Материалы заданий заключительного этапа
Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету
«математика»
в 2012/2013 учебном году

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к усвоению образовательных программ технических ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления, умеющих математически "смоделировать" реальные ситуации из различных предметных областей и применить к ним наиболее подходящие математические методы.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на полное и безупречное решение. Они охватывают все разделы школьной программы, но носят, в большинстве, комплексный характер, позволяющий варьировать оценки в зависимости от проявленных в решении творческих подходов и продемонстрированных технических навыков. Участники должны самостоятельно определить разделы и теоретические факты программы, применимые в каждой задаче, разбить задачу на подзадачи, грамотно выполнить решение каждой подзадачи, синтезировать решение всей задачи из решений отдельных подзадач.

Успешное выполнение олимпиадной работы не требует знаний, выходящих за пределы школьной программы, но, как видно из результатов олимпиады, доступно не каждому школьнику, поскольку требует творческого подхода, логического мышления, умения увидеть и составить правильный и оптимальный план решения, четкого и технически грамотного выполнения каждой части решения, отбора допустимых решений из возможного их множества.

Умение справляться с такими заданиями приходит к участникам с опытом, который вырабатывается на тренировочном и отборочном этапах Олимпиады.

Задача.

Сержант скомандовал шеренге стоящих перед ним новобранцев: "Нале-ВО!", после чего испуганные солдаты повернулись кто налево, а кто направо. Те, что оказались лицом друг к другу, испугались еще больше и ровно через секунду повернулись кругом. То же повторилось через секунду еще раз в тех парах, что снова оказались лицом к лицу с соседом, и так далее. Верно ли, что при любом числе солдат и любом их положении после поворота по команде сержанта, повороты прекратятся через несколько секунд?

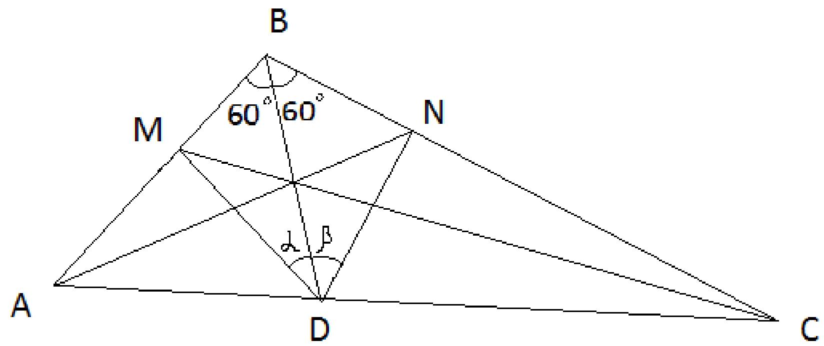
Решение. Пусть каждый повернувшийся по команде правильно, то есть налево, отмечен нулем, а каждый повернувшийся направо - единицей. Рассмотрим число, составленное из этих нулей и единиц в порядке строя солдат. Нетрудно показать, что после каждого поворота через очередную секунду это число будет убывать. Следовательно, через конечное число секунд (которое не больше, чем исходное число, записанное в двоичной системе счисления) оно обратится в 0.

Ответ: Верно.

Задача 2.

Ландшафтному дизайнеру поручили спланировать парк на участке, который имеет форму треугольника *ABC* с углом *B* равным 120^o. Дизайнер начертил на плане парка три аллеи *AN*, *BD* и *CM*, совпадающие с биссектрисами углов треугольника. Затем он начертил еще две прямые аллеи *DM* и *DN* и задался вопросом: а под каким углом по отношению друг к другу располагаются эти аллеи? Под рукой не было измерительного инструмента. Помогите дизайнеру найти величину угла *NDM*.

Решение. Обозначим через a, b и c соответственно стороны *AB*, *BC* и *CA*. Обозначим *DC* через x.



