ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАДЕЖДА ЭНЕРГЕТИКИ»
ПО ПРЕДМЕТУ МАТЕМАТИКА

Методическое пособие для школьников по подготовке к Олимпиаде

Часть 1

Д.Г. МЕЩАНИНОВ

Пособие содержит материал, который может дать ориентиры для потенциальных участников Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету математика. На примерах продемонстрированы некоторые принципы, которыми полезно руководствоваться при решении олимпиадных задач.

Подготовлено в методической комиссии Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету математика

Олимпиадные задачи довольно сильно отличаются от типовых задач, даваемых на экзаменах и контрольных работах. Цель олимпиады — не проверка знаний учащихся, а выявление творческих, нестандартно мыслящих личностей. Решение олимпиадных задач состоит не в безошибочном выполнении вычислений и преобразований, а в отыскании оригинальной идеи и умении претворить ее в жизнь для получения результата. Все олимпиадные задачи не требуют знаний, превышающих школьную программу соответствующего класса, и организаторы внимательно следят за этим. Но если какой-то участник знает сверх программы и умеет эффективно и верно применить эти знания, жюри не имеет возражений.

Олимпиада и экзамен не подменяют друг друга, у этих мероприятий разные цели и разные критерии оценивания.

В связи с этим научиться решению олимпиадных, нестандартных задач очень непросто. Не существует универсальных рецептов для достижения успеха в этом деле, каждый участник вырабатывает свои навыки самостоятельно и сугубо индивидуально, на основе, прежде всего, личного опыта. Тем не менее, можно дать некоторые полезные рекомендации и продемонстрировать их эффективность на примерах.

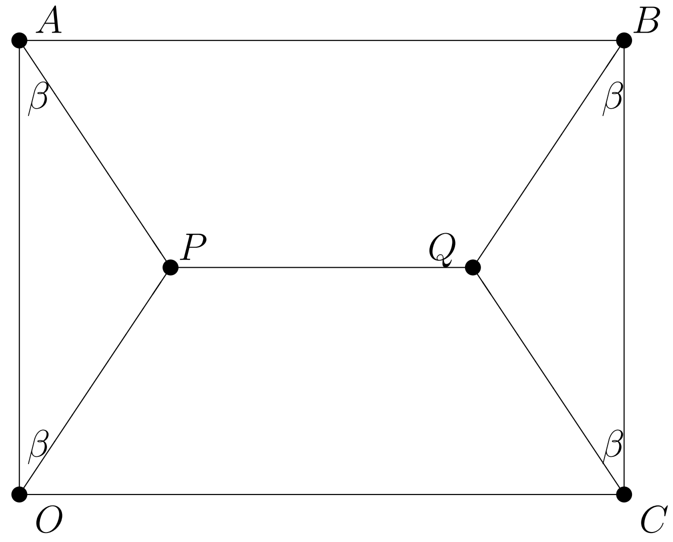
Имея дело с необычной задачей, для которой часто даже неясно, к каким разделам математики она относится (часто этот раздел нельзя указать однозначно, возможно применение многих способов, иногда — даже их комбинация, совместное использование нескольких методов из различных областей), полезно иметь в виду следующие соображения.

1. **Принцип частных случаев**. *Ограничение общности постановки задачи приводит к частному случаю, облегчающему ее. Решение задачи в частных случаях может помочь наметить путь решения общей задачи, сделать предположения, которые затем проверяются. Если предположение доказывается, то оно определяет решение общей задачи. Если предположение не подтверждается (для этого достаточно построить хотя бы один опровергающий пример), то необходимы иные или противоположное предположения.*

2. **Принцип "удобных" значений**. *Полезно создавать частные случаи, которые легко анализируются, путем подстановки в качестве значений параметров простых числовых данных (например, чисел 0 или 1, значений углов, для которых легко вычисляются тригонометрические функции, и т. п.).*

