Материалы заданий заключительного этапа Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2013/2014 учебном году

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к усвоению образовательных программ технических ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления, умеющих математически "смоделировать" реальные ситуации из различных предметных областей и применить к ним наиболее подходящие математические методы.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на полное и безупречное решение. Они охватывают все разделы школьной программы, но носят, в большинстве, комплексный характер, позволяющий варьировать оценки в зависимости от проявленных в решении творческих подходов и продемонстрированных технических навыков. Участники должны самостоятельно определить разделы и теоретические факты программы, применимые в каждой задаче, разбить задачу на подзадачи, грамотно выполнить решение каждой подзадачи, синтезировать решение всей задачи из решений отдельных подзадач.

Успешное выполнение олимпиадной работы не требует знаний, выходящих за пределы школьной программы, но, как видно из результатов олимпиады, доступно не каждому школьнику, поскольку требует творческого подхода, логического мышления, умения увидеть и составить правильный и оптимальный план решения, четкого и технически грамотного выполнения каждой части решения, отбора допустимых решений из возможного их множества.

Умение справляться с такими заданиями приходит к участникам с опытом, который вырабатывается на тренировочном и отборочном этапах Олимпиады.

Решение варианта 32111 для 11 класса.

1. Найти все натуральные n такие, что сумма первых $n - 1$ членов арифметической прогрессии $3n^3, 5n^3, 7n^3, \ldots$ кратна 3000.

Решение.

Разность прогрессии равна $2n^3$. Вычислим сумму первых $n-1$ членов прогрессии. Если первый член равен 1, то n-ый член равен $2n-1$ и сумма первых n членов такой прогрессии равна n^2. Преобразуем искомую сумму:

$$n^3(3+5+\cdots+2(n-1)-1) = n^3((1+3+\cdots+2n-1)-1) = n^3(n^2-1).$$

Задача сведена к следующей.

Найти все натуральные n такие, что число $x = n^3(n-1)(n+1)$ кратно $3000 = 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$.

1. Всегда $(n-1)n(n+1)$ кратно 3. Остается условие $n^3(n-1)(n+1)$ кратно $2^3 \cdot 5^3$.

2. Пусть $n = 2k$. Тогда остается условие $k^3(2k-1)(2k+1)$ кратно 5^3.

2.1. Пусть $k = 5l$. Тогда

$$n = 10l. \qquad (1)$$

2.2. Пусть k взаимно просто с 5. Тогда $(2k-1)(2k+1) = m(m+2)$ кратно 5^3, где $m = 2k-1$. Числа m и $m+2$ одновременно не могут быть кратны 5, поэтому ровно одно из них должно быть кратно 125.

2.2.1. Пусть $m = 125p = 2k-1$, тогда $2k = 125p+1$ четно, значит $p = 2l+1$, откуда $n = 2k = 125(2l+1)+1$,

$$n = 250l + 126. \qquad (2)$$

2.2.2. Пусть $m+2 = 125p = 2k-1$, тогда $m = 125p-2 = 2k-1$, $2k = 125p-1$ четно, значит $p = 2l+1$, откуда $n = 2k = 125(2l+1)-1$,

$$n = 250l + 124. \qquad (3)$$

3. Пусть $n = 2k+1$. Тогда $x = (2k+1)^3 2k(2k+2) = 4k(k+1)(2k+1)^3$ и остается условие $k(k+1)(2k+1)^3$ кратно $2 \cdot 5^3$. Но $k(k+1)$ четно, поэтому достаточно, чтобы $k(k+1)(2k+1)^3$ было кратно 5^3.

3.1. Пусть $2k+1 = 5p$. Это число нечетно, если $p = 2l+1$, тогда $n = 2k+1 = 5p = 5(2l+1)$,

$$n = 10l + 5. \qquad (4)$$

3.2. Пусть $2k+1$ не кратно 5. Тогда $k(k+1)$ кратно 125. Числа k и $k+1$ взаимно простые, ровно одно из них кратно 125.

3.2.1. Если $k = 125l$, то

$$n = 250l + 1. \qquad (5)$$

3.2.2. Если $k+1=125l$, то $2k+1=2(125l-1)+1$,

$$n = 250l - 1. \qquad (6)$$

Все возможности исчерпаны. Решение определяется условиями (1)–(6).

Ответ:

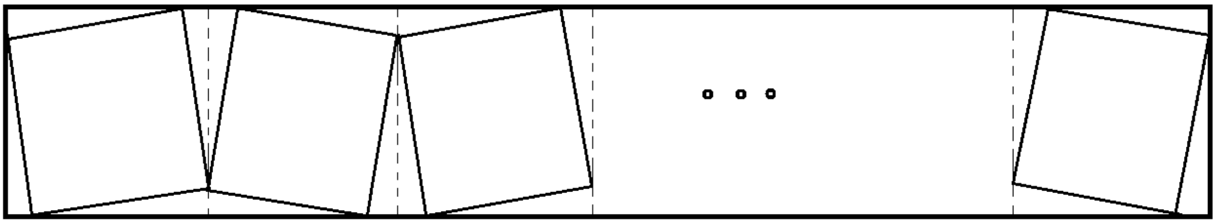
$$n = 10l,\ 10l+5,\ 250l+1,\ 250l+124,\ 250l+126,\ 250l_1-1,$$

где l неотрицательные целые, l_1 натуральное.

2. Рекламный плакат занимает всю боковую поверхность цилиндрической башни высотой не менее 4 м и имеющей площадь основания не более 6 м^2. Плакат разбит на чёрные квадраты и белые треугольники, соседствующие друг с другом так, что каждая сторона каждого квадрата является стороной соседнего треугольника, а ровно две стороны каждого треугольника являются сторонами соседних квадратов. Какое число квадратов может поместиться на таком плакате? Найдите минимальную долю чёрной части плаката.

Решение

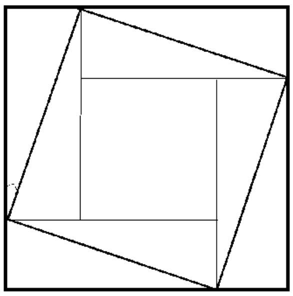
Ясно, что боковую поверхность башни можно разбить на целое число частей-квадратов, в каждый из которых вписан квадрат и четыре части треугольников. (При этом на верхней и нижней окружностях находятся вершины квадратов и стороны треугольников.) Вся боковая поверхность будет состоять из произвольного количества полос, имеющих вид, представленный на рисунке.



Рассмотрим случай одной полосы. Пусть высота башни равна H. Тогда длина окружности основания башни (радиуса R) кратна H, $2\pi R = kH, k \in N$, откуда $R = \dfrac{kH}{2\pi}$.

По условию $H > 4$, $\pi R^2 < 6$.

Получаем $6 > \pi R^2 = \pi \dfrac{k^2 H^2}{4\pi^2} > \dfrac{k^2 16}{4\pi} = \dfrac{4k^2}{\pi}$, откуда $k^2 < \dfrac{3\pi}{2}$. Так как $3 < \pi < 4$, то полученному неравенству удовлетворяют значения k = 1 и k = 2. В общем случае количество квадратов можно неограниченно увеличивать.



Рассмотрим структуру одного квадратного сегмента боковой поверхности (рис. справа). Видно, что площадь самого внутреннего квадрата есть разность площадей "среднего" (повернутого) квадрата и треугольников. Эта разность зависит от отмеченного на рисунке угла и всегда неотрицательна. Минимальная разность (0) возможна при значении угла 45°. Эта конфигурация соответствует максимальной площади треугольников и минимальной площади квадратов, которые составляют ровно половину всей площади.

Ответ. 1. число квадратов – произвольное, начиная с 1. 2. 50%

3. Основания правильных треугольников лежат на вертикальной оси и примыкают друг к другу. Стороны треугольников последовательно имеют длины 2, 4, 6, 8, … . Найдите уравнение кривой, на которой лежат центры симметрии треугольников.

Решение

Начнем рисовать треугольники от точки (0,0). Середина основания k-го треугольника имеет координату $y_k = (2+4+\ldots+2k) - \frac{2k}{2} = k(k+1) - k = k^2$. Центр симметрии k-го треугольника имеет координату $x_k = \frac{2k\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{k}{\sqrt{3}}$. Отсюда $k = \sqrt{3}x_k$. Подставляя это значение k в выражение для y, получаем $y = 3x^2$. Это есть уравнение параболы. Нас интересует одна ее правая ветвь. Если начать рисовать треугольники от точки (0, a), то получим уравнение $y=3x^2+a$.

ОТВЕТ: $y=3x^2+a$.

4. Даны три утверждения.

(1) Уравнение $a\sin(x^2) + b\cos(x^2) + c = 0$ не имеет решения.

(2) Уравнение $2a\,\mathrm{tg}\,x + b\,\mathrm{ctg}\,x + 2c = 0$ не имеет решения.

(3) В треугольнике со сторонами a, b, c сторона c лежит против тупого угла.

Какие из этих утверждений одновременно могут быть верными, если a, b, c – действительные числа, не равные нулю? Какие из этих трёх утверждений являются следствиями других?

Решение. Преобразуем первое уравнение, введя вспомогательный угол:

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(x^2+\varphi) = -c.$$

Это уравнение не имеет решений, если

$$|c| > \sqrt{a^2+b^2}.$$

Второе уравнение заменой $t = \mathrm{tg}\,x$ сводится к квадратному

$$2at^2 + 2ct + b = 0,$$

которое не имеет решений, если дискриминант

$$4c^2 - 8ab < 0.$$

Но условия $c^2 > a^2 + b^2$ и $c^2 < 2ab$ не могут выполняться одновременно, так как $2ab \le a^2 + b^2$.

Утверждение (3) означает, что $c^2 > a^2 + b^2$. Таким образом, одновременно могут быть верными только утверждения (1) и (3).

Ответ. Совместны (1) и (3). (1) является следствием (3), других следствий нет.

5. Две улитки ползут вдоль замкнутого забора с постоянными скоростями v_1 и v_2 заборов в час, причём $0 \leq v_1 \leq 1, 0 \leq v_2 \leq 1$. Докажите, что если бы вместо улиток были ежи и первый пробежал бы расстояние v_1 со скоростью $2v_2+3$, а второй сразу же после этого пробежал расстояние v_2 со скоростью $2v_1+3$, то такое перемещение заняло бы не больше 24 минут.

Решение.

Для краткости будем обозначать скорости символами u, v.

Записывая суммарное время движения ежей, получаем задачу: доказать справедливость неравенства

$$\frac{u}{2v+3}+\frac{v}{2u+3}\leq\frac{2}{5}.$$

Домножим на знаменатели и преобразуем:

$$10u^2+3u+10v^2+3v-8uv\leq 18.$$

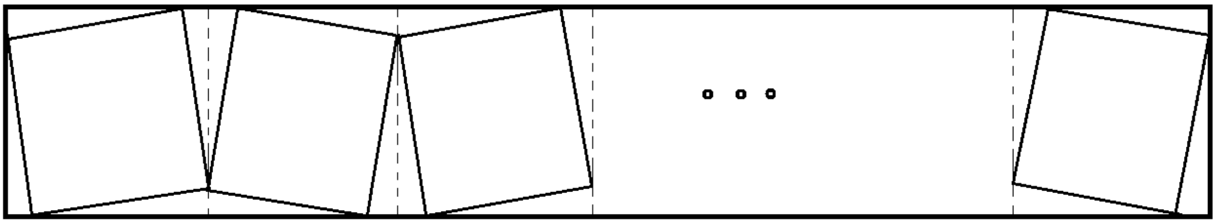
Найдем наибольшее значение левой части при $u\in[0\,;1]$, $v\in[0\,;1]$. Левая часть последнего неравенства - квадратный трехчлен относительно u с положительным старшим членом. Значит, она достигает наибольшего значения на краю промежутка $[0\,;1]$, то есть при $u=0$ или при $u=1$. Аналогично, максимум левой части должен достигаться лишь при $v=0$ или $v=1$. Когда пара $(u\,,v)$ принимает значения $(0\,,0)$, $(0\,,1)$, $(1\,,0)$, $(1\,,1)$, левая часть рассматриваемого неравенства равна соответственно 0, 13, 13, 18. Итак, в последнем неравенстве левая часть действительно не превосходит 18.

Решение варианта 32101 для 10 класса.

10.1. Ювелирное украшение имеет вид цилиндра. Его боковая поверхность выложена золотыми квадратами и соседствующими с ними серебряными треугольниками так, что никакие две фигуры одного материала не имеют общих точек кроме, возможно, вершин. Размеры фигур выбраны так, что число квадратов максимальное из возможных. Найдите это число и минимальную долю занимаемой ими площади боковой поверхности, если высота цилиндра не менее 4 см, а площадь основания не более 6 см^2.

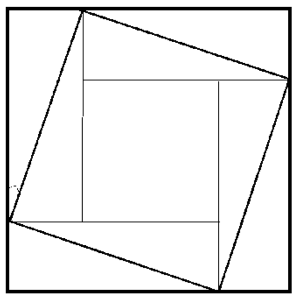
Решение

Ясно, что боковую поверхность цилиндра можно разбить на целое число частей-квадратов, в каждый из которых вписан квадрат и четыре части треугольников. (При этом на верхней и нижней окружностях находятся вершины квадратов и стороны треугольников.)



