{ABC}+S_{BB_1CC_1}+S_{CC_1Z}+S_{ACZF}+S_{A_1AF}+S_{ABDA_1}+S_{DBB_1}$

$\triangle ABC=\triangle A_1AF$ по 2 катетам ($AA_1=AB=b$; $AC=AF=a$; $\angle BAC=\angle A_1AF=90^\circ$) $=S_{ABC}=S_{A_1AF}=\frac{ab}{2}$.

$S_{DBAA_1}=b^2$ $\qquad S_{ACZF}=a^2$ $\qquad S_{BCC_1B_1}=BC^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2=$
$=a^2+b^2$

$S_{DBB_1}=\frac{1}{2}DB\cdot BB_1\cdot \sin DBB_1$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\angle DBB_1 = 360 - 90 - 90 - \angle ABC = 180 - \angle ABC \Rightarrow \sin DBB_1 =$
$= \sin ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$S_{DBB_1} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{2}$

$S_{CC_1Z} = \frac{1}{2} CZ \cdot CC_1 \cdot \sin ZCC_1$

$\angle ZCC_1 = 360 - 90 - 90 - \angle BCA = 180 - \angle BCA \Rightarrow \sin ZCC_1 =$
$= \sin BCA = \frac{AB}{BC} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$S_{CC_1Z} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{a^2+b^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab}{2}$

$S = \frac{ab}{2} + a^2 + b^2 + \frac{ab}{2} + a^2 + \frac{ab}{2} + b^2 + \frac{ab}{2} =$
$= 2ab + 2a^2 + 2b^2$

$\frac{S}{S_{ABC}} = \min \qquad \frac{2ab + 2a^2 + 2b^2}{\frac{ab}{2}} = \min$

$\frac{2(2ab + 2a^2 + 2b^2)}{ab} = \frac{4ab + 4a^2 + 4b^2}{ab} = 4 + \frac{4(a^2+b^2)}{ab}$

$4 + \frac{4(a^2+b^2)}{ab} = \min$ при $\frac{a^2+b^2}{ab} = \min$

$\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ Если $a > b$, то $\frac{a}{b} > 1$ и $\frac{b}{a} < 1$

и $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$.

$\Rightarrow a = b$, тогда $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 = \min$

Ответ: $S = 2ab + 2a^2 + 2b^2$; $a = b$. $\left(\frac{a}{b} = 1\right)$ +

Задача №1.

$12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 35$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x \neq 1$ и $x \neq -1$ т.к. $\sqrt{x^2-1} \neq 0$

$x > 1$ или $x < -1$ т.к. ~~$\sqrt{x^2-1}$~~ $x^2-1>0$

$x > 1$, т.к. $12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \Rightarrow 12x > 0$ и $\frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} > 0$.

x^2-1 — полный квадрат, либо x содержит в себе корень, т.к. $x = k\sqrt{z}$, где z — неполный квадрат и $z>0$.

Если $x = k\sqrt{z}$, то $12x = 12k\sqrt{z}$ и $\sqrt{z}$ не сократится, а останется в ответе.

$\frac{12k\sqrt{z}}{\sqrt{k^2z-1}}$ — $\sqrt{z}$ может сократиться до целого числа. В этом случае $12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} = 12k\sqrt{z} + p$, где $p \in Z$ или $p = m\sqrt{l}$, где $l = z$ или $l \neq z$. В любом случае в ответе будет $\sqrt{z}$.

x^2-1 — полный корень, только если $x = 1$ или $x = -1$, однако $x^2-1 \neq 0$ по условию $\Rightarrow$ x^2-1 — неполный квадрат. В этом случае в ответе также будет присутствовать корень.

Ответ: нет, т.к. $12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} \notin Z$, а $35 \in Z$.

$\Rightarrow 12x + \frac{12x}{\sqrt{x^2-1}} \neq 35$.

№3

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = 0.$$

$$\begin{cases} x-n+1=0 \\ 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x(x-1)\ldots(x-n)}{(n-1)!} = 0 \end{cases}$$

$x = n-1$

$$1-\frac{n-1}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots(n-1-n+1)}{(n-1)!}=0$$

$$1-\frac{n-1}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots(n-1-n+2)}{(n-1)!}=0$$

$$\cancel{1-\frac{n-1}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\dots+(-1)^{n}0=0}$$

$$\cancel{1-\frac{n-1}{1!}-\frac{(n-1)(n-2)}{2!}-\dots-(-1)^{n-2}(n-1)(n-2)\dots}$$

$$1-\frac{n-1}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)(n-2)\dots\cancel{(n+1)}\,1}{(n-1)!}=0.$$

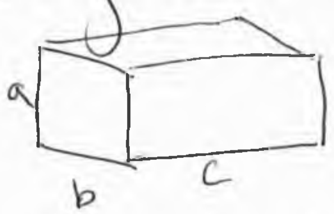
$$1-\frac{n-1}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\dots+(-1)^{n-1}=0.$$

$$\begin{cases} n=2 \\ x=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} n=3 \\ x=2 \end{cases}$$

Ответ: $x=1$, $x=2$.

+

Задача №5.



Со стороной c можно составить $b\cdot(a-1)$ параллелограммов.

Аналогично со сторонами a и b.

$$\Rightarrow N = b\cdot(a-1)+c\cdot(b-1)+a\cdot(c-1)$$

Однако в данном случае мы ещё и посчитали параллелограмм $a\times b\times c$.

$$\Rightarrow N = b\cdot(a-1)+c\cdot(b-1)+a(c-1)-1.$$

Ответ: $b(a-1)+c\cdot(b-1)+a(c-1)-1$.

окает навен $4 м^2$ – точки квадрат 2

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

04809МК

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Шишацкий

ИМЯ Михаил

ОТЧЕСТВО Николаевич

Дата рождения 03.02.2001

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.17
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 04809МК

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Так как запас газа всегда остаётся положительным числом, $6-x>0$, $x<6$. Следовательно, наборы запасов газа таковы: $5м^3$ и $1м^3$; $4м^3$ и $2м^3$; $3м^3$ и $3м^3$.

Заметим, что запас газа повторяется через месяц!

$k \to 6-k \to 6-(6-k)=k$.

общий случай!

В наборе 5 и 1 числа не могут быть точными квадратами друг друга.

В наборе 3 и 3 аналогично.

(+)

В наборе 4 и 2 $2^2=4$, $4=4$ (в)

Если изначальный запас газа был равен $2м^3$ (в 1 месяц), то каждый ~~нече~~ чётный месяц запас газа составит $4м^3$ – точный квадрат 2.

Если изначальный запас газа был равен $4м^3$ (в 1 месяц), то каждый нечётный месяц (начиная с 1) запас газа будет равен $4м^3$ – точный квадрат 2.