Пример 1 (9–11 кл.). В прямоугольнике $OABC$ стороны OA и BC имеют длину 6, стороны AB и CO — длину 8. В точке O находится электростанция, в точках A, B, C — потребители энергии. Внутри прямоугольника выбираются точки P и Q так, что углы AOP, OAP, BCQ, QBC имеют одинаковую величину β. Точки P и Q соединяют между собой и с вершинами O, A, B, C прямолинейными отрезками электрокабеля. При каком значении β суммарная длина отрезков кабеля — функция $F(\beta) = OP + AP + PQ + BQ + CQ$ — принимает наименьшее значение?

Решение.



Прежде всего выразим длины OA, AP, PQ, BQ, CQ через переменную β. Из равенства углов в условии задачи следует, что треугольники AOP и BCQ равнобедренные с углом β при основании, прямая PQ есть серединный перпендикуляр к отрезкам OA и BC, прямые AB, OC и PQ параллельны. Тогда угол β острый,

$$OP = AP = BQ = CQ = 3/\cos\beta, \quad PQ = 8 - 2\cdot 3\operatorname{tg}\beta,$$

$$F(\beta) = 12/\cos\beta + 8 - 6\operatorname{tg}\beta = 8 + 6\cdot\frac{2-\sin\beta}{\cos\beta}.$$

Необходимо найти точку минимума такой функции. Прежде чем приступить к этому, стоит заметить, что функция $F(\beta)$ и более простая функция

$$G(\beta) = \frac{2-\sin\beta}{\cos\beta}$$

принимают экстремальные значения в одних и тех же точках β, так как каждая из функций выражается через другую монотонно возрастающим линейным преобразованием ($F = 8 + 6G$, $G = (1/6)(F - 8)$). Найдем точку минимума функции $G(\beta)$. Это можно сделать стандартным способом, вычисляя и анализируя производную $G'(\beta)$, однако такой путь долог, требует тщательных вычислений, применения правил дифференцирования и тригонометрических преобразований, на нем немало возможностей совершить ошибки и получить неверный результат (или вообще не получить результат), к тому же метод вряд ли доступен 9-классникам. Чтобы избежать таких трудностей, применим принципы частных случаев и "удобных" значений.

Заметим, что $G(0^\circ) = 2$, $G(30^\circ) = \sqrt{3} < 2$, $G(45^\circ) = 2\sqrt{2} - 1 > \sqrt{3}$, $G(60^\circ) = 4 - \sqrt{3} > \sqrt{3}$. Эти наблюдения дают основание предположить, что $G(\beta) \geqslant \sqrt{3}$ при $0^\circ \leqslant \beta < 90^\circ$. Докажем такую гипотезу, полагая $x = \sin\beta$. Учитывая, что $0 < x < 1$, $\cos\beta = \sqrt{1-x^2}$, неравенство сведем к следующему: $\sqrt{3(1-x^2)} \leqslant 2 - x$. Возводя последнее в квадрат, после очевидных преобразований получаем $4x^2 - 4x + 1 \geqslant 0$, т. е. минимум достигается при $x = 1/2$ и $\beta = 30^\circ$.

Итак, без применения производной найдена точка минимума функций $G(\beta)$ и $F(\beta)$.

Для учащихся, овладевших применением производной, приведем **другой способ** получения этого результата. Вычисляем

$$G'(\beta) = \frac{(2-\sin\beta)'\cos\beta - (2-\sin\beta)(\cos\beta)'}{\cos^2\beta} =$$

$$= \frac{-\cos^2\beta + (2-\sin\beta)\sin\beta}{\cos^2\beta} = \frac{2\sin\beta - 1}{\cos^2\beta}.$$

Необходимое условие экстремума $G'(\beta) = 0$ выполняется для острого угла $\beta = 30^\circ$. Если $0^\circ < \beta < 30^\circ$, то $0 < \sin\beta < 1/2$ и $G'(\beta) < 0$, а при $30^\circ < \beta < 90^\circ$ получаем $G'(\beta) > 0$, т. е. выполняется и достаточное условие минимума функции $G(\beta)$ на $[0^\circ; 90^\circ]$ в точке $\beta = 30^\circ$.