Пусть высота цилиндра равна H. Тогда длина окружности основания цилиндра (радиуса R) должна быть кратна H, $2\pi R = kH, k \in N$, откуда $R = \dfrac{kH}{2\pi}$. По условию $H > 4$, $\pi R^2 < 6$.

Получаем $6 > \pi R^2 = \pi \dfrac{k^2H^2}{4\pi^2} > \dfrac{k^2 16}{4\pi} = \dfrac{4k^2}{\pi}$, откуда $k^2 < \dfrac{3\pi}{2}$. Так как $3 < \pi < 4$, то полученному неравенству удовлетворяют значения k = 1 и k = 2.



Рассмотрим структуру одного квадратного сегмента боковой поверхности (рис. справа). Видно, что площадь самого внутреннего квадрата есть разность площадей "среднего" (повернутого) квадрата и треугольников. Эта разность зависит от отмеченного на рисунке угла и всегда неотрицательна. Минимальная разность (= 0) возможна при значении угла 45°. Эта конфигурация соответствует максимальной площади треугольников и минимальной площади квадратов, которые составляют ровно половину всей площади.

Ответ. 1. 2 квадрата. 2. 50%

O10.2 Найти все натуральные n такие, что $\sin(0,001\pi(n^5 - n^3)) = 0$.

Решением тригонометрического уравнения является $0,001\pi(n^5 - n^3) = \pi q$, где q целое. Задача сведена к следующей.

Найти все натуральные n такие, что число $x = n^3(n-1)(n+1)$ кратно $1000 = \cdot 2^3 \cdot 5^3$.

1. Пусть $n = 2k$. Тогда остается условие $k^3(2k-1)(2k+1)$ кратно 5^3.

1.1. Пусть $k = 5l$. Тогда

$$n = 10l. \tag{1}$$

1.2. Пусть k взаимно просто с 5. Тогда $(2k-1)(2k+1) = m(m+2)$ кратно 5^3, где $m = 2k-1$. Числа m и $m+2$ одновременно не могут быть кратны 5, поэтому ровно одно из них должно быть кратно 125.

1.2.1. Пусть $m = 125p = 2k-1$, тогда $2k = 125p+1$ четно, значит $p = 2l+1$, откуда $n = 2k = 125(2l+1)+1$,

$$n = 250l + 126. \tag{2}$$

1.2.2. Пусть $m+2 = 125p = 2k-1$, тогда $m = 125p-2 = 2k-1$, $2k = 125p-1$ четно, значит $p = 2l+1$, откуда $n = 2k = 125(2l+1)-1$,

$$n = 250l + 124. \tag{3}$$

2. Пусть $n = 2k+1$. Тогда $x = (2k+1)^3 2k(2k+2) = 4k(k+1)(2k+1)^3$ и остается условие $k(k+1)(2k+1)^3$ кратно $2 \cdot 5^3$. Но $k(k+1)$ четно, поэтому достаточно, чтобы $k(k+1)(2k+1)^3$ было кратно 5^3.

2.1. Пусть $2k+1 = 5p$. Это число нечетно, если $p = 2l+1$, тогда $n = 2k+1 = 5p = 5(2l+1)$,

$$n = 10l + 5. \tag{4}$$

2.2. Пусть $2k+1$ не кратно 5. Тогда $k(k+1)$ кратно 125. Числа k и $k+1$ взаимно простые, ровно одно из них кратно 125.

2.2.1. Если $k = 125l$, то

$$n = 250l + 1. \tag{5}$$

2.2.2. Если $k+1 = 125l$, то $2k+1 = 2(125l-1)+1$,

$$n = 250l - 1. \tag{6}$$

Все возможности исчерпаны. Решение определяется условиями (1)–(6).

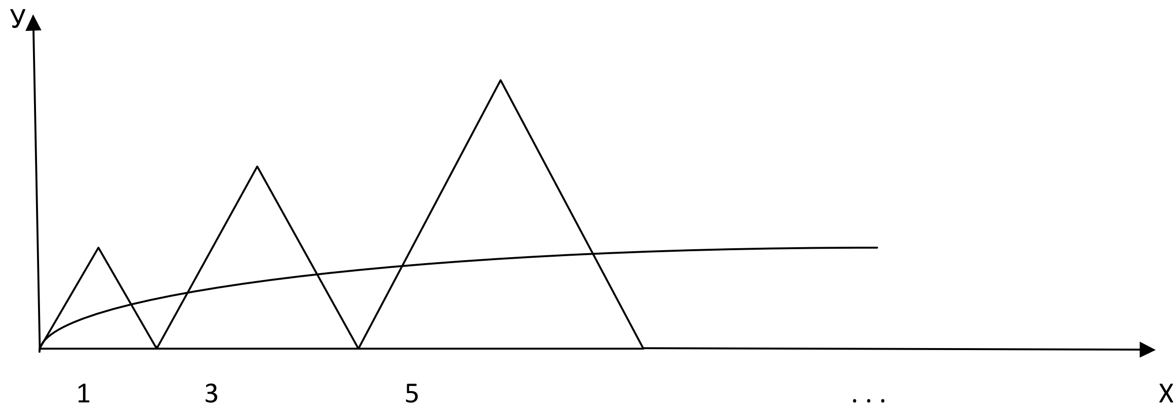
Ответ:

$$n = 10l,\ 10l+5,\ 250l+1,\ 250l+124,\ 250l+126,\ 250l_1 - 1,$$

где l неотрицательные целые, l_1 натуральное.

3. Основания правильных треугольников лежат на горизонтальной оси и примыкают друг к другу. Стороны треугольников в порядке их следования слева направо равны 1, 3, 5, 7, … . Постройте график кривой, проведённой через вершины треугольников, не принадлежащие основанию.

Решение.



Начнем рисовать треугольники от точки (0,0).

Середина основания k-го треугольника имеет координату

$$x_k = (1+3+5+\ldots+(2k-1)) - \frac{2k-1}{2} = k^2 - \frac{2k-1}{2} = k^2 - k + \frac{1}{2}$$

Третья вершина k-го треугольника имеет координату $y_k = (2k-1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Отсюда $k = \dfrac{1}{2} + \dfrac{y}{\sqrt{3}}$. Подставляя это значение k в выражение для *x*, получаем:

$x = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 - \dfrac{y}{\sqrt{3}} = \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{1}{4}$. Это есть уравнение ветви параболы, расположенной в первой координатной четверти с вершиной в т. (0.25, 0).

Если начать с точки (a,0), получим уравнение $x=y^2/3+1/4+a$.

Ответ: $x=y^2/3+1/4+a$.

4. Покажите, что функция

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{7}{5} - xy - \frac{x}{2y+3} - \frac{y}{2x+3}}$$

определена для всех чисел $x, y \in [0,1]$. Найдите максимальное и минимальное значения функции в этой области.

Решение. Разобьем подкоренное выражение на два слагаемых

$$(1-xy) + \left(\frac{2}{5} - \frac{x}{2y+3} - \frac{y}{2x+3}\right).$$

Приводя второе слагаемое к общему знаменателю, получаем выражение

$$18 - 10x^2 - 10y^2 - 3x - 3y - 8xy$$

Покажем, что оно неотрицательно при $x \in [0\,;1]$, $y \in [0\,;1]$. Левая часть последнего неравенства - квадратный трехчлен относительно x с отрицательным старшим членом. Значит, она достигает наименьшего значения на краю промежутка $[0\,;1]$, то есть при $x=0$ или при $x=1$. Аналогично, минимум левой части должен достигаться лишь при $y=0$ или $y=1$. Когда пара $(x\,,y)$ принимает значения $(0\,,0)$, $(0\,,1)$, $(1\,,0)$, $(1\,,1)$, рассматриваемое выражение равно соответственно 18, 5, 5, 0. Итак, второе слагаемое подкоренного выражения неотрицательно.

Неотрицательность выражения $(1-xy)$ при $x \in [0\,;1]$, $y \in [0\,;1]$ очевидна.

Максимальное и минимальное значения принимаются, очевидно, в точках
(0,0) ($f_{\max} = \sqrt{7/5}$) и (1,1) ($f_{\min} = 0$).

5. Решите уравнение с двумя неизвестными $\cos x \cos y = |\cos x + \cos y|$.

Решение.

Одно из решений системы определяется равенствами $\begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos y = 0. \end{cases}$

Из них получаем $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi m\right), n, m \in Z.$ Покажем, что других решений нет. Действительно,

$$\cos^2 x \cos^2 y = \cos^2 x + 2\cos x \cos y + \cos^2 y,$$

$$1 > (\cos x \cos y - 1)^2 = \cos^2 x + \cos^2 y + 1 > 1,$$

так как $\cos x \cos y > 0, \cos x \neq 0, \cos y \neq 0$.

Ответ. $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi m\right), n, m \in Z.$

Решение варианта 32991 для 9 класса.

1. Центры окружностей лежат на прямой p. Каждая окружность внешне касается соседних с ней. Радиусы окружностей последовательно равны 3, 6, 9, 12, … . Через центры окружностей проведены прямые, перпендикулярные p. Они пересекаются с окружностями в точках A_1 и B_1 , A_2 и B_2 , A_3 и B_3 , … . Докажите, что точки A_1 , A_2 , A_3 , … принадлежат одной параболе.

Решение. Проведем вдоль центров кругов ось OX, чтобы начало координат совпало с левым краем левого круга.

Центр k-го круга имеет координату $x_k = 2\cdot(3+6+9+\ldots+3k)-3k = 2\dfrac{3k+3}{2}k-3k = 3k^2$

"Вешина" k-го круга имеет координату $y_k = 3k$. Отсюда $k=\dfrac{y_k}{3}$. Подставляя это значение k в выражение для x, получаем $x=\dfrac{y^2}{3}$. Это и есть уравнение параболы. Если прямая не является осью OX, то линейной заменой переменных случай сводится к рассмотренному. При обратной замене переменных получится также парабола.

2. Банк «Фантастика» предлагает такие условия срочного вклада: если вклад хранится n дней, то клиенту возвращается кроме положенной суммы ещё $0.001(n^5-n^3)/3$ рублей. На какое целое число дней надо положить 300 000 рублей, чтобы возвращаемая сумма была целым числом?

Задача эквивалентна следующей.

Найти все натуральные n такие, что число $x = n^3(n-1)(n+1)$ кратно $3000 = 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$.

1. Всегда $(n-1)n(n+1)$ кратно 3. Остается условие $n^3(n-1)(n+1)$ кратно $2^3 \cdot 5^3$.

2. Пусть $n = 2k$. Тогда остается условие $k^3(2k-1)(2k+1)$ кратно 5^3.

2.1. Пусть $k = 5l$. Тогда

$$n = 10l. \tag{1}$$

2.2. Пусть k взаимно просто с 5. Тогда $(2k-1)(2k+1) = m(m+2)$ кратно 5^3, где $m = 2k-1$. Числа m и $m+2$ одновременно не могут быть кратны 5, поэтому ровно одно из них должно быть кратно 125.

2.2.1. Пусть $m = 125p = 2k-1$, тогда $2k = 125p+1$ четно, значит $p = 2l+1$, откуда $n = 2k = 125(2l+1)+1$,

$$n = 250l + 126. \tag{2}$$

2.2.2. Пусть $m+2 = 125p = 2k-1$, тогда $m = 125p-2 = 2k-1$, $2k = 125p-1$ четно, значит $p = 2l+1$, откуда $n = 2k = 125(2l+1)-1$,

$$n = 250l + 124. \tag{3}$$

3. Пусть $n = 2k+1$. Тогда $x = (2k+1)^3 2k(2k+2) = 4k(k+1)(2k+1)^3$ и остается условие $k(k+1)(2k+1)^3$ кратно $2 \cdot 5^3$. Но $k(k+1)$ четно, поэтому достаточно, чтобы $k(k+1)(2k+1)^3$ было кратно 5^3.

3.1. Пусть $2k+1 = 5p$. Это число нечетно, если $p = 2l+1$, тогда $n = 2k+1 = 5p = 5(2l+1)$,

$$n = 10l + 5. \tag{4}$$

3.2. Пусть $2k+1$ не кратно 5. Тогда $k(k+1)$ кратно 125. Числа k и $k+1$ взаимно простые, ровно одно из них кратно 125.

3.2.1. Если $k = 125l$, то

$$n = 250l + 1. \tag{5}$$

3.2.2. Если $k+1=125l$, то $2k+1=2(125l-1)+1$,

$$n=250l-1. \tag{6}$$

Все возможности исчерпаны. Решение определяется условиями (1)–(6).

Ответ:

$$n=10l,\ 10l+5,\ 250l+1,\ 250l+124,\ 250l+126,\ 250l_1-1,$$

где l неотрицательные целые, l_1 натуральное.

3. Даны два утверждения.

(1) Уравнение $2a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + 2c = 0$ не имеет решения.