Ответ: $4м^3$ – по нечётным месяцам

$2м^3$ – по чётным месяцам.

№5

$f(x)=x^2+px+q$, $D=p^2-4q=100$

$f(x)+f(x-10)=0$ (*)

$x^2+px+q+x^2-20x+100+px-10p+q=0$

$x^2+(p-10)x+q-5p+50=0$

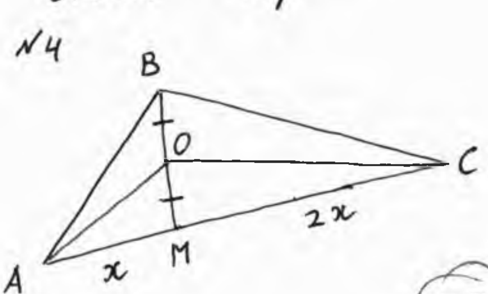
(+)

$D=p^2-20p+100-4q+20p-200=p^2-4q-100=100-100=0$

Следовательно, уравнение * имеет 1 корень.

Ответ: 1 корень

№4



(∓)

Проведём из точки B отрезок BM ($M \in AC$) так, что $AM:MC=1:2$.

По следствию из св-ва медиан треугольника $S_{ABM}:S_{CBM}=1:2$. но BM – не медиана

Проведём медианы AO и CO на основание MB. Точка O – искомая

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Пусть $S_{AOB} = S$, тогда $S_{BOC} = 2S$, $S_{AOC} = S + 2S = 3S$

$S_{AOB} : S_{BOC} : S_{AOC} = 1:2:3$.

№1

a) $A = x + \frac{1}{x}$

$B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = A^2 - 2$

$B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\right) =$

$= A(A^2 - 3) = A^3 - 3A$

$B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right)^2 - 2 = (A^2 - 2)^2 - 2 =$

$= A^4 - 4A^2 + 2$

$B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2 = (A^4 - 4A^2 + 2)^2 - 2 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 + 16A^2 + 2$

b) $A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 2$

Рассмотрим только данную часть уравнения:

$A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2$

$A^4 - 5A^2 + 4 = 0$

$A^2 = 4$ или $A^2 = 1$

При $A^2 = 4$

$4 - 2 = 16 - 16 + 2 = 256 - 512 + 320 - 64 + 2$

$2 = 2 = 2$ (в)

При $A^2 = 1$

$1 - 2 = 1 - 4 + 2 = 1 - 8 + 20 - 16 + 2$

$-1 = -1 = -1$ (в)

$A^2 = 4$	$A^2 = 1$
$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$	$x^2 + \frac{1}{x^2} = -1$
$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 0$	корней нет
$x - \frac{1}{x} = 0$	
$x = 1$ или $x = -1$	

±

Ответ: данное равенство возможно при $A = 2$, $x = 1$ или $A = -2$, $x = -1$

c) $B_2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$

mín для вычисления x ?

При $x = 0$ данное выражение не имеет смысла, $C(0)$ также не имеет смысла. Однако количество арифм. операций равно 0 (скорее всего это не ответ)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

При любом значении x кол-во операций одинаково (если считать умножение на ± 1) Если же не считать данные операции, то при $x=1$ и $x=-1$ ($A=2$ и $A=-2$ соответственно)

$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2-2 \to 2^2-2 \to 2(2-1) \to 2\cdot 1 \to 2$

$\left(-1-\frac{1}{1}\right)^2-2 \to (-2)^2-2 \to -2(-2+1) \to 2.$

$C(1)=\left(\left(1^{2017}+\frac{1}{1^{2017}}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017}=1^{2017}=1$

$C(-1)=\left(\left((-1)^{2017}+\frac{1}{(-1)^{2017}}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017}=(-1)^{2017}=-1$

Ответ: при $A=2$ и $x=1$ или $A=-2$ и $x=-1$,
$C(1)=1$, $C(-1)=-1$.

№3

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0$$

$$\frac{2-2x+x(x-1)}{1\cdot 2}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0$$

$$\frac{3(x-1)(x-2)-x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0$$

$$\frac{-4(x-1)(x-2)(x-3)+x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=0$$

$x-1=0$ или $x-2=0$ или $x-3=0$ или $x-4=0$
$x=1$ $\quad x=2$ $\quad x=3$ $\quad x=4$

Ответ: 1; 2; 3; 4.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ	KL 37-93	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ ШЛАПАК

ИМЯ МАРИЯ

ОТЧЕСТВО ВЛАДИМИРОВНА

Дата рождения 27.11.2002 **Класс:** 8

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 04 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.17 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: МВШлап

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ KL 37-93

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2

$A = x + \frac{1}{x}$

а) 1) $B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = A^2 - 2$

2) $B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 1\right) =$

$= A\left(A^2 - 3\right) = A^3 - 3A$

3) $B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2\right)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2\frac{x^2}{x^2} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 =$

$= \left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right)^2 - 2 = \left(A^2 - 2\right)^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 4 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2$

4) $B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8} = \left(x^2\right)^3 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^4 - 1 + \frac{1}{x^4}\right) = \left(A^2 - 2\right)\left(A^4 - 4A^2 + 2 - 1\right) =$

$= \left(A^2 - 2\right)\left(A^4 - 4A^2 + 1\right) = A^6 - 4A^4 + A^2 - 2A^4 + 8A^2 - 2 = A^6 - 6A^4 + 9A^2 - 2$

б) $B_2 = B_4 = B_8$;

1) $A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 = A^6 - 6A^4 + 9A^2 - 2$

$A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2$

$A^4 - 5A^2 + 4 = 0$

$D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$

$A^2 = \frac{5 \pm \sqrt{D}}{2}$

$A^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$

$A^2 = \frac{5 \pm 3}{2}$

$A_1^2 = 4 \Rightarrow A_1 = 2;\ A_2 = -2$

$A_2^2 = 1 \Rightarrow A_3 = 1;\ A_4 = -1$

2) $A^4 - 4A^2 + 2 = A^6 - 6A^4 + 9A^2 - 2$

при $A = 2$: $16 - 16 + 2 = 64 - 6 \cdot 16 + 9 \cdot 4 - 2$

$2 = 2$

при $A = -2$: $16 - 16 + 2 = 64 - 6 \cdot 16 + 36 - 2$

$2 = 2$

при $A = 1$: $1 - 4 + 2 = 1 - 6 + 9 - 2$

$-1 \neq 2$

при $A = -1$: $1 - 4 + 2 \neq 1 - 6 + 9 - 2$

$\Downarrow$

$A = 2$ или -2 ~~или A = 0 (все 3 равенства)~~

$A = 2$ или $A = -2$, тогда

$x + \frac{1}{x} = 2$ или $x + \frac{1}{x} = -2$

$x + \frac{1}{x} - 2 = 0 \mid \cdot x$

$x^2 + 1 - 2x = 0$

$D = 4 - 4 = 0$

$\Downarrow$

$x = \frac{2 \pm 0}{1}$

$x = 2$

$x + \frac{1}{x} + 2 = 0 \mid \cdot x$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$D = 4 - 4 = 0$