По свойству биссектрис $x/(c - x) = b/a$, откуда $x = DC = bc/(a+b)$. Так как площадь треугольника *ABC* равна сумме площадей треугольников *ABD* и *BCD*, то

$0{,}5\ a\cdot b \sin 120^o = 0{,}5\ a\cdot BD \sin 60^o + 0{,}5\ BD\cdot b \sin 60^o$,

откуда

$a\cdot b = a\cdot BD + BD\cdot b$ или $BD = ab/(a+b)$.

Из этого следует, что $BD/DC = [ab/(a+b)]/[bc/(a+b)] = a/c$. Но по свойству биссектрис $BN/NC = a/c$. Поэтому $BN/NC = BD/DC$. Это означает, что *DN* биссектриса угла *BDC* и β

составляет половину угла BDC.Аналогично угол α составляет половину угла ADB. Поэтому $\alpha + \beta = 90^{\circ}$.

Ответ: 90°.

Задача 3.
Женя утверждает, что только одно натуральное число может быть корнем уравнения $ax^2 + bx = 2011$, где a и b - произвольные натуральные заданные числа. Саша полагает, что уравнение $ax^2 + bx = 2013$ имеет большее количество решений в натуральных числах, так как 2013, в отличие от 2011, не является простым числом. Кто прав? Найдите все натуральные корни одного и другого уравнений и условия на натуральные числа a и b, при которых эти корни существуют.

Решение.

1. Для $a,b,x \in N$ рассмотрим уравнение $ax^2 + bx = 2011$ равносильное

$$x(ax+b) = 2011. \tag{1}$$

Число 2011 простое, $x < ax+b$ (так как $a,b,x \in N$), поэтому разложение (1) выполняется только при $x=1$, $ax+b=2011$, откуда $a+b=2011$, т.е.

$x=1$, $(a,b) \in \{(1,2010), (2,2009), \dots, (2010,1)\}$.

Утверждение Жени верно, только число 1 может быть корнем уравнения (1) в натуральных числах.

2. Для $a,b,x \in N$ рассмотрим уравнение

$$x(ax+b) = 2013. \tag{2}$$

Заметим, что $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$, множители 3, 11, 61 – простые, $x < ax+b$ (так как $a,b,x \in N$). Тогда разложение (2) имеет место в точности в следующих случаях.

2.1. $x=1$, $ax+b=2013$, т.е.

$$a+b=2013, \tag{3}$$

$(a,b) \in \{(1,2012), (2,2011), \dots, (2012,1)\}$.

2.2. $x=3$, $ax+b=11 \cdot 61$, т.е.

$$3a+b=671, \tag{4}$$

$(a,b) \in \{(1,668), (2,665), \dots, (223,2)\}$.

2.3. $x=11$, $ax+b=3 \cdot 61$, т.е.

$$11a+b=183, \tag{5}$$

$(a,b)\in\{(1,172),(2,161),\ldots,(16,7)\}$.

2.4. $x=33$, $ax+b=61$, т.е.

$$33a+b=61, \qquad (6)$$

$(a,b)=(1,28)$.

Если $(a,b)\in N$, то $33a+b>11a+b>3a+b>a+b$ и условия (3), (4), (5), (6) попарно не совместны, уравнение (2) имеет не более одного решения в натуральных числах. Утверждение Саши неверно.

Ответ: Утверждение Жени верно, утверждение Саши неверно.

Уравнение $ax^2+bx=2011$ в натуральных числах имеет корнем только

$x=1$ при условии $(a,b)\in\{(1,2010),(2,2009),\ldots,(2010,1)\}$.

Уравнение $ax^2+bx=2013$ может иметь только один корень x и

$x=1$, если $(a,b)\in\{(1,2012),(2,2011),\ldots,(2012,1)\}$,

$x=3$, если $(a,b)\in\{(1,668),(2,665),\ldots,(223,2)\}$,

$x=11$, если $(a,b)\in\{(1,172),(2,161),\ldots,(16,7)\}$,

$x=33$, если $(a,b)=(1,28)$.