(2) В треугольнике со сторонами a, b, c сторона c лежит против тупого угла.

Могут ли эти утверждения быть одновременно верными? Является ли одно из них следствием другого?

Решение.

Первое уравнение заменой $t = \operatorname{tg} x$ сводится к квадратному

$$2a\,t^2 + 2c\,t + b = 0,$$

которое не имеет решений, если дискриминант

$$4c^2 - 8ab < 0.$$

Утверждение (2) означает, что $c^2 > a^2 + b^2$.

Но условия $c^2 > a^2 + b^2$ и $c^2 < 2ab$ не могут выполняться одновременно, так как $2ab \le a^2 + b^2$.

Таким образом, утверждения (1) и (2) одновременно верными быть не могут.

Ответ. 1. Не могут. 2. Не является.

4. Докажите справедливость неравенства

$$10(x^2 + y^2) + 3(x + y) - 8xy \leq 18$$

для всех чисел $x, y \in [0,1]$.

Решение.

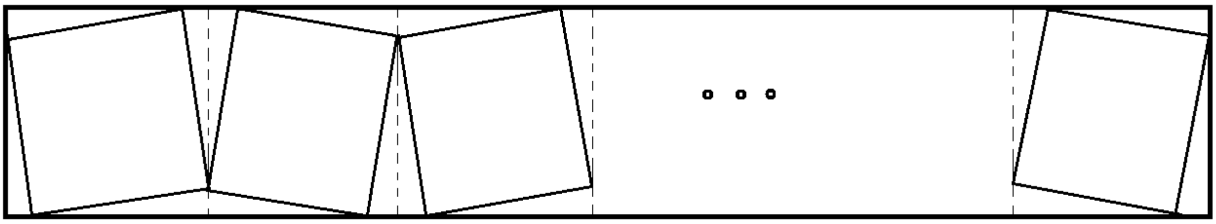
Раскроем скобки: $$10x^2 + 3x + 10y^2 + 3y - 8xy \leq 18.$$

Найдем наибольшее значение левой части при $x \in [0\,;1]$, $y \in [0\,;1]$. Левая часть последнего неравенства - квадратный трехчлен относительно x с положительным старшим членом. Значит, она достигает наибольшего значения на краю промежутка $[0\,;1]$, то есть при $x = 0$ или при $x = 1$. Аналогично, максимум левой части должен достигаться лишь при $y = 0$ или $y = 1$. Когда пара $(x\,, y)$ принимает значения $(0\,, 0)$, $(0\,, 1)$, $(1\,, 0)$, $(1\,, 1)$, левая часть рассматриваемого неравенства равна соответственно 0, 13, 13, 18. Итак, в последнем неравенстве левая часть действительно не превосходит 18.

5. Лист бумаги свёрнут без наложения бумаги в трубу. Площадь поперечного сечения трубы не превышает 6 дм^2. Лист развернули и разрезали (без отхода бумаги) на квадраты и треугольники. Из этих фигур сложили прямоугольник, одна из сторон которого оказалась не менее 4 дм. Фигуры расположились поочерёдно – квадраты и треугольники – так, что никакие две одноимённые фигуры не имеют общих точек кроме, может быть, вершин. Найдите возможное число квадратов. Может ли суммарная площадь квадратов превышать суммарную площадь треугольников?

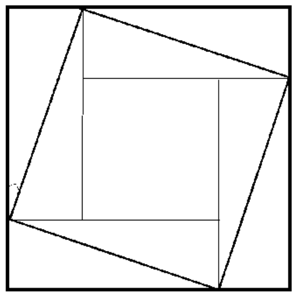
Решение

Ясно, что боковую поверхность трубы (т.е. сложенного из фигур прямоугольника) можно разбить на целое число частей-квадратов, в каждый из которых вписан квадрат и четыре части треугольников. (При этом на верхней и нижней окружностях находятся вершины квадратов и стороны треугольников.)



Пусть высота трубы равна H. Тогда длина окружности основания трубы (радиуса R) должна быть кратна H. Т.е. $2\pi R = kH, k \in N$, откуда $R = \frac{kH}{2\pi}$. По условию $H > 4$, $\pi R^2 < 6$.

Получаем $6 > \pi R^2 = \pi \frac{k^2 H^2}{4\pi^2} > \frac{k^2 16}{4\pi} = \frac{4k^2}{\pi}$, откуда $k^2 < \frac{3\pi}{2}$. Так как $3 < \pi < 4$, то полученному неравенству удовлетворяют значения k = 1 и k = 2.



Рассмотрим структуру одного квадратного сегмента боковой поверхности (рис. справа). Видно, что площадь самого внутреннего квадрата есть разность площадей "среднего" (повернутого) квадрата и треугольников. Эта разность зависит от отмеченного на рисунке угла и всегда неотрицательна. Минимальная разность (= 0) возможна при значении угла 45°. Эта конфигурация соответствует максимальной площади треугольников и минимальной площади квадратов, которые составляют ровно половину всей площади. При любом другом значении угла площадь квадратов будет составлять больше половины всей площади.

Ответ. 1. 2 квадрата. 2. может

Решение варианта 32881 для 8 класса.

1. Две цепочки составлены из одинаковых круглых колец. В первой цепочке на пять колец меньше. В вытянутом состоянии длина первой цепочки 30 мм, второй – 50 мм. Сколько колец содержит каждая цепочка?

Решение.

Пусть D – внутренний диаметр кольца, d – диаметр проволоки, из которой сделано кольцо. Тогда $nD + 2d$ – длина цепочки, из n колец. Имеем систему:

$$\begin{cases} nD + 2d = 30, \\ (n+5)D + 2d = 50. \end{cases}$$

Из этой системы находим $D = 4$. Тогда $4n+2d=30$. Поскольку $2d<D$ имеем $2d = 30 - 4n < 4$. Единственное натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству – это $n=7$. Получаем

Ответ: 7 и 12 колец в цепочках.

2. Числа $x_1, \ldots, x_n$ связаны условиями $x_1 = a^n$, $x_1x_3 = x_2^2$, $x_2x_4 = x_3^2$, …, $x_{n-2}x_n = x_{n-1}^2$, $x_n = b^n$, $b > a > 0$. Найдите формулу, задающую числа x_k при $k=2, \ldots, n-1$. Найдите формулу для суммы $x_1+\ldots+x_n$, если $a=1$, $b=2$, и примените её при $n=12$.

Решение.

Имеем

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \cdots = \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Пусть значение каждого отношения равно q, тогда $q > 0$,

$$x_k = aq^{k-1} \text{ при } k = 1, \ldots, n, \quad q^{n-1} = b^n/a,$$

$$S_n = a(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = a(q^n - 1)/(q-1).$$

Если $a = 1$, $b = 2$, $n = 12$, то $q^{11} = 2^{12} = 4096$.

Ответ: $x_k = aq^{k-1}$ при $k = 2, \ldots, n-1$, где $q^{n-1} = b^n/a$.
Если $a = 1, =2$, то $S_n = (q^n - 1)/(q-1)$, где $q^{n-1} = 2^n$, в частности, $S_{12} = (q^{12} - 1)/(q-1)$, где $q^{11} = 4096$.

3. Найдите все натуральные n такие, что число n^5-n кратно 12. Для каких из них это число кратно 36 ?

Решение.

1. Разлагая на множители, получим условие $n(n^2+1)(n-1)(n+1)$ кратно $3 \cdot 2^2$.

2. Произведение $(n-1)n(n+1)$ кратно 3, остается условие x кратно 4.

3. Число n^2+1 не может делиться на 4, следовательно, $n(n-1)(n+1)$ кратно 4, а это возможно тогда и только тогда, когда

$$n = 4k.\ 4k \pm 1. \tag{1}$$

(Если $n = 4k+2$, то легко проверить, что $n(n^2-1)$ не делится на 4.)

4. Для делимости на 36 необходима делимость на 9. Рассматривая числа (1) и различные остатки $l = 0, 1, \ldots, 8$ от деления k на 9, находим все решения в виде

$$n = 36l,\ 36l \pm 1,\ 36l \pm 9,\ 36l \pm 17,\ 36l + 18.$$

Ответ: число $n^5 - n$ кратно 12 тогда и только тогда, когда $n = 4k$, $4k+1, 4k_1 - 1$;
число $n^5 - n$ кратно 36 тогда и только тогда, когда $n = 36l,\ 36l+1,\ 36l+9,$ $36l+17,\ 36l+18,\ 36l_1-1,\ 36l_1-9,\ 36l_1-17,$ где k, l неотрицательные целые, k_1, l_1 натуральные.

4. Два насоса имеют производительность p_1 и p_2. Каждый из них, работая по отдельности, наполняет резервуар не дольше одного часа, но и не быстрее, чем за полчаса. Производительность p_2 не меньше p_1, но не превосходит $2p_1$. Если t_1 – время заполнения первым насосом объёма p_2, а t_2 – время заполнения вторым насосом объёма p_1, то в каких пределах находится разность $t_1 - t_2$? При каком соотношении между p_1 и p_2 эта разность принимает наименьшее и наибольшее значения?

Решение.

За единицу производительности примем 1 резервуар в час. Имеем $1 \le p_1 \le p_2 \le 2p_2 \le 4$. Тогда

$$t_1 = \frac{p_2}{p_1} \ge \frac{p_1}{p_2} = t_2.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t - 1/t$ при $t \in [1;2]$. Имеем $f(t) \ge 0 = f(1)$, $f(2) = 3/2$. Покажем, что $f(t) \le 3/2$ при всех $t \in [1;2]$. В самом деле,

$$f(t) - \frac{3}{2} = \frac{2t^2 - 3t - 2}{2t} = \frac{(2t+1)(t-2)}{2t} \le 0,$$

если $1 \le t \le 2$.

Ответ: минимальное значение 0 при $p_1 = p_2$, максимальное значение $3/2$ при $p_2 = 2p_1$.

5. Расставьте по окружности 9 чисел, сумма которых равна 60, так, чтобы каждое число равнялось модулю разности двух предыдущих чисел, стоящих перед ним по часовой стрелке. Найдите все решения (с точностью до поворота) и докажите, что других нет. (Модулем неотрицательного числа является оно само, модулем отрицательного числа x называется число $-x$.)

Решение.

Поскольку каждое число равно модулю, все числа неотрицательны. Обозначим наибольшее из них x. Оба числа перед ним неотрицательны, не больше x и их разность по модулю равна x. Это возможно, если одно из чисел равно x, а второе 0.

1) Пусть ближайшее соседнее число равно 0. В полученной тройке $x, 0, x$ числу 0 должны предшествовать x и x, получаем $x, x, 0, x$. Дальше повторяем рассуждения, получается последовательность $x, 0, x, x, 0, x, x, 0, x$.

2) Пусть ближайшее соседнее число равно x. Для тройки $0, x, x$ среднему числу x должны предшествовать 0 и x, получаем $x, 0, x, x$. Повторяя рассуждения, получим последовательность $0, x, x, 0, x, x, 0, x, x$.

Очевидно, при расстановке по кругу эти последовательности могут совмещаться, то есть решения совпадают. Из условия равенства суммы 60 находим единственное с точностью до поворота

Ответ $10, 10, 0, 10, 10, 0, 10, 10, 0$.

Решение варианта 32771 для 7 класса.

1. Найдите все натуральные n такие, что число n^4-n^2 кратно 300. При каких n это число кратно 500 ?

Решение.

1. Так как $(n-1)n(n+1)$ кратно 3, $n^2(n-1)(n+1)$ кратно 4 при любых целых n, остается только условие x кратно 25.

2. Из множителей $n^2,\ n-1,\ n+1$ только один может быть кратен 25, поэтому все решения задачи о делимости на 300 имеют вид

$$n = 5k,\ 25m \pm 1.$$

3. Для делимости x на 500 необходима делимость $n^2(n-1)(n+1)$ на 125.

3.1. Если $n = 5k$, то $(n+1)(n-1)$ не кратно 125, x кратно 500 только при $k = 5p$,

$$n = 25p.$$

3.2. Если $n = 25m \pm 1$, то n^2 не кратно 125 , на 125 может делиться только $(n-1)(n+1)$ и, более того, только ровно один из множителей. Получаем решения

$$n = 125q \pm 1.$$

Ответ: x кратно 300 только тогда, когда $n = 5k,\ 25k+1,\ 25m-1$;
x кратно 500 тогда и только тогда, когда $n = 25k,\ 125k+1,\ 125m-1$, где k неотрицательные целые, m натуральные.

2. Две улитки двигаются равномерно по прямолинейной садовой дорожке со скоростями v_1 и v_2. Время, которое требуется второй улитке для преодоления всей дорожки не больше, чем время, требуемое на тот же путь первой улитке, однако оно не меньше часа. Если первая улитка проползёт путь v_2, а вторая улитка сразу же вслед за этим проползёт путь v_1, то в каких пределах будет находиться время такого перемещения? При каких соотношениях скоростей это время будет наименьшим и наибольшим?

Решение.