$\Downarrow$

$x = \frac{-2 \pm 0}{1}$

$x = -2$

Ответ: при $A = 2$ или -2; $x = 2$ или -2

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 5

Пусть всего в резервуар может поместиться x горючего. Тогда:

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x = 14ч. - 12ч. = 2ч.$

$\frac{4}{6}x - \frac{3}{6}x = 2ч$

$\frac{1}{6}x = 2ч \Rightarrow$ за 2 часа они откачали $\frac{1}{6}x \Rightarrow$ за час они откачивают $\frac{1}{12}x$. Так как насосы одинаковы, то каждый в час откачивает $\frac{1}{12}x : 2 = \frac{1}{24}x$ горючего.

в 10 утра было горючего $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x \cdot 2 = \frac{1}{2}x - \frac{2}{12}x = \frac{3}{6}x - \frac{1}{6}x = \frac{2}{6}x = \frac{1}{3}x$

Тогда первый насос до 10 утра откачал $\frac{1}{3}x$ за:

$\frac{1}{3}x : \frac{1}{24}x = \frac{1x \cdot 24}{3 \cdot x} = 8$ (часов) $\Rightarrow 10 - 8 = 2$ (часа утра)

(+)

Ответ: в 2 часа утра

N 3

Пусть $\Sigma = 120$ кг, тогда Σ_0 – сумма остатка (средних приборов); $\Sigma_0 = 120 - 41 - 31 = 120 - 72 = 48$ кг.

$\Sigma_л$ – сумма лёгких $= 31$ кг; $\Sigma_т$ – сумма тяжёлых $= 41$ кг;

т.к нам нужно, чтобы разница была наибольшими вариантами чисел, самое большое из самых лёгких < 11 (пример $10,1 + 10,9 + 10 = 31$). Тогда аналогично самое лёгкое из самых тяжелых > 13 ($13,4 + 13,6 + 14 = 41$) $\Rightarrow$ довесы весят в промежутках м/у* 11 и 13. Т.к все они разного веса, то их максимальное (и единственное) кол-во $= 4$, т.к это число в промежутке м/у* $\frac{41}{13} = 3\frac{9}{13}$ и $\frac{48}{11} = 4\frac{4}{11}$, а т.к оно целое, то вариант 1: это 4 (пример $11,1 + 11,5 + 12,5 + 13 = 48$)

$\Rightarrow$ Всего приборов: $3 + 3 + 4 = 10$ штук

(м/у* – между)

(+)

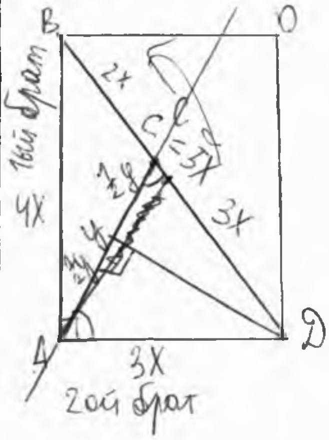
Ответ: 10 штук

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ KL 37-93

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



N4

Т.к катеты соотносятся как $\frac{3}{4}$, пусть один из них равен $3X$, тогда другой $4X$. Отсюда по т. Пифагора находим гипотенузу:

$$C^2=(4X)^2+(3X^2)=16X^2+9X^2=25X^2$$

$$C^2=25X^2$$

$$C=\sqrt{25X^2} \Rightarrow C=5X$$

Пусть братья шли со скоростью ϑ, тогда скорость сближения $=\vartheta_{сбл}=2\vartheta$; тогда братья прошли путь за $\frac{4X+3X+5X}{2\vartheta}=\frac{12X}{2\vartheta}=6\frac{X}{\vartheta}$ часов, причём первый брат прошёл $6X$ и второй $6X$.

$\frac{-}{+}$

Тогда место встречи лежит в $3X$ от пути 2ого брата.

Тогда соединение обозначим буквой y.

ΔACD равнобедренный, ~~проведём из D высоту (которая и медиана) на AC.~~

~~Тогда $S_{ACD}=\frac{1}{2}y$~~ Дополним ΔABD до прямоугольника и проведём прямую AC

$P_{ACD}=P_{ABC}=6X+y \Rightarrow$ их площадь ~~тоже равна~~ тоже равна.

Ответ: а) да, получились

N1

$$\begin{cases}1+x+y=xy\\2+y+z=yz\\5+z+x=zx\end{cases};\quad \cancel{\frac{xy}{yz}}\ \cancel{+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{1}{x+y+1}}$$

$$\cancel{1+2+5=xy-x-y+yz-y-z+zx-z-x}$$

$$\cancel{8=xy+yz+zx-2x-2y-2z}$$

$$\cancel{8+2x+2y+2z=xy+yz+zx}$$

$$\cancel{4+x+y+z=\frac{xy+yz+zx}{2}}$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ KL 37-93

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 (продолжение)

~~$4+x+y+z=\frac{xy+yz+zx}{2}$~~

$$\begin{cases} 1+x+y=xy \\ 2+y+z=yz \end{cases}$$

~~$4+x+y+z=\frac{1+x+y+2+y+z+5+z+x}{2}$~~

$$\frac{xy}{yz}=\frac{1+x+y}{2+y+z}$$

$$\frac{x}{z}=\frac{1+x+y}{2+y+z}$$

$$2x+yx+xz=z+zx+zy$$

$$2x+yx=z+zy$$

$$x(2+y)=z(y+1)$$

$$\frac{x}{z}=\frac{y+1}{y+2};\quad x=y+1;\quad z=y+2;$$

$$1+x+y=xy$$

$$1+y+1+y=(y+1)y$$

$$2+2y=y^2+y$$

$$y=y^2-2$$

$$2=y^2-y$$

$$\Rightarrow y=2 \Rightarrow \begin{cases} x=y+1=2+1=3 \\ z=y+2=2+2=4 \end{cases}$$

одно из реш.

±

Ответ: $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=4 \end{cases}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Уфа	NЭ 92-10	← Не заполнять Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ ЮМАГУЛОВА

ИМЯ АЙЛИНА

ОТЧЕСТВО ИРЕКОВНА

Дата рождения 26.11.2001 **Класс:** 9

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Айлин

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

2.

