Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап. Очная форма.

# ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
# ВАРИАНТ 8111

1. Сержант скомандовал шеренге стоящих перед ним новобранцев: "Нале-ВО!", после чего испуганные солдаты повернулись кто налево, а кто направо. Те, кто оказались лицом друг к другу, испугались еще больше и ровно через секунду повернулись кругом. То же повторилось через секунду еще раз в тех парах, что снова оказались лицом к лицу с соседом, и так далее. Верно ли, что при любом числе солдат и любом их положении после первого поворота по команде сержанта повороты прекратятся через несколько секунд?

2. Ландшафтному дизайнеру поручили спланировать парк на участке, который имеет форму треугольника ABC с углом B равным 120о. Дизайнер начертил на плане парка три аллеи AN, BD и CM, совпадающие с биссектрисами углов треугольника. Затем он начертил еще две прямых аллеи DM и DN и задался вопросом: а под каким углом по отношению друг к другу располагаются эти аллеи? Под рукой не было измерительного инструмента. Помогите дизайнеру найти величину угла NDM.

3. Женя утверждает, что только одно натуральное число может быть корнем уравнения $ax^2+bx=2011$, где $a$ и $b$ - произвольные натуральные заданные числа. Саша полагает, что уравнение $ax^2+bx=2013$ имеет большее количество решений в натуральных числах, так как 2013, в отличие от 2011, не является простым числом. Кто прав? Найдите все натуральные корни одного и другого уравнений и условия на натуральные числа $a$ и $b$, при которых эти корни существуют.

4. Потребители электроэнергии находятся в точках A(0, 3, 4) и B(3, 0, 2). Электрокабель проходит вдоль оси OZ. Как надо выбрать точку M на оси OZ, чтобы сумма длин прямолинейных проводников MA и MB была наименьшей?

5. Найдите сумму всех корней уравнения

$\left(f(x)-2\right)\left(f(x)-4\right)\cdots\left(f(x)-2012\right)=1$, где $f(x)=\sqrt{x^2-x}$.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 9111

1. Числовая последовательность, т. е. бесконечный ряд чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, задана условиями $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n \geq 1$. Найдите наибольший общий делитель ее членов с номерами 2012 и 2013.

2. Дана функция $f(x) = \left( \dfrac{1}{\sqrt{x-b}} - \dfrac{2\sqrt{b}}{x} \right)\left( \dfrac{1}{\sqrt{x-b}} + \dfrac{2\sqrt{b}}{x} \right)$.

Может ли она принимать нулевые и отрицательные значения? Существуют ли три различных числа $x_1$, $x_2$, $x_3$ такие, что $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$? Если такие $x_1$, $x_2$, $x_3$ существуют, то укажите их возможные значения и выясните, единственна ли тройка ($x_1$, $x_2$, $x_3$) .

3. Треугольник со сторонами длины 3, 4, 5 называют египетским. В древнем Египте с его помощью получали прямой угол, необходимый в строительстве, земледелии и ремеслах. Веревку делили на 12 равных частей и связывали ее концы, три человека брались за нее в точках, разделяющих куски длиной 3, 4 и 5 частей, и натягивали до предела. Так получался треугольник. Найдите величины его острых углов. Опишите последовательность действий, совершая которые египтяне могли, используя веревку неограниченной длины и два колышка, получать углы величиной $arctg(n)$, $arctg\left(\dfrac{m}{n}\right)$, $arctg\left(\sqrt{n}\right)$, $arctg\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ (в современных обозначениях), где $m$ и $n$ – произвольные заданные натуральные числа.

4. Среди участников турнира по теннису женщин было в 1,5 раза больше, чем мужчин. Каждые два участника играли ровно одну партию, причем проходили и матчи между представителями разных полов, ничьих не было. Мужчины одержали побед в 2 раза больше, чем женщины. Сколько мужчин и сколько женщин участвовало в таком турнире?

5. Найдите число различных корней уравнения $\sin x = 0{,}01x$.