Материалы заданий Олимпиады школьников «Надежда энергетики»
по предмету «математика» в 2014/2015 учебном году

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к усвоению образовательных программ технических ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления, умеющих математически "смоделировать" реальные ситуации из различных предметных областей и применить к ним наиболее подходящие математические методы.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на полное и безупречное решение. Они охватывают все разделы школьной программы, но носят, в большинстве, комплексный характер, позволяющий варьировать оценки в зависимости от проявленных в решении творческих подходов и продемонстрированных технических навыков. Участники должны самостоятельно определить разделы и теоретические факты программы, применимые в каждой задаче, разбить задачу на подзадачи, грамотно выполнить решение каждой подзадачи, синтезировать решение всей задачи из решений отдельных подзадач.

Успешное выполнение олимпиадной работы не требует знаний, выходящих за пределы школьной программы, но, как видно из результатов олимпиады, доступно не каждому школьнику, поскольку требует творческого подхода, логического мышления, умения увидеть и составить правильный и оптимальный план решения, четкого и технически грамотного выполнения каждой части решения, отбора допустимых решений из возможного их множества.

Умение справляться с такими заданиями приходит к участникам с опытом, который вырабатывается на тренировочном и отборочном этапах Олимпиады.

Решения вариантов заключительного этапа

7111 11 класс

1. 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников – сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

Решение.

Пусть звонки с Громофона (внутрисетевые) стоят x копеек. Тогда доход Громофона составляет с внутрисетевых звонков $x \cdot 200 \cdot 199$ и с межсетевых $3 \cdot x \cdot 100 \cdot 200$, т.е. всего $998 \cdot x$ рублей.

Монолайн получает доход с внутрисетевых звонков: $43 \cdot 100 \cdot 99 = 4257$ руб. Со звонков на Громофон: $3 \cdot 43 \cdot 100 \cdot 200 = 25800$ руб. Всего 30057 руб.

Получаем систему неравенств

$$998 \cdot x > 40057,$$
$$x < 43,$$

которую нужно решить в целых числах.

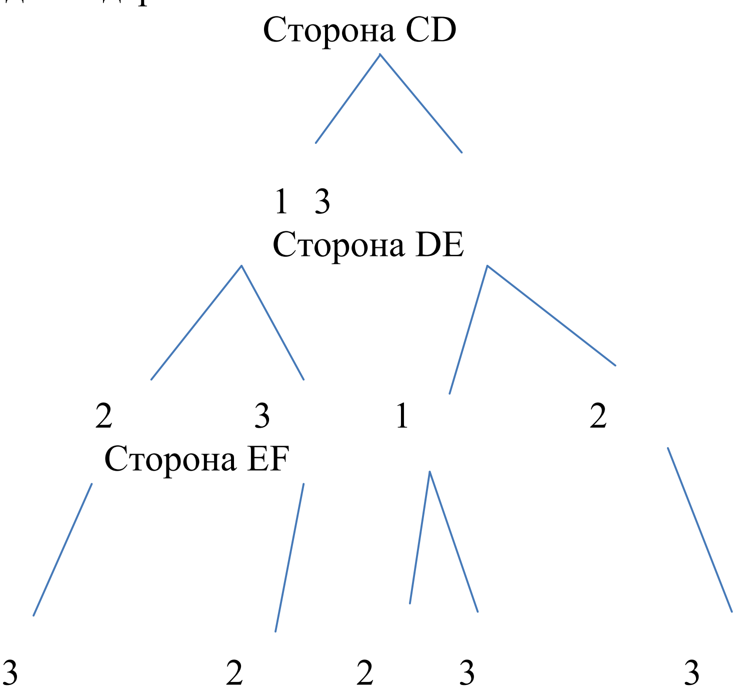
Ответ: 41 или 42 коп. за минуту.

2. Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

Решение.

1. Явной проверкой проверяется, что 2 цветов не достаточно, а 3 уже достаточно (нужно привести пример, скажем, 1-2-1-2-3).

2. Обозначим столбы забора A, B, C, D, E. Пусть сторона AB окрашена цветом 1, а BC цветом 2 (они должны быть обязательно разного цвета). Составим далее дерево возможностей.



Итак, получили 5 возможных вариантов. Но так как число перестановок трех цветов равно 6, то меняя значения цветов 1, 2 и 3, мы получим 6 °5 = 30 вариантов.

Ответ: 3 цвета, 30 способов.

3. Карта города разделена вертикальными и горизонтальными прямыми на n^2 областей, условно называемых «квадратами» и расположенных в n горизонтальных рядов и n колонок. В каждом «квадрате» располагают или не располагают одну трансформаторную подстанцию. Во всех рядах число подстанций различно. Может ли при этом число подстанций в каждой колонке не совпадать ни с одним числом подстанций в ряду? Если это возможно не всегда, то при каких условиях?

Решение.
Число подстанций в ряду может быть равно одному из чисел 0, 1, 2, …, n.
Пусть n_i – число подстанций в ряду *i*. n_i – различные элементы множества $\{0,1,\ldots,n\}$, они принимают все значения из $\{0,1,\ldots,n\}$ кроме единственного значения *k*. Тогда в каждой колонке ровно *k* подстанций. Общее число подстанций есть $0+1+\ldots+n-k=\frac{n(n+1)}{2}-k$. С другой стороны, оно равно *nk*. Итак,

$$\frac{n(n+1)}{2}-k=nk.$$

Отсюда $n=2k$.
Пример квадратной таблицы из 0 и 1 порядка $n=2k$ для каждого k следующий.

O	B
E	D

Это таблица, состоящая из 4 квадратных блоков $n\times n$
Блок O – матрица из нулей.
Блок B – треугольная матрица с единицами в правом нижнем углу и нулевой побочной диагональю.
Блок E – матрица из единиц.
Блок D – треугольная матрица с единицами в левом нижнем углу и единичной главной диагональю.

Ответ. Это возможно, если размер таблицы $n=2k$, где k – число, не равное количеству подстанций ни в одном из рядов.

4. Известно, что $2^{x+y+z}+(0,5)^{x+y+z}=a$, $2^{x}+(0,5)^{y}=b$, $2^{y}+(0,5)^{z}=c$. Выразите через a, b и c величину $2^{z}+(0,5)^{x}$.

Решение.

Обозначим $2^{z}+(0,5)^{x}=d$. Тогда $bcd=a+b+c+d$ откуда $d=\dfrac{a+b+c}{bc-1}$.

Остается проверить, когда знаменатель обращается в ноль. Это будет, если $\left(2^{x}+(0,5)^{y}\right)\left(2^{y}+(0,5)^{z}\right)=1$ или $2^{x+y}+2^{x-z}+2^{-y-z}=0$. Это невозможно, т.к. все слагаемые строго положительны.

Ответ. $\dfrac{a+b+c}{bc-1}$ при любых значениях параметров.

5. На доске написано 25 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 9 чисел делятся на 13, 10 чисел делятся на 14, 11 чисел делятся на 15. Докажите, что среди них есть число, большее 345.

Решение.

Среди написанных чисел, по крайней мере 4 числа делятся на 2 числа из трех (13, 14 и 15). Среди этих чисел, по крайней мере 2 делятся на одну и ту же тару чисел. Наибольшее из них не меньше, чем $2\cdot13\cdot14=364$.

6. Целой частью $[x]$ произвольного числа x называется наибольшее целое m такое, что $m\le x$. Решите неравенство $\left[\cos^{2}\left(2+3^{x}\right)\right]\ge\dfrac{3^{x}}{2}$.

Решение.

Из неравенств $0\le\cos^2(2+3^x)\le1$ следует, что левая часть может принимать только значения 0 и 1.

1. Пусть $[\cos^2(2+3^x)]=0$. Тогда $0\ge 3^x/2$, что невозможно.

2. Пусть $[\cos^2(2+3^x)]=1$. Тогда $3^x=\pi n-2, n\in\mathbb{Z}$, и $1\ge(\pi n-2)/2$, откуда $n\le1$. Из условия $3^x=\pi n-2>0$ получаем $n\ge1$. Таким образом, $n\le1$ и $n\ge1$, т. е. $n=1$, $3^x=\pi-2$, $x=\log_3(\pi-2)$.

Ответ: $\{\log_3(\pi-2)\}$.

7. В трапеции *ABCD* с основаниями *AB* и *CD* диагонали *AC* и *BD* перпендикулярны. Сравните величины *BC+AD* и *AB+CD*.

Решение.

Пусть O – точка пересечения диагоналей четырехугольника. Положим $OA = a$, $OB = b$. Треугольник OAB подобен треугольнику OCD по двум углам с некоторым коэффициентом k, поэтому $OC = ka$, $OD = kb$. По теореме Пифагора

$AB + CD = \sqrt{a^2 + b^2} + k\sqrt{a^2 + b^2}$,

$BC + AD = \sqrt{k^2a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + k^2b^2}$.

Проведем цепочку сравнений.

$$\sqrt{a^2 + b^2} + k\sqrt{a^2 + b^2} \quad \vee \quad \sqrt{k^2a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + k^2b^2},$$
$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}(1 + k)\right)^2 \quad \vee \quad \left(\sqrt{k^2a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + k^2b^2}\right)^2,$$
$$(a^2 + b^2)(1 + k^2 + 2k) \quad \vee \quad a^2 + b^2 + k^2(a^2 + b^2) + 2\sqrt{k^2a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + k^2b^2},$$
$$k(a^2 + b^2) \quad \vee \quad \sqrt{k^2a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + k^2b^2},$$
$$k^2(a^4 + b^4 + 2a^2b^2) \quad \vee \quad k^2a^4 + k^2b^4 + a^2b^2 + k^4a^2b^2,$$
$$2k^2a^2b^2 \quad \vee \quad a^2b^2(1 + k^4),$$
$$2k^2 \quad \vee \quad 1 + k^4$$
$$0 \quad \vee \quad (1 + k^2)^2$$

В последнем неравенстве правая часть, очевидно, всегда больше. Следовательно,

$$AB + CD \leq BC + AD.$$

Ответ. $AB + CD \leq BC + AD$.

7101 10 класс

1. 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников – сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

Решение.

Пусть звонки с Громофона (внутрисетевые) стоят x копеек. Тогда доход Громофона составляет с внутрисетевых звонков $x \cdot 200 \cdot 199$ и с межсетевых $3 \cdot x \cdot 100 \cdot 200$, т.е. всего $998 \cdot x$ рублей.

Монолайн получает доход с внутрисетевых звонков: $43 \cdot 100 \cdot 99 = 4257$ руб. Со звонков на Громофон: $3 \cdot 43 \cdot 100 \cdot 200 = 25800$ руб. Всего 30057 руб.