Ответ: угол равен 30°.

Пример 2 (9–11 кл.). На местности расположен прямоугольник $OPQR$. Стороны OP и QR имеют длину a, стороны PQ и OR — длину b. Внутри прямоугольника на расстоянии d ($d < b$) от прямой OP находится овраг, представляющий собой полосу постоянной ширины c ($c < b$), параллельную OP. Вершины O и Q требуется соединить дорогой, частью дороги должен стать мост SF, перпендикулярный линии оврага, причем точка S находится ближе к стороне OP, точка F — ближе к QR. Как надо выбрать точки S, F, чтобы сумма длин прямолинейных отрезков OS, SF, FQ была минимальной?

Решение. Здесь, как и в предыдущей задаче, требуется найти точку минимума некоторой функции. Функция зависит от расстояния между точкой

S и прямой OP. Чтобы точно описать эту функцию, введем оси координат как лучи OP и OR, поместив начало координат в точку O. Тогда вершины прямоугольника получают координаты

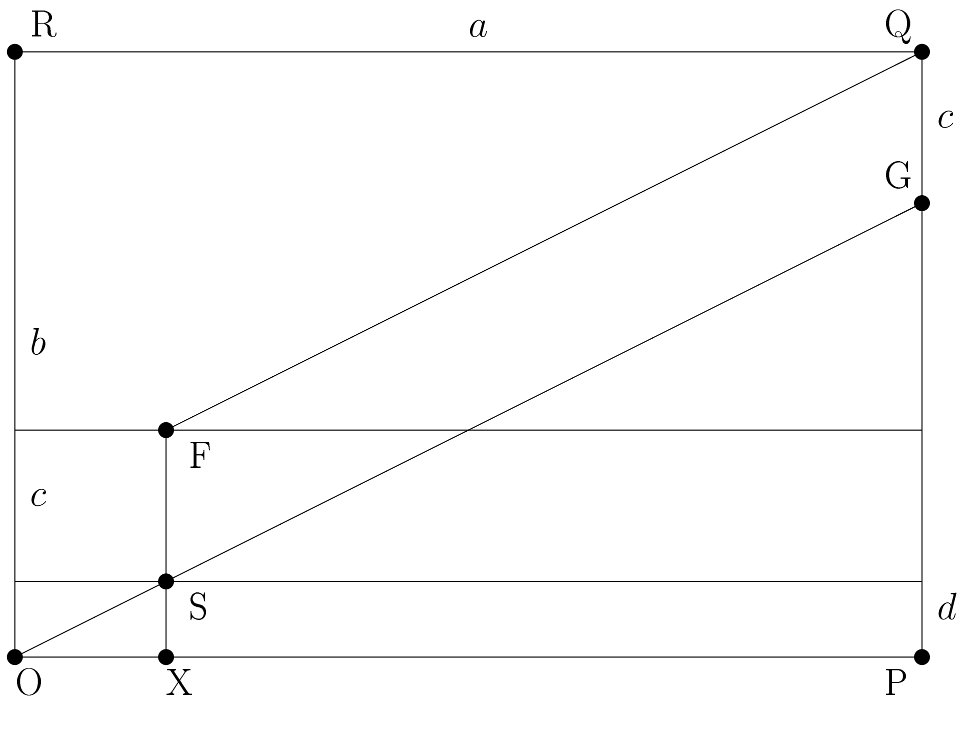
$$O(0;0),\quad P(a;0),\quad Q(a;b),\quad R(0;b).$$

Пусть $(x;y)$ — координаты точки S, тогда $y=d$, точка F получит координаты $(x;c+d)$. Требуется найти минимальное значение суммы расстояний как функции

$$l(x)=OS+SF+FQ.$$

Ясно, что $SF=c$. Можно выразить длины OS, QF через x и данные задачи a, b, c, d, применяя теорему Пифагора, но тогда получится довольно сложная формула, включающая x^2 и квадратные корни, найти и анализировать ее производную нелегко, возможно немало ошибок, вычисления требуют много времени и сил. Однако можно применить простой и красивый исключительно геометрический способ решения.