При других (a,b) решений нет.

Задача 4.

Потребители электроэнергии находятся в точках A(0, 3, 4) и B(3, 0, 2). Электрокабель проходит вдоль оси OZ. Как надо выбрать точку M на оси OZ, чтобы сумма длин прямолинейных проводников MA и MB была наименьшей?

Решение. Проще всего задачу решить геометрически, повернув плоскость *Oxz* на 90 градусов вокруг оси *Oz*, так чтобы ось *Ox* совпала с отрицательным направлением оси *Oy*. При этом точка *B* перейдет в точку *B'*. Тогда точка пересечения отрезка *AB'* с осью *Oz* и будет искомая точка *M*(0,0,3).

Ответ. *M*(0,0,3).

Задача 5.

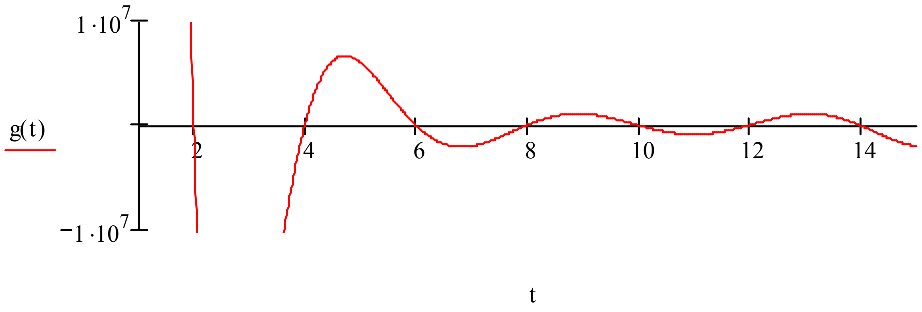
Найдите сумму всех корней уравнения

$(f(x)-2)(f(x)-4)\cdots(f(x)-2012)=1$, где $f(x)=\sqrt{x^2-x}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $g(t)=(t-2)(t-4)\cdots(t-2012)$.

Ее график имеет примерно следующий вид (показано "начало" графика).



Несложно проверить, что g(t) = 0 в точках t = 2, 4, … , 2012, g(t) < -1

в точках t = 3, 7, 11, … , 2011, g(t) > 1 в точках t = 1, 5, 9, … , 2013, а вне отрезка [1, 2013] функция g(t) монотонно неограниченно возрастает с ростом |x|.

Поэтому многочлен $g(t)-1$ имеет ровно 2012/2 =1006 корней t_j.

Осталось найти корни 1006-ти уравнений $f(x)=t_j$ ($j=1,\ldots,1006$).

Они эквивалентны уравнениям $x^2-x-t_j=0$. Сумма корней каждого из них равна 1 (по теореме Виета). Поэтому сумма всех корней равна 1006.

Ответ. Сумма всех корней равна 1006.

Задача 6.
Миша на свой день рождения пригласил пятерых друзей. Мама Миши приготовила для гостей вазу с конфетами. Когда пришел первый гость, он, намереваясь взять половину конфет и увидев, что это не возможно, взял из вазы наименьшее количество конфет, превышающее половину. Так же поступили и все следующие гости. В конце в вазе осталась одна конфета, которую съел сам Миша. Сколько конфет было в вазе?

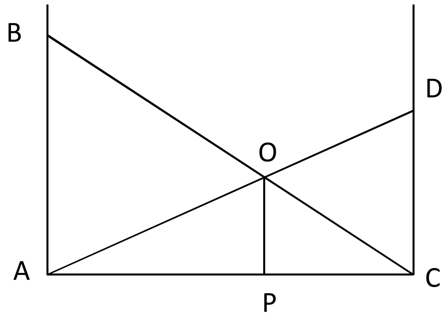
Решение. Поскольку каждый раз количество конфет было нечетным, то в общем случае количество конфет должно выражаться формулой 2^n-1. Действительно, после того, как будет взято 2^{n-1} (наименьшее количество конфет, превышающее половину), в вазе останется $2^{n-1}-1$. Поскольку гостей вместе с Мишей шесть человек, то количество конфет в вазе должно было быть $2^6-1=63$.