Получаем систему неравенств

$$998 \cdot x > 40057,$$
$$x < 43,$$

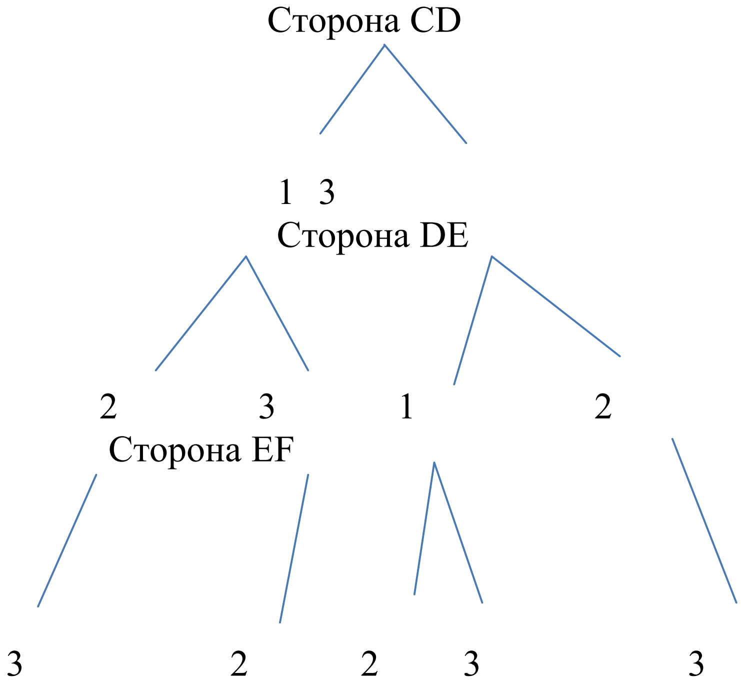
которую нужно решить в целых числах.

Ответ: 41 или 42 коп. за минуту.

2. Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

Решение.

1. Явной проверкой проверяется, что 2 цветов не достаточно, а 3 уже достаточно (нужно привести пример, скажем, 1-2-1-2-3).
2. Обозначим столбы забора A, B, C, D, E. Пусть сторона AB окрашена цветом 1, а BC цветом 2 (они должны быть обязательно разного цвета). Составим далее дерево возможностей.



Итак, получили 5 возможных вариантов. Но так как число перестановок трех цветов равно 6, то меняя значения цветов 1, 2 и 3, мы получим 6 °5 = 30 вариантов.

Ответ: 3 цвета, 30 способов.

3. Карта города разделена вертикальными и горизонтальными прямыми на n^2 областей, условно называемых «квадратами» и расположенных в n горизонтальных рядов и n колонок. В каждом «квадрате» располагают или не располагают одну трансформаторную подстанцию. Во всех рядах число подстанций различно. Может ли при этом число подстанций в каждой колонке не совпадать ни с одним числом подстанций в ряду? Если это возможно не всегда, то при каких условиях?

Решение.
Число подстанций в ряду может быть равно одному из чисел 0, 1, 2, …, n.
Пусть n_i – число подстанций в ряду *i*. n_i – различные элементы множества $\{0,1,\ldots,n\}$, они принимают все значения из $\{0,1,\ldots,n\}$ кроме единственного значения *k*. Тогда в каждой колонке ровно *k* подстанций. Общее число подстанций есть $0+1+\ldots+n-k=\frac{n(n+1)}{2}-k$. С другой стороны, оно равно *nk*. Итак,

$$\frac{n(n+1)}{2}-k=nk .$$

Отсюда $n=2k$.
Пример квадратной таблицы из 0 и 1 порядка $n=2k$ для каждого *k* следующий.

O	B
E	D

Это таблица, состоящая из 4 квадратных блоков $n\times n$
Блок O – матрица из нулей.
Блок B – треугольная матрица с единицами в правом нижнем углу и нулевой побочной диагональю.
Блок E – матрица из единиц.
Блок D – треугольная матрица с единицами в левом нижнем углу и единичной главной диагональю.

Ответ. Это возможно, если размер таблицы $n=2k$, где *k* – число, не равное количеству подстанций ни в одном из рядов.

4. Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz+\frac{1}{xyz}=a$, $x+\frac{1}{y}=b$, $y+\frac{1}{z}=c$. Выразите через a, b и c значение $z+\frac{1}{x}$.

Решение. Обозначим $z+\frac{1}{x}=d$. Тогда $bcd=a+b+c+d$ откуда $d=\frac{a+b+c}{bc-1}$. Остается проверить, когда знаменатель обращается в ноль. Это будет, если $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{z}\right)=1$ или $xy+\frac{x}{z}+\frac{1}{yz}=0$

Ответ. $\frac{a+b+c}{bc-1}$, если $bc\neq 1$.

5. На доске написано 15 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 8 чисел делятся на 7, а 10 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 220.

Решение.
Так как 7 и 11 — простые числа, числа, делящиеся на 7 и 11 одновременно, делятся на 7·11. Легко видеть, что среди выписанных есть по крайней мере три таких числа. Наибольшее из них не меньше, чем 3·7·11 = 231.

6. Целой частью $[x]$ произвольного числа x называется наибольшее целое m такое, что $m\le x$. Решите неравенство $\left[\cos^2(x+2)\right]\ge\frac{x}{\pi}$.

Решение.

Из неравенств $0\le\cos^2(x+2)\le 1$ следует, что левая часть может принимать только значения 0 и 1.

1. Пусть $[\cos^2(x+2)]=1$. Тогда $x=\pi n-2, n\in\mathbb{Z}$, $1\ge n-2/\pi$. Следовательно,

$$x=\pi n-2, n=1,0,-1,\ldots \qquad (1)$$

2. Пусть $[\cos^2(x+2)]=0$. Тогда $x\neq\pi k-2, k\in\mathbb{Z}$, и $0\ge x/\pi$, откуда

$$x\le 0. \qquad (2)$$

Объединяя множества (1) и (2), получаем

Ответ: $\{\pi-2\}\cup(-\infty;0]$.

7. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD перпендикулярны. Сравните величины $BC+AD$ и $AB+CD$.

Решение.

Пусть O – точка пересечения диагоналей четырехугольника. Положим $OA = a$, $OB = b$. Треугольник OAB подобен треугольнику OCD по двум углам с некоторым коэффициентом k, поэтому $OC = ka$, $OD = kb$. По теореме Пифагора

$AB + CD = \sqrt{a^2 + b^2} + k\sqrt{a^2 + b^2}$,

$BC + AD = \sqrt{k^2a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + k^2b^2}$.

Проведем цепочку сравнений.

$$\sqrt{a^2 + b^2} + k\sqrt{a^2 + b^2} \quad \vee \quad \sqrt{k^2a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + k^2b^2},$$
$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}(1 + k)\right)^2 \quad \vee \quad \left(\sqrt{k^2a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + k^2b^2}\right)^2,$$
$$(a^2 + b^2)(1 + k^2 + 2k) \quad \vee \quad a^2 + b^2 + k^2(a^2 + b^2) + 2\sqrt{k^2a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + k^2b^2},$$
$$k(a^2 + b^2) \quad \vee \quad \sqrt{k^2a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + k^2b^2},$$
$$k^2(a^4 + b^4 + 2a^2b^2) \quad \vee \quad k^2a^4 + k^2b^4 + a^2b^2 + k^4a^2b^2,$$
$$2k^2a^2b^2 \quad \vee \quad a^2b^2(1 + k^4),$$
$$2k^2 \quad \vee \quad 1 + k^4$$
$$0 \quad \vee \quad (1 + k^2)^2$$

В последнем неравенстве правая часть, очевидно, всегда больше. Следовательно,

$$AB + CD \leq BC + AD.$$

Ответ. $AB + CD \leq BC + AD$.

7091 9 класс

1. 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников – сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

Решение.

Пусть звонки с Громофона (внутрисетевые) стоят x копеек. Тогда доход Громофона составляет с внутрисетевых звонков $x \cdot 200 \cdot 199$ и с межсетевых $3 \cdot x \cdot 100 \cdot 200$, т.е. всего $998 \cdot x$ рублей.

Монолайн получает доход с внутрисетевых звонков: $43 \cdot 100 \cdot 99 = 4257$ руб. Со звонков на Громофон: $3 \cdot 43 \cdot 100 \cdot 200 = 25800$ руб. Всего 30057 руб.

Получаем систему неравенств

$$998 \cdot x > 40057,$$
$$x < 43,$$

которую нужно решить в целых числах.

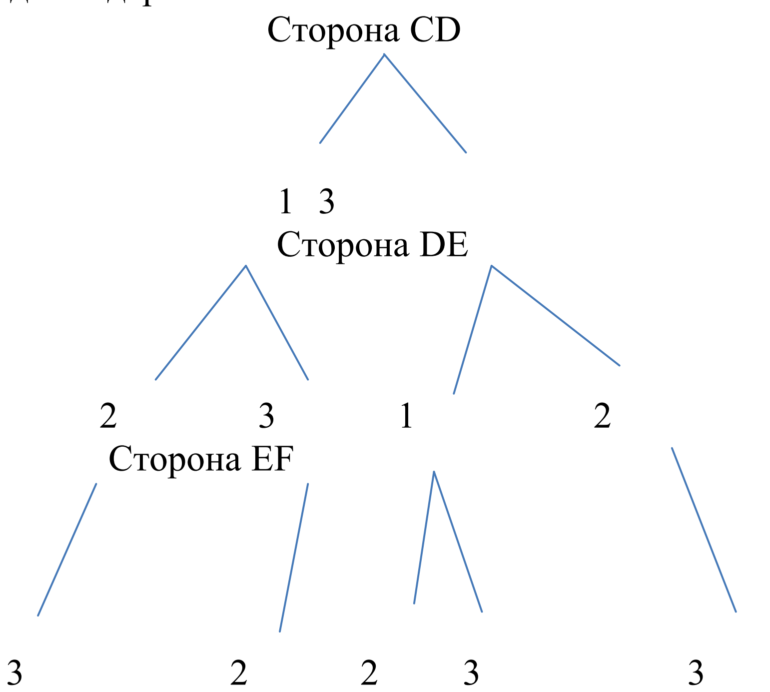
Ответ: 41 или 42 коп. за минуту.

2. Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

Решение.

1. Явной проверкой проверяется, что 2 цветов не достаточно, а 3 уже достаточно (нужно привести пример, скажем, 1-2-1-2-3).

2. Обозначим столбы забора A, B, C, D, E. Пусть сторона AB окрашена цветом 1, а BC цветом 2 (они должны быть обязательно разного цвета). Составим далее дерево возможностей.



Итак, получили 5 возможных вариантов. Но так как число перестановок трех цветов равно 6, то меняя значения цветов 1, 2 и 3, мы получим 6 °5 = 30 вариантов.

Ответ: 3 цвета, 30 способов.

3. На шахматную доску поставили шашки так, что во всех горизонтальных рядах число шашек различно (цвет шашек и клеток при этом не имеет значения). Возможно ли, что в каждой вертикальной колонке число шашек не равно числу шашек ни на одной из горизонталей? Что изменится, если 64-клеточную доску заменить на 100-клеточную?

Решение.

Дадим общее решение для доски произвольного размера $n \times n$. Для получения ответа затем следует взять n=8 или n=10.

Число подстанций в ряду может быть равно одному из чисел 0, 1, 2, …, n.

Пусть n_i – число подстанций в ряду i. n_i – различные элементы множества $\{0,1,\ldots,n\}$, они принимают все значения из $\{0,1,\ldots,n\}$ кроме единственного значения k. Тогда в каждой колонке ровно k подстанций. Общее число подстанций есть $0+1+\ldots+n-k=\frac{n(n+1)}{2}-k$. С другой стороны, оно равно nk. Итак,

$$\frac{n(n+1)}{2}-k=nk\,.$$

Отсюда $n=2k$.