За единицу скорости примем 1 дорожку в час. Имеем $0 \le v_1 \le v_2 \le 1$. Положим $x = v_1/v_2$, тогда $0 \le x \le 1$, и искомое время есть функция $T(x) = x + 1/x$. Минимальное ее значение есть $T(1) = 2$ (при $v_1 = v_2$). Покажем, что максимального значения не существует, т. е. для любого $M > 0$ найдется $x_0 \in (0; 1]$, при котором $T(x_0) > M$. Достаточно рассмотреть лишь $M > 2$. Если $x_0 = 1/M$, то $T(x_0) = 1/M + M > M$, так как $M > 0$.

Ответ: минимальное значение время имеет при $v_1 = v_2$, максимального значения не существует.

3. Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число n такое, что $n \le x$, например, $[10] = 10, [9{,}93] = 9, \left[\frac{1}{9}\right] = 0, [-1{,}7] = -2$. Выясните, имеет ли решение уравнение $[2x + 1] = \frac{1}{2}x$.

Решение.

В правой части целое, поэтому x целое четное. Тогда $2x + 1$ тоже целое и $[2x + 1] = 2x + 1$. Из равенства $2x + 1 = x/2$ получаем $x = -2/3$, что невозможно, так как x целое.

Ответ: нет решений.

4. Существует ли выпуклый n-угольник, углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ которого удовлетворяют условиям

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3, \quad \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4, \quad \dots \ ,$$

$$\alpha_{n-2} = \alpha_{n-1} + \alpha_n, \quad \alpha_{n-1} = \alpha_n + \alpha_1, \quad \alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2?$$

Решение.

Из условия задачи следует, что каждый предыдущий угол больше последующего: $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots > \alpha_n > \alpha_1$. Полученное противоречие означает, что такого многоугольника не существует.

5. Числа $x_1, \dots, x_{2014}$ связаны равенствами

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{2013}}{x_{2014}}, \qquad x_1 = \left(\frac{10}{9}\right)^{2014}, \qquad x_{2014} = \left(\frac{11}{10}\right)^{2014}.$$

Найдите $x_2, \dots, x_{2013}$. (Пример взят из VIII книги сочинения “Начала” древнегреческого математика Евклида, IV в. до н. э.)

Решение. Введем обозначение для отношения соседних чисел:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{2013}}{x_{2014}} = q.$$

Тогда $x_2 = qx_1$ $x_3 = q^2 x_1$, … , $x_k = q^{k-1} x_1$.

Откуда $q^{2013} = \left(\frac{11}{10}\frac{9}{10}\right)^{2014}$ Поэтому

$$x_k^{2013} = x_1^{2013} q^{2013(k-1)} = \left(\frac{10}{9}\right)^{2014\cdot 2013} \left(\frac{11}{10}\frac{9}{10}\right)^{2014(k-1)} = \left(\frac{10}{9}\right)^{2014\cdot(2014-k)} \left(\frac{11}{10}\right)^{2014(k-1)}.$$

Ответ. Числа $x_k, k = 2, \ldots 2013$, будут задаваться соотношениями

$$x_k^{2013} = \left(\frac{10}{9}\right)^{2014(2014-k)} \left(\frac{11}{10}\right)^{2014(k-1)}.$$

Решения варианта 33111 для 11 класса.

1. Решите уравнение с двумя неизвестными

$$\sin(x^2)\sin(y^2)=|\sin(x^2)\sin(y^2)|.$$

Ответ. $\left(\sqrt{\pi n},\sqrt{\pi m}\right), n, m\in \mathrm{N}.$

Одно из решений системы: $\begin{cases}\sin x^2=0,\\ \sin y^2=0.\end{cases}$ Откуда получаем $\left(\sqrt{\pi n},\sqrt{\pi m}\right), n, m\in \mathrm{N}.$

Покажем, что других решений нет. Действительно,

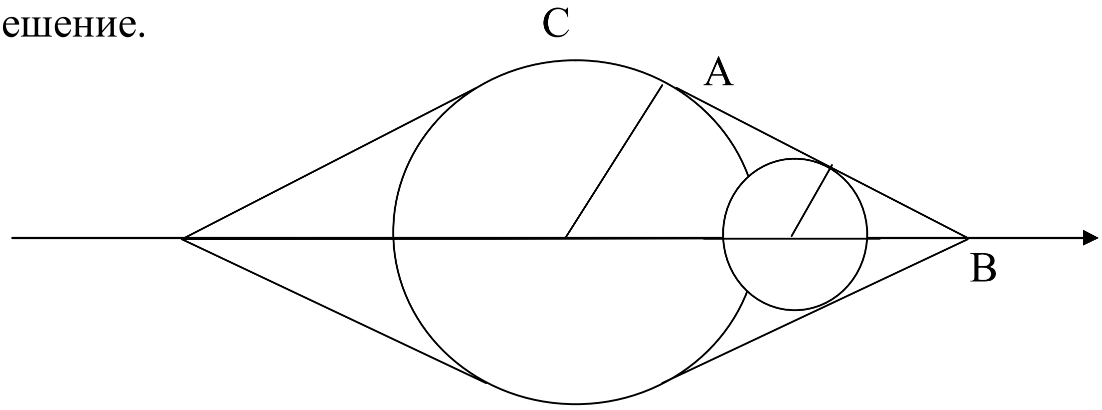
$$\sin^2(x^2)\sin^2(y^2)=\sin^2(x^2)+2\sin(x^2)\sin(y^2)+\sin^2(y^2),$$

$$1>\left(\sin(x^2)\sin(y^2)-1\right)^2=\sin^2(x^2)+\sin^2(y^2)+1>1,$$

так как $\sin(x^2)\sin(y^2)>0, \sin(x^2)\neq 0, \sin(y^2)\neq 0$.

2. На прямолинейной просеке стоит лесник. По просеке он может идти со скоростью 4 км/ч, а по лесу – со скоростью 2 км/ч. Изобразите на рисунке в системе координат (ось OX совпадает с просекой, а лесник находится в начале координат) геометрическое место точек, в которые лесник может дойти за один час ходьбы. Найдите площадь области, в точки которой лесник может дойти не более, чем за один час ходьбы.

Решение.



Пусть часть пути x_0 км лесник сначала идет по просеке. Это расстояние он пройдет за время $x_0/4$. Время, равное $1 - x_0/4$, лесник идет по лесу и проходит расстояние $2(1 - x_0/4) = 2 - x_0/2 = r$.
Точки, в которые он за это время может дойти, лежат на окружности с центром в точке $(x_0, 0)$:

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (2 - x_0/2)^2.$$

Касательная AB имеет уравнение $x = 4 - \sqrt{3}\, y$. Но система уравнений

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (2 - x_0/2)^2$$
$$x = 4 - \sqrt{3}\, y$$

имеет единственное решение. В этом легко убедиться, если из второго уравнения подставить x в первое уравнение. Тогда получается квадратное уравнение

$$4y^2 - 2\sqrt{3}(4 - x_0)\, y - 6x_0 + 0{,}75\, X_0^2 + 12 = 0,$$

которое имеет дискриминант

$$D = (\sqrt{3}(4 - x_0))^2 - 4(-6x_0 + 0{,}75\, X_0^2 + 12) = 0.$$

Поэтому прямая AB является касательной и к окружности

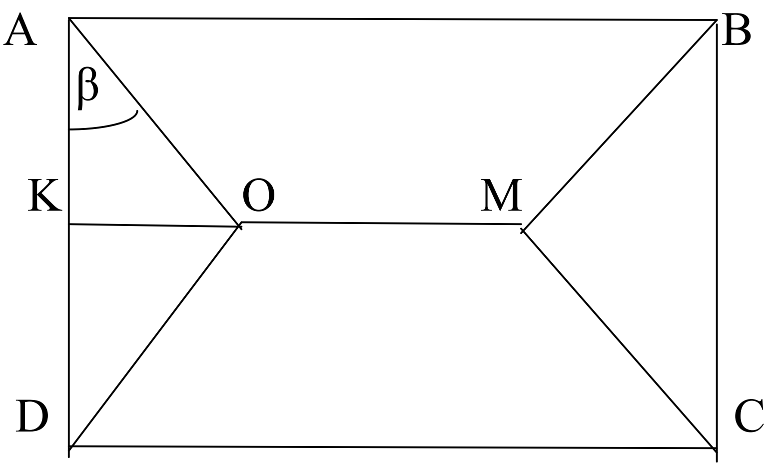
$$(x - x_0)^2 + y^2 = (2 - x_0/2)^2.$$

Заметим, что угол ABO равен 30^o. Тогда угол AOC равен 60^o, а угол AOC равен 30^o. Поэтому площадь треугольника AOB равна $0{,}5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin 30^o = 2\sqrt{3}$, а площадь сектора AOC равна $1/2 \cdot \pi/6 \cdot 4 = \pi/3$. В итоге площадь области равна $4(2\sqrt{3} + \pi/3) = 8\sqrt{3} + 4\pi/3$.

Ответ: $8\sqrt{3} + 4\pi/3$.

3. В заполярном городе производственные помещения одной из фирм располагались в вершинах прямоугольника со сторонами 80 метров и 60 метров. Руководство фирмы решило соединить эти помещения крытыми переходами. Но оказалось, что на эти цели фирма может выделить деньги достаточные для строительства только 186 метров переходов. Можно ли на эти деньги построить переходы так, чтобы из любого помещения можно было попасть в любое другое, не выходя на улицу? Предложите вариант прокладки таких переходов или докажите, что его не существует.

Решение. Периметр прямоугольника составляет 280 м. Сумма диагоналей – 200 м. Можно предложить вариант дорог, изображенный на рисунке: AO + OD + OM + MB + MC.



Так как АК = 30, то ОК = 30 tg β , а AO = 30/ cos β. Поэтому

$Y(\beta) = AO + OD + OM + MB + MC = 120/\cos\beta + (80 - 60\,\mathrm{tg}\,\beta)$.

$Y'(\beta) = \frac{120\sin\beta}{\cos^2\beta} - \frac{60}{\cos^2\beta} = 0$. $\sin\beta = \frac{1}{2}$. $\beta = 30^o$ – критическое значение. При таком значении угла

$Y(30^o) = \frac{120\cdot 2}{\sqrt{3}} + 80 - \frac{60}{\sqrt{3}} = 60\sqrt{3} + 80 \approx 184 \prec 185.$

Ответ: Такую сеть переходов построить можно. Минимальная длина всех необходимых переходов равна $60\sqrt{3} + 80 \approx 184$ м.

4. Найдите все натуральные n такие, что сумма первых n-1 членов арифметической прогрессии $3n^3$, $5n^3$, $7n^3$, … кратна 3000.

Разность прогрессии равна $2n^3$. Вычислим сумму первых $n-1$ членов прогрессии. Если первый член равен 1, то n-ый член равен $2n-1$ и сумма первых n членов такой прогрессии равна n^2. Преобразуем искомую сумму:

$$n^3(3+5+\cdots+2(n-1)-1)=n^3((1+3+\cdots+2n-1)-1)=n^3(n^2-1).$$

Задача сведена к следующей.

Найти все натуральные n такие, что число $x=n^3(n-1)(n+1)$ кратно $3000=3\cdot 2^3\cdot 5^3$.

1. Всегда $(n-1)n(n+1)$ кратно 3. Остается условие $n^3(n-1)(n+1)$ кратно $2^3\cdot 5^3$.

2. Пусть $n=2k$. Тогда остается условие $k^3(2k-1)(2k+1)$ кратно 5^3.

2.1. Пусть $k=5l$. Тогда

$$n=10l. \tag{1}$$

2.2. Пусть k взаимно просто с 5. Тогда $(2k-1)(2k+1)=m(m+2)$ кратно 5^3, где $m=2k-1$. Числа m и $m+2$ одновременно не могут быть кратны 5, поэтому ровно одно из них должно быть кратно 125.

2.2.1. Пусть $m=125p=2k-1$, тогда $2k=125p+1$ четно, значит $p=2l+1$, откуда $n=2k=125(2l+1)+1$,

$$n=250l+126. \tag{2}$$

2.2.2. Пусть $m+2=125p=2k-1$, тогда $m=125p-2=2k-1$, $2k=125p-1$ четно, значит $p=2l+1$, откуда $n=2k=125(2l+1)-1$,

$$n=250l+124. \tag{3}$$

3. Пусть $n=2k+1$. Тогда $x=(2k+1)^3 2k(2k+2)=4k(k+1)(2k+1)^3$ и остается условие $k(k+1)(2k+1)^3$ кратно $2\cdot 5^3$. Но $k(k+1)$ четно, поэтому достаточно, чтобы $k(k+1)(2k+1)^3$ было кратно 5^3.

3.1. Пусть $2k+1=5p$. Это число нечетно, если $p=2l+1$, тогда $n=2k+1=5p=5(2l+1)$,

$$n=10l+5. \tag{4}$$

3.2. Пусть $2k+1$ не кратно 5. Тогда $k(k+1)$ кратно 125. Числа k и $k+1$ взаимно простые, ровно одно из них кратно 125.