1 месяц $- x$ $м^3$

2 месяц $- (6-x)$ $м^3$

3 месяц $- (6-6+x) = x$ $м^3$

$0 < x \leq 6$

$(0 < 6-x < 6)$

Тогда $x^2 = 6-x$

$x^2+x-6=0$

По т. Виета $x_1 = -3$ усл. $x>0$ не удовл.

$x_2 = 2$

Т.е. запас газа будет квадратом другого месяца все четные месяца $(=4)$, а все нечетные будут $=2$.

$x = (6-x)^2$

$x = 36 - 12x + x^2$

$x^2 - 13x + 36 = 0$

$D = 169 - 144 = 25$

$x = \frac{13 \pm 5}{2}$

$x_1 = 9$ $\quad x_2 = 4$

усл. $x<6$ не удовл.

—

Ответ: такое возможно, если в 1 месяц будет $2\ м^3$, а во второй $- 4\ м^3$, или если в 1 месяц будет $4\ м^3$, а во второй $- 2\ м^3$.

3. $1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 0$

$1 - \frac{x}{1} + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2} - \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3} + \frac{x}{1}\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{4} = 0$

$1 - \frac{x}{1}\left(1 - \frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3} - \frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{4}\right) = 0$

$1 - \frac{x}{1}\left(1 - \frac{x-1}{2}\left(1 - \frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{3}\cdot\frac{x-3}{4}\right)\right) = 0$

$1 - \frac{x}{1}\left(1 - \frac{x-1}{2}\left(1 - \frac{x-2}{3}\left(1 - \frac{x-3}{4}\right)\right)\right) = 0$

$1 - x\left(1 - \frac{x-1}{2}\left(1 - \frac{x-2}{3} + \frac{x^2-5x+6}{12}\right)\right) = 0$

$1 - x\left(1 - \frac{x-1}{2}\left(\frac{12-4x+8+x^2-5x+6}{12}\right)\right) = 0$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$1-x\left(1-\frac{x-1}{2}\left(\frac{x^2-9x+26}{12}\right)\right)=0$

$(1-x(\cancel{1}-24-x)$

$1-x\left(1-\frac{x^3-9x^2+26x-x^2+9x-26}{24}\right)=0$

$1-x\left(1-\frac{x^3-x^2-9x^2+35x-26}{24}\right)=0$

$1-x\left(\frac{24-x^3+x^2+9x^2-35x+26}{24}\right)=0$

$1-x\left(\frac{-x^3+10x^2-35x+50}{24}\right)=0$

$1-\frac{-x^4+10x^3-33x^2+50x}{24}=0$

$\frac{24+x^4-10x^3+35x^2-50x}{24}=0$

$x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$

$\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \; \pm6 \quad \pm8 \quad \pm12 \quad \pm24$

$x=1 \quad 1-10+35-50+24=0$

$60-60=0$

$$\begin{array}{r|l}
x^4-10x^3+35x^2-50x+24 & x-1 \\ \hline
-\,x^4-x^3 & x^3-9x^2+26x-24 \\
-9x^3+35x^2 & \\
-\,-9x^3+9x^2 & \\
26x^2-50x & \\
-\,26x^2-26x & \\
-24x+24 & \\
-\,-24x+24 & \\
0 &
\end{array}$$

$x^3-9x^2+26x-24=0$

$\pm1 \quad \pm2 \quad \pm3 \quad \pm4 \quad \pm6 \quad \pm8 \quad \pm12 \quad \pm24$

$x\neq1 \quad 1-9+26-24\neq0$

$x\neq-1 \quad -1-9-26-24\neq0$

$x=2 \quad 8-36+52-24=0$

$60-60=0$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ НЭ 92-10

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{array}{r|l} x^3-9x^2+26x-24 & x-2 \\ -\ x^3-2x^2 & \overline{x^2-7x+12} \\ \hline -7x^2+26x & \\ -\ -7x^2+14x & \\ \hline 12x-24 & \\ -\ 12x-24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$x^2-7x+12=0$

$D=49-48=1$

$x=\frac{7\pm1}{2}$

(+)

$x_1=4 \quad x_2=3$

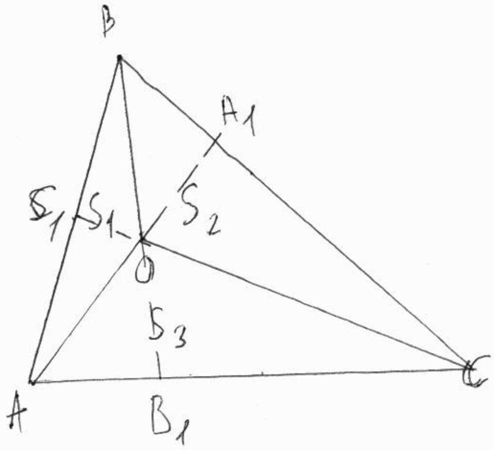
Ответ: 1; 2; 3; 4

---

4. Дано: $S_1:S_2:S_3=1:2:3$

Н-ти: О

Решение



(+)

BO - общая ⇒

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{AB_1}{B_1C}$

$\frac{1}{2}=\frac{AB_1}{B_1C}$

$B_1C=2AB_1$

AO - общая $\Rightarrow \frac{S_1}{S_3}=\frac{BA_1}{A_1C}$

$\frac{1}{3}=\frac{BA_1}{A_1C} \Rightarrow A_1C=3BA_1$

CO - общая $\Rightarrow \frac{S_2}{S_3}=\frac{C_1B}{C_1A}$ ~~2~~

$\frac{2}{3}=\frac{C_1B}{C_1A} \Rightarrow 3C_1B=2C_1A$

Таким образом, точка O - пересечение отрезков BB_1, AA_1 и CC_1.

$AB_1 = \frac{1}{3} AC$

$AC_1 = \frac{1}{4} BC$

$C_1B = \frac{2}{5} AB$.