Возьмем на отрезке PQ точку G такую, что $GQ=c$, и соединим ее с точкой O прямолинейным отрезком. В качестве S возьмем точку пересечения этого отрезка с нижней границей препятствия. Продлим прямую SF до пересечения с отрезком OP в точке $X(x;0)$.



Имеем $y = d$, $SFQG$ — параллелограмм, треугольники OXS и OPG подобны, $OX : OP = XS : PG$, т. е. $x : a = d : (b - c)$, следовательно,

$$x = \frac{ad}{b-c}, \quad y = d.$$

Минимальность значения $l(x)$ при таком выборе x следует из равенства $OS + SF + FQ = OG + GQ$ и минимальности пути OG как прямолинейного отрезка.

Учащиеся, овладевшие применением производной могут оценить достоинства приведенного метода, сравнив его со **стандартным способом поиска минимума** функции $l(x)$ на отрезке $[0; a]$. Имеем

$$l(x) = \sqrt{x^2 + d^2} + c + \sqrt{(a-x)^2 + (b-c-d)^2}.$$

Положим для краткости

$$e = b - c - d$$

и вычислим

$$l'(x) = \Big(((x^2 + d^2)^{1/2} + ((a-x)^2 + e^2)^{1/2})\Big)' =$$

$$= (1/2)(x^2 + d^2)^{-1/2} \cdot 2x + (1/2)((a-x)^2 + e^2)^{-1/2} \cdot 2(a-x)(-1) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + e^2}}.$$

Необходимое условие экстремума $l(x) = 0$ принимает вид

$$x\sqrt{(a-x)^2 + e^2} = (a-x)\sqrt{x^2 + d^2}.$$

Обе части последнего соотношения положительны, поэтому возведение в квадрат является его равносильным преобразованием:

$$x^2((a-x)^2 + e^2) = (a-x)^2(x^2 + d^2),$$

откуда

$$x^2 e^2 = (a-x)^2 d^2, \quad ex = (a-x)d, \quad (d+e)x = ad$$

и

$$x = x_0 = \frac{ad}{d+e} = \frac{ad}{b-c}.$$

Проводя те же выкладки в обратном порядке, убеждаемся в выполнении достаточного условия минимума

$$l'(x) < 0 \text{ при } 0 < x < x_0 \quad \text{и} \quad l'(x) > 0 \text{ при } x_0 < x < a$$

функции $l(x)$ на отрезке $[0;a]$.

Ответ: точка S находится на расстоянии x от стороны OR и на расстоянии d от OP, точка F — на том же расстоянии x от OR и на расстоянии $c+d$ от OP, где $x = ad/(b-c)$.

Мы увидели, что в последней задаче применимы именно геометрические методы. Они обладают и таким важным достоинством, как наглядность, позволяющая быстро и четко сформулировать предположение, проверить его, убедиться в неверности какой-то гипотезы, а иногда и полностью решить задачу.