Пример квадратной таблицы из 0 и 1 порядка $n=2k$ для каждого k следующий.

O	B
E	D

Это таблица, состоящая из 4 квадратных блоков $n \times n$

Блок O – матрица из нулей.

Блок B – треугольная матрица с единицами в правом нижнем углу и нулевой побочной диагональю.

Блок E – матрица из единиц.

Блок D – треугольная матрица с единицами в левом нижнем углу и единичной главной диагональю.

Ответ. Возможно только если нет ряда, содержащего *n/2* (т.е. 4 или 5) шашек.

4. Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz = 1$, $x + \frac{1}{z} = 5$, $y + \frac{1}{x} = 29$. Найдите значение $z + \frac{1}{y}$.

Решение.
Рассмотрим произведение $(x + 1/z)(y + 1/x)(z + 1/y) = xyz + x + z + 1/y + y + 1/z + 1/xyz = 2 + 5 + 29 + (z + 1/y)$. Отсюда $5 \cdot 29 \cdot (z + 1/y) = 36 + (z + 1/y)$.
$(z + 1/y) = 1/4$.
Ответ: ¼.

5. На доске написано 15 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 8 чисел делятся на 7, а 10 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 220.

Решение.
Так как 7 и 11 — простые числа, числа, делящиеся на 7 и 11 одновременно, делятся на $7{\cdot}11$. Легко видеть, что среди выписанных есть по крайней мере три таких числа. Наибольшее из них не меньше, чем $3{\cdot}7{\cdot}11 = 231$.

6. Целой частью $[x]$ произвольного числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \le x$. Найдите все натуральные значения n, при которых разрешимо уравнение $\left[x^n - 1\right] = \frac{x}{2}$. Для каждого найденного значения n укажите все решения x.

Решение.

Число $x/2$ целое, поэтому $x = 2k, k \in \mathbb{Z}$. Тогда $x^n - 1$ целое и $[x^n - 1] = x^n - 1$. С учетом условия $x = 2k$ исходное уравнение принимает вид уравнения относительно целого неизвестного k: $(2k)^n - 1 = k$. Преобразуя его к форме $k(2^n k^{n-1} - 1) = 1$, получаем две возможности:

$$k = 1, \quad 2^n k^{n-1} - 1 = 1, \tag{1}$$

или

$$k = -1, \quad 2^n k^{n-1} - 1 = -1. \tag{2}$$

В первом случае однозначно $n = 1$, $x = 2k = 2$.
Во втором случае равенство $2^n(-1)^{n-1} = 0$ не может выполняться.

Ответ: $n = 1,\ x = 2$.

7. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD диагонали AC и BD перпендикулярны. Сравните величины $BC \cdot AD$ и $AB \cdot CD$.

Решение.

Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Положим $OA = a$, $OB = b$. Треугольник OAB подобен треугольнику OCD по двум углам с некоторым коэффициентом k, поэтому $OC = ka$, $OD = kb$. По теореме Пифагора $AB^2 = a^2 + b^2$, $CD^2 = k^2a^2 + k^2b^2$, $BC^2 = k^2a^2 + b^2$, $AD^2 = a^2 + k^2b^2$. Задача свелась к сравнению величин $(k^2a^2 + b^2)(a^2 + k^2b^2)$ и $(a^2 + b^2)(k^2a^2 + k^2b^2)$, которое после раскрытия скобок и приведения подобных членов сводится к очевидному сравнению $(k^2-1)^2a^2b^2$ и 0. Отсюда следует, что левая часть была больше, а значит $BC \cdot AD \geq AB \cdot CD$

7081 8 класс

1. 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников – сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

Решение.
Пусть звонки с Громофона (внутрисетевые) стоят x копеек. Тогда доход Громофона составляет с внутрисетевых звонков $x \cdot 200 \cdot 199$ и с межсетевых $3 \cdot x \cdot 100 \cdot 200$, т.е. всего $998 \cdot x$ рублей.
Монолайн получает доход с внутрисетевых звонков: $43 \cdot 100 \cdot 99 = 4257$ руб. Со звонков на Громофон: $3 \cdot 43 \cdot 100 \cdot 200 = 25800$ руб. Всего 30057 руб.
Получаем систему неравенств

$$998 \cdot x > 40057,$$
$$x < 43,$$

которую нужно решить в целых числах.

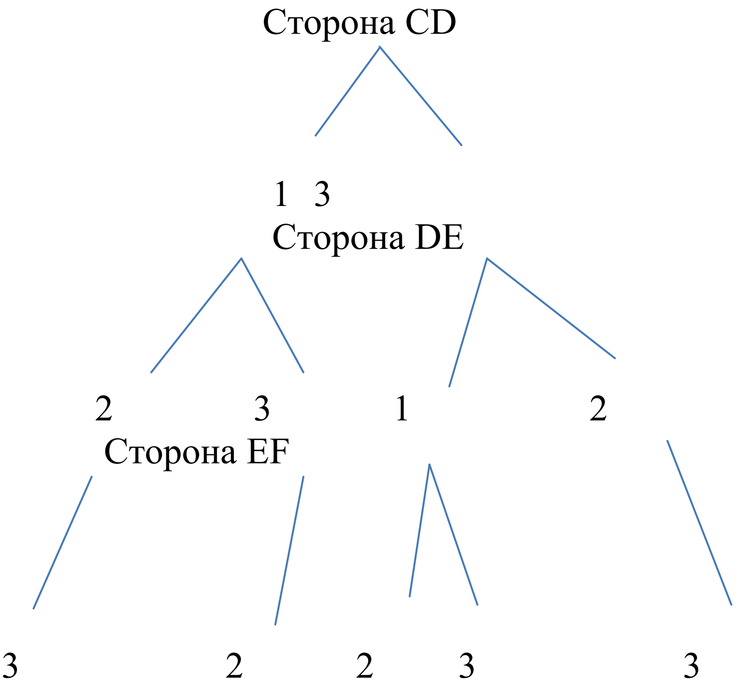
Ответ: 41 или 42 коп. за минуту.

2. Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

Решение.

1. Явной проверкой проверяется, что 2 цветов не достаточно, а 3 уже достаточно (нужно привести пример, скажем, 1-2-1-2-3).

2. Обозначим столбы забора A, B, C, D, E. Пусть сторона AB окрашена цветом 1, а BC цветом 2 (они должны быть обязательно разного цвета). Составим далее дерево возможностей.



Итак, получили 5 возможных вариантов. Но так как число перестановок трех цветов равно 6, то меняя значения цветов 1, 2 и 3, мы получим 6 °5 = 30 вариантов.

Ответ: 3 цвета, 30 способов.

3. На шахматную доску поставили шашки так, что во всех горизонтальных рядах число шашек различно (цвет шашек и клеток при этом не имеет значения). Возможно ли, что в каждой вертикальной колонке число шашек не равно числу шашек ни на одной из горизонталей?

Решение.

Число подстанций в ряду может быть равно одному из чисел 0, 1, 2, …, 8.

Пусть n_i – число подстанций в ряду i. n_i – различные элементы множества $\{0,1,\ldots,8\}$, они принимают все значения из $\{0,1,\ldots,8\}$ кроме единственного значения k. Тогда в каждой колонке ровно k подстанций. Общее число подстанций есть $0+1+\ldots+8-k=36-k$. С другой стороны, оно равно $8k$. Итак,

$$36-k=8k.$$

Отсюда $k=4$.

Пример квадратной таблицы из 0 и 1 порядка $n=8$ для каждого k следующий.

O	B
E	D

Это таблица, состоящая из 4 квадратных блоков 8×8

Блок O – матрица из нулей.

Блок B – треугольная матрица с единицами в правом нижнем углу и нулевой побочной диагональю.

Блок E – матрица из единиц.

Блок D – треугольная матрица с единицами в левом нижнем углу и единичной главной диагональю.

Ответ. Возможно только если нет ряда, содержащего 4 шашки.

4. Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz=1$, $x+\dfrac{1}{z}=5$, $y+\dfrac{1}{x}=29$. Найдите значение $z+\dfrac{1}{y}$.

Решение.

Рассмотрим произведение $(x + 1/z)(y + 1/x)(z + 1/y) = xyz + x + z + 1/y + y + 1/z + 1/xyz = 2 + 5 + 29 + (z + 1/y)$. Отсюда $5 \cdot 29 \cdot (z + 1/y) = 36 + (z + 1/y)$.

$(z + 1/y) = 1/4$.

Ответ: ¼.

5. На доске написано 15 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 8 чисел делятся на 7, а 10 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 220.

Решение.
Так как 7 и 11 — простые числа, числа, делящиеся на 7 и 11 одновременно, делятся на $7 \cdot 11$. Легко видеть, что среди выписанных есть по крайней мере три таких числа. Наибольшее из них не меньше, чем $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$.

6. Произведение 2015 целых чисел равно 1. Может ли сумма их 2015-ых степеней быть равной нулю?

Решение. Все эти числа равны либо 1, либо -1, иначе их произведение не может равняться 1. Число минус единиц среди этих чисел должно быть чётным, иначе произведение не будет равно 1. Значит, число единиц нечётно, поскольку всего чисел нечетное количество. 2015-ая степень каждого множителя совпадает с ним самими. Но сумма нечётного числа единиц и чётного числа минус единиц не может дать 0.

Ответ: Не может.

7. Можно ли 2015-угольник разбить на параллелограммы?

Решение. Если некоторый выпуклый многоугольник разрезается на параллелограммы, то его стороны разбиваются на пары сторон, параллельных друг другу. Значит, число сторон такого многоугольника чётно. Поскольку в 2015-угольнике число сторон нечётно, разрезать его на параллелограммы нельзя.

Ответ: Нельзя.

7071 7 класс

1. 100 сотрудников энергетической компании пользуются сетью Монолайн, а 200 сотрудников – сетью Громофон. За внутрисетевой звонок Монолайн берёт 43 копейки, а Громофон меньше, но целое число копеек. За звонок в другую сеть стоимость звонка возрастает в 3 раза. Все входящие звонки бесплатные. В течение дня каждый сотрудник звонит каждому по одному разу и от каждого один раз получает встречный звонок. Сколько стоят звонки с Громофона, если его ежедневные доходы с компании более чем на десять тысяч рублей превышают доходы Монолайна?

Решение.

Пусть звонки с Громофона (внутрисетевые) стоят x копеек. Тогда доход Громофона составляет с внутрисетевых звонков $x \cdot 200 \cdot 199$ и с межсетевых $3 \cdot x \cdot 100 \cdot 200$, т.е. всего $998 \cdot x$ рублей.

Монолайн получает доход с внутрисетевых звонков: $43 \cdot 100 \cdot 99 = 4257$ руб. Со звонков на Громофон: $3 \cdot 43 \cdot 100 \cdot 200 = 25800$ руб. Всего 30057 руб.

Получаем систему неравенств

$$998 \cdot x > 40057,$$
$$x < 43,$$

которую нужно решить в целых числах.