5. x^2+px+q

$D = 100 = p^2-4q$

$(p = -x_1 - x_2 \; ; q = x_1 x_2$

$x = \frac{-p \pm 10}{2}$

$x_1 = \frac{x_1+x_2 \mp 10}{2}$

$x_1 = x_2 + 10$

$(-x_1 - x_2)^2 - 4(x_1 \cdot x_2) = 100$

$(x_1+x_2)^2 - 4(x_1 \cdot x_2) = 100$

$(2x_2+10)^2 - 4x_2(x_2+10) = 100$

$4x_2^2 + 40x_2 + 100 - 4x_2^2 - 40x_2)$

$x^2+px+q+(x-10)^2+p(x-10)+q=0$

$x^2+px+q+x^2-20x+100+px-10p+q=0$

$2x^2+2\cdot x(p-20)+(2q-10p+100)=0$

$(D = 4p^2-80p+400)$

$D_1 = p^2 - \cancel{20p} + 100 \cancel{-4q} \cancel{+10p} - 200 =$

$= 100 - 100 = 0 \Rightarrow 1$ корень

Ответ: 1 корень

+

---

1. а) $A = x + \frac{1}{x}$

$B_2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

$A^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$

$A^2 = B_2 + 2 \Rightarrow B_2 = A^2 - 2$

б) $B_3 = x^3 + \frac{1}{x^3}$

$A^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + 3\cdot\frac{1}{x} = B_3 + 3A$

$B_3 = A^3 - 3A$

в) $B_4 = x^4 + \frac{1}{x^4}$

$A^4 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4x^2 + \frac{4}{x^2} + 6 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4(A^2-2) + 6 =$

$= B_4 + 4A^2 - 8 + 6 = B_4 + 4A^2 - 2$

$B_4 = A^4 - 4A^2 + 2$

г) $B_8 = x^8 + \frac{1}{x^8}$

Найдем B_6

$(A^6 = (B_3+3A)^2 = B_3^2 + 3AB_3 + 9A^2 = (A^3-3A)^2 + 3A(A^3-3A) + 9A^2 =$

$= A^6 - 6A^4)$

$B_6 = x^6 + \frac{1}{x^6}$

$A^6 = (x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x})(x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x + \frac{3}{x}) =$

$= x^6 + 1 + 3x^4 + 3x^2 + 1 + \frac{1}{x^6} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4} + 3x^4 + \frac{3}{x^2} + 9x^2 + 9 +$

$+ 3x^2 + \frac{3}{x^4} + 9 + \frac{9}{x^2} = B_6 + 6B_4 + 15B_2 + 20 =$

$= B_6 + 6A^4 - 24A^2 + 12 + 15A^2 - 30 + 20 =$

$= B_6 + 6A^4 - 9A^2 + 2$

$B_6 = A^6 - 6A^4 + 9A^2 - 2$

Найдем B_8

$A^8 = B_8 + 8(A^6 - 6A^4 + 9A^2 - 2) + 28A^4 - 28\cdot 4A^2 + 56 + 56A^2 -$

$-112 + 80 = B_8 + 8A^6 - 48A^4 + 72A^2 - 16 + 28A^4 - 112A^2 +$

$+ 56 + 56A^2 - 32 = B_8 + 8A_6 - 20A_4 + 16A^2 + 8$

$B_8 = A^8 - 8A^6 + 20A^4 - 16A^2 + 8$

b) $A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2 = A^8 - A^6 + 20A^4 - 16A^2$

$A^2 - 2 = A^4 - 4A^2 + 2$

$A^4 - 5A^2 - 4 = 0$

$A_1^2 = 4 \quad A_2^2 = 1$

$A_1 = 2 \quad A_2 = -2 \quad A_3 = 1 \quad A_4 = -1$

$A_1 = 2 \quad 2 \neq 256 - 64 + 320 - 64 - 8$

$A_2 = -2 \quad 2 \neq 256 - 64 + 320 - 64 - 8$

$A_3 = 1 \quad 1 \neq 1 - 1 + 20 - 16 - 8$

$A_4 = -1 \quad 1 \neq 1 - 1 + 20 - 16 - 8$

+

c) ?

Ответ: при никаких

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

ZP 62-70

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ЯРАБАЕВА

ИМЯ АЛЕКСАНДРА

ОТЧЕСТВО Павловна

Дата рождения 09. 06. 1999

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$S = \lg(10^4 \cdot tg\,2017^\circ) + \lg(10^5 \cdot tg\,2015^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \cdot tg\,2033^\circ)$

1) $\lg(10^4 \cdot tg\,2017^\circ) = \lg 10^4 + \lg(tg\,2017^\circ) =$

$= 4 + \lg(tg\,217^\circ) = 4 + \lg(tg\,37^\circ)$

2) Вынося все $\lg(10^n) = n$, получим

$4+5+6+ \ldots + 19+20 = 204$

3) $\lg(tg\,37^\circ) + \lg(tg\,38^\circ) + \ldots + \lg(tg\,53^\circ) =$ $+ \lg(tg\,45^\circ)$ *

$= \lg(tg\,37^\circ \cdot tg\,53^\circ) + \lg(tg\,38^\circ \cdot tg\,52^\circ) + \ldots +$

4) * $tg\,37^\circ \cdot tg\,53^\circ = \dfrac{\sin 37^\circ \cdot \sin 53^\circ}{\cos 37^\circ \cdot \cos 53^\circ} = \dfrac{\cos 53^\circ \cdot \cos 37^\circ}{\cos 37^\circ \cdot \cos 53^\circ} =$

$= 1$

Тогда $\lg(tg\,37^\circ \cdot tg\,53^\circ) = 0$, значит вся сумма в пункте 3) равна 0.

Значит имеем $S = 204$.

Ответ: $S = \underline{204}$ +

№2.

В первой смеси $- x$ м^3

во 2ой смеси $- (c - x \cdot 2)$ м^3

в 3ей см. : $c - 2(c-2x) = c - 2c + 4x = 4x - c$

в 4ой см. : $c - 2(4x - c) = c - 8x + 2c = 3c - 8x$

Пусть в 1ом и во 4ом месяце запасы газа оказались равны, тогда:

$$x = 3c - 8x$$

$$9x = 3c \Rightarrow c = 3x,$$

пусть во 2ом и в 4ом запасы оказались равны, тогда $c - 2x = 3c - 8x$

$$6x = 2c \Rightarrow c = 3x$$

Составляя другие всевозможные равенства замечаем, что $c = 3x$ в любом случае, если запасы оказались равны.

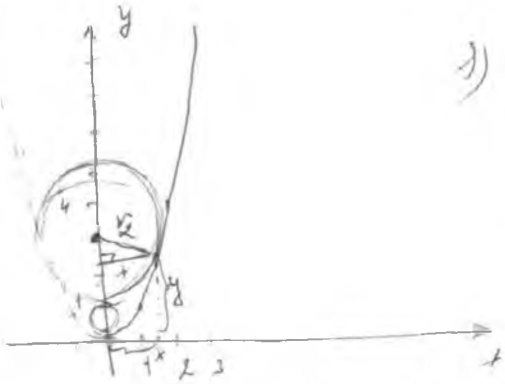
Тогда, если в 1ом месяце будет x м³, то во 2ом, в 3ем и в 4ом запасы будут неизменными и так же равняться x м³, что противоречит условию, значит запас газа не может оказаться одинаковым в какие-то два различных месяца, ~~но может оставаться~~ если во всех остальных месяцах его запасы отличаются от этих двух равных месяцах.