Ответ: 63 конфеты.

Задача 7.
Две параллельные стены находятся на расстоянии 12 м друг от друга. К основанию каждой стены под наклоном приставлена лестница, другим концом упирающаяся в противоположную стену. Одна лестница имеет длину 20 м, другая 15м. Эти лестницы

надо скрепить друг с другом в точке их пересечения. На какой высоте от уровня пола помещения это придется сделать?

Решение.



По теореме Пифагора $AB = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$, а $CD = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Обозначим PC через x, а OP через h.

Из подобия треугольников OPC и BAC имеем

$\frac{y}{h} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, т.е. y = 3 h /4.

Из подобия треугольников ACD и APO имеем

$\frac{12 - y}{h} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, или $(12 - y) \cdot 3 = 4h$. Подстановка в это равенство $y = 3h/4$ дает h = 144/25 ≈ 5,76 м.

Ответ: 144/25 ≈ 5,76 м.

Задача 8.

Электронные часы идут вперед на несколько минут в сутки, но в текущий момент показывают на 5 минут меньше, чем следует. Если бы в этот момент они показывали на 6 минут меньше, чем следует, но уходили бы в сутки на 2 минуты больше, чем уходят, то верное время они бы показали на сутки раньше, чем покажут в данных сейчас условиях. На сколько минут в сутки уходят вперед часы?

Решение.

$\frac{5}{x} - \frac{6}{x+7} = 1$, $x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2) = 0$. Положительным является корень x = 2.

Ответ. На 2 мин.

Задача 9.

Среди участников турнира по теннису женщин было в 1,5 раза больше, чем мужчин. Каждые два участника играли ровно одну партию, причем проходили и матчи между представителями разных полов, ничьих не было. Мужчины одержали побед в 2 раза больше, чем женщины. Сколько мужчин и сколько женщин участвовало в таком турнире?

Решение. Пусть мужчин было 2n, а женщин 3n. Тогда женщины между собой играли 3n(3n –1)/2 партий, мужчины между собой играли 2n(2n –1)/2 =n(2n –1) = $2n^2$ – n партий, а мужчины играли с женщинами $6n^2$ партий. Пусть мужчины выиграли у женщин X партий ($X \le 6n^2$). По условиям задачи $\dfrac{\dfrac{9n^2-3n}{2}+6n^2-X}{2n^2-n+X}=1/2$,

откуда $9n^2 - 3n + 12n^2 - 2X = 2n^2 - n + X$, или $19n^2 - 2n = 3X$.

С учетом неравенства $X \le 6n^2$, имеем

$19n^2 - 2n \le 18n^2$ или $n^2 - 2n \le 0$. Это неравенство имеет целочисленные решения: 0, 1, 2. Первые два не подходят по условию задачи (при n = 1 получается X дробное). Подходит только n =2 . Поэтому мужчин было

2 n = 4, женщин 3 n = 6.

Ответ: 4 мужчины и 6 женщин.

Задача 10.

Числовая последовательность, т. е. бесконечный ряд чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, задана условиями $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $n \ge 1$. Найдите наибольший общий делитель ее членов с номерами 2012 и 2013.

Решение. Последовательность аналогична последовательности Фибоначчи. Первые ее члены взаимно простые. Следовательно, любые два соседних члена взаимно просты.

Ответ: НОД равен 1.

Задача 11.

Треугольник со сторонами длины 3, 4, 5 называют египетским. В древнем Египте с его помощью получали прямой угол, необходимый в строительстве, земледелии и ремеслах. Веревку делили на 12 равных частей и связывали ее концы, три человека брались за нее в точках, разделяющих куски длиной 3, 4 и 5 частей, и натягивали до предела. Так получался треугольник. Найдите значения синусов, косинусов и тангенсов его острых углов. Опишите последовательность действий, совершая которые египтяне могли, используя веревку неограниченной длины и два колышка, получать углы с тангенсами величиной (в современных обозначениях) $n, \frac{m}{n}, \sqrt{m}, \sqrt{\frac{m}{n}}$, где m и n – произвольные заданные натуральные числа.