Такие же возможности предоставляет весьма распространенный в последние лет 50–70 язык **графов**. *Графы не изучаются в школе, но они настолько просты, что каждый ученик даже младших классов способен построить нужный граф и применить его для решения математической, логической задачи или разрешения жизненной ситуации.*

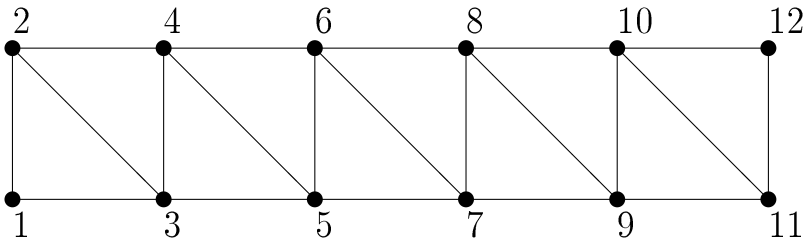
Графы выражают отношения между объектами, причем отношение устанавливается между двумя объектами. Если изображать объекты точками на плоскости (они называются вершинами графа), то точки, соответствующие объектам, между которыми имеется данное отношение, соединяются прямолинейным отрезком или дугой (ребром графа). Неважно, как расположены точки-вершины, важно только, какие пары из них соединены ребрами. Представление отношений графами и анализ графа отношения позволяет, в частности, избежать перебора возможных случаев, что также важно в условиях ограниченного времени олимпиадного мероприятия.

Для описания отношений вместо графов часто применяют равносильные им прямоугольные **таблицы из двух символов** *(например, 0 и 1, или + и −, или галочка и пробел и т. п.). Строки и столбцы таблицы соответствуют объектам, на пересечении строки k и столбца j в таблице находится 1 (+), если объекты k и j находятся в рассматриваемом отношении, и 0 (−) в противном случае. При большом числе объектов способ представления отношения графом лаконичнее табличного способа.*

Пример 3 (7–11 кл.). На конкурсе бальных танцев пары с номерами от 1 до 12 образовали окружность так, что разность номеров любых двух соседних пар меньше 3. Окружность поворачивается, и каждая пара, не меняя своего положения относительно других пар, проходит перед судьями. Могут ли в этой окружности соседствовать пары с номерами

а) 1 и 2, б) 5 и 6, в) 8 и 9?

Решение. Построим так называемый граф возможного соседства: вершины графа — номера пар, две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие пары могут быть соседями. Расположим вершины на двух горизонталях: на одной горизонтали выписываем слева направо все номера одной четности в порядке возрастания. Тогда в вершинах 1 и 12 сходятся ровно 2 ребра, в вершинах 2 и 11 — по 3 ребра, в каждой из остальных вершин — 4 ребра. Все ребра, соединяющие различные горизонтали, — это (1,2),(3,4),..., (11,12), а также (2,3), (4,5),...,(10,11).



Графу из этой задачи соответствует следующая **таблица** (указаны только символы +).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		+	+									
2	+		+	+								
3	+	+		+	+							
4		+	+		+	+						
5			+	+		+	+					
6				+	+		+	+				
7					+	+		+	+			
8						+	+		+	+		
9							+	+		+	+	
10								+	+		+	+
11									+	+		+
12										+	+	

Легко ли анализировать такую таблицу для для решения нашей задачи?

Возвращаясь к графу, замечаем, что окружности из пар соответствует цикл, проходящий через каждую вершину ровно один раз. Для выполнения последнего условия необходимо и достаточно, чтобы переход с одной горизонтали на другую проходил по самому левому ребру (1,2) и самому правому ребру (11,12). Этим и определяется возможность соседства.

Ответ: могут соседствовать только пары 1 и 2.

Второй способ (без применения графов). Требуется расположить числа 1,...,12 на окружности с соблюдением условия соседства. Для каждого числа j, $1 \leqslant j \leqslant 12$, составим список $C(j)$ возможных соседей:

$$C(1) = \{2, 3\},\ C(2) = \{1, 3, 4\},\ C(11) = \{9, 10, 12\},\ C(12) = \{11, 12\},$$

$$\text{и если } 3 \leqslant j \leqslant 10, \text{ то } C(j) = \{j-2, j-1, j+1, j+2\}.$$

