Материалы заданий Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «физика» в 2014/2015 учебном году

Характер и уровень сложности олимпиадных задач по физике направлены на достижение целей, поставленных организаторами олимпиад. В первую очередь, это выявление в составе участников олимпиад ребят, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к успешному усвоению курсов, определенных образовательными стандартами для технических вузов. Будущие студенты должны обладать логическим мышлением, свободно оперировать физическими законами, научными формулировками и терминологией. От школьников требуется умение математически сформулировать описанную в задаче ситуацию на основе физических законов, при решении – применить наиболее подходящие методы алгебры. Совершенно необходимо и умение абстрагироваться от лишнего, рисовать удачные графические схемы, умело применять графики тех или иных процессов.

Структура типичного варианта олимпиады такова, что задачи строго дифференцированы по сложности и требуют для решения различных временных затрат. Задачи охватывают все разделы школьной программы и носят, в своем большинстве, комплексный характер, позволяющий варьировать оценки в зависимости от проявленных в решении творческих подходов и продемонстрированных технических навыков. Участники должны самостоятельно определить законы физики, применимые к каждой задаче, разбить задачу на подзадачи, грамотно выполнить решение каждой подзадачи и затем синтезировать решение всей задачи из решений отдельных подзадач.

Успешное написание олимпиадной работы не требует знаний, выходящих за пределы школьной программы, но, как показывает статистика олимпиады, доступно далеко не каждому школьнику, поскольку требует творческого подхода, логического мышления, умения увидеть и составить правильный и оптимальный план решения, четкого и технически грамотного выполнения каждой части решения, порой, отбора из множества математически верных решений подмножества решений, соответствующих физической реальности.

Умение справляться с заданиями олимпиады по физике приходит к участникам олимпиад с опытом, который вырабатывается на тренировочном и отборочном этапах олимпиады.

Решения вариантов заключительного этапа

ВАРИАНТ 7111 для 11 классов

1. Учащиеся Лицея №1502 при МЭИ выступали на научной конференции школьников с докладом о результатах своей работы. Они исследовали отражательные свойства белого материала, из которого изготавливаются экраны в кинотеатрах. Учащиеся обнаружили, что свойства материала оптимизированы для минимизации потерь при отражении света. После доклада председатель жюри конференции задал лицеистам вопрос: «Что мешает сделать экран зеркальным, ведь при этом потери света будут заведомо меньше?». Учащиеся получили диплом 1 степени, потому что ответили на вопрос совершенно правильно. Что ответили школьники председателю жюри? Как вы объясните их ответ?

Решение: Для того, чтобы зритель в кинотеатре увидел изображение кадра, отраженного от экрана, необходимо, чтобы в направлении зрителя отразились лучи от всех точек экрана, освещенных кинопроектором. Кроме того необходимо обязательно учесть, что зритель в зале не один., т.е. условия отражения от экрана должны одинаково выполняться для всех зрителей. Очевидно, что выполнение закона отражения при использовании зеркального экрана на позволит выполнить эти условия. Иными словами, закон отражения выполняться не должен: лучи должны отражаться от каждой точки экрана во всех направлениях (такое отражение называется диффузным).

2. Корпус подводной лаборатории состоит из двух полусфер - верхней и нижней. Определите силу давления на внешнюю поверхность нижней полусферы, если её радиус равен $\boldsymbol{R}$, а самая верхняя точка лаборатории расположена на глубине $2\boldsymbol{R}$ метров. Плотность морской воды в районе лаборатории равна $\boldsymbol{\rho}$, атмосферное давление нормальное.

Сила давления на нижнюю полусферу складывается из силы Архимеда и суммы силы давления вышележащих слоев воды и силы атмосферного давления:

$$F = \rho g \frac{2}{3}\pi R^3 + \left(\rho g \left(H+R\right) + p_0\right)\cdot \pi R^2 = \pi\rho g R^2 \cdot \left(\frac{2}{3}R + R + H\right) + \pi R^2 p_0 =$$

$$= \pi R^2 \left(p_0 + \rho g\left(\frac{5}{3}R + H\right)\right)$$

3. Одноатомный идеальный газ совершает два процесса. В процессе 1-2 газ расширяется втрое по закону $p = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi V}{6V_1}\right)$, где p – давление, V – объём, V_1 – первоначальный объём, α - некоторая постоянная. В процессе 2-3 газ продолжает расширяться по закону $p = \alpha \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\pi V}{2V_2}\right)\right)$ до объема 4 V_1. Чему равна внутренняя энергия газа U_3 в конце процесса, если в процессе 1-2 она увеличилась на 50 Дж?