3.2.1. Если $k=125l$, то

$$n=250l+1. \tag{5}$$

3.2.2. Если $k+1=125l$, то $2k+1=2(125l-1)+1$,

$$n=250l-1. \tag{6}$$

Все возможности исчерпаны. Решение определяется условиями (1)–(6).

Ответ:

$$n=10l,\ 10l+5,\ 250l+1,\ 250l+124,\ 250l+126,\ 250l_1-1,$$

где l неотрицательные целые, l_1 натуральное.

5. Покажите, что функция

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{7}{5} - xy - \frac{x}{2y+3} - \frac{y}{2x+3}}$$

определена для всех чисел $x, y \in [0,1]$. Найдите максимальное и минимальное значения функции в этой области.

Решение. Разобьем подкоренное выражение на два слагаемых

$$(1-xy)+\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{2y+3}-\frac{y}{2x+3}\right).$$

Приводя второе слагаемое к общему знаменателю получаем выражение

$$18-10x^2-10y^2-3x-3y-8xy$$

Покажем, что оно неотрицательно при $x \in [0\,;1]$, $y \in [0\,;1]$. Левая часть последнего неравенства - квадратный трехчлен относительно x с отрицательным старшим членом. Значит, она достигает наименьшего значения на краю промежутка $[0\,;1]$, то есть при $x=0$ или при $x=1$. Аналогично, минимум левой части должен достигаться лишь при $y=0$ или $y=1$. Когда пара $(x\,,\,y)$ принимает значения $(0\,,\,0)$, $(0\,,\,1)$, $(1\,,\,0)$, $(1\,,\,1)$, рассматриваемое выражение равно соответственно 18, 5, 5, 0. Итак второе слагаемое подкоренного выражения неотрицательно.

Неотрицательность выражения $(1-xy)$ при $x \in [0\,;1]$, $y \in [0\,;1]$ очевидна.

Максимальное и минимальное значения принимаются, очевидно, в точках

(0,0) ($f_{\max} = \sqrt{7/5}$) и (1,1) ($f_{\min} = 0$).

Решения варианта 33101 для 10 класса.

1 Решите уравнение с двумя неизвестными sin x sin y=|sin x sin y|.

Ответ. $(\pi n, \pi m), \quad n, m \in \mathrm{Z}$.

Одно из решений системы: $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = 0. \end{cases}$ Откуда получаем $(\pi n, \pi m), n, m \in \mathrm{Z}$. Покажем, что других решений нет. Действительно,

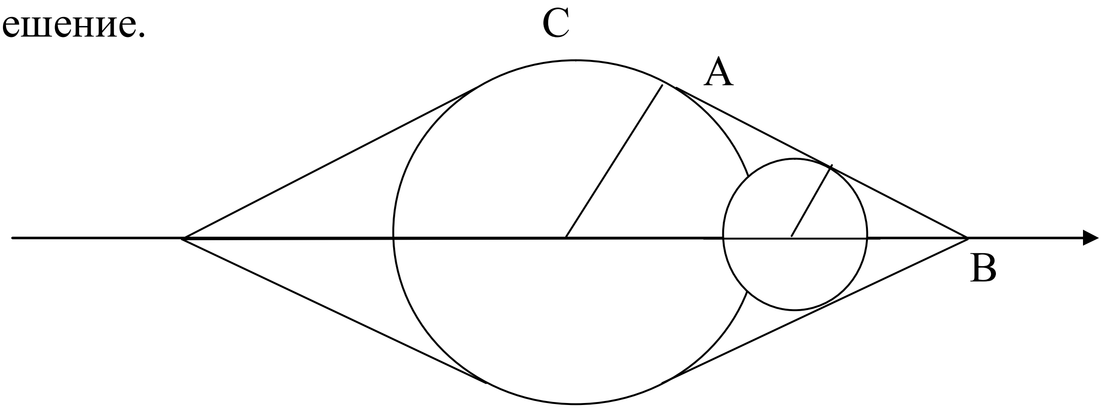
$$\sin^2 x \sin^2 y = \sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y,$$

$$1 > (\sin x \sin y - 1)^2 = \sin^2 x + \sin^2 y + 1 > 1,$$

так как $\sin x \sin y > 0, \sin x \neq 0, \sin y \neq 0$.

2. На прямолинейной просеке стоит лесник. По просеке он может идти со скоростью 4 км/ч, а по лесу – со скоростью 2 км/ч. Изобразите на рисунке в системе координат (ось OX совпадает с просекой, а лесник находится в начале координат) геометрическое место точек, в которые лесник может дойти за один час ходьбы. Найдите площадь области, в точки которой лесник может дойти не более, чем за один час ходьбы.

Решение.



Пусть часть пути x_0 км лесник сначала идет по просеке. Это расстояние он пройдет за время $x_0/4$. Время, равное $1 - x_0/4$, лесник идет по лесу и проходит расстояние $2(1 - x_0/4) = 2 - x_0/2 = r$.

Точки, в которые он за это время может дойти, лежат на окружности с центром в точке $(x_0, 0)$:

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (2 - x_0/2)^2.$$

Касательная AB имеет уравнение $x = 4 - \sqrt{3}\,y$. Но система уравнений

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (2 - x_0/2)^2$$
$$x = 4 - \sqrt{3}\,y$$

имеет единственное решение. В этом легко убедиться, если из второго уравнения подставить x в первое уравнение. Тогда получается квадратное уравнение

$$4y^2 - 2\sqrt{3}(4 - x_0)\,y - 6x_0 + 0{,}75\,X_0^2 + 12 = 0,$$

которое имеет дискриминант

$$D = (\sqrt{3}(4 - x_0))^2 - 4(-6x_0 + 0{,}75\,X_0^2 + 12) = 0.$$

Поэтому прямая AB является касательной и к окружности

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (2 - x_0/2)^2.$$

Заметим, что угол ABO равен 30°. Тогда угол AOC равен 60°, а угол AOC равен 30°. Поэтому площадь треугольника AOB равна $0{,}5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = 2\sqrt{3}$, а площадь сектора AOC равна $1/2 \cdot \pi/6 \cdot 4 = \pi/3$. В итоге площадь области равна $4(2\sqrt{3} + \pi/3) = 8\sqrt{3} + 4\pi/3$.

Ответ: $8\sqrt{3} + 4\pi/3$.

3. Банк «Фантастика» предлагает такие условия срочного вклада: если вклад хранится n дней, то клиенту возвращается кроме положенной суммы ещё $0.001(n^5-n^3)/3$ рублей. На какое целое число дней надо положить 300 000 рублей, чтобы возвращаемая сумма была целым числом?

Задача эквивалентна следующей.

Найти все натуральные n такие, что число $x = n^3(n-1)(n+1)$ кратно $3000 = 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$.

1. Всегда $(n-1)n(n+1)$ кратно 3. Остается условие $n^3(n-1)(n+1)$ кратно $2^3 \cdot 5^3$.

2. Пусть $n = 2k$. Тогда остается условие $k^3(2k-1)(2k+1)$ кратно 5^3.

2.1. Пусть $k = 5l$. Тогда

$$n = 10l. \tag{1}$$

2.2. Пусть k взаимно просто с 5. Тогда $(2k-1)(2k+1) = m(m+2)$ кратно 5^3, где $m = 2k-1$. Числа m и $m+2$ одновременно не могут быть кратны 5, поэтому ровно одно из них должно быть кратно 125.

2.2.1. Пусть $m = 125p = 2k-1$, тогда $2k = 125p+1$ четно, значит $p = 2l+1$, откуда $n = 2k = 125(2l+1)+1$,

$$n = 250l + 126. \tag{2}$$

2.2.2. Пусть $m+2 = 125p = 2k-1$, тогда $m = 125p-2 = 2k-1$, $2k = 125p-1$ четно, значит $p = 2l+1$, откуда $n = 2k = 125(2l+1)-1$,

$$n = 250l + 124. \tag{3}$$

3. Пусть $n = 2k+1$. Тогда $x = (2k+1)^3 2k(2k+2) = 4k(k+1)(2k+1)^3$ и остается условие $k(k+1)(2k+1)^3$ кратно $2 \cdot 5^3$. Но $k(k+1)$ четно, поэтому достаточно, чтобы $k(k+1)(2k+1)^3$ было кратно 5^3.

3.1. Пусть $2k+1 = 5p$. Это число нечетно, если $p = 2l+1$, тогда $n = 2k+1 = 5p = 5(2l+1)$,

$$n = 10l + 5. \tag{4}$$

3.2. Пусть $2k+1$ не кратно 5. Тогда $k(k+1)$ кратно 125. Числа k и $k+1$ взаимно простые, ровно одно из них кратно 125.

3.2.1. Если $k = 125l$, то

$$n = 250l + 1. \tag{5}$$

3.2.2. Если $k+1=125l$, то $2k+1=2(125l-1)+1$,

$$n=250l-1. \tag{6}$$

Все возможности исчерпаны. Решение определяется условиями (1)–(6).

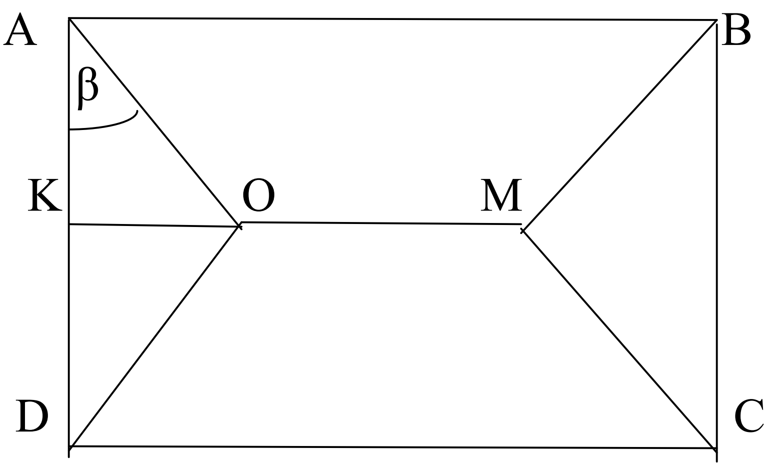
Ответ:

$$n=10l,\ 10l+5,\ 250l+1,\ 250l+124,\ 250l+126,\ 250l_1-1,$$

где l неотрицательные целые, l_1 натуральное.

4. В заполярном городе производственные помещения одной из фирм располагались в вершинах прямоугольника со сторонами 80 метров и 60 метров. Руководство фирмы решило соединить эти помещения крытыми переходами. Но оказалось, что на эти цели фирма может выделить деньги достаточные для строительства только 186 метров переходов. Можно ли на эти деньги построить переходы так, чтобы из любого помещения можно было попасть в любое другое, не выходя на улицу? Предложите вариант прокладки таких переходов или докажите, что его не существует.

Решение. Периметр прямоугольника составляет 280 м. Сумма диагоналей – 200 м. Можно предложить вариант дорог, изображенный на рисунке: AO + OD + OM + MB + MC.



Так как AK = 30, то OK = 30 tg β , а AO = 30/ cos β. Поэтому

Y(β) = AO + OD + OM + MB + MC =120/ cos β + (80 – 60 tg β).

$Y'(\beta) = \frac{120\sin\beta}{\cos^2\beta} - \frac{60}{\cos^2\beta} = 0$. Sinβ = ½. β = 30° – критическое значение. При таком значении угла

$Y(30^o) = \frac{120\cdot 2}{\sqrt{3}} + 80 - \frac{60}{\sqrt{3}} = 60\sqrt{3} + 80 \approx 184 \prec 185.$

Ответ: Такую сеть переходов построить можно. Минимальная длина всех необходимых переходов равна $60\sqrt{3} + 80 \approx 184$ м.

5. Покажите, что функция

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{7}{5} - xy - \frac{x}{2y+3} - \frac{y}{2x+3}}$$

определена для всех чисел $x, y \in [0,1]$. Найдите максимальное и минимальное значения функции в этой области.

Решение. Разобьем подкоренное выражение на два слагаемых

$$(1-xy)+\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{2y+3}-\frac{y}{2x+3}\right).$$

Приводя второе слагаемое к общему знаменателю получаем выражение

$$18-10x^2-10y^2-3x-3y-8xy$$

Покажем, что оно неотрицательно при $x \in [0\,;1]$, $y \in [0\,;1]$. Левая часть последнего неравенства - квадратный трехчлен относительно x с отрицательным старшим членом. Значит, она достигает наименьшего значения на краю промежутка $[0\,;1]$, то есть при $x=0$ или при $x=1$. Аналогично, минимум левой части должен достигаться лишь при $y=0$ или $y=1$. Когда пара $(x\,,y)$ принимает значения $(0\,,0)$, $(0\,,1)$, $(1\,,0)$, $(1\,,1)$, рассматриваемое выражение равно соответственно 18, 5, 5, 0. Итак второе слагаемое подкоренного выражения неотрицательно.

Неотрицательность выражения $(1-xy)$ при $x \in [0\,;1]$, $y \in [0\,;1]$ очевидна.

Максимальное и минимальное значения принимаются, очевидно, в точках

(0,0) ($f_{\max} = \sqrt{7/5}$) и (1,1) ($f_{\min} = 0$).