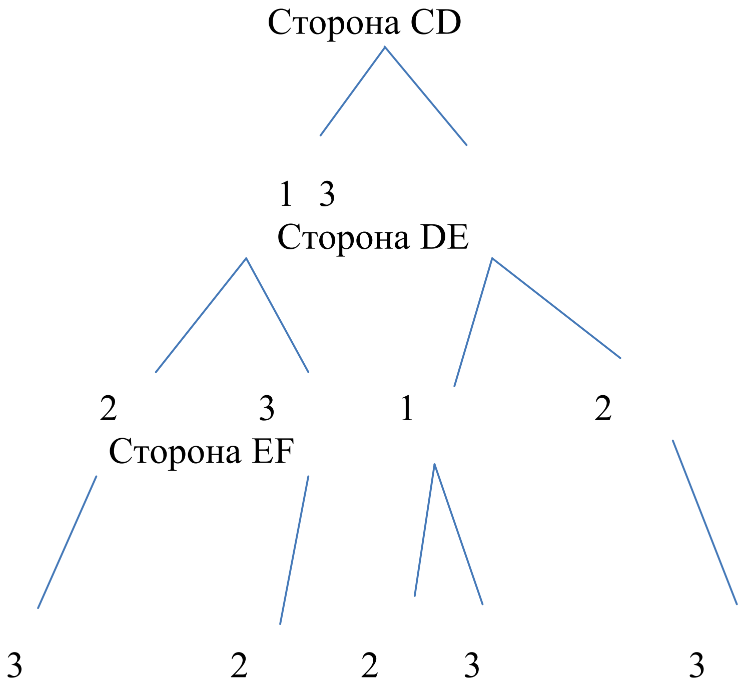
Ответ: 41 или 42 коп. за минуту.

2. Наземный клапан подземного газохранилища огражден деревянным забором в виде окружности, разделенной 5 кирпичными столбами на 5 дуг. Требуется раскрасить деревянные части забора так, чтобы каждая дуга была бы одного цвета, а любые две соседние дуги имели разные цвета. Какое минимальное число цветов достаточно? Сколькими способами можно это сделать, используя минимальное число цветов?

Решение.

1. Явной проверкой проверяется, что 2 цветов не достаточно, а 3 уже достаточно (нужно привести пример, скажем, 1-2-1-2-3).

2. Обозначим столбы забора A, B, C, D, E. Пусть сторона AB окрашена цветом 1, а BC цветом 2 (они должны быть обязательно разного цвета). Составим далее дерево возможностей.



Итак, получили 5 возможных вариантов. Но так как число перестановок трех цветов равно 6, то меняя значения цветов 1, 2 и 3, мы получим 6 °5 = 30 вариантов.

Ответ: 3 цвета, 30 способов.

3. На шахматную доску поставили шашки так, что во всех горизонтальных рядах число шашек различно (цвет шашек и клеток при этом не имеет значения). Возможно ли, что в каждой вертикальной колонке число шашек не равно числу шашек ни на одной из горизонталей?

Решение.
Число подстанций в ряду может быть равно одному из чисел 0, 1, 2, …, 8.
Пусть n_i – число подстанций в ряду *i*. n_i – различные элементы множества $\{0,1,\ldots,8\}$, они принимают все значения из $\{0,1,\ldots,8\}$ кроме единственного значения *k*. Тогда в каждой колонке ровно *k* подстанций. Общее число подстанций есть $0+1+\ldots+8-k=36-k$. С другой стороны, оно равно 8*k*. Итак,

$$36-k=8k.$$

Отсюда $k=4$.
Пример квадратной таблицы из 0 и 1 порядка $n=8$ для каждого *k* следующий.

O	B
E	D

Это таблица, состоящая из 4 квадратных блоков 8×8
Блок O – матрица из нулей.
Блок B – треугольная матрица с единицами в правом нижнем углу и нулевой побочной диагональю.
Блок E – матрица из единиц.
Блок D – треугольная матрица с единицами в левом нижнем углу и единичной главной диагональю.

Ответ. Возможно только если нет ряда, содержащего 4 шашки.

4. Для положительных чисел x, y, z заданы значения $xyz=1$, $x+\frac{1}{z}=5$, $y+\frac{1}{x}=29$. Найдите значение $z+\frac{1}{y}$.

Решение.
Рассмотрим произведение $(x + 1/z)(y + 1/x)(z + 1/y) = xyz + x + z + 1/y + y + 1/z + 1/xyz = 2 + 5 + 29 + (z + 1/y)$. Отсюда $5 \cdot 29 \cdot (z + 1/y) = 36 + (z + 1/y)$.
$(z + 1/y) = 1/4$.
Ответ: ¼.

5. На доске написано 15 различных натуральных чисел. Оказалось, что среди них 8 чисел делятся на 7, а 10 чисел делятся на 11. Докажите, что среди них есть число, большее 220.

Решение.
Так как 7 и 11 — простые числа, числа, делящиеся на 7 и 11 одновременно, делятся на $7 \cdot 11$. Легко видеть, что среди выписанных есть по крайней мере три таких числа. Наибольшее из них не меньше, чем $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$.

6. Произведение 2015 целых чисел равно 1. Может ли их сумма быть равной нулю?

Решение. Все эти числа равны либо 1, либо -1, иначе их произведение не может равняться 1. Число минус единиц среди этих чисел должно быть чётным, иначе произведение не будет равно 1. Значит, число единиц нечётно, поскольку всего чисел 2015. Но сумма нечётного числа единиц и чётного числа минус единиц не может дать 0.

Ответ: Не может.

7. Можно ли 2015-угольник разбить на параллелограммы?

Решение. Если некоторый выпуклый многоугольник разрезается на параллелограммы, то его стороны разбиваются на пары сторон, параллельных друг другу. Значит, число сторон такого многоугольника чётно. Поскольку в 2015-угольнике число сторон нечётно, разрезать его на параллелограммы нельзя.

Ответ: Нельзя.

7112

11 класс

Задача 1.

Станция связана линиями с несколькими предприятиями, при этом
(1) среди любых 3 линий есть ведущая на предприятие города М;
(2) среди любых 4 линий есть ведущая на предприятие поселка П.

Может ли число линий быть меньше 5? Если оно не меньше 5, то найдутся ли среди любых 5 линии, не ведущие ни в М, ни в П?

Решение. Пусть n — число всех линий, m — число линий, ведущих в М, p — число линий, ведущих в П, x — число прочих линий. Имеем:

$$m, n, p, x \in \mathbb{Z}_+; \quad m + p + x = n.$$

1. Возможно, что $n = 4$. Пример: из 4 линий 3 ведут в М, одна — в П.

2. Пусть $n \geq 5$. В силу условия (1) получим $p + x \leq 2$. Аналогично из (2) следует $m + x \leq 3$. С учетом неравенства $x \geq 0$ получим $m \leq 3$.

Из неравенств

$$p + x \leq 2, \quad m + p + x \geq 5$$

получим $m \geq 3$. Таким образом, $m = 3$ и тогда $x = 0$.

Ответ.

Число линий может быть меньше 5 (есть пример);
линий, не ведущих ни в М, ни в П, нет.

Задача 2.

Найдите все значения x, при которых величины $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$ являются целыми числами.

Для каждого найденного значения x вычислите $2015^{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Пусть $\operatorname{tg} x = m, \operatorname{tg} 2x = n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$n = \frac{2m}{1 - m^2} = \frac{-2m}{(m-1)(m+1)}.$$

Очевидно, НОД$(m, m \pm 1) = 1$, поэтому число n целое в точности при $m = 0$. Тогда и $n = \operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi k,\ k \in Z$, $2015^m = 1$.

Ответ: $x = \pi k,\ k \in Z, \quad 2015^{\operatorname{tg} x} = 1$.

Задача 3.

Найдите площадь фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $(\sin y - \arcsin x)(\sin x + \arcsin y) \geq 0$

Решение.
Область определения неравенства $D: |x| \leq 1, |y| \leq 1$. Обозначим левую часть неравенства $f(x, y)$. D разбивается на две неперекрывающиеся области $D_1: f(x, y) \geq 0$ и $D_2: f(x, y) \leq 0$. Площади их обозначим S_1 и S_2. Площадь S_1 надо как раз найти. Очевидно, $S_1 + S_2 = 4$. Произведем поворот координатных осей на 90º, то есть точка (x, y) переходит в точку $(y, -x)$. Тогда легко видеть, что неравенство $f(x, y) \geq 0$ преобразуется в неравенство $f(x, y) \leq 0$. То есть точки области D_1 переходят в точки области D_2 и наоборот. Это означает, что $S_1 = S_2$. И, следовательно, $S_1 = 2$.
Ответ: 2.

Задача 4.

После полудня прошло целое число минут, и в этот момент угол между часовой и минутной стрелками составил ровно 2 градуса. Какое время показывают часы, если это событие произошло впервые после полудня?

Решение.

Пусть прошло h целых часов и m минут. За один час (60 минут) часовая стрелка сдвигается на $360/12 = 30$ градусов, еще за m целых минут часовая стрелка подвинется на $(30/60)m = 0,5m$ градусов, а минутная — на $(360/60)m = 6m$ градусов. Таким образом,

$$30h + 0,5m - 6m = \pm 2. \tag{1}$$

Остается решить в неотрицательных целых числах уравнение (1) с условием

$$h \text{ наименьшее },\quad m \leq 59. \tag{2}$$

Уравнение умножим на 2, чтобы избавиться от дробных чисел:

$$60h - 11m = \pm 4.$$

Ясно, что m кратно 4, условию (2) удовлетворяют только $h = 3, m = 16$.

Ответ. 15 часов 16 минут.

Задача 5.

В городе работают три банка. Известно, что вклад, размещенный в одном из них (неизвестно в каком), через год удвоится, в другом (тоже неизвестно, в каком) – утроится, а один из банков (неизвестно, какой из трех) разорится, и вкладчик потеряет свои деньги. У Ивана Ивановича есть 600000 рублей. Он хочет рискнуть и разместить свои деньги в банках на год. Как ему разложить деньги по банкам, чтобы при самом плохом ходе событий получить максимально возможный доход (некоторую сумму он может оставить и дома)? Какую сумму в этом случае он получит на руки через год?

Решение.
Пусть Иван Иванович положил в банки x, y, z рублей соответственно, а t рублей оставил себе (может быть и $t = 0$). Пусть для определенности $0 \le x \le y \le z$. При самом плохом ходе событий наибольший вклад пропадет через год, средний по величине - удвоится, а самый маленький - утроится. У Ивана Ивановича в этом случае останется на руках $3x + 2y + t$ рублей. Запишем очевидное неравенство $4x + y \le 5z + 2t$. Из этого неравенства получим эквивалентное неравенство $3x + 2y + t \le \frac{5}{3}(x + y + z + t)$. Но $x + y + z + t = 600000.$ Таким образом, через год при любом ходе событий Иван Иванович получит не более $\frac{5}{3}600000 = 1000000.$ Чтобы получить гарантированно не меньше такой суммы через год, ему надо положить в каждый банк по 200000 рублей.

Ответ. При разумном распределении денег между банками Иван Иванович через год получит не меньше 1000000 рублей. Для этого в каждый банк он должен положить по 200000 рублей.