Решение.

Углы египетского треугольника равны arccos(4/5) = arcsin(3/5) = arctg(3/4)

и arccos(3/5) = arcsin(4/5) = arctg(4/3).

Имея прямой угол, можно строить последовательно треугольники с катетами 1, 1 и гипотенузой $\sqrt{2}$, катетами 1 и $\sqrt{2}$ и гипотенузой $\sqrt{3}$ и так далее. В результате получим отрезки длиной $\sqrt{n}$, где n – произвольное натуральное число.

Далее можно построить треугольники с катетами 1 и n и острым углом arctg(n), с катетами 1, $\sqrt{n}$ и острым углом $arctg\sqrt{n}$, с катетами m, n и углом arctg(m/n), с катетами $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ и углом $arctg\sqrt{m/n}$.

Задача 12.

Два кладоискателя нашли клад весом 4 кг, в котором было 99 % монет из серебра и 1% монет из золота. Они не смогли справедливо разделить находку и обратились к судье. Лукавый судья потребовал за свои услуги часть серебряных монет такую, чтобы в кладе осталось 98% монет из серебра. Простодушные кладоискатели согласились с условиями судьи. Сколько килограммов золотых и серебряных монет им достанется?

Решение. Золотые монеты составляли в кладе 1%, т.е. 40 г. Если выполнить условие судьи, золотые монеты составят 2% от оставшейся части клада. Тогда

40 г --------- 2%,

X г --------- 100%,

откуда X =40·100/2 =2000 г, т.е 2 кг.

Ответ: 2 кг.

Задача 13.

Найдите все корни уравнения $x^3 = a^3\frac{x-b}{a-b} + b^3\frac{x-a}{b-a}$, где a и b – произвольные заданные числа.

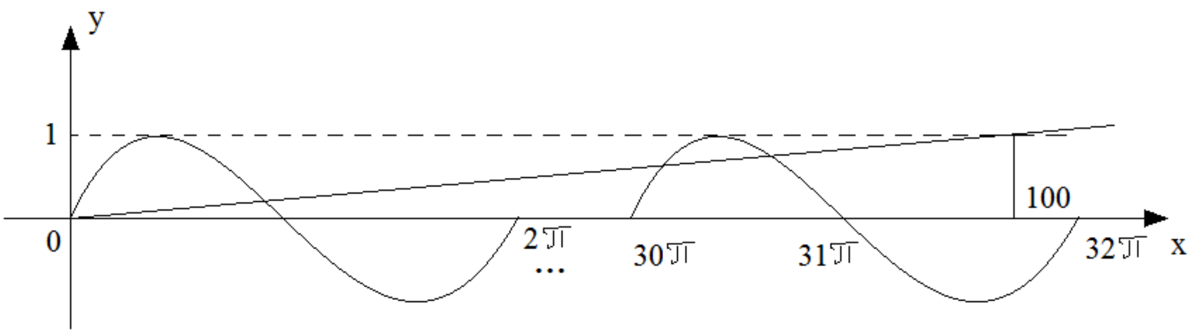
Решение. Два корня $x_1 = a$ *и* $x_2 = b$ видны из записи уравнения. Третий корень находится путем эквивалентного преобразования уравнения к виду $(x-a)(x-b)(x+a+b)=0$. Следовательно, $x_3 = -a - b$.

Ответ. $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = -a - b$.

Задача 14.

Сколько решений имеет уравнение sin x = 0,01 x ?

Решение. Заметим, что $31\pi < 100 < 32\pi$ и x=0 является корнем. На каждом отрезке длины 2π имеем два корня (см. рис.). Поэтому неотрицательных корней имеется 32. Соответственно неположительных тоже 32 и общее число корней есть 63.



