ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКУ ПРЕДМЕТОВ

(ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА)

ВАРИАНТ 7097 для 9 класса

Однажды призрак замка Кентервиль уронил свою голову, которая (как выяснили эниологи) имеет массу $m = 0.5\ кг$. Будем считать, что падение произошло без начальной скорости с высоты $H = 2\ м$. При каждом ударе о пол в тепло переходило $Q = 2\ Дж$ ее полной энергии. Когда же полная энергия головы стала меньше Q, то при очередном ударе она остановилась. Определите время, через которое движение головы прекратилось.

Решение

Обозначим через v_k скорость после *k*-го отскока.

1. Рассмотрим сначала, что происходит при очередном ударе о поверхность. Если бы удар был абсолютно упругим, то при ударе скорость сменила бы направление на противоположное и сохранила бы свою величину. При неупругом ударе энергия уменьшится, следовательно скорость также уменьшится.

Пусть $v_{k+1} = c_k v_k$. Если скорость изменяется в c_k раз, то кинетическая энергия изменяется как

$$E_{k+1} = \frac{m v_{k+1}^2}{2} = \frac{m\,(c_k v_k)^2}{2} = c_k^2 E_k .$$

Найдем отношение энергии после и до удара. Если до удара энергия была равна E_{k-1}, то после, согласно условию, она составит $E_k = E_{k-1} - Q$. Значит, коэффициент уменьшения энергии равен

$$\alpha_k = \frac{E_k}{E_{k-1}} = 1 - \frac{Q}{E_{k-1}},$$

если $E_{k-1} \ge Q$. Если же $E_{k-1} < Q$, то вся энергия уйдет в тепло и движение прекратится. Это условие будет ниже условием прекращения расчетов.

Так как при ударе полная энергия равна кинетической, то коэффициент уменьшения скорости будет равен $c_k = \sqrt{\alpha_k} = \sqrt{1 - \dfrac{Q}{E_{k-1}}}$,

2. Теперь рассмотрим движение между двумя последовательными ударами о поверхность. Из уравнения $0 = v_k - g\tau_k$ найдем время t_k подъема на максимальную высоту

$$\tau_k = \frac{v_k}{g}.$$

Это время равно половине полного времени движения между отскоками.

Заметим, что следующий скачок будет описываться аналогичными формулами, а именно время подъема будет равно

$$\tau_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{g}.$$

Пользуясь пропорциональностью скорости до и после удара, получаем отсюда

$$\tau_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{g} = \frac{c_k v_k}{g} = c_k \tau_k.$$

Таким образом, нет необходимости рассчитывать время каждый раз заново, а достаточно умножать предыдущее на коэффициент. Поскольку время скачка $t_k = 2\tau_k$, то для него также справедлива полученная выше формула $t_{k+1} = c_k t_k$.

3. Перейдем к началу движения. Найдем скорость v_0, с которой голова первый раз ударится о поверхность. Ее несложно найти, например из закона сохранения полной энергии $mgH = \frac{m v_0^2}{2}$. Получаем

$$v_0 = \sqrt{2gH}.$$

Время падения перед первым скачком t_0 найдем из уравнения вертикального движения $H = \frac{g t_0^2}{2}$. Получаем

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Важно отметить, что первый скачок представляет собой только снижение, в то время как все остальные – сначала подъем, а затем снижение (т.е. первый скачок есть в некотором смысле «половина» полного скачка). Поэтому при расчете времени t_1 по рекуррентным формулам, выведенным выше, его необходимо удвоить:

$$t_1 = 2c_0 t_0.$$

Теперь можно писать

алгоритм

5. Сначала сформулируем алгоритм на естественном языке.

ДАНО: высота *H*, ускорение свободного падения *g*.
НАЙТИ: время движения *T*.
НАЧАЛО__АЛГОРИТМА

Найти время первого падения $t_0 = \sqrt{\dfrac{2H}{g}}$.

Присвоить эти значения переменным *T* и *S*,

в которых будут накапливаться суммарное время и расстояние.

Найти скорость перед первым ударом $v_0 = \sqrt{2gH}$.

Найти энергию перед первым ударом $E_0 = \dfrac{m v_0^2}{2}$.

Инициализировать счетчик $k = 0$.

ПОКА ($E_k > 2$)

Увеличить счетчик $k = k + 1$.

Найти коэффициент уменьшения скорости $c = \sqrt{1 - \dfrac{Q}{E_{k-1}}}$.

Пересчитать скорость и время следующего скачка: $v_k = c \cdot v_{k-1}$, $t_k = c \cdot t_{k-1}$,

ЕСЛИ ($k = 1$) ТО удвоить величины: $t_k = 2 \cdot t_k$, $d_k = 2 \cdot d_k$.

Пересчитать энергию перед следующим ударом $E_k = c^2 \cdot E_{k-1}$

Увеличить время движения $T = T + t_k$.

КОНЕЦ_ПОКА

КОНЕЦ__АЛГОРИТМА

6. Теперь приведем алгоритм на псевдокоде, приближенном к некоторым современным алгоритмическим языкам.

Предварительно заметим, что индекс k (номер удара) можно не использовать у скоростей, времен и т.д. С точки зрения реализации алгоритма это означает, что можно обойтись простыми переменными для хранения только текущего значения данных параметров, а не массивами. (Фактически мы уже убрали индекс в коэффициенте c).

INPUT *H, g*

OUTPUT *T, S*

BEGIN

$$v := \sqrt{2gH}\,, \quad t := \sqrt{\frac{2H}{g}}\,, \quad T := t\,, \quad E := \frac{mv^2}{2} \quad k := 0$$

WHILE $E > 2$

BEGIN

$$k := k + 1\,, \quad c := \sqrt{1 - \frac{Q}{E}}\,,$$

$$v = c \cdot v\,, \quad t = c \cdot t\,,$$

IF $k = 1$ THEN $t = 2 \cdot t$ ENDIF

$$E = c^2 \cdot E\,, \quad T = T + t$$

END

RETURN T

END

7. Приведем еще один вариант алгоритма (на том же псевдокоде) с другой организацией расчетов. В нем характеристики каждого скачка вычисляются не по рекуррентным соотношениям, а по непосредственным формулам.

INPUT *H, g,*

OUTPUT *T*

BEGIN

$$v := \sqrt{2gH}\,, \quad t := \sqrt{\frac{2H}{g}}\,, \quad T := t\,, \quad E := \frac{mv^2}{2}\,, \quad k := 0$$

WHILE $E > 2$

BEGIN

$k := k+1$, $\quad c := \sqrt{1-\dfrac{Q}{E}}$, $\quad v = c \cdot v$,

IF $k=1$ THEN $t = 2 \cdot t$ ENDIF

$T = T + \dfrac{2u}{g}$, $\quad E := \dfrac{mv^2}{2}$

END

RETURN T

END

В таком варианте алгоритма нет необходимости выводить рекуррентные соотношения (описанные в п. 2), что упрощает подготовительную часть. Однако общий объем вычислительной работы при выполнении алгоритма получается больше.

8. Напоследок заметим, что если вынести первый проход (при $k=1$) из цикла и описать его отдельно перед началом цикла, то можно не вводить счетчик $k=1$, т.к. более он нигде не используется. Кроме того, экономится одна операция сравнения на каждом повторе цикла.