Расположим числа 1 и 12 в диаметрально противоположных точках окружности. Соседи числа 1 определены однозначно, это 2 и 3. Второй сосед числа 2 (один сосед — число 1) принадлежит множеству $C(2)$ и отличен от 1 и 3, т. е. однозначно 4. Второй сосед числа 3 (один сосед — число 1) принадлежит множеству $\{1, 2, 4, 5\}$ и отличен от 1, 2 и 4, однозначно это число 5. Продолжая аналогичным образом выбирать последовательно вторых соседей чисел 4,5,6,7,...., придем к единственному возможному циклу (расположению на окружности)

$$1 - 2 - 4 - 6 - 8 - 10 - 12 - 11 - 9 - 7 - 5 - 3 - 1.$$

Ответ: соседями могут быть только пары 1 и 2.

Эта задача может быть обобщена для любых двух пар не из 12, а из произвольного четного числа пар. Следует иметь в виду и следующий **принцип общности***: иногда проще (или не сложнее) решить более общую задачу. Он не противоречит принципу частных случаев, поскольку эта простота проявляется не всегда.*

С помощью графов может быть решена и следующая задача. Покажем, что применение графов не является обязательным, решив ее чисто логическими и арифметическими методами.

Пример 4 (7– 11 кл.). На уроке математики 5 школьников решили провести между собой круговой турнир по игре "Крестики-нолики". Каждый участник должен сыграть ровно по одной партии с каждым из остальных четырех. Когда учитель прервал это соревнование, оказалось сыграно 6 партий. Больше всех игр — по три — провели только Алена и Вася. Сколько игр провели остальные участники?

Решение. Назовем участников A (Алена), B (Вася), C (Саша), D (Даша), E (Егор). Пусть $n(X)$ — число партий, сыгранных каждым участником X, $X = A, B, C, D, E$. Тогда

$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) + n(E) = 2 \cdot 6,$$

так как партия между X и Y учтена ровно в 2 слагаемых: $n(X)$ и $n(Y)$. (Можно построить граф турнира, вершины соответствуют участникам, ребра — играм, $n(X)$ есть число ребер, сходящихся в вершине X. Сумма всех значений $n(X)$ ровно в 2 раза больше числа всех ребер графа). Имеем $n(A) = n(B) = 3$. Не ограничивая общности, полагаем

$$n(C) \geqslant n(D) \geqslant n(E). \tag{1}$$

Тогда $n(C) < 3$ и

$$n(c), n(D), n(E) \in \{0, 1, 2\}. \tag{2}$$

При этом

$$n(c) + n(D) + n(E) = 6. \tag{3}$$

Если $n(E) = 0$, то $n(C) + n(D) = 6$ и условия (2) и (3) не могут выполняться одновременно.

Если $n(E) = 1$, то $n(C) + n(D) = 5$ и условия (2) и (3) не могут выполняться одновременно.

Остается только возможность $n(E) = 2$. При этом и $n(D) = n(C) = 2$. Нетрудно проверить, что такая возможность реализуется; если этого не сделать, ответ не будет обоснован. Действительно, все условия задачи выполняются, если пары игравших есть A и C, A и D, A и E, B и C, B и D, B и E.

Ответ: участники C, D, E провели по две игры.

В этом решении мы продемонстрировали также **принцип удобных допущений***, когда упорядочили значения $n(X)$ неравенствами (1). Действительно, это допущение не ограничивает общности (если оно не выполняется, то участников C,D,E переименуем), но облегчает дальнейшие рассуждения.*

Можно **усложнить задачу**, поставив также вопрос: **кто с кем играл?**

Один вариант мы уже нашли, при нем все пары игравших есть A и C, A и D, A и E, B и C, B и D, B и E. Все варианты разбиваются на 2 группы:

1) A и B между собой не играли (такой вариант ровно один, он уже указан),

2) A и B между собой играли.