Решения варианта 33991 для 9 класса.

1. Покажите, что функция

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{7}{5}-xy-\frac{x}{2y+3}-\frac{y}{2x+3}}$$

определена для всех чисел $x,y\in[0,1]$. Найдите максимальное значение функции в этой области.

Решение. Разобьем подкоренное выражение на два слагаемых

$$(1-xy)+\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{2y+3}-\frac{y}{2x+3}\right).$$

Приводя второе слагаемое к общему знаменателю получаем выражение

$$18-10x^2-10y^2-3x-3y-8xy$$

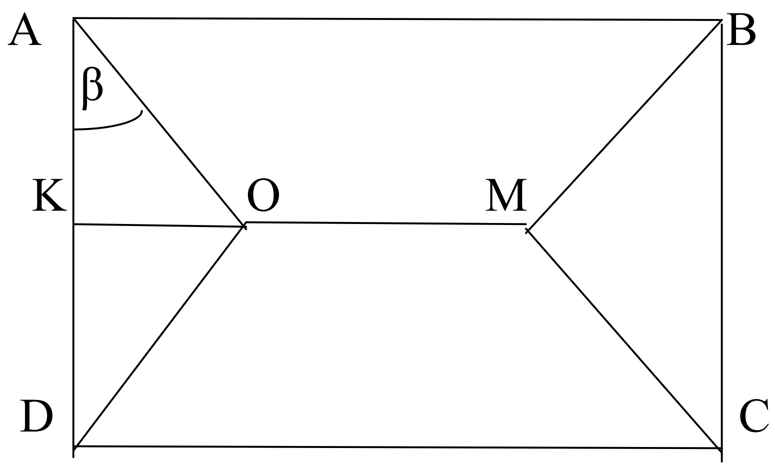
Покажем, что оно неотрицательно при $x\in[0\,;1]$, $y\in[0\,;1]$. Левая часть последнего неравенства - квадратный трехчлен относительно x с отрицательным старшим членом. Значит, она достигает наименьшего значения на краю промежутка $[0\,;1]$, то есть при $x=0$ или при $x=1$. Аналогично, минимум левой части должен достигаться лишь при $y=0$ или $y=1$. Когда пара $(x\,,y)$ принимает значения $(0\,,0)$, $(0\,,1)$, $(1\,,0)$, $(1\,,1)$, рассматриваемое выражение равно соответственно 18, 5, 5, 0. Итак второе слагаемое подкоренного выражения неотрицательно.

Неотрицательность выражения $(1-xy)$ при $x\in[0\,;1]$, $y\in[0\,;1]$ очевидна.

Максимальное значение принимаются, очевидно, в точке $(1,1)$ и равно $f_{\min}=0$.

2. В заполярном городе производственные помещения одной из фирм располагались в вершинах прямоугольника со сторонами 80 метров и 60 метров. Руководство фирмы решило соединить эти помещения крытыми переходами. Но оказалось, что на эти цели фирма может выделить деньги достаточные для строительства только 186 метров переходов. Можно ли на эти деньги построить переходы так, чтобы из любого помещения можно было попасть в любое другое, не выходя на улицу? Предложите вариант прокладки таких переходов или докажите, что его не существует.

Решение. Периметр прямоугольника составляет 280 м. Сумма диагоналей – 200 м. Можно предложить вариант дорог, изображенный на рисунке: AO + OD + OM + MB + MC.



Так как AK = 30, то OK = 30 tg β , а AO = 30/ cos β. Поэтому

Y(β) = AO + OD + OM + MB + MC =120/ cos β + (80 – 60 tg β).

$Y'(\beta) = \frac{120\sin\beta}{\cos^2\beta} - \frac{60}{\cos^2\beta} = 0$. Sinβ = ½. β = 30° – критическое значение. При таком значении угла

$Y(30^o) = \frac{120\cdot 2}{\sqrt{3}} + 80 - \frac{60}{\sqrt{3}} = 60\sqrt{3} + 80 \approx 184 \prec 185.$

Ответ: Такую сеть переходов построить можно. Минимальная длина всех необходимых переходов равна $60\sqrt{3} + 80 \approx 184$ м.

3. Банк «Чудесный» предлагает такие условия срочного вклада: если вклад хранится n дней, то клиенту возвращается кроме положенной суммы ещё $0.001(n^5-n^3)/3$ рублей. На какое целое число дней надо положить 300 000 рублей, чтобы возвращаемая сумма была целым числом?

Задача эквивалентна следующей.

Найти все натуральные n такие, что число $x = n^3(n-1)(n+1)$ кратно $3000 = 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$.

1. Всегда $(n-1)n(n+1)$ кратно 3. Остается условие $n^3(n-1)(n+1)$ кратно $2^3 \cdot 5^3$.

2. Пусть $n = 2k$. Тогда остается условие $k^3(2k-1)(2k+1)$ кратно 5^3.

2.1. Пусть $k = 5l$. Тогда

$$n = 10l. \tag{1}$$

2.2. Пусть k взаимно просто с 5. Тогда $(2k-1)(2k+1) = m(m+2)$ кратно 5^3, где $m = 2k-1$. Числа m и $m+2$ одновременно не могут быть кратны 5, поэтому ровно одно из них должно быть кратно 125.

2.2.1. Пусть $m = 125p = 2k-1$, тогда $2k = 125p+1$ четно, значит $p = 2l+1$, откуда $n = 2k = 125(2l+1)+1$,

$$n = 250l + 126. \tag{2}$$

2.2.2. Пусть $m+2 = 125p = 2k-1$, тогда $m = 125p-2 = 2k-1$, $2k = 125p-1$ четно, значит $p = 2l+1$, откуда $n = 2k = 125(2l+1)-1$,

$$n = 250l + 124. \tag{3}$$

3. Пусть $n = 2k+1$. Тогда $x = (2k+1)^3 2k(2k+2) = 4k(k+1)(2k+1)^3$ и остается условие $k(k+1)(2k+1)^3$ кратно $2 \cdot 5^3$. Но $k(k+1)$ четно, поэтому достаточно, чтобы $k(k+1)(2k+1)^3$ было кратно 5^3.

3.1. Пусть $2k+1 = 5p$. Это число нечетно, если $p = 2l+1$, тогда $n = 2k+1 = 5p = 5(2l+1)$,

$$n = 10l + 5. \tag{4}$$

3.2. Пусть $2k+1$ не кратно 5. Тогда $k(k+1)$ кратно 125. Числа k и $k+1$ взаимно простые, ровно одно из них кратно 125.

3.2.1. Если $k = 125l$, то

$$n = 250l + 1. \tag{5}$$

3.2.2. Если $k+1=125l$, то $2k+1=2(125l-1)+1$,

$$n=250l-1. \tag{6}$$

Все возможности исчерпаны. Решение определяется условиями (1)–(6).

Ответ:

$$n=10l,\ 10l+5,\ 250l+1,\ 250l+124,\ 250l+126,\ 250l_1-1,$$

где l неотрицательные целые, l_1 натуральное.

4. Решите уравнение с двумя неизвестными

$$\sin x \sin y = |\sin x \sin y|.$$

Ответ. $(\pi n, \pi m), \quad n, m \in Z$.

Одно из решений системы: $\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = 0. \end{cases}$ Откуда получаем $(\pi n, \pi m), n, m \in Z$. Покажем, что других решений нет. Действительно,

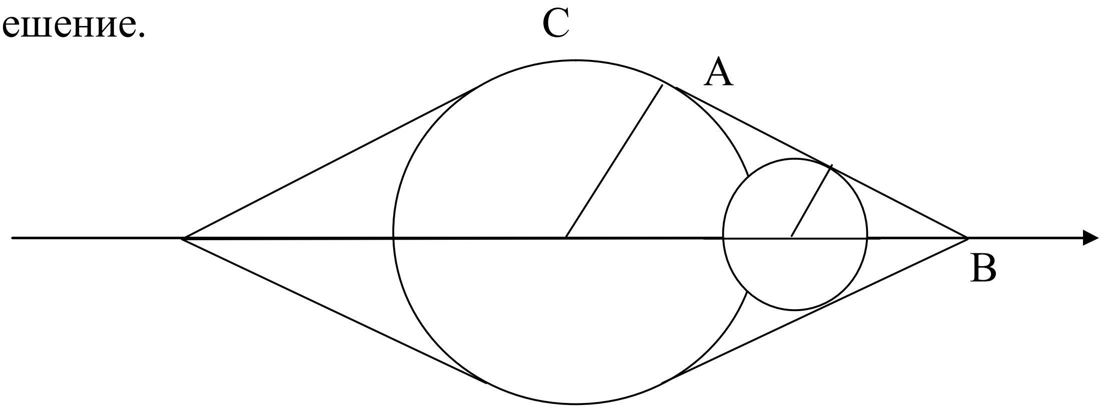
$$\sin^2 x \sin^2 y = \sin^2 x + 2\sin x \sin y + \sin^2 y,$$

$$1 > (\sin x \sin y - 1)^2 = \sin^2 x + \sin^2 y + 1 > 1,$$

так как $\sin x \sin y > 0, \sin x \neq 0, \sin y \neq 0$.

5. На прямолинейной просеке стоит лесник. По просеке он может идти со скоростью 4 км/ч, а по лесу – со скоростью 2 км/ч. Изобразите на рисунке в системе координат (ось OX совпадает с просекой, а лесник находится в начале координат) геометрическое место точек, в которые лесник может дойти за один час ходьбы. Найдите площадь области, в точки которой лесник может дойти не более, чем за один час ходьбы.

Решение.



Пусть часть пути x_0 км лесник сначала идет по просеке. Это расстояние он пройдет за время $x_0/4$. Время, равное $1 - x_0/4$, лесник идет по лесу и проходит расстояние $2(1 - x_0/4) = 2 - x_0/2 = r$.

Точки, в которые он за это время может дойти, лежат на окружности с центром в точке $(x_0, 0)$:

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (2 - x_0/2)^2.$$

Касательная AB имеет уравнение $x = 4 - \sqrt{3}\ y$. Но система уравнений

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (2 - x_0/2)^2$$
$$x = 4 - \sqrt{3}\ y$$

имеет единственное решение. В этом легко убедиться, если из второго уравнения подставить x в первое уравнение. Тогда получается квадратное уравнение

$$4y^2 - 2\sqrt{3}(4 - x_0)\,y - 6x_0 + 0{,}75\ X_0^2 + 12 = 0,$$

которое имеет дискриминант

$$D = (\sqrt{3}(4 - x_0))^2 - 4(-6x_0 + 0{,}75\ X_0^2 + 12) = 0.$$

Поэтому прямая AB является касательной и к окружности

$$(x - x_0)^2 + y^2 = (2 - x_0/2)^2.$$

Заметим, что угол ABO равен 30^o. Тогда угол AOC равен 60^o, а угол AOC равен 30^o. Поэтому площадь треугольника AOB равна $0{,}5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin 30^o = 2\sqrt{3}$, а площадь сектора AOC равна $1/2 \cdot \pi/6 \cdot 4 = \pi/3$. В итоге площадь области равна $4(2\sqrt{3} + \pi/3) = 8\sqrt{3} + 4\pi/3$.

Ответ: $8\sqrt{3} + 4\pi/3$.

Решения варианта 33881 для 8 класса.

1. Дано уравнение в целых числах.

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 3$$

с n неизвестными. Найдите число его решений.

Если $n = 1$, то решений нет. Если $n = 2$, то решений нет.

Если $n = 3$, то $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$ и имеется ровно $2^3 = 8$ решений.

Если $n \geq 4$, то из n слагаемых ровно 3 должны быть равны 1, остальные — 0. Таким образом, число решений есть

$$8C_n^3 = 8\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} = 4n(n-1)(n-2)/3.$$

Ответ: 0, если $n = 1$ или $n = 2$, $4n(n-1)(n-2)/3$, если $n \geq 3$.

2. Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число n такое, что $n \leq x$, например, $[10] = 10, [9{,}93] = 9, \left[\frac{1}{9}\right] = 0, [-1{,}7] = -2$. Найдите все решения уравнения [4x-3]=x/3+12 или докажите, что решений нет.

По определению функции $[t]$ число $x/3+12$ в правой части целое, поэтому $x/3$, x и $4x-3$ целые, следовательно, $[4x-3] = 4x-3$ есть целое. Решим уравнение $4x-3 = x/3+12$. Оно имеет единственный корень $x = 45/11$, который не является целым.

Ответ: нет решений.

3. Найдите все натуральные n такие, что число n^5-n кратно 12. Для каких из них это число кратно 36 ?

1. Разлагая на множители, получим условие $n(n^2+1)(n-1)(n+1)$ кратно $3 \cdot 2^2$.

2. Произведение $(n-1)n(n+1)$ кратно 3, остается условие x кратно 4.

3. Число n^2+1 не может делиться на 4, следовательно, $n(n-1)(n+1)$ кратно 4, а это возможно тогда и только тогда, когда

$$n = 4k.\ 4k \pm 1. \tag{1}$$

(Если $n = 4k+2$, то легко проверить, что $n(n^2-1)$ не делится на 4.)