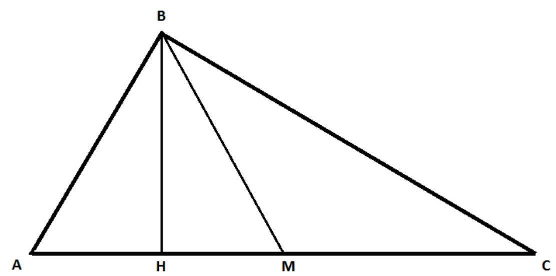
Задача 6.

Господин Сыр Жуй, большой поклонник Фэн-шуй, владеет парком, представляющим собой прямоугольный треугольник с острым углом $\alpha = \frac{11}{24}\pi$ и гипотенузой длины 640 м и желает устроить в нем лабиринт аллей. Для этого прокладываются аллеи, идущие вдоль медианы и высоты, опущенных из прямого угла. Эти аллеи вместе с отсекаемой частью гипотенузы образуют новый прямоугольный треугольник. В нем из прямого угла снова прокладываются аллея-высота и аллея-медиана и т.д.

А. Найдите длину аллеи-гипотенузы 5-го треугольника.

Б. Найдите площадь 5-го треугольника.

Решение.



Пусть в треугольнике ABC (см. рис.) угол B – прямой, угол C равен α. Так как BM – медиана, то BM = MC. Следовательно, угол CBM равен α. Угол ABH также равен α (например, как угол со сторонами, взаимно перпендикулярными к сторонам угла C).

Поэтому угол НВМ равен $\frac{\pi}{2}-2\alpha$. Соответственно, угол ВМН равен 2α. Проведенные рассуждения верны в случае $\alpha<\frac{\pi}{4}$. В случае $\alpha>\frac{\pi}{4}$ нужно провести те же самые рассуждения относительно меньшего угла (равного, $\frac{\pi}{2}-\alpha$). Однако результат будет тем же – острые углы треугольника ВНМ будут равны $\frac{\pi}{2}-2\alpha$ и 2α. Наконец, в случае $\alpha=\frac{\pi}{4}$ никакого треугольника вообще не получится, высота и медиана будут совпадать.

В нашем случае один из углов равен $\alpha=\frac{11}{24}\pi$. Другой угол равен $\beta=\frac{1}{24}\pi=\frac{1}{2^3}\frac{\pi}{3}\left(<\frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому, проводя указанные построения, мы получим последовательность прямоугольных треугольников с меньшими острыми углами

$\alpha_0=\frac{\pi}{3\cdot 2^3}$, $\alpha_1=\frac{\pi}{3\cdot 2^2}$, $\alpha_3=\frac{\pi}{3\cdot 2}=\frac{\pi}{6}$. После этого меньший угол треугольника перестанет меняться и все дальнейшие треугольники будут подобными с меньшим углом $\alpha_k=\frac{\pi}{6}$.

А. Так как медиана предыдущего треугольника становится гипотенузой последующего, то длина гипотенузы каждый раз сокращается вдвое. Поэтому длина гипотенузы 5-го треугольника будет равна $b_5=\frac{640}{2^5}=20$.

Б. Площадь искомого треугольника $S_5=\frac{1}{4}b_5^2\sin 2\alpha_5=\frac{20^2}{4}\sin\frac{\pi}{3}=50\sqrt{3}$.

Ответ. А. 20 м. Б. $50\sqrt{3}$ м^2.

Задача 7.

Пьедестал олимпиады "Последняя надежда математики" состоит из трех ступеней. В вертикальном разрезе он представляет собой три состыкованных прямоугольника, длины которых образуют арифметическую прогрессию, а высоты – геометрическую. Площади прямоугольников равны соответственно 15, 60, 180 дм^2, а их общая длина составляет 30 дм. Найдите размеры пьедестала, учитывая, что ступень с самой маленькой длиной имеет и самую маленькую высоту.

Решение.

Обозначим элементы арифм. прогр. через $a-p, \quad a, \quad a+p$, а элементы геометрической – через $b/q, \quad b, \quad bq$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a-p+a+a+p=30 \\ (a-p)b/q=15 \\ ab=60 \\ (a+p)bq=180 \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу находится $a=10$ и затем из третьего $b=6$.

Перемножая второе и четвертое уравнения получаем

$$(a^2-p^2)b^2=15\cdot 180$$

откуда $p^2=25$. Значит, $p=\pm 5$. Заметим, что при любом выборе знака получаем одни и те же элементы арифметической прогрессии $\{5,10,15\}$. Теперь из второго (или четвертого) равенства находим $q=2$ и элементы геометрической прогрессии $\{3,6,12\}$.

Ответ. Ступень третьего места имеет размеры 5×3,
второго места – 10×6,
первого – 15×12.

7102

10 класс

Задача 1.

Станция связана линиями с несколькими предприятиями, при этом
(1) среди любых 3 линий есть ведущая на предприятие города М;
(2) среди любых 4 линий есть ведущая на предприятие поселка П.

Может ли число линий быть меньше 5? Если оно не меньше 5, то найдутся ли среди любых 5 линии, не ведущие ни в М, ни в П?

Решение. Пусть n — число всех линий, m — число линий, ведущих в М, p — число линий, ведущих в П, x — число прочих линий. Имеем:

$$m, n, p, x \in \mathbb{Z}_+; \quad m + p + x = n.$$

1. Возможно, что $n = 4$. Пример: из 4 линий 3 ведут в М, одна — в П.

2. Пусть $n \geq 5$. В силу условия (1) получим $p + x \leq 2$. Аналогично из (2) следует $m + x \leq 3$. С учетом неравенства $x \geq 0$ получим $m \leq 3$.

Из неравенств

$$p + x \leq 2, \quad m + p + x \geq 5$$

получим $m \geq 3$. Таким образом, $m = 3$ и тогда $x = 0$.

Ответ.

Число линий может быть меньше 5 (есть пример);
линий, не ведущих ни в М, ни в П, нет.

Задача 2.

Найдите все значения x, при которых величины $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} 2x$ являются целыми числами.

Решение. Пусть $\operatorname{tg} x = m, \operatorname{tg} 2x = n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$n = \frac{2m}{1 - m^2} = \frac{-2m}{(m-1)(m+1)}.$$

Очевидно, НОД$(m, m \pm 1) = 1$, поэтому число n целое в точности при $m = 0$. Тогда и $n = \operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = \pi k,\ k \in Z$.

Задача 3.

Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет ровно один корень. Положим $T(x)=x^2+px+q$. Известно, что уравнение $T(T(T(x)))=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите их.

Решение.

Ясно, что $T(x)$ имеет вид $T(x)=(x-a)^2$, поэтому

$$T(T(T(x)))=(((x-a)^2-a)^2-a)^2=0.$$

Получаем, что $((x-a)^2-a)^2=a>0$ (строгое неравенство $a>0$ следует из того, что при $a=0$ уравнение $T(T(T(x)))=0$ имеет не три, а всего один корень), откуда $(x-a)^2=a\pm\sqrt{a}$.

Поскольку у этих двух квадратных уравнений должно быть три корня, у одного из уравнений должен быть один корень, а у другого два. У уравнения $(x-a)^2=a+\sqrt{a}$ не может быть всего один корень, так как $a+\sqrt{a}>0$, поскольку $a>0$. Значит, один корень имеет уравнение $(x-a)^2=a-\sqrt{a}$, то есть $a-\sqrt{a}=0$, что даёт два варианта: $a=0$ или $a=1$. Поскольку $a>0$, остаётся только $a=1$.

Теперь, решив уравнения $(x-a)^2=a\pm\sqrt{a}$ при $a=1$, легко найдём все три корня уравнения $T(T(T(x)))=0$: это $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$.

Ответ. $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$.

Задача 4.

После полудня прошло целое число минут, и в этот момент угол между часовой и минутной стрелками составил ровно 2 градуса. Какое время показывают часы, если это событие произошло впервые после полудня?

Решение.

Пусть прошло h целых часов и m минут. За один час (60 минут) часовая стрелка сдвигается на $360/12=30$ градусов, еще за m целых минут часовая стрелка подвинется на $(30/60)m=0,5m$ градусов, а минутная — на $(360/60)m=6m$ градусов. Таким образом,

$$30h+0,5m-6m=\pm 2. \tag{1}$$

Остается решить в неотрицательных целых числах уравнение (1) с условием

$$h \text{ наименьшее },\quad m\leq 59. \tag{2}$$

Уравнение умножим на 2, чтобы избавиться от дробных чисел:

$$60h-11m=\pm 4.$$

Ясно, что m кратно 4, условию (2) удовлетворяют только $h=3, m=16$.

Ответ. 15 часов 16 минут.

Задача 5.

В городе работают три банка. Известно, что вклад, размещенный в одном из них (неизвестно в каком), через год удвоится, в другом (тоже неизвестно, в каком) – утроится, а один из банков (неизвестно, какой из трех) разорится, и вкладчик потеряет свои деньги. У Ивана Ивановича есть 600000 рублей. Он хочет рискнуть и разместить свои деньги в банках на год. Как ему разложить деньги по банкам, чтобы при самом плохом ходе событий получить максимально возможный доход (некоторую сумму он может оставить и дома)? Какую сумму в этом случае он получит на руки через год?

Решение.
Пусть Иван Иванович положил в банки x, y, z рублей соответственно, а t рублей оставил себе (может быть и $t = 0$). Пусть для определенности $0 \leq x \leq y \leq z$. При самом плохом ходе событий наибольший вклад пропадет через год, средний по величине - удвоится, а самый маленький - утроится. У Ивана Ивановича в этом случае останется на руках $3x + 2y + t$ рублей. Запишем очевидное неравенство $4x + y \leq 5z + 2t$. Из этого неравенства получим эквивалентное неравенство $3x + 2y + t \leq \frac{5}{3}(x + y + z + t)$. Но $x + y + z + t = 600000.$ Таким образом, через год при любом ходе событий Иван Иванович получит не более $\frac{5}{3}600000 = 1000000.$ Чтобы получить гарантированно не меньше такой суммы через год, ему надо положить в каждый банк по 200000 рублей.

Ответ. При разумном распределении денег между банками Иван Иванович через год получит не меньше 1000000 рублей. Для этого в каждый банк он должен положить по 200000 рублей.

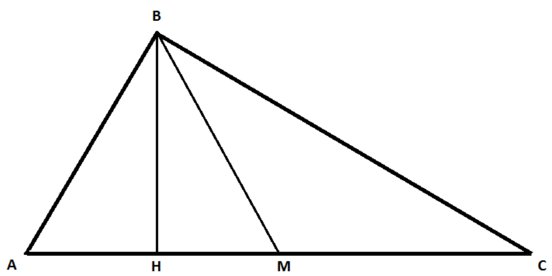
Задача 6.

Господин Сыр Жуй, большой поклонник Фэн-шуй, владеет парком, представляющим собой прямоугольный треугольник с острым углом $\alpha = \frac{11}{24}\pi$ и гипотенузой длины 640 м и желает устроить в нем лабиринт аллей. Для этого прокладываются аллеи, идущие вдоль медианы и высоты, опущенных из прямого угла. Эти аллеи вместе с отсекаемой частью гипотенузы образуют новый прямоугольный треугольник. В нем из прямого угла снова прокладываются аллея-высота и аллея-медиана и т.д.

А. Найдите длину аллеи-гипотенузы 5-го треугольника.