Определим параметры состояния газа в точках 1, 2, 3:

$$p_1 = \alpha \sin\left(\frac{\pi V_1}{6V_1}\right) = \alpha \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\alpha}{2}$$

$$p_2 = \alpha \sin\left(\frac{\pi V_2}{6V_1}\right) = \alpha \sin\left(\frac{\pi 3V_1}{6V_1}\right) = \alpha \sin\frac{\pi}{2} = \alpha$$

$$p_3 = \alpha\left(1 - \cos\frac{\pi V_3}{2V_2}\right) = \alpha\left(1 - \cos\frac{\pi 4V_1}{2\cdot 3V_1}\right) = \alpha\left(1 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\alpha$$

Тогда значения внутренней энергии в состояниях 1, 2, 3:

$$U_1=\frac{3}{2}p_1V_1=\frac{3}{2}\frac{\alpha}{2}V_1=\frac{3}{4}\alpha V_1\ ,\quad U_2=\frac{3}{2}p_2V_2=\frac{3}{2}\alpha 3V_1=\frac{9}{2}\alpha V_1,\quad U_3=\frac{3}{2}p_3V_3=\frac{3}{2}\frac{3\alpha}{2}4V_1=9\alpha V_1$$

Соответственно,

$$\Delta U_{12}=\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{4}\right)\alpha V_1=\frac{15}{4}\alpha V_1;\quad \alpha V_1=\frac{4}{15}\Delta U_{12}$$

$$U_3=9\alpha V_1=9\cdot\frac{4}{15}\Delta U_{12}=9\cdot\frac{4}{15}\cdot 50=120\ \text{Дж.}$$

4. Силовые линии однородного электростатического поля направлены вертикально вверх. Электрон начинает двигаться в этом поле так, что его начальная скорость составляет угол $\alpha = 45°$ с напряжённостью поля. Определите отношение минимального радиуса ρ кривизны траектории электрона к его максимальному смещению L в направлении силовой линии.

Радиус кривизны траектории электрона будет минимален в точке вершины параболы, когда $\vec{v}\perp\vec{a}$ *, т.е.*

$$\rho=\frac{v^2}{a}=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{a}=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{eE/m}\ .$$

Из законов кинематики максимальное смещение в направлении силовых линий:

$$L=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2a}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2\,eE/m}$$

Тогда $$\frac{\rho}{L}=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{eE/m}:\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2\,eE/m}=2$$

5. Абсолютно гибкая однородная цепочка висит вертикально над поверхностью стола, подвешенная за верхний конец. Нижний конец цепочки касается стола. Верхний конец цепочки отпускают. Докажите, что в любой момент времени падения цепочки сила её давления на стол равна утроенному весу лежащей на столе части цепочки.

Обозначим массу цепочки m, а ее длину l. Пусть к моменту t ($t\le\sqrt{2l/g}$) длина лежащей на столе части цепочки равна x, а сила давления на стол этой части , т.е. ее вес, $G(x)$.

Очевидно, что $G(x)=mgx/l$.

Пусть за малый промежуток времени от t до $t+\Delta t$ на стол падает часть длиной Δx . Масса этого кусочка $\Delta m=m\Delta x/l$, а скорость падения $v=gt=\sqrt{2gx}$. Очевидно, что $\Delta t=\frac{\Delta x}{v}$.

Пусть F – сила, действующая со стороны стола на элемент Δx и приводящая к его остановке. Поскольку $\Delta mv = F\Delta t$, то после всех подстановок получим $F = 2mgx/l$. Очевидно, что элемент Δx действует на стол с такой же по модулю силой.

Полная сила давления на стол будет равна

$$F + G(x) = 2mgx/l + mgx/l = 3mgx/l = 3G(x).$$

6. Контур состоит из катушки индуктивностью L и сопротивлением R и конденсатора электроемкостью C. Какую мощность должен потреблять контур от внешней сети, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе равно U_0.

$$\frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}CU_0^2 \Rightarrow I_0 = \sqrt{\frac{C}{L}}U_0$$

$$P_{потр} = P_{потерь} = I_{действ}^2 R = \frac{1}{2}I_0^2 R = \frac{1}{2}\frac{C}{L}U_0^2 R$$

7. Кубик с ребром l начинает скользить по горизонтальной доске с некоторой начальной скоростью. Коэффициент трения кубика о доску равен μ. На расстоянии S от точки начала скольжения из доски выступает маленький гвоздик. Какой должна быть минимальная начальная скорость кубика, чтобы при ударе о гвоздик кубик перевернулся? Кинетическая энергия кубика перед ударом о гвоздик в n раз больше механической энергии, потерянной кубиком при ударе.