4. Для делимости на 36 необходима делимость на 9. Рассматривая числа (1) и различные остатки $l = 0, 1, \ldots, 8$ от деления k на 9, находим все решения в виде

$$n = 36l,\ 36l \pm 1,\ 36l \pm 9,\ 36l \pm 17,\ 36l + 18.$$

Ответ: число $n^5 - n$ кратно 12 тогда и только тогда, когда $n = 4k$, $4k+1, 4k_1 - 1$;
число $n^5 - n$ кратно 36 тогда и только тогда, когда $n = 36l,\ 36l+1,\ 36l+9,\ 36l+17,\ 36l+18,\ 36l_1-1,\ 36l_1-9,\ 36l_1-17$, где k, l неотрицательные целые, k_1, l_1 натуральные.

4. Два насоса имеют производительность p_1 и p_2. Каждый из них, работая по отдельности, наполняет резервуар не дольше одного часа, но и не быстрее, чем за полчаса. Производительность p_2 не меньше p_1, но не превосходит $2p_1$. Если t_1 – время заполнения первым насосом объёма p_2, а t_2 – время заполнения вторым насосом объёма p_1, то в каких пределах находится разность $t_1 - t_2$? При каком соотношении между p_1 и p_2 эта разность принимает наименьшее и наибольшее значения?

За единицу производительности примем 1 резервуар в час. Имеем $1 \le p_1 \le p_2 \le 2p_2 \le 4$. Тогда

$$t_1 = \frac{p_2}{p_1} \ge \frac{p_1}{p_2} = t_2.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t - 1/t$ при $t \in [1; 2]$. Имеем $f(t) \ge 0 = f(1)$, $f(2) = 3/2$. Покажем, что $f(t) \le 3/2$ при всех $t \in [1; 2]$. В самом деле,

$$f(t) - \frac{3}{2} = \frac{2t^2 - 3t - 2}{2t} = \frac{(2t+1)(t-2)}{2t} \le 0,$$

если $1 \le t \le 2$.

Ответ: минимальное значение 0 при $p_1 = p_2$, максимальное значение $3/2$ при $p_2 = 2p_1$.

5. Две цепочки составлены из одинаковых круглых колец. В первой цепочке на два кольца больше. В вытянутом состоянии длина первой цепочки 53 мм, второй – 43 мм. Найдите число колец в каждой цепочке, внутренний диаметр каждого кольца и диаметр проволоки, из которой сделаны эти кольца.

Ответ. 8 и 10.

Решение. 1) Пусть D – внутренний диаметр кольца, d – диаметр проволоки, из которой сделано кольцо. Тогда $nD + 2d$ – длина цепочки, из n колец. Имеем систему:

$$\begin{cases} nD + 2d = 43, \\ (n+2)D + 2d = 53. \end{cases}$$

Из этой системы находим $D = 5$. Тогда $4n+2d=30$. Поскольку $2d<D$ имеем $2d = 43 - 5n < 5$. Единственное натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству – это $n = 8$. Получаем ответ: 8 и 10 колец в цепочках.

Решения варианта 33771 для 7 класса.

1. Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число n такое, что $n \le x$, например, $[10] = 10, [9{,}93] = 9, \left[\frac{1}{9}\right] = 0, [-1{,}7] = -2$. Найдите все решения уравнения [2x-1]=x+2 или докажите, что решений нет.

По определению функции $[t]$ число $x + 2$ в правой части целое, поэтому x и $2x - 1$ целые, следовательно, $[2x - 1] = 2x - 1$ есть целое нечетное. Решим уравнение $2x - 1 = x + 2$. Оно имеет единственный корень $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

2. Найдите все натуральные n такие, что число n^4-n^2 кратно 300. При каких n это число кратно 500?

1. Так как $(n-1)n(n+1)$ кратно 3, $n^2(n-1)(n+1)$ кратно 4 при любых целых n, остается только условие x кратно 25.

2. Из множителей n^2, $n-1$, $n+1$ только один может быть кратен 25, поэтому все решения задачи о делимости на 300 имеют вид

$$n = 5k,\ 25m \pm 1.$$

3. Для делимости x на 500 необходима делимость $n^2(n-1)(n+1)$ на 125.

3.1. Если $n = 5k$, то $(n+1)(n-1)$ не кратно 125, x кратно 500 только при $k = 5p$,

$$n = 25p.$$

3.2. Если $n = 25m \pm 1$, то n^2 не кратно 125 , на 125 может делиться только $(n-1)(n+1)$ и, более того, только ровно один из множителей. Получаем решения

$$n = 125q \pm 1.$$

Ответ: x кратно 300 только тогда, когда $n = 5k,\ 25k+1,\ 25m-1$; x кратно 500 тогда и только тогда, когда $n = 25k,\ 125k+1,\ 125m-1$, где k неотрицательные целые, m натуральные.

3. Две цепочки составлены из одинаковых круглых колец. В первой цепочке на два кольца больше. В вытянутом состоянии длина первой цепочки 53 мм, второй – 43 мм. Найдите число колец в каждой цепочке.

Ответ. 8 и 10.

Решение. 1) Пусть D – внутренний диаметр кольца, d – диаметр проволоки, из которой сделано кольцо. Тогда $nD + 2d$ – длина цепочки, из n колец. Имеем систему:

$$\begin{cases} nD + 2d = 43, \\ (n+2)D + 2d = 53. \end{cases}$$

Из этой системы находим $D = 5$. Тогда $4n+2d=30$. Поскольку $2d<D$ имеем $2d = 43 - 5n < 5$. Единственное натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству – это $n = 8$. Получаем ответ: 8 и 10 колец в цепочках.

4. Две гусеницы двигаются равномерно по прямолинейной садовой дорожке со скоростями v_1 и v_2. Время, которое требуется второй гусенице для преодоления всей дорожки не больше, чем время, требуемое на тот же путь первой гусенице, однако оно не меньше часа. Если первая гусеница проползёт путь v_2, а вторая гусеница сразу же вслед за этим проползёт путь v_1, то в каких пределах будет находиться время такого перемещения? При каких соотношениях скоростей это время будет наименьшим и наибольшим?

За единицу скорости примем 1 дорожку в час. Имеем $0 \le v_1 \le v_2 \le 1$. Положим $x = v_1/v_2$, тогда $0 \le x \le 1$, и искомое время есть функция $T(x) = x + 1/x$. Минимальное ее значение есть $T(1) = 2$ (при $v_1 = v_2$). Покажем, что максимального значения не существует, т. е. для любого $M > 0$ найдется $x_0 \in (0; 1]$, при котором $T(x_0) > M$. Достаточно рассмотреть лишь $M > 2$. Если $x_0 = 1/M$, то $T(x_0) = 1/M + M > M$, так как $M > 0$.

Ответ: минимальное значение время имеет при $v_1 = v_2$, максимального значения не существует.

5. Дано уравнение в целых числах.

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 2$$

с n неизвестными. Найдите число его решений.

Если $n = 1$, то решений нет.

Если $n = 2$, то $x_1^2 = x_2^2 = 1$ и имеется ровно 4 решения.

Если $n \geq 3$, то из n слагаемых ровно 2 должны быть равны 1, остальные — 0. Таким образом, число решений есть $4C_n^2 = 2n(n-1)$.

Ответ: 0, если $n = 1$, $2n(n-1)$, если $n \geq 2$.

Решение варианта 32992 для 9 класса

1. В точке $O(0,0)$ находится электростанция, в точках $A(0,6)$, $B(8,6)$, $C(8,0)$ — потребители энергии. Точки $P(x,3)$, $Q(8-x,3)$ выбраны так, что функция $F(\beta)=OP+AP+PQ+BQ+CQ$ принимает наименьшее значение, где β — угол OAP. Возможно ли, что $\beta=60^\circ,\ 45^\circ,\ 30^\circ$?

Имеем $OP=AP=BQ=CQ=3/\cos\beta,\ PQ=8-2(3\operatorname{tg}\beta)$,

$$F(\beta)=12/\cos\beta+8-6\operatorname{tg}\beta=8+6\frac{2-\sin\beta}{\cos\beta}.$$

Функция $F(\beta)$ имеет минимум в той же точке, что и функция $G(\beta)=\frac{2-\sin\beta}{\cos\beta}$. Покажем, что точкой минимума является $\beta=30^\circ$. Имеем $G(30^\circ)=\sqrt{3}$. Положим $x=\sin\beta$ и докажем неравенство $G(\beta)\geq\sqrt{3}$. Учитывая, что $\cos\beta=\sqrt{1-x^2}$, неравенство сведем к следующему: $\sqrt{3(1-x^2)}\leq 2-x$. Возводя последнее в квадрат, после очевидных преобразований получаем $4x^2-4x+1\geq 0$, т. е. минимум достигается при $x=1/2$ и $\beta=30^\circ$.

Ответ: угол равен 30°.

2. Уравнение $f_1(x)=x^2+p_1x+q_1=0$ имеет два различных корня, оба меньше 2014. Уравнение $f_2(x)=x^2+p_2x+q_2=0$ также имеет два различных корня, оба больше 2014. Может ли уравнение $g(x)=f_1(x)+2f_2(x)=0$ иметь два корня, один из которых меньше, а другой больше 2014?

В силу условия на корни получаем, что $f_1(2014)>0$, $f_2(2014)>0$ и $g(2014)>0$. Таким образом, число 2014 находится между корнями функции $g(x)$ (если они есть).

Ответ: не может.

3. Найдите все натуральные числа x такие, что $2x^2+x-6$ является квадратом простого числа.

Разлагая на множители $2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)$ и $p^2=(-1)(-p^2)=(-p)(-p)=(-p^2)(-1)=1(p^2)=pp=(p^2)1$, получаем системы из двух линейных уравнений относительно x и p.

Только две из них

$$2x-3=x-2=p$$

и

$$2x-3=1,\qquad x+2=p^2$$

имеют требуемые решения.

Ответ: $x\in\{2;5\}$.

4. Лучшего спортсмена года выбирают 20 экспертов из 5 кандидатов. Каждый эксперт подает один голос ровно за одного кандидата. Сколькими способами могут распределиться голоса? Два журналиста, не входящие в число экспертов, считают, что один из кандидатов не может быть признан лучшим, а остальные четверо вполне достойны. С какой вероятностью этот спортсмен будет выбран лучшим при начальном (20) и расширенном (22) составе голосующих, включающим таких журналистов?

Если выбор из 5 кандидатов проводят 20 экспертов, то результат выбора представляется набором $(x_1, \ldots, x_5)$, где x_i — неотрицательные целые числа, количество голосов за кандидата $i = 1, 2, 3, 4, 5$, при этом $x_1 + \cdots + x_5 = 20$. Положим $y_1 = x_i + 1$, тогда числа y_i натуральные и $y_1 + \cdots + y_5 = 25$. Соответствие между наборами $(x_1, \ldots, x_5)$ и $(y_1, \ldots, y_5)$ взаимно однозначно. Количество наборов равно количеству разбиений числа 25 в сумму 5 натуральных слагаемых. Изобразим число 25 рядом их 25 точек, наборы точек, соответствующие слагаемым, разделим палочками. Таким образом, надо поставить 4 палочки в 24 промежутка между точками, поэтому количество распределений голосов равно количеству таких способов поставить 4 палочки в промежутки между 25 точками, т. е.

$$\frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = 10626.$$

Если к этому коллективу экспертов присоединить еще двух указанных журналистов, то полученное число способов надо умножить на 4^2 (каждый журналист выбирает лишь из 4 кандидатов независимо от выбора остальных голосующих). Вероятность выбора фиксированного спортсмена 20 экспертами равна $1/10626$, а при участии двух журналистов она уменьшится в 16 раз и станет $1/170016$.

Ответ : 10626, $1/10626$, $1/170016$.

5. Найдите все возможные значения углов треугольника, у которого длины высот целые, а радиус вписанной окружности равен 1.

Длина любой высоты больше диаметра $2r$ вписанного круга, т. е. больше 2. Она является целым числом, поэтому не меньше 3. Пусть a — наибольшая сторона треугольника, h — высота на эту сторону, $h \geq 3$. Тогда площадь S треугольника не меньше, чем $3a/2$. Рассмотрим периметр P. Из выражения $S = Pr/2$ следует, что $S \leq 3a/2$. Таким образом, $S = 3a/2$, $P = 3a$ и треугольник оказывается правильным, его углы все равны 60°.

Ответ: три угла по 60°.

Решение варианта 32102 для 10 класса

1. В точке $O(0,0)$ находится электростанция, в точках $A(0,6)$, $B(8,6)$, $C(8,0)$ — потребители энергии. Точки $P(x,3)$, $Q(8-x,3)$ выбраны так, что функция $F(\beta) = OP+AP+PQ+BQ+CQ$ принимает наименьшее значение, где β — угол OAP. Найдите точку минимума функции $F(\beta)$.