Б. Найдите площадь 5-го треугольника.

Решение.



Пусть в треугольнике ABC (см. рис.) угол B – прямой, угол C равен α. Так как BM – медиана, то BM = MC. Следовательно, угол CBM равен α. Угол ABH также равен α (например, как угол со сторонами, взаимно перпендикулярными к сторонам угла C).

Поэтому угол HBM равен $\frac{\pi}{2}-2\alpha$. Соответственно, угол BMH равен 2α. Проведенные рассуждения верны в случае $\alpha<\frac{\pi}{4}$. В случае $\alpha>\frac{\pi}{4}$ нужно провести те же самые рассуждения относительно меньшего угла (равного, $\frac{\pi}{2}-\alpha$). Однако результат будет тем же – острые углы треугольника BHM будут равны $\frac{\pi}{2}-2\alpha$ и 2α. Наконец, в случае $\alpha=\frac{\pi}{4}$ никакого треугольника вообще не получится, высота и медиана будут совпадать.

В нашем случае один из углов равен $\alpha=\frac{11}{24}\pi$. Другой угол равен $\beta=\frac{1}{24}\pi=\frac{1}{2^3}\frac{\pi}{3}\left(<\frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому, проводя указанные построения, мы получим последовательность прямоугольных треугольников с меньшими острыми углами

$\alpha_0=\frac{\pi}{3\cdot 2^3}$, $\alpha_1=\frac{\pi}{3\cdot 2^2}$, $\alpha_3=\frac{\pi}{3\cdot 2}=\frac{\pi}{6}$. После этого меньший угол треугольника перестанет меняться и все дальнейшие треугольники будут подобными с меньшим углом $\alpha_k=\frac{\pi}{6}$.

А. Так как медиана предыдущего треугольника становится гипотенузой последующего, то длина гипотенузы каждый раз сокращается вдвое. Поэтому длина гипотенузы 5-го треугольника будет равна $b_5=\frac{640}{2^5}=20$.

Б. Площадь искомого треугольника $S_5=\frac{1}{4}b_5^2\sin 2\alpha_5=\frac{20^2}{4}\sin\frac{\pi}{3}=50\sqrt{3}$.

Ответ. А. 20 м. Б. $50\sqrt{3}$ м^2.

Задача 7.

Пьедестал олимпиады "Последняя надежда математики" состоит из трех ступеней. В вертикальном разрезе он представляет собой три состыкованных прямоугольника, длины которых образуют арифметическую прогрессию, а высоты – геометрическую. Площади прямоугольников равны соответственно 15, 60, 180 дм^2, а их общая длина составляет 30 дм. Найдите размеры пьедестала, учитывая, что ступень с самой маленькой длиной имеет и самую маленькую высоту.

Решение.

Обозначим элементы арифм. прогр. через $a-p,\quad a,\quad a+p$, а элементы геометрической – через $b/q,\quad b,\quad bq$.

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a-p+a+a+p=30 \\ (a-p)b/q=15 \\ ab=60 \\ (a+p)bq=180 \end{cases}$$

Из первого уравнения сразу находится $a=10$ и затем из третьего $b=6$.

Перемножая второе и четвертое уравнения получаем

$$(a^2-p^2)b^2=15\cdot 180$$

откуда $p^2=25$. Значит, $p=\pm 5$. Заметим, что при любом выборе знака получаем одни и те же элементы арифметической прогрессии $\{5,10,15\}$. Теперь из второго (или четвертого) равенства находим $q=2$ и элементы геометрической прогрессии $\{3,6,12\}$.

Ответ. Ступень третьего места имеет размеры 5×3,
второго места – 10×6,
первого – 15×12.

7092

9 класс

Задача 1.

Станция связана линиями с несколькими предприятиями, при этом
(1) среди любых 3 линий есть ведущая на предприятие города М;
(2) среди любых 4 линий есть ведущая на предприятие поселка П.

Может ли число линий быть меньше 5? Если оно не меньше 5, то найдутся ли среди любых 5 линии, не ведущие ни в М, ни в П?

Решение. Пусть n — число всех линий, m — число линий, ведущих в М, p — число линий, ведущих в П, x — число прочих линий. Имеем:

$$m, n, p, x \in \mathbb{Z}_+; \quad m + p + x = n.$$

1. Возможно, что $n = 4$. Пример: из 4 линий 3 ведут в М, одна — в П.

2. Пусть $n \geq 5$. В силу условия (1) получим $p + x \leq 2$. Аналогично из (2) следует $m + x \leq 3$. С учетом неравенства $x \geq 0$ получим $m \leq 3$.

Из неравенств

$$p + x \leq 2, \quad m + p + x \geq 5$$

получим $m \geq 3$. Таким образом, $m = 3$ и тогда $x = 0$.

Ответ.

Число линий может быть меньше 5 (есть пример);
линий, не ведущих ни в М, ни в П, нет.

Задача 2.

Треугольник вращается в своей плоскости. Через какую точку должна проходить ось вращения, чтобы заметалась наименьшая площадь?

Решение.

Ясно, что радиус заметаемого круга будет равен расстоянию от центра вращения до одной из вершин треугольника. Начнем с вырожденного случая, когда треугольник "есть отрезок". Здесь очевидно, что центр вращения должен находиться в середине отрезка. Теперь будем "оттягивать"третью вершину от отрезка в любую сторону (но так, чтобы исходный отрезок оставался длиннейшей стороной треугольника). До тех пор, пока треугольник будет тупоугольным, расстояние до третьей вершины будет меньше половины длины исходного отрезка. В случае прямоугольного треугольника эти расстояния сравняются. А далее нужно уводить центр вращения внутрь треугольника так, чтобы он был центром описанной окружности.

Ответ.

Если треугольник остроугольный – вращать вокруг центра описанной окружности.

Если треугольник тупоугольный – вращать вокруг середины наиболее длинной стороны.

(Прямоугольный треугольник соединяет в себе оба случая.)

Задача 3.

Квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ имеет ровно один корень. Положим $T(x)=x^2+px+q$. Известно, что уравнение $T(T(T(x)))=0$ имеет ровно три различных корня. Найдите их.

Решение.

Ясно, что $T(x)$ имеет вид $T(x)=(x-a)^2$, поэтому

$$T(T(T(x)))=(((x-a)^2-a)^2-a)^2=0.$$

Получаем, что $((x-a)^2-a)^2=a>0$ (строгое неравенство $a>0$ следует из того, что при $a=0$ уравнение $T(T(T(x)))=0$ имеет не три, а всего один корень), откуда $(x-a)^2=a\pm\sqrt{a}$.

Поскольку у этих двух квадратных уравнений должно быть три корня, у одного из уравнений должен быть один корень, а у другого два. У уравнения $(x-a)^2=a+\sqrt{a}$ не может быть всего один корень, так как $a+\sqrt{a}>0$, поскольку $a>0$. Значит, один корень имеет уравнение $(x-a)^2=a-\sqrt{a}$, то есть $a-\sqrt{a}=0$, что даёт два варианта: $a=0$ или $a=1$. Поскольку $a>0$, остаётся только $a=1$.

Теперь, решив уравнения $(x-a)^2=a\pm\sqrt{a}$ при $a=1$, легко найдём все три корня уравнения $T(T(T(x)))=0$: это $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$.

Ответ. $x_1=1$, $x_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$.

Задача 4.

После полудня прошло целое число минут, и в этот момент угол между часовой и минутной стрелками составил ровно 2 градуса. Какое время показывают часы, если это событие произошло впервые после полудня?

Решение.

Пусть прошло h целых часов и m минут. За один час (60 минут) часовая стрелка сдвигается на $360/12=30$ градусов, еще за m целых минут часовая стрелка подвинется на $(30/60)m=0,5m$ градусов, а минутная — на $(360/60)m=6m$ градусов. Таким образом,

$$30h+0,5m-6m=\pm2. \tag{1}$$

Остается решить в неотрицательных целых числах уравнение (1) с условием

$$h \text{ наименьшее }, \quad m \leq 59. \tag{2}$$

Уравнение умножим на 2, чтобы избавиться от дробных чисел:

$$60h - 11m = \pm 4.$$

Ясно, что m кратно 4, условию (2) удовлетворяют только $h = 3, m = 16$.

Ответ. 15 часов 16 минут.

Задача 5.

В городе работают три банка. Известно, что вклад, размещенный в одном из них (неизвестно в каком), через год удвоится, в другом (тоже неизвестно, в каком) – утроится, а один из банков (неизвестно, какой из трех) разорится, и вкладчик потеряет свои деньги. У Ивана Ивановича есть 600000 рублей. Он хочет рискнуть и разместить свои деньги в банках на год. Как ему разложить деньги по банкам, чтобы при самом плохом ходе событий получить максимально возможный доход (некоторую сумму он может оставить и дома)? Какую сумму в этом случае он получит на руки через год?

Решение.
Пусть Иван Иванович положил в банки x, y, z рублей соответственно, а t рублей оставил себе (может быть и $t = 0$). Пусть для определенности $0 \leq x \leq y \leq z$. При самом плохом ходе событий наибольший вклад пропадет через год, средний по величине - удвоится, а самый маленький - утроится. У Ивана Ивановича в этом случае останется на руках $3x + 2y + t$ рублей. Запишем очевидное неравенство $4x + y \leq 5z + 2t$. Из этого неравенства получим эквивалентное неравенство $3x + 2y + t \leq \frac{5}{3}(x + y + z + t)$. Но $x + y + z + t = 600000$. Таким образом, через год при любом ходе событий Иван Иванович получит не более $\frac{5}{3}600000 = 1000000$. Чтобы получить гарантированно не меньше такой суммы через год, ему надо положить в каждый банк по 200000 рублей.

Ответ. При разумном распределении денег между банками Иван Иванович через год получит не меньше 1000000 рублей. Для этого в каждый банк он должен положить по 200000 рублей.

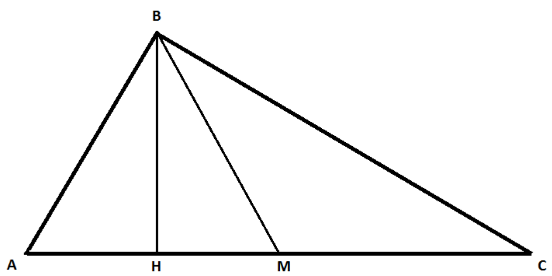
Задача 6.

Господин Сыр Жуй, большой поклонник Фэн-шуй, владеет парком, представляющим собой прямоугольный треугольник с острым углом $\alpha = \frac{11}{24}\pi$ и гипотенузой длины 640 м и желает устроить в нем лабиринт аллей. Для этого прокладываются аллеи, идущие вдоль медианы и высоты, опущенных из прямого угла. Эти аллеи вместе с отсекаемой частью гипотенузы образуют новый прямоугольный треугольник. В нем из прямого угла снова прокладываются аллея-высота и аллея-медиана и т.д.

А. Найдите длину аллеи-гипотенузы 5-го треугольника.

Б. Найдите площадь 5-го треугольника.

Решение.



Пусть в треугольнике ABC (см. рис.) угол B – прямой, угол C равен α. Так как BM – медиана, то BM = MC. Следовательно, угол CBM равен α. Угол ABH также равен α (например, как угол со сторонами, взаимно перпендикулярными к сторонам угла C).