Но запас может оставаться неизменным в течении всего времени, если $c = 3x$, где x м³ запас в первом месяце.

Ответ: не может, но может оставаться неизменным в течение всего времени, если $c = 3x$

(+)

№3



Решение:

1) Для первой окружности $n = 1$ (так по порядку)

$r_1 = n - \frac{1}{2}$. ($\frac{d}{2} = \frac{1}{2} = r$)

2) Найдем радиус второй окружности ~~...~~ т.к. парабола симметрична относ. Oy, то $x=0$, чтобы окружность могла коснуться обеих ветвей

3) Составим ур-е $O_2 S_2$ $x_4 = 0$, ~~$y_4 = ...$~~

$y_4 = 1 + r_2$

ур-е $\begin{cases} x^2 + (y - (1+r_2))^2 = r_2^2 \\ y = x^2 \end{cases}$

Найдем точку касания ($D=0$)

$x^2 + (x^2 - (1+r_2))^2 = r_2^2$

$x^2 + x^4 - 2x^2(1+r_2) + r_2^2 = r_2^2 - (1+r_2)^2$

$x^4 - x^2(1+2r_2) + 1 + 2r = 0$

$D = (1+2r_2)^2 - 4(2r_2+1) = 4r_2^2 - 4r_2 - 3 = 0$

$r_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ r_2 = n - \frac{1}{2} = r_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$

4) Составив аналогичное уравнение для S_3:

$x^2 + (x^2 - (r_3 + 4))^2 = r_3^2$, найдем, что

$r_3 = \frac{5}{2} \to \begin{cases} n = 3 \\ r_3 = n - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$

Находим закономерность, что $r_n = n - \frac{1}{2}$

Тогда для $n = 2017$, $r_n = 2017 - \frac{1}{2} = 2016,5$

Ответ: $r_{2017} = 2016,5$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (нер-во Коши)

$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$ (+)

$\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ac}$

$\Rightarrow a+b+c \geq (\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac})^2$ (возведем в кв)

$ab+bc+ac+2\sqrt{ab^2c}+2\sqrt{a^2bc}+2\sqrt{abc^2} = (a+b+c)^2$

$2\sqrt{abc}(a+b+c) = 6abc + ab+bc+ac$

$2\sqrt{abc}(a+b+c) = 6abc + a+b+c$

$(2\sqrt{abc}-1)(a+b+c) = 6abc$

$\frac{2abc-1}{abc} \cdot (a+b+c) = 6$

$a+b+c = \frac{6abc}{2\sqrt{abc}-1}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРЦО	GЯ 97-21
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Арабаева

ИМЯ Юлия

ОТЧЕСТВО Евгеньевна

Дата рождения 28.06.1999 **Класс:** 11

Предмет математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GЯ 97 -21

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1.

$S = \lg(10^4 \operatorname{tg} 2017^\circ) + \lg(10^5 \operatorname{tg} 2018^\circ) + \ldots + \lg(10^{20} \operatorname{tg} 2033^\circ) =$

$= \lg((10^4 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \ldots \cdot 10^{20}) \cdot (\operatorname{tg} 2017^\circ \cdot \operatorname{tg} 2018^\circ \cdot \operatorname{tg} 2019^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 2033^\circ))$

I $10^4 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot \ldots \cdot 10^{20} = 10^{12 \cdot 17}$

II $\operatorname{tg}(2017) = \operatorname{tg}(180 \cdot 11 + 37) = \operatorname{tg} 37$

$\operatorname{tg}(2018) = \operatorname{tg}(180 \cdot 11 + 38) = \operatorname{tg} 38$

...

$\operatorname{tg}(2033) = \operatorname{tg}(180 \cdot 11 + 53) = \operatorname{tg} 53.$

$\cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90 - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$

Заметим, что $90 - 37 = 53^\circ$, откуда $\operatorname{tg} 37^\circ \cdot \operatorname{tg} 53 = 1.$
Аналогично $\operatorname{tg} 38 \operatorname{tg} 52^\circ = 1$, и т.д. до $\operatorname{tg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ = 1.$
А $\operatorname{tg} 45^\circ = 1.$ Значит, произведение ~~тг~~ тангенсов данных углов ($\operatorname{tg} 37^\circ \cdot \operatorname{tg} 38^\circ \cdot \operatorname{tg} 39 \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 53^\circ$) равно 1.

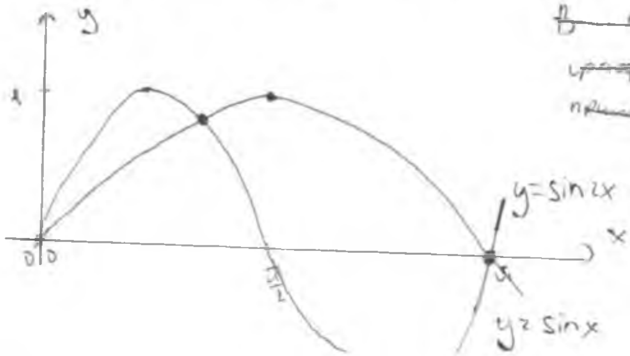
III $S = \log_{10}(10^{12 \cdot 17} \cdot 1) = 12 \cdot 17 = 204$

Ответ: 204 млн. рублей +

5. 1) $\sin nx = \sin x$ (+)

$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \sin nx \end{cases}$ $S(n)$ – будет равно ~~числу~~ кол-ву решений этой системы, где $x \in [0; \pi]$.

Заметим, что графики $y = \sin nx$, где $n \in N$, будут проходить через т. $(0;0)$ и $(\pi;0)$



~~В промежутке $x \in [0; \pi]$ при графики функ. будут выше оси промежутка~~

При $x \in [0; \pi]$ $y = \sin x$
$y \geq 0.$
Т.е значение функции всегда неотрицательно.

$y = \sin nx$, $n \neq 1$ и $n \in N$.

Значение функции ~~на промежутке~~ где $x \in [0, \pi]$, может принимать как положительные, так и неположительные значения.

Нам нужно посчитать количество непрерывных промежутков когда $y > 0$, т.к. именно в этих промежутках и ~~будет только~~ будет пересечение с графиком $y = \sin x$.