<u>Решение:</u>

Если при нормальном положении кубика (на грани) его центр тяжести находится на высоте $h = l/2$ над поверхностью доски, то при переворачивании центр тяжести поднимается на высоту $h' = l\sqrt{2}/2 = l/\sqrt{2}$ над поверхностью доски. Чтобы кубик перевернулся, его энергия после удара должна быть не меньше, чем $W_{кин2} = mg(h' - h)$. Энергии перед ударом и после удара связаны соотношением $W_{кин1} = W_{потерь} + W_{кин2} = \frac{1}{n}W_{кин1} + W_{кин2}$ Тогда $W_{кин2} = mg(h' - h) = W_{кин1}\frac{n-1}{n}$. Поэтому $W_{кин1} = mg(h' - h)\frac{n}{n-1}$.

Изменение кинетической энергии при движении кубика до удара:

$$W_{кин1} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgs,$$

т.е. $$mg(h' - h)\frac{n}{n-1} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgs;$$

$$mgl\frac{\sqrt{2}-1}{2}\frac{n}{n-1}-\frac{mv_0^2}{2}=-\mu mgs\,;$$

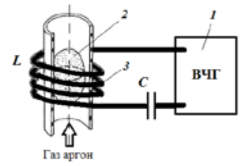
$$\mu gs=\frac{v_0^2}{2}-gl\frac{\sqrt{2}-1}{2}\frac{n}{n-1}\,;$$

$$2\mu gs=v_0^2-gl\frac{\sqrt{2}-1}{n-1}n\,;$$

$$v_0=\sqrt{2\mu gs+gl\frac{\sqrt{2}-1}{n-1}n}\,.$$

ВАРИАНТ 7112 для 11 классов

1. Учащиеся Лицея №1502 при МЭИ во время своей летней практики выполняли научную работу в лаборатории физики плазмы на кафедре Общей физики и ядерного синтеза. Они исследовали характеристики газового разряда, создаваемого в индукционном плазмотроне. В этом устройстве (см. рис.) плазма возникает внутри трубки, помещенной в магнитную катушку, которая является элементом колебательного контура, подключенного к высокочастотному генератору. Школьники обнаружили изменение индукции магнитного поля в центре магнитной катушки, подключенной к работающему генератору, после зажигания высокочастотного разряда в аргоне. Как изменилась индукция магнитного поля? Укажите, какими физическими явлениями и закономерностями вызвано это изменение.



1 – ВЧ-генератор; *2* – разряд; *3* – магнитная катушка

Решение: Если в трубке, помещенной внутрь магнитной катушки, находится газ, то при пропускании тока по виткам катушки создается магнитное поле, линии индукции которого параллельны оси катушки. Эффект изменения магнитной индукции (поскольку по виткам протекает переменный электрический ток), т.е. изменение магнитного потока через площадь витков катушки, приводит к возникновению явления электромагнитной индукции. Однако, поскольку газ непроводящий, то возникновения э.д.с. индукции или индукционных токов в газе не происходит. Создается лишь вихревое электрическое поле по оси катушки (впрочем, школьники могут это и не написать)

Если в трубке создается газовый разряд (газ становится проводящим, превращаясь в плазму), то явление электромагнитной индукции выражается в появлении индукционного тока через плазму. В соответствии с правилом Ленца индукционный ток своим магнитным полем ослабляет эффект, вызвавший появление тока: магнитное поле индукционного тока уменьшает магнитную индукцию катушки (в результате суперпозиции).

Ответ: индукция магнитного поля на оси катушки уменьшается.

2. По наклонной плоскости берегового водосброса на гидроэлектростанции стекает широкий поток воды. На расстоянии $\boldsymbol{L}$ от начала водосброса глубина потока уменьшается в 4 раза. Определите, на каком расстоянии от начала водосброса глубина потока была в 2 раза больше. Трением воды о стенки и дно водосброса можно пренебречь.

В соответствии с уравнением непрерывности для потока жидкости

$$V_0 S_0 = V_1 S_1 = V_2 S_2,$$

где V_0 *- скорость потока на вершине наклонной плоскости,* V_1 *– на расстоянии l от вершины в месте уменьшения глубины в два раза,* V_2 *- на расстоянии L от вершины в месте уменьшения глубины в четыре раза,* S_0, S_1 и S_2 *– площади поперечного сечения потока в соответствующих местах. При постоянной ширине потока площади поперечного сечения можно связать с глубинами потока. Тогда уравнение непрерывности можно представить в виде*

$$V_0 h_0 = V_1 h_1 = V_2 h_2.$$

Теперь выразим скорости V_1 и V_2:

$$V_1 = V_0 \frac{h_0}{h_1} = 2V_0, \qquad V_2 = V_0 \frac{h_0}{h_2} = 4V_0$$

По закону сохранения энергии для потока можно записать

$$\frac{mV_0^2}{2} + mgl sin\alpha = \frac{mV_1^2}{2},$$

$$\frac{mV_0^2}{2} + mgL sin\alpha = \frac{mV_2^2}{2}.$$

где m – масса элемента потока, α – угол наклона водосброса.