Продолжим анализ вариантов группы 2). Одна игра определена — AB. Каждый из участников A, B провел ровно три игры, поэтому каждый из них может сыграть ровно с двумя из участников C, D, E. Далее, ровно один из C, D, E должен сыграть и с A, и с B. Обозначим такого участника буквой X, двоих остальных — Y, Z (X, Y, Z — различные элементы множества

$\{C, D, E\}$). Итак, имеются пары AB, AX, BX. Остальные пары — это AY, BZ и YZ. Участник X может быть выбран тремя способами, Y — двумя, поэтому в группе 2) ровно $2 \cdot 3 = 6$ вариантов. Итого, с учетом одного варианта группы 1), возможно 7 ответов (не будем их выписывать, достаточно указать способ их построения, это позволит также сэкономить время на олимпиадном мероприятии).

Олимпиадные задачи отличаются оригинальностью и часто выглядят пугающе для некоторых участников, в частности, они могут содержать непривычные обозначения и термины. Организаторы всегда заботятся о том, чтобы такие формулировки не сделали задачу недоступной, поэтому пугаться не стоит, а надо аккуратно разобраться в условии и наметить какой-то путь решения. Всегда находится очень простой и красивый метод решения. Таким образом, следует руководствоваться еще несколькими **принципами:**

— содержание задачи может быть проще формы ее изложения,

— следует искать наиболее простой способ решения,

— правильное решение должно быть красивым (хотя не все, что красиво, правильно).

Приведем несколько примеров задач с "необычными " формулировками и их довольно простые решения.

Пример 5 (9–11 кл.). *Усеченной разностью* чисел x и y называется операция $x \dot{-} y$, результат которой равен обычной разности $x - y$, если $x \geqslant y$, и нулю, если $x \leqslant y$. Найдите на координатной плоскости все точки (x, y), координаты которых удовлетворяют условию $(x \dot{-} y^2) \dot{-} x = 0$.

Решение. Если $x \leqslant y^2$, то $z = x \dot{-} y^2 = 0$ и $z \dot{-} x = 0$. Точки (x, y) с условием $x \leqslant y^2$ образуют область D_1.

Пусть $x \geqslant y^2$. Тогда равенство в условии задачи справедливо в точности при одновременном выполнении неравенств

$$x \geqslant y^2, \quad x - y^2 \leqslant x,$$

эквивалентных одному неравенству $x \geqslant y^2$. Такие точки (x, y) образуют область D_2.

Объединение областей D_1 и D_2 есть вся координатная плоскость.

Ответ: вся плоскость.

Пример 6 (7–11 кл.). Целой частью $[x]$ произвольного действительного числа x называется наибольшее целое M такое, что $M \leqslant x$. Например, $[3,14] = 3$, $[-3] = -3$, $[-3/14] = -1$. Решите уравнение $[2x^2 + 1] = 2x$.

Решение. В правой части всегда целое. Это возможно в следующих случаях.

1) Число $x = k$ целое. Тогда $2x^2+1 = 2k^2+1$ тоже целое, $[2k^2+1] = 2k^2+1$ и уравнение $2k^2+1 = 2k$ не имеет целых корней, так как правая часть четна, а левая нечетна.

2) Число x не целое, но $2x$ целое. Тогда $x = k + 1/2$, где k целое,

$$[2x^2+1] = [2(k+1/2)^2+1] = [2k^2+2k+1+1/2] = 2k^2+2k+1, \quad 2x = 2k+1.$$

Из уравнения $2k^2 + 2k + 1 = 2k + 1$ получаем $k = 0$ и тогда $x = 1/2$.

Ответ: $1/2$.