~~Если~~ Если n – четное, то кол-во этих промежутков будет равно $n/2$

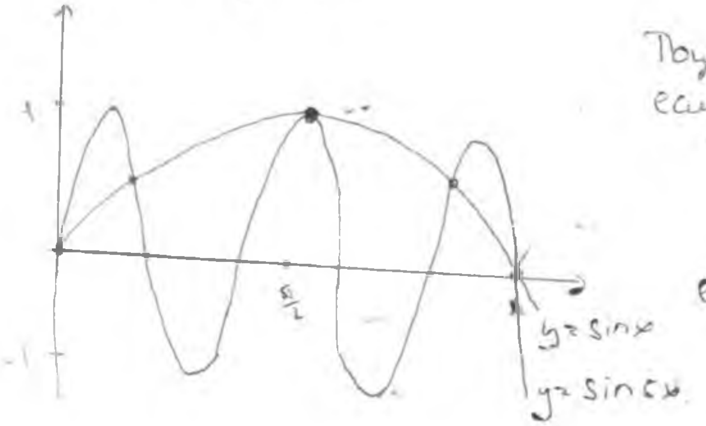
Если n – нечетное, то кол-во этих промежутков равно $(n+1)/2$

В этих промежутках данные графики будут иметь всегда 2 пересечения, кроме случае, когда $x = \frac{\pi}{2}$ и $\sin n \cdot x = \sin x$.

В этом случае пересечение будет только одно.

$\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$n = 1 + 4k, k \in N$



Тогда, получим

если $n = 4k+1$, $k \in N$. ~~кол-во решений~~ $S(n) = \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot 2 - 1 = \left(\frac{4k+2}{2}\right) \cdot 2 - 1 = 4k+1 = \underline{n}$

если $n \neq 4k+1$.

I. если n – нечетное (т.е. не кратно 2) $S(n) = n+1$.

II если $n \vdots 2$

$S(n) = \frac{n}{2} \cdot 2 + 1 = n+1$

в т. $(\pi, 0)$ так же будет пересечение.

Получим $S(n) = \left[\begin{array}{l} n, \; n = 4k+1, k \in N \\ n+1, \; n \neq 4k+1, k \in N \end{array}\right.$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ GЯ 97-21

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) $S(n) = 2017$

если $n = 4k+1$ | если $n \neq 4k+1$

$n = 4k+1 = 2017$ | $n+1 = 2017$

$2016 = 4k$ | $n = 2016$.

$2016 \vdots 4 \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$.

$n = 2017$

Значит значение $S(n) = 2017$ принимает при $n = 2016$ и $n = 2017$.

Ответ: 1) $S(n) = \begin{cases} n, & n = 4k+1 \\ n+1, & n \neq 4k+1 \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

2) два раза.

2. Ответ: да, $x = \frac{c}{3}$.

Решение:

1 Обозначим деньги за S_i, где $S_1 = x$

$S_2 = c - 2x$

$S_3 = c - 2(c-2x) = -c+4x$

$S_4 = 3c - 8x$

$S_5 = 16x - 5c$

$S_6 = 11c - 32x$

и т.д.

Коэффициент перед c (b_i) можно вычислить по формуле $b_i = 1 - 2b_{i-1}$

А перед x (a_i) $a_i = -2 \cdot a_{i-1}$

2 Предположим, что такое возможно. тогда

$$1 - 2b_{i-1} - 2a_{i-1} = 1 - 2b_{j-1} - 2a_{j-1}$$

$$b_{i-1} + a_{i-1} = b_{j-1} + a_{j-1}$$

$b_{i-1} = 1 - 2b_{i-2}$

$a_{i-1} = 1 - 2b_{i-2}$

$b_{j-1} = 1 - 2b_{j-2}$

$a_{j-1} = -2a_{j-1}$

и так далее. В итоге получим что если равны деньги в 2-ух месяцах они равны во всех месяцах. $\Rightarrow$ $b_{i-2} + a_{i-2} = b_{j-2} + a_{j-2}$.

Значит, $c - 2x = x$

$x = \frac{c}{3}$

4. Ответ: $\frac{3}{2}$

$a^2 + b^2 + c^2 = 6abc$ (+)

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 6abc + 2ab + 2bc + 2ca = 2(ab(c+1) + bc(a+1) + ca(b+1))$

если $a = b = c$ мы получим наименьшее значение

$a = \frac{1}{2}$

$a+b+c = \frac{3}{2}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ	ДУ 63-56	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ ЯСАФОВ

ИМЯ АЛЕКСАНДР

ОТЧЕСТВО ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата рождения 06.09.2001 **Класс:** 9

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 11.02.2017
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Ясафов

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 а) Выразим B_2 через A $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=x^2+2+\frac{1}{x^2}-2=x^2+\frac{1}{x^2}=A^2-2$

Выразим B_3 через A $=x^3+\frac{1}{x^3}=B_2\cdot A-A=(A^2-2)A-A$

Выразим B_4 через A $B_4=B_2^2-2=(A^2-2)^2-2$

Выразим B_8 через A $B_8=B_4^2-2=((A^2-2)^2-2)^2-2$

в) $B_2=B_4=B_8$

$\Downarrow$

$B_2=B_4$ $\quad B_4=B_2^2-2$ $\Rightarrow$ $B_2^2-2=B_2$

$B_2^2-B_2-2=0$

$D=1+4\cdot2=9=3^2$

$B_2=\frac{1\pm3}{2}$ $\quad B_2=2$ $\quad B_2=-1$

Если $B_2=B_4$, то и $B_8=B_2=B_4$ (т.к $B_4=B_2^2-2$ и $B_8=B_4^2-2$)

$\Downarrow$

Равенство верно, когда $B_2=-1$ или 2. Найдём из этого A и x.

1-й случай, когда $B_2=-1$ $\quad B_2=A^2-2=-1$

$A^2=1$ $\quad A=x+\frac{1}{x}$

$\underline{A=\pm1}$

$x+\frac{1}{x}=1$ $\quad$ или $x+\frac{1}{x}=-1$

$x^2-x+1=0$ $\quad x^2+x+1=0$

$D=1-4=-3$ $\varnothing$ $\quad 1-4=-3$ $\varnothing$

Значит такого x, чтобы $B_2=-1$ не существует $\Rightarrow A\neq\pm1$

2-й, когда $B_2=2$

$B_2=2=A^2-2$

$A^2=4$

$A=\pm2$ $\quad A=x+\frac{1}{x}$

$x+\frac{1}{x}=2$ или $x+\frac{1}{x}=-2$

$x^2-2x+1=0$ $\quad x^2+2x+1=0$

$D=4-1\cdot4=0$ $\quad D=4-4=0$

$x=\frac{2\pm0}{2}$ $\quad x=\frac{-2\pm0}{2}$

$\underline{x=1}$ $\quad \underline{x=-1}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

с) $B_2 = A^2 - 2 = x^2 - \frac{1}{x^2}$ чтобы сократить кол-во операций необходимо подобрать такой x, чтобы не нужно было считать ~~квадрат~~ квадрат.