Имеем $OP = AP = BQ = CQ = 3/\cos\beta$, $PQ = 8 - 2(3\operatorname{tg}\beta)$,

$$F(\beta) = 12/\cos\beta + 8 - 6\operatorname{tg}\beta = 8 + 6\frac{2-\sin\beta}{\cos\beta}.$$

Функция $F(\beta)$ имеет минимум в той же точке, что и функция $G(\beta) = \frac{2-\sin\beta}{\cos\beta}$. Покажем, что точкой минимума является $\beta = 30^\circ$. Имеем $G(30^\circ) = \sqrt{3}$. Положим $x = \sin\beta$ и докажем неравенство $G(\beta) \geq \sqrt{3}$. Учитывая, что $\cos\beta = \sqrt{1-x^2}$, неравенство сведем к следующему: $\sqrt{3(1-x^2)} \leq 2-x$. Возводя последнее в квадрат, после очевидных преобразований получаем $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$, т. е. минимум достигается при $x = 1/2$ и $\beta = 30^\circ$.

Ответ: $(30^\circ, 8+6\sqrt{3})$.

2. Уравнение $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1 = 0$ имеет два различных корня, оба меньше 2014. Уравнение $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2 = 0$ также имеет два различных корня, оба больше 2014. Может ли уравнение $g(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0$ иметь два корня, один из которых меньше, а другой большк 2014? Может ли оно не иметь вещественных корней?

В силу условия на корни получаем, что $f_1(2014) > 0$, $f_2(2014) > 0$ и $g(2014) > 0$. Таким образом, число 2014 находится между корнями функции $g(x)$ (если они есть). Заметим, что $g(x) = 2x^2 + (p_1+p_2)x + (q_1+q_2)$ и дискриминант $D = (p_1+p_2)^2 - 8(q_1+q_2)$ может быть отрицательным. Например, если $f_1(x) = x^2 - x$ и $f_2(x) = (x-3000)(x-4000)$, то $D = (7001)^2 - 8\cdot 12\cdot 10^6 < 8\cdot 10^6(8-12) < 0$.

Ответ: Не может иметь один корень меньше 2014, а другой больше 2014. Может не иметь корней.

3. Найдите все целые числа x такие, что $2x^2 + x - 6$ является квадратом простого числа.

Разлагая на множители $2x^2 + x - 6 = (2x-3)(x+2)$ и $p^2 = (-1)(-p^2) = (-p)(-p) = (-p^2)(-1) = 1(p^2) = pp = (p^2)1$, получаем системы из двух линейных уравнений относительно x и p.

Только три из них

$$2x - 3 = x - 2 = p,$$

$$2x - 3 = -p^2, \quad x + 2 = -1$$

и

$$2x - 3 = 1, \quad x + 2 = p^2$$

имеют требуемые решения $(x; p) = (5; 7),\ (-3; 3),\ (2; 2)$.

Ответ: $x \in \{-3; 2; 5\}$.

4. Лучшего спортсмена года выбирают 20 экспертов из 5 кандидатов. Каждый эксперт подает один голос ровно за одного кандидата. Сколькими способами могут распределиться голоса? Два журналиста, не входящие в число экспертов, считают, что один из кандидатов не может быть признан лучшим, а остальные четверо вполне достойны. С какой вероятностью этот спортсмен будет выбран лучшим при начальном (20) и расширенном (22) составе голосующих, включающим таких журналистов?

Если выбор из 5 кандидатов проводят 20 экспертов, то результат выбора представляется набором $(x_1, \ldots, x_5)$, где x_i — неотрицательные целые числа, количество голосов за кандидата $i = 1, 2, 3, 4, 5$, при этом $x_1 + \cdots + x_5 = 20$. Положим $y_1 = x_i + 1$, тогда числа y_i натуральные и $y_1 + \cdots + y_5 = 25$. Соответствие между наборами $(x_1, \ldots, x_5)$ и $(y_1, \ldots, y_5)$ взаимно однозначно. Количество наборов равно количеству разбиений числа 25 в сумму 5 натуральных слагаемых. Изобразим число 25 рядом их 25 точек, наборы точек, соответствующие слагаемым, разделим палочками. Таким образом, надо поставить 4 палочки в 24 промежутка между точками, поэтому количество распределений голосов равно количеству таких способов поставить 4 палочки в промежутки между 25 точками, т. е.

$$\frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = 10626.$$

Если к этому коллективу экспертов присоединить еще двух указанных журналистов, то полученное число способов надо умножить на 4^2 (каждый журналист выбирает лишь из 4 кандидатов независимо от выбора остальных голосующих). Вероятность выбора фиксированного спортсмена 20 экспертами равна $1/10626$, а при участии двух журналистов она уменьшится в 16 раз и станет $1/170016$.

Ответ : 10626, $1/10626$, $1/170016$.

5. Найдите все возможные значения углов треугольника, у которого длины высот целые, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите объем прямой призмы, основанием которой является такой треугольник, а высота призмы равна периметру ее основания.

Длина любой высоты больше диаметра $2r$ вписанного круга, т. е. больше 2. Она является целым числом, поэтому не меньше 3. Пусть a — наибольшая сторона треугольника, h — высота на эту сторону, $h \geq 3$. Тогда площадь S треугольника не меньше, чем $3a/2$. Рассмотрим периметр P. Из выражения $S = Pr/2$ следует, что $S \leq 3a/2$. Таким образом, $S = 3a/2$, $P = 3a$ и треугольник оказывается правильным, его углы все равны 60°. Приравнивая выражения $S = a^2\sqrt{3}/4 = Pr/2$ для площади правильного треугольника, находим $a = 2\sqrt{3}$, $S = 3\sqrt{3}$. Высота призмы равна $H = P = 6\sqrt{3}$, и ее объем есть $V = SH = 54$.

Ответ: три угла по 60°, объем призмы 54 (куб. ед.).

Решение варианта 32112 для 11 класса

1. В точке $O(0,0)$ находится электростанция, в точках $A(0,6)$, $B(8,6)$, $C(8,0)$ — потребители энергии. Найдите внутри фигуры $OABC$ точки P, Q так, чтобы углы OAP, AOP, CBQ, BCQ были равны между собой и суммарная длина $F = OP + AP + PQ + BQ + CQ$ отрезков электрокабеля была наименьшей. Будет ли она не больше 19?

Пусть эти углы равны β. Тогда треугольники OAP, CQB равнобедренные и равны между собой, $OP = AP = BQ = CQ = 3/\cos\beta$, $PQ = 8 - 2(3\operatorname{tg}\beta)$,

$$F = F(\beta) = 12/\cos\beta + 8 - 6\operatorname{tg}\beta = 8 + 6\frac{2-\sin\beta}{\cos\beta}.$$

Функция $F(\beta)$ имеет минимум в той же точке, что и функция $G(\beta) = \frac{2-\sin\beta}{\cos\beta}$. Покажем, что точкой минимума является $\beta = 30°$. Имеем $G(30°) = \sqrt{3}$. Положим $x = \sin\beta$ и докажем неравенство $G(\beta) \geq \sqrt{3}$. Учитывая, что $\cos\beta = \sqrt{1-x^2}$, неравенство сведем к следующему: $\sqrt{3(1-x^2)} \leq 2 - x$. Возводя последнее в квадрат, после очевидных преобразований получаем $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$, т. е. минимум достигается при $x = 1/2$ и $\beta = 30°$. Минимальное значение функции F равно $8 + 6\sqrt{3} < 19$.

Ответ: $P(\sqrt{3}; 3), Q(8 - \sqrt{3}; 3), \quad (8 + 6\sqrt{3}) < 19$.

2. Уравнение $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1 = 0$ имеет два различных корня, оба меньше 2014. Уравнение $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2 = 0$ также имеет два различных корня, оба больше 2014. Может ли уравнение $g(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0$ не иметь вещественных корней, иметь два различных вещественных корня, иметь два вещественных корня, один из которых меньше, а другой больше 2014?

В силу условия на корни получаем, что $f_1(2014) > 0$, $f_2(2014) > 0$ и $g(2014) > 0$. Таким образом, число 2014 находится между корнями функции $g(x)$ (если они есть). Заметим, что $g(x) = 2x^2 + (p_1 + p_2)x + (q_1 + q_2)$ и дискриминант $D = (p_1 + p_2)^2 - 8(q_1 + q_2)$ может быть отрицательным. Например, если $f_1(x) = x^2 - x$ и $f_2(x) = (x - 3000)(x - 4000)$, то $D = (7001)^2 - 8 \cdot 12 \cdot 10^6 < 8 \cdot 10^6(8 - 12) < 0$. Если $f_1(x) = x^2 - 2000x$ и $f_2(x) = (x - 2100)(x - 2200)$, то

$$D = (6300)^2 - 8 \cdot 462 \cdot 10^4 = (63^2 - 8 \cdot 462)10^4 = (3969 - 3696)10^4 > 0$$

и функция $g(x)$ имеет два различных вещественных корня.

Ответ: Не может иметь один корень меньше 2014, а другой больше 2014. Может не иметь корней, может иметь два различных корня.

3. Найдите все целые числа x, y такие, что $2(xy)^2 + xy - 6$ является квадратом простого числа.

Положим $t = xy$, t целое. Разлагая на множители $2t^2+t-6 = (2t-3)(t+2)$ и $p^2 = (-1)(-p^2) = (-p)(-p) = (-p^2)(-1) = 1(p^2) = pp = (p^2)1$, получаем системы из двух линейных уравнений относительно t и p. Только три из них

$$2t - 3 = t - 2 = p,$$

$$2t - 3 = -p^2, \quad t + 2 = -1$$

и

$$2t - 3 = 1, \quad t + 2 = p^2$$

имеют требуемые решения $(t;p) = (5;7),\ (-3;3),\ (2;2)$. Из разложений $t = xy = 5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = (-1)(-5) = (-5)(-1)$ получим четыре пары $(x;y)$. Аналогично находятся 8 остальных решений.

Ответ: $(x;y) = (-5;-1),\ (-1;-5),\ (1;5),\ (5;1),$
$(-3;1),\ (1;-3),\ (-1;3),\ (3;-1),\ (-2;-1),\ (-1;-2),\ (1;2),\ (2,1).$

4. Лучшего спортсмена года выбирают 20 экспертов из 5 кандидатов. Каждый эксперт подает один голос ровно за одного кандидата. Сколькими способами могут распределиться голоса? Два журналиста, не входящие в число экспертов, считают, что один из кандидатов не может быть признан лучшим, а остальные четверо вполне достойны. С какой вероятностью этот спортсмен будет выбран лучшим при начальном (20) и расширенном (22) составе голосующих, включающим таких журналистов?

Если выбор из 5 кандидатов проводят 20 экспертов, то результат выбора представляется набором $(x_1, \ldots, x_5)$, где x_i — неотрицательные целые числа, количество голосов за кандидата $i = 1, 2, 3, 4, 5$, при этом $x_1 + \cdots + x_5 = 20$. Положим $y_1 = x_i + 1$, тогда числа y_i натуральные и $y_1 + \cdots + y_5 = 25$. Соответствие между наборами $(x_1, \ldots, x_5)$ и $(y_1, \ldots, y_5)$ взаимно однозначно. Количество наборов равно количеству разбиений числа 25 в сумму 5 натуральных слагаемых. Изобразим число 25 рядом их 25 точек, наборы точек, соответствующие слагаемым, разделим палочками. Таким образом, надо поставить 4 палочки в 24 промежутка между точками, поэтому количество распределений голосов равно количеству таких способов поставить 4 палочки в промежутки между 25 точками, т. е.

$$\frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{4!} = 10626.$$

Если к этому коллективу экспертов присоединить еще двух указанных журналистов, то полученное число способов надо умножить на 4^2 (каждый журналист выбирает лишь из 4 кандидатов независимо от выбора остальных голосующих). Вероятность выбора фиксированного спортсмена 20 экспертами равна $1/10626$, а при участии двух журналистов она уменьшится в 16 раз и станет $1/170016$.

Ответ : 10626, $1/10626$, $1/170016$.

5. Найдите все возможные значения углов треугольника, у которого длины высот целые, а радиус вписанной окружности равен 1. Найдите объем пирамиды, основанием которой является такой треугольник, а высота пирамиды равна периметру ее основания.

Длина любой высоты больше диаметра $2r$ вписанного круга, т. е. больше 2. Она является целым числом, поэтому не меньше 3. Пусть a — наибольшая сторона треугольника, h — высота на эту сторону, $h \geq 3$. Тогда площадь S треугольника не меньше, чем $3a/2$. Рассмотрим периметр P. Из выражения $S = Pr/2$ следует, что $S \leq 3a/2$. Таким образом, $S = 3a/2$, $P = 3a$ и треугольник оказывается правильным, его углы все равны 60°. Приравнивая выражения $S = a^2\sqrt{3}/4 = Pr/2$ для площади правильного треугольника, находим $a = 2\sqrt{3}$, $S = 3\sqrt{3}$. Высота пирамиды равна $H = P = 6\sqrt{3}$, и ее объем есть $V = SH/3 = 18$.

Ответ: три угла по 60°, объем пирамиды 18 (куб. ед.).