Поэтому угол НВМ равен $\frac{\pi}{2}-2\alpha$. Соответственно, угол ВМН равен 2α. Проведенные рассуждения верны в случае $\alpha<\frac{\pi}{4}$. В случае $\alpha>\frac{\pi}{4}$ нужно провести те же самые рассуждения относительно меньшего угла (равного, $\frac{\pi}{2}-\alpha$). Однако результат будет тем же – острые углы треугольника ВНМ будут равны $\frac{\pi}{2}-2\alpha$ и 2α. Наконец, в случае $\alpha=\frac{\pi}{4}$ никакого треугольника вообще не получится, высота и медиана будут совпадать.

В нашем случае один из углов равен $\alpha=\frac{11}{24}\pi$. Другой угол равен $\beta=\frac{1}{24}\pi=\frac{1}{2^3}\frac{\pi}{3}\left(<\frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому, проводя указанные построения, мы получим последовательность прямоугольных треугольников с меньшими острыми углами

$\alpha_0=\frac{\pi}{3\cdot 2^3}$, $\alpha_1=\frac{\pi}{3\cdot 2^2}$, $\alpha_3=\frac{\pi}{3\cdot 2}=\frac{\pi}{6}$. После этого меньший угол треугольника перестанет меняться и все дальнейшие треугольники будут подобными с меньшим углом $\alpha_k=\frac{\pi}{6}$.

А. Так как медиана предыдущего треугольника становится гипотенузой последующего, то длина гипотенузы каждый раз сокращается вдвое. Поэтому длина гипотенузы 5-го треугольника будет равна $b_5=\frac{640}{2^5}=20$.

Б. Площадь искомого треугольника $S_5=\frac{1}{4}b_5^2\sin 2\alpha_5=\frac{20^2}{4}\sin\frac{\pi}{3}=50\sqrt{3}$.

Ответ. А. 20 м. Б. $50\sqrt{3}$ м^2.

Задача 7.

Весной 1945 года контрразведчики гестапо с 4 радиостанций, расположенных в вершинах квадрата на территории Берлина, зафиксировали в некоторый момент работу советского радиопередатчика. Штирлиц проявил инициативу и доложил Мюллеру, что расстояния от точек прослушивания до передатчика составили 1, 9, 4 и 5 км. Должен ли Мюллер верить такому сообщению?

Решение. Пусть O — точка расположения передатчика, A, B, C, D — вершины квадрата, x — длина стороны квадрата, расстояния OA и OB равны 1 и 4 км.

1. Точка O не может быть расположена в вершине квадрата (иначе смежные стороны имели бы разные длины).

2. Допустим, что точка O находится на стороне квадрата. Тогда один из концов этой стороны — вершина A.

2.1. Если другим концом этой стороны является точка B, то $x = AB = AD = 1{+}4 = 5$ — длины сторон квадрата. AD — катет треугольника OAD. Но $OD = 5$ или $OD = 9$, в этом треугольнике не выполняется неравенство $OD < 1 + 5$ для длин сторон, это невозможно.

2.2. Пусть второй отрезок стороны, содержащей O, имеет длину 5. Тогда $x = 1 + 5 = 6$. Треугольник с прямым углом A и катетом AO имеет второй катет длины 6. Его гипотенуза имеет длину 4 (короче катета) либо 9 (больше суммы длин катетов). Такие случаи невозможны.

2.3. Пусть второй отрезок стороны, содержащей O, имеет длину 9. Тогда $x = 1 + 9 = 10$. Треугольник с прямым углом A и катетом AO имеет второй катет длины 10. Его гипотенуза имеет длину 4 или 5, т. е. короче катета. что невозможно.

Таким образом, точка O не может находиться на границе квадрата.

3. Случаи, когда точка находится внутри квадрата или вне его, совершенно аналогичны друг другу. Рассмотрим треугольник AOB и вторую вершину D, смежную с вершиной A.

3.1. Пусть AB — сторона квадрата. Тогда длина отрезка AB есть x и $x < 1 + 4$.

Если $OC = 9,\ OD = 5$, то в треугольнике OBC должно быть $9 < x{+}4$, что невозможно при $x < 5$.

Если же $OC = 5,\ OD = 9$, то в треугольнике OAD должно быть $9 < 1 + x$, что невозможно при $x < 5$.

3.2. Пусть AB — диагональ квадрата. Тогда $AC = AD = x$.

Если $OC = 9,\ OD = 5$, то из треугольника OAC получаем $9 < x + 1,\ x > 8$. В треугольнике OAD должно быть $x < 1 + 5$, что невозможно при $x > 8$.

Если же $OC = 5,\ OD = 9$, то из треугольника AOC получим $x < 1{+}5$, а в треугольнике OAD должно быть $9 < 1 + x$, что невозможно при $x < 6$.

Во всех случаях противоречия.

Ответ: нет, треугольников с такими параметрами не существует.

7082

8 класс

Задача 1.

Станция связана линиями с несколькими предприятиями, при этом
(1) среди любых 3 линий есть ведущая на предприятие города М;
(2) среди любых 4 линий есть ведущая на предприятие поселка П.

Если же выбрать наугад пять линий, то какое максимальное количество среди них могут идти и не в город М, и не в поселок П?

Решение. Пусть n — число всех линий, m — число линий, ведущих в М, p — число линий, ведущих в П, x — число прочих линий. Имеем:

$$m, n, p, x \in \mathbb{Z}_+; \quad m + p + x = n.$$

Пусть $n \geq 5$. В силу условия (1) получим $p + x \leq 2$. Аналогично из (2) следует $m + x \leq 3$. С учетом неравенства $x \geq 0$ получим $m \leq 3$.

Из неравенств

$$p + x \leq 2, \quad m + p + x \geq 5$$

получим $m \geq 3$. Таким образом, $m = 3$ и тогда $x = 0$.

Ответ. Линий, не ведущих ни в М, ни в П, нет.

Задача 2.

Треугольник вращается в своей плоскости. Через какую точку должна проходить ось вращения, чтобы заметалась наименьшая площадь?

Решение.
Ясно, что радиус заметаемого круга будет равен расстоянию от центра вращения до одной из вершин треугольника.
Начнем с вырожденного случая, когда треугольник "есть отрезок". Здесь очевидно, что центр вращения должен находиться в середине отрезка.
Теперь будем "оттягивать" третью вершину от отрезка в любую сторону (но так, чтобы исходный отрезок оставался длиннейшей стороной треугольника). До тех пор, пока треугольник будет тупоугольным, расстояние до третьей вершины будет меньше половины длины исходного отрезка. В случае прямоугольного треугольника эти расстояния сравняются.
А далее нужно уводить центр вращения внутрь треугольника так, чтобы он был центром описанной окружности.

Ответ.
Если треугольник остроугольный – вращать вокруг центра описанной окружности.
Если треугольник тупоугольный – вращать вокруг середины наиболее длинной стороны.
(Прямоугольный треугольник соединяет в себе оба случая.)

Задача 3.

Семья состоит из трех человек: отца, матери и сына. В настоящее время сумма их возрастов составляет 65 лет. 9 лет назад эта сумма составляла 40 лет. 4 года назад отец был старше сына в 9 раз. Сколько лет отцу?

Решение.
Пусть x, y, z - количество лет матери, отцу и сыну, соответственно. Тогда $\begin{cases} x+y+z=65, \\ x-9+y-9+z-9=40, \end{cases}$ но $65-27 \neq 40$. Поэтому сыну меньше 9 лет. И второе уравнение в системе надо записать так: $x+y=58$. Отсюда и из первого уравнения системы получаем, что $z=7$. Далее, найдем возраст отца: $y-4=9(z-4)$. Получаем $y=31$.

Ответ. 31 год отцу.

Задача 4.

После полудня прошло целое число минут, и в этот момент угол между часовой и минутной стрелками составил ровно 45 градусов. Какое время показывают часы, если это событие произошло впервые после полудня?

Решение.

Пусть прошло h целых часов и m минут. За один час (60 минут) часовая стрелка сдвигается на $360/12 = 30$ градусов, еще за m целых минут часовая стрелка подвинется на $(30/60)m = 0,5m$ градусов, а минутная — на $(360/60)m = 6m$ градусов. Таким образом,

$$30h + 0,5m - 6m = \pm 45. \tag{1}$$

Остается решить в неотрицательных целых числах уравнение (1) с условием

$$h \text{ наименьшее }, \quad m \leq 59. \tag{2}$$

Уравнение умножим на 2, чтобы избавиться от дробных чисел:

$$60h - 11m = \pm 90.$$

Ясно, что m кратно 30, условию (2) удовлетворяют только $h = 4, m = 30$.

Ответ. 16 часов 30 минут.

Задача 5.

Почтальон Печкин работает на почте с 8-00 до 16-00. В начале рабочего дня он отправляет одновременно тележки для писем, бандеролей и посылок. Тележка для писем уезжает на 10 минут, тележка для бандеролей – на 15 минут и тележка для посылок – на 25 минут. Затем тележки возвращаются, и за 5 минут Печкин должен погрузить на них соответственно коробку с письмами, бандеролями или посылками. Если оказалось, что тележки встречаются у пункта погрузки, то Печкин грузит ту тележку, которая приходит реже, а другая уезжает пустой. Сколько каких тележек с грузом сможет отправить Печкин за рабочий день?

Решение.

Тележка для писем оборачивается за 15 минут, для бандеролей – за 20 минут, для посылок – за 30 минут. НОК (15, 20)=60, НОК(20, 30)=60, НОК(15, 30)=30, НОК(15, 20, 30)=60. За рабочий день (480 мин) тележка для писем отправится 33 раза, для бандеролей – 25 раз, с посылками – 17 раз. Каждые 60 минут три тележки встречаются, и грузится только тележка с посылками. Каждые 30 минут встречаются тележки для писем и посылок, и Печкин грузит тележку с посылками, поэтому тележка с письмами 16 раз уходит пустой. Тележка с бандеролями уходит пустой 8 раз.

Ответ. Тележка с письмами отправится 17 раз, с бандеролями – 17 раз, с посылками – 17 раз.

Задача 6.

Числа 2^{2015} и 5^{2015} в их десятичной записи написаны одно за другим без пробела. Сколько всего десятичных знаков выписано?

Решение.

Пусть число $a = 2^{2015}$ состоит из m десятичных знаков, а число $b = 5^{2015}$ — из n десятичных знаков. Это означает, что $10^{m-1} < a < 10^m$ и $10^{n-1} < a < 10^n$ (первые неравенства в каждой паре строгие, поскольку ни a, ни b не являются целыми степенями числа 10). Перемножим неравенства и получим:

$$10^{m+n-2} < ab = 10^{2015} < 10^{m+n}.$$

Отсюда $m + n - 2 < 2015 < m + n$, что даёт $m + n = 2016$. Итак, выписано 2016 десятичных цифр.

Ответ. 2016 знаков.

Задача 7.

Весной 1945 года контрразведчики гестапо с 4 радиостанций, расположенных в вершинах квадрата на территории Берлина, зафиксировали в некоторый момент работу советского радиопередатчика. Штирлиц проявил инициативу и доложил Мюллеру, что расстояния от точек прослушивания до передатчика составили 1, 9, 4 и 5 км передатчик не находился внутри квадрата. Должен ли Мюллер верить такому сообщению?