Это числа 0; 1; -1, но x не может быть 0, т.к тогда B_2 - не существует, т.к на ноль нельзя.

Посчитаем C при x=1 $C = \left(\left(x^{2017} + \frac{1}{x^{2017}}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017} = \left((1+1)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017} = 1^{2017} = 1$

$1^m = 1$

$-1^{2n+1} = -1$

$-1^{2k} = 1$

C при x = -1

$C = \left(\left(-1^{2017} + \frac{1}{-1^{2017}}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017} = \left((-1-1)\cdot\frac{1}{2}\right)^{2017} = -1^{2017} = -1$

~~Ответ: а)~~ Ответ: a) $B_2 = A^2 - 2$

$B_3 = (A^2-2)\cdot A - A$

$B_4 = (A^2-2)^2 - 2$

$B_8 = ((A^2-2)^2-2)^2 - 2$

в) $A = \pm 2$

$x = \pm 1$

с) $x = 1$ $x = -1$

$C_1 = 1$

$C_{-1} = -1$

+

№2 Пусть в каком-то месяце было x газа; тогда в следующий $6-x$, а в третий $6-(6-x) = x$. Это значит, что кол-во газа чередуется $x \to (6-x) \to x \to (6-x)$...

Т.к, когда запас одного месяца = квадрату запаса другого месяца

1) $x^2 = x \Rightarrow x = 1$ (~~или~~ ~~x~~ $x=0$, но x не может быть 0, т.к по условию кол-во газа положительно.

2) $(6-x)^2 = x$

$36 - 12x + x^2 = x$

$x^2 - 11x + 36 = 0$

$D = 121 - 4\cdot 36 = 121 - 144 = -23$ $\varnothing$ такого быть не может

3) $x^2 = 6 - x$

$x^2 + x - 6 = 0$

$D = 1 + 4\cdot 6 = 25 = 5^2$

$x = \frac{-1 \pm 5}{2}$ $x = -3$ $x = 2$ (x не может равняться -3, т.к он всегда больше 0 по условию.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Больше вариантов нет.

Ответ: 1) может када изначально было 2 или и n^3 но это может случиться ~~только через месяц~~ на следующий месяц.

2) 2) может когда изначально было 1 или 5 и n^3, но это возможно только через месяц. Н-р ($1 \to 5 \to 1$)

(∓) не всех найдены

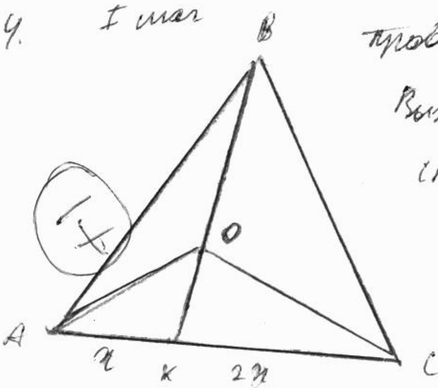
№3 Домножим выражение на 24 и упростим, приведём подобные получим выражение $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$ – это многочлен 4 степени, и он не может иметь больше 4 корней. Эти 4 корня можно подобрать подбором – это 1, 2, 3, 4. Т.к больше корней у выражения быть не может, то это и есть все его корни.

(+)

Где действия?

Ответ: 1, 2, 3, 4.

4. I шаг



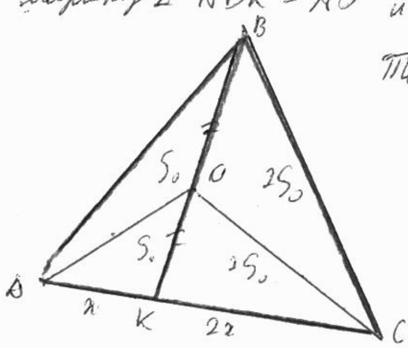
проведём прямую BK так, чтобы $\frac{AK}{KC}=\frac{1}{2}$

Выходит площади $\triangle ABK$ и $\triangle BKC$ относятся как $\frac{1}{2}$ (т.к у них общая высота, а основания отлич в 2 раза $S_\triangle=\frac{a\cdot h}{2}$.)

Причем точка O лежит на прямой BK (т.к $S_\triangle AOK=\frac{1}{2}S_\triangle KOC$ (т.к у них общая высота, а основания отличаются в 2 раза) $\Rightarrow S_\triangle AOB=\frac{1}{2}S_\triangle BOC$

(т.к $S_\triangle AOB=\frac{1}{2}S_\triangle OCB$; $S_\triangle AOK=\frac{1}{2}S_\triangle KOC$) $\Rightarrow S_\triangle AOB=\frac{1}{2}S_\triangle AOB-\frac{1}{2}S_\triangle OCB=\frac{1}{2}(S_\triangle KBC-S_\triangle OKC)=\frac{1}{2}S_\triangle BOC$.

II шаг определим точно где на отрезке BK находится O. Для этого проведем медиану $\triangle ABK$ – AO и медиану $\triangle KBC$ – CO.



Теперь $S_\triangle AOB=S_\triangle AOK$ (т.к общая высота и равные основания)

и $S_\triangle BOS=S_\triangle OKC$ (т.к общая высота и равные основания

Т.к $S_\triangle AOB=\frac{1}{2}S_\triangle BOC$, то можно обозначить $S_\triangle AOB$ за S_0, тогда $S_\triangle AOK=S_0$; $\triangle S_\triangle OCB=S_\triangle OCK=2S_0$.

$S_\triangle AOB=S_0$; $S_\triangle OBC=2S_0$; $S_\triangle AOC=3S_0$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17 091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ДУ 63-56

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$S_\Delta AOB : S_\Delta BOC : S_\Delta AOC =$ ~~1:2:3~~ $1S_0 : 2S_0 : 3S_0 = 1:2:3$, что и требовалось найти.

б) $f(x) = x^2 + px + q$

$D_1 = p^2 - 4q = 100$ (по условию)

Найдём дискриминант $f(x) + f(x-10) = 0 = x^2 + px + q + (x-10)^2 + p(x-10) + q =$

$= x^2 + px + q + x^2 - 20x + 100 + px - 10p + q = 2x^2 + x(2p - 20) + (2q - 10p + 100)$

$D_2 = (2p-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2q - 10p + 100) = 4p^2 - 80p + 400 - 16q + 80p - 800 =$

$= 4p^2 - 16q - 400.$ $\quad 4p^2 - 16q = 4(p^2 - 4q) = 4D_1 = 400$

$\Downarrow$

$D_2 = 400 - 400 = 0 \Rightarrow$ Уравнение $f(x) + f(x-10)$ имеет 1 корень (т.к. дискриминант равен 0.)

Ответ: 1 корень.

+