Пример 7 (9–11 кл.). Для функции

$$f(x) = x + \sqrt{ax+b}, \qquad \text{где } a > 0,$$

решите уравнение

$$f(f(x)) = x.$$

Решение. Здесь мы имеем дело с композицией функций, владение этим понятием и есть ключ к задаче. Если значением функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ является число y_0, т. е. $f(x_0) = y_0$, то значение композиции $f(f(x))$ в точке $x = x_0$ есть значение $f(y_0)$ функции $f(x)$ в точке $x = y_0$. Таким образом,

$$f(f(x)) = f(x) + \sqrt{af(x)+b} = x + \sqrt{ax+b} + \sqrt{a(x+\sqrt{ax+b})+b},$$

и уравнение принимает вид

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{\sqrt{ax+b}\cdot(\sqrt{ax+b}+a)} = 0.$$

В левой части находится сумма неотрицательных слагаемых — арифметических квадратных корней. Такая сумма равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из слагаемых равно 0. Получаем

$$ax + b = 0, \qquad x = -b/a.$$

Ответ. $x = -b/a$.

Пример 8 (9–11 кл.). Крепость злой волшебницы представляет собой замкнутую ломаную линию без самопересечений, все углы которой прямые. Темной ночью ураган занес Элли и Тотошку в страну этой волшебницы, они оказались в нескольких шагах от крепостной стены. Как может Элли, не имея никаких приборов и ничем себя не выдавая, определить, находится ли она с Тотошкой внутри крепости или за ее пределами?

Решение. Крепость представляет собой многоугольник. Важно иметь в виду, что этот многоугольник не обязательно выпуклый, т. е. углы могут быть равны и 90°, и 270°. Способ следующий. Надо оставить на исходной точке какой-либо предмет и, держась за стену определенной рукой (например, левой, работает принцип удобных допущений), обойти всю стену и вернуться на то же место, считая повороты налево и направо. Если обходить стену снаружи, то число левых поворотов ровно на 4 больше числа правых поворотов, при обходе изнутри правых поворотов на 4 больше левых. Если держаться за стену правой рукой, будет все наоборот. В этом легко убедиться, например, индукцией по числу углов. (Базис индукции — число углов 4. Прямоугольник — наиболее простая фигура, удовлетворяющая условию задачи, применен принцип частных случаев. Остается аккуратно совершить индуктивный переход.) Учащиеся младших классов, не знакомые с методом математической индукции, могут использовать и другие соображения. Задача не столько математическая (вычислять почти нечего), а логическая.

Литература

1. Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рубанов И. С. Всероссийские олимпиады. Вып. 4. — М.: Просвещение, 2013. — 208 с.

2. Акулич И. Ф. Учимся решать сложные олимпиадные задачи. — М.: Илекса, 2013. — 152 с.

3. Алфутова И. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сб. задач для матем. школ. — М.: МЦНМО, 2009. — 336 с.

4. Арнольд В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. — М.: МЦНМО, 2004. — 16 с.

5. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л. Заочные матем. олимпиады. — М., МЦНМО, 2012. — 192 с. (Библиотечка "Квант+". Вып. 121.)

6. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009. Заключительные этапы. — М.: МЦНМО, 2014. — 552 с.

7. Далингер В. А. Задачи в целых числах. — М.: Илекса, 2014. — 112 с.

8. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. — М.: МЦНМО, 2012. — 96 с.

9. Кукушкин Б. Н. Математика. Подготовка к олимпиаде. 7–11 классы. — М.: Айрис-Пресс, 2011. — 320 с.

10. Севрюков П. В. Школа решения олимпиадных задач по математике. — М.: Илекса; Ставрополь: Сервисшкола, 2013. — 176 с.

11. Толпыго А. 130 нестандартных задач. — М.: МЦНМО, 2012. — 160 с. (Библиотечка "Квант". Вып. 124).

12. Фарков А. В. Готовимся к олимпиадам по математике. — М.: Экзамен, 2010. — 158 с.

13. Фарков А. В. Методы решения олимпиадных задач. 10–11 классы. — М.: Илекса, 2014. — 110 с.

14. Штейнгауз Г. Сто задач. — М.: Наука, 1986. — 144 с.

15. http:// www.energy-hope.ru

16. http:// www.vos.olimpiada.ru