Ответ: 63.

Задача 15.

Ученики лесной школы заяц Степан, лиса Алиса и медведь Потап обсуждают функцию $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{(x+2)(x+3)^2}$. Потап сказал, что существуют два различных числа x_1, x_2 такие, что $f(x_1)=f(x_2)$. Алиса, подумав, нашла три различных числа x_1, x_2, x_3 таких, что $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$. Восстановите решение Алисы. Может ли Степан, подумав еще дольше, найти более трех различных чисел с таким же свойством?

Решение. Положим t=x+1 и рассмотрим функцию

$g(t)=\dfrac{t^2}{(t+1)(t+2)^2}$. Число $t_1=1$ является корнем уравнения g(t)=k при k=1/18. Найдем другие корни уравнения. Для этого поделим многочлен $k(t+1)(t+2)^2-t^2$ на t-1, получим $\frac{1}{18}t^2-\frac{2}{3}t-\frac{2}{9}$. Последний трехчлен имеет корни $t_{2,3}=6\pm\sqrt{40}$. Таким образом, $x_1=t_1-1$, $x_2=t_2-1$ и $x_3=t_3-1$ могут быть решением Алисы. Ясно, что такая тройка (x_1, x_2, x_3) не является единственной. Более трех чисел x_i с таким свойством не существует, так как многочлен степени 3 не может иметь более 3 корней.

Ответ: решением Алисы может быть ($x_1=0$, $x_2=5-\sqrt{40}$, $x_3=5+\sqrt{40}$). Более трех чисел с таким свойством Степан найти не сможет.

Задача 16.

Дана функция $f(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-b}}-\dfrac{2\sqrt{b}}{x}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-b}}+\dfrac{2\sqrt{b}}{x}\right)$.

Может ли она принимать нулевые и отрицательные значения? Существуют ли три различных числа x_1, x_2, x_3 такие, что $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$? Если такие x_1, x_2, x_3 существуют, то укажите их возможные значения и выясните, единственна ли тройка (x_1, x_2, x_3).

Решение. Если b=0, то f(x)=1/x при x>0. Всегда f(x)>0 и не существует различных точек, в которых функция f принимает одинаковые значения.

Если b>0, то

$$f(x) = \frac{1}{x-b} - \frac{4b}{x^2} = \frac{(x-2b)^2}{x^2(x-b)}.$$

Все значения функции f неотрицательны и f(x)=0 только при x=2b. Рассмотрим уравнение f(x)=k, где k>0. Если k=1/(18b), то x_1=3b является корнем уравнения. Найдем другие корни этого уравнения, поделив многочлен $(x-2b)^2 - kx^2(x-b)$ на x-3b. Получим квадратный трехчлен

$$\frac{1}{18b}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{4}{3}b,$$

имеющий корни $x_{2,3} = (8 \pm \sqrt{40})b$, которые оба больше b.

Ответ. Если b=0, то f(x)=1/x>0 при x>0, не существует различных чисел x_1, x_2, x_3, для которых $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$.

Если b>0, то $f(x)=(x-2b)^2/(x^2(x-b))\geq 0$ при x>b и f(x)=0 только при x=2b. В точках x_1=3b, $x_{2,3}=(8\pm\sqrt{40})b$ выполняется $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=1/(18b)$. Тройку чисел x_1, x_2, x_3, для которых $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, можно выбрать неединственным образом.

Задача 17.

При монтаже электроустановки использовалось три куска электрокабеля различной длины. Первый кусок был израсходован наполовину, от второго осталась треть, а от третьего куска осталось кабеля в два раза меньше, чем было во втором куске сначала. Сколько процентов всего кабеля было израсходовано?

Ответ: $\frac{\frac{x}{2}+\frac{y}{6}+z}{x+y+z} 100\ \%$, где x,y,z --- различные положительные числа.