Решение. Пусть O — точка расположения передатчика, A, B, C, D — вершины квадрата, x — длина стороны квадрата, расстояния OA и OB равны 1 и 4 км.

1. Точка O не может быть расположена в вершине квадрата (иначе смежные стороны имели бы разные длины).

2. Допустим, что точка O находится на стороне квадрата. Тогда один из концов этой стороны — вершина A.

2.1. Если другим концом этой стороны является точка B, то $x = AB = AD = 1 + 4 = 5$ — длины сторон квадрата. AD — катет треугольника OAD. Но $OD = 5$ или $OD = 9$, в этом треугольнике не выполняется неравенство $OD < 1 + 5$ для длин сторон, это невозможно.

2.2. Пусть второй отрезок стороны, содержащей O, имеет длину 5. Тогда $x = 1 + 5 = 6$. Треугольник с прямым углом A и катетом AO имеет второй катет длины 6. Его гипотенуза имеет длину 4 (короче катета) либо 9 (больше суммы длин катетов). Такие случаи невозможны.

2.3. Пусть второй отрезок стороны, содержащей O, имеет длину 9. Тогда $x = 1 + 9 = 10$. Треугольник с прямым углом A и катетом AO имеет второй катет длины 10. Его гипотенуза имеет длину 4 или 5, т. е. короче катета. что невозможно.

Таким образом, точка O не может находиться на границе квадрата. Проверим, может ли она располагаться вне его.

3. Рассмотрим треугольник AOB и вторую вершину D, смежную с вершиной A.

3.1. Пусть AB — сторона квадрата. Тогда длина отрезка AB есть x и $x < 1 + 4$.

Если $OC = 9,\ OD = 5$, то в треугольнике OBC должно быть $9 < x + 4$, что невозможно при $x < 5$.

Если же $OC = 5,\ OD = 9$, то в треугольнике OAD должно быть $9 < 1+x$, что невозможно при $x < 5$.

3.2. Пусть AB — диагональ квадрата. Тогда $AC = AD = x$.

Если $OC = 9,\ OD = 5$, то из треугольника OAC получаем $9 < x + 1$, $x > 8$. В треугольнике OAD должно быть $x < 1 + 5$, что невозможно при $x > 8$.

Если же $OC = 5,\ OD = 9$, то из треугольника AOC получим $x < 1 + 5$, а в треугольнике OAD должно быть $9 < 1 + x$, что невозможно при $x < 6$.

Во всех случаях противоречия.

Ответ: нет, треугольников с такими параметрами не существует.

7072

7 класс

Задача 1.

Станция связана линиями с несколькими предприятиями, при этом
(1) среди любых 3 линий есть ведущая на предприятие города М;
(2) среди любых 4 линий есть ведущая на предприятие поселка П.

Если же выбрать наугад пять линий, то какое максимальное количество среди них могут идти и не в город М, и не в поселок П?

Решение. Пусть n — число всех линий, m — число линий, ведущих в М, p — число линий, ведущих в П, x — число прочих линий. Имеем:

$$m, n, p, x \in \mathbb{Z}_+; \quad m + p + x = n.$$

Пусть $n \geq 5$. В силу условия (1) получим $p + x \leq 2$. Аналогично из (2) следует $m + x \leq 3$. С учетом неравенства $x \geq 0$ получим $m \leq 3$.

Из неравенств

$$p + x \leq 2, \quad m + p + x \geq 5$$

получим $m \geq 3$. Таким образом, $m = 3$ и тогда $x = 0$.

Ответ. Линий, не ведущих ни в М, ни в П, нет.

Задача 2.

Треугольник с заданным периметром p вращается в своей плоскости вокруг вершины с углом $\alpha = 30^\circ$. При каком соотношении длин его сторон заметаемая при вращении площадь будет минимальна?

Решение.
При заданном периметре и угле нужно минимизировать длины сторон, исходящих из этого угла (поскольку более длинная из этих сторон и будет радиусом заметаемой окружности). Поэтому очевиден

Ответ. Угол – центр вращения должен быть вершиной равнобедренного треугольника.

Задача 3.

Семья состоит из трех человек: отца, матери и сына. В настоящее время сумма их возрастов составляет 65 лет. 9 лет назад эта сумма составляла 40 лет. 4 года назад отец был старше сына в 9 раз. Сколько лет отцу?

Решение.
Пусть x, y, z - количество лет матери, отцу и сыну, соответственно. Тогда $\begin{cases} x + y + z = 65, \\ x - 9 + y - 9 + z - 9 = 40, \end{cases}$ но $65 - 27 \neq 40$. Поэтому сыну меньше 9 лет. И второе уравнение в системе надо записать так: $x + y = 58$. Отсюда и из первого уравнения системы получаем, что $z = 7$. Далее, найдем возраст отца: $y - 4 = 9(z - 4)$. Получаем $y = 31$.

Ответ. 31 год отцу.

Задача 4.

После полудня прошло целое число минут, и в этот момент угол между часовой и минутной стрелками составил ровно 120 градусов. Какое время показывают часы, если это событие произошло впервые после полудня?

Решение.

Пусть прошло h целых часов и m минут. За один час (60 минут) часовая стрелка сдвигается на $360/12 = 30$ градусов, еще за m целых минут часовая стрелка подвинется на $(3/60)m = 0,5m$ градусов, а минутная — на $(360/60)m = 6m$ градусов. Таким образом,

$$30h + 0,5m - 6m = \pm 120. \tag{1}$$

Остается решить в неотрицательных целых числах уравнение (1) с условием

$$h \text{ наименьшее }, \quad m \leq 59. \tag{2}$$

Уравнение умножим на 2, чтобы избавиться от дробных чисел:

$$60h - 11m = \pm 240.$$

Ясно, что m кратно 60, условию (2) удовлетворяют только $h = 4, m = 0$.

Ответ. 16 часов ровно.

Задача 5.

Почтальон Печкин работает на почте с 8-00 до 16-00. В начале рабочего дня он отправляет одновременно тележки для писем, бандеролей и посылок. Тележка для писем уезжает на 10 минут, тележка для бандеролей – на 15 минут и тележка для посылок – на 25 минут. Затем тележки возвращаются, и за 5 минут Печкин должен погрузить на них соответственно коробку с письмами, бандеролями или посылками. Если оказалось, что тележки встречаются у пункта погрузки, то Печкин грузит ту тележку, которая приходит реже, а другая уезжает пустой. Сколько каких тележек с грузом сможет отправить Печкин за рабочий день?

Решение.

Тележка для писем оборачивается за 15 минут, для бандеролей – за 20 минут, для посылок – за 30 минут. НОК (15, 20)=60, НОК(20, 30)=60, НОК(15, 30)=30, НОК(15, 20, 30)=60. За рабочий день (480 мин) тележка для писем отправится 33 раза, для бандеролей – 25 раз, с посылками – 17 раз. Каждые 60 минут три тележки встречаются, и грузится только тележка с посылками. Каждые 30 минут встречаются тележки для писем и посылок, и Печкин грузит тележку с посылками, поэтому тележка с письмами 16 раз уходит пустой. Тележка с бандеролями уходит пустой 8 раз.

Ответ. Тележка с письмами отправится 17 раз, с бандеролями – 17 раз, с посылками – 17 раз.

Задача 6.

Числа 2^{2015} и 5^{2015} в их десятичной записи написаны одно за другим без пробела. Сколько всего десятичных знаков выписано?

Решение.

Пусть число $a = 2^{2015}$ состоит из m десятичных знаков, а число $b = 5^{2015}$ — из n десятичных знаков. Это означает, что $10^{m-1} < a < 10^m$ и $10^{n-1} < a < 10^n$ (первые неравенства в каждой паре строгие, поскольку ни a, ни b не являются целыми степенями числа 10). Перемножим неравенства и получим:

$$10^{m+n-2} < ab = 10^{2015} < 10^{m+n}.$$

Отсюда $m + n - 2 < 2015 < m + n$, что даёт $m + n = 2016$. Итак, выписано 2016 десятичных цифр.

Ответ. 2016 знаков.

Задача 7.

Весной 1945 года контрразведчики гестапо с 4 радиостанций, расположенных в вершинах квадрата на территории Берлина, зафиксировали в некоторый момент работу советского радиопередатчика. Штирлиц проявил инициативу и доложил Мюллеру, что расстояния от точек прослушивания до передатчика составили 1, 9, 4 и 5 км и передатчик находился внутри квадрата. Должен ли Мюллер верить такому сообщению?

Решение. Пусть O — точка расположения передатчика, A, B, C, D — вершины квадрата, x — длина стороны квадрата, расстояния OA и OB равны 1 и 4 км.

1. Точка O не может быть расположена в вершине квадрата (иначе смежные стороны имели бы разные длины).

2. Допустим, что точка O находится на стороне квадрата. Тогда один из концов этой стороны — вершина A.

2.1. Если другим концом этой стороны является точка B, то $x = AB = AD = 1 + 4 = 5$ — длины сторон квадрата. AD — катет треугольника OAD. Но $OD = 5$ или $OD = 9$, в этом треугольнике не выполняется неравенство $OD < 1 + 5$ для длин сторон, это невозможно.

2.2. Пусть второй отрезок стороны, содержащей O, имеет длину 5. Тогда $x = 1 + 5 = 6$. Треугольник с прямым углом A и катетом AO имеет второй катет длины 6. Его гипотенуза имеет длину 4 (короче катета) либо 9 (больше суммы длин катетов). Такие случаи невозможны.

2.3. Пусть второй отрезок стороны, содержащей O, имеет длину 9. Тогда $x = 1 + 9 = 10$. Треугольник с прямым углом A и катетом AO имеет второй катет длины 10. Его гипотенуза имеет длину 4 или 5, т. е. короче катета. что невозможно.

Таким образом, точка O не может находиться на границе квадрата. Проверим, может ли она располагаться внутри него.

3. Случаи, когда точка находится внутри квадрата или вне его, совершенно аналогичны (нет разницы в формулировке для 7 и 8 класса). Рассмотрим треугольник AOB и вторую вершину D, смежную с вершиной A.

3.1. Пусть AB — сторона квадрата. Тогда длина отрезка AB есть x и $x < 1 + 4$.

Если $OC = 9,\ OD = 5$, то в треугольнике OBC должно быть $9 < x + 4$, что невозможно при $x < 5$.

Если же $OC = 5,\ OD = 9$, то в треугольнике OAD должно быть $9 < 1+x$, что невозможно при $x < 5$.

3.2. Пусть AB — диагональ квадрата. Тогда $AC = AD = x$.

Если $OC = 9,\ OD = 5$, то из треугольника OAC получаем $9 < x + 1$, $x > 8$. В треугольнике OAD должно быть $x < 1 + 5$, что невозможно при $x > 8$.

Если же $OC = 5,\ OD = 9$, то из треугольника AOC получим $x < 1 + 5$, а в треугольнике OAD должно быть $9 < 1 + x$, что невозможно при $x < 6$.

Во всех случаях противоречия.

Ответ: нет, треугольников с такими параметрами не существует.