Подставляя вместо скоростей V_1 и V_2 их выражения через скорость V_0, получаем

$$2gl\sin\alpha = 3V_0^2,\ 2gL\sin\alpha = 15V_0^2.$$

Отношение этих равенств дает искомую величину l

$$l = L/5.$$

3. Идеальный одноатомный газ в количестве $\nu = 2$ моля, совершает процесс 1-2-3, состоящий из изобарного расширения (1-2) и изохорного нагревания (2-3). Известно, что $p_3 = \frac{31}{21} p_1$ и $V_3 = \frac{7}{5} V_1$. Если осуществить процесс изотермического расширения газа 1-4, передав ему то же количество теплоты, что и в процессе 1-2-3, то он совершит работу $A_{14} = 1200R$ (R – универсальная газовая постоянная). Найдите исходную температуру газа T_1.

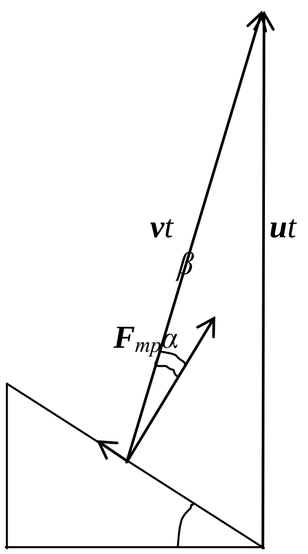
$$Q_{12} = \frac{5}{2} p_1 \left(V_3 - V_2\right) = p_1 V_1 \text{ , } Q_{23} = \frac{3}{2} V_2 \left(p_3 - p_2\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5} V_1 \cdot \frac{10}{21} p_1 = p_1 V_1$$

$$A_{14} = Q_{14} = Q_{12} + Q_{23} = 2 p_1 V_1 = 2\nu R T_1 = 4RT_1 = 1200R .$$

Отсюда следует, что

$$T_1 = \frac{A_{14}}{4R} = 300 \text{ К.}$$

4. На горизонтальном столе лежат кубик и чертежный треугольник. Треугольник своей гипотенузой касается одной из боковых граней кубика. Треугольник начинают двигать поступательно по столу с постоянной скоростью u, перпендикулярной катету, образующему с гипотенузой угол α=45°, толкая кубик. Отношение скорости треугольника к скорости кубика $u/v = \sqrt{3/2}$. Найдите коэффициент трения между кубиком и треугольником.



Скорость кубика **v** *будет направлена вдоль равнодействующей* **N** *и* **F***тр, т.е. под углом β=arctgμ к вектору* **N** *(см. рисунок).*

$$\mu = tg\beta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

$$\frac{ut}{\sin\left(90^\circ + \beta\right)} = \frac{vt}{\sin\left(90^\circ - \alpha\right)}$$

$$\frac{u}{\cos\beta} = \frac{v}{\cos\alpha}$$

$$v = u\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = u \cdot \sqrt{1+\mu^2} \cdot \cos\alpha$$

$$1+\mu^2 = \frac{v^2}{u^2\cos^2\alpha}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{v^2}{u^2\cos^2\alpha} - 1} = \sqrt{\frac{2\cdot 2}{3} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$Ответ: \mu = \sqrt{\frac{v^2}{u^2\cos^2\alpha} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. Автомобиль с мощным двигателем и полным приводом движется равномерно по скользкой дороге со скоростью V. Водитель нажимает педаль акселератора, при этом скорость вращения колес практически мгновенно возрастает в k раз (k>1) и далее остаётся постоянной. Количество теплоты, выделившееся из-за трения шин о дорогу при разгоне автомобиля, равно Q. Найдите массу автомобиля. Сопротивлением воздуха пренебрегите. Коэффициент трения между шинами и дорогой считайте постоянным.

$$\frac{mv^2}{2}+A=\frac{m(kv)^2}{2}+Q$$

$$A=F_{трения}\cdot(kv)\cdot t_{разгона}=ma\cdot kv\cdot\frac{kv-v}{a}=mv^2k(k-1)=\frac{mv^2}{2}\cdot 2k(k-1)$$

$$Q=\frac{mv^2}{2}\left(1+2k^2-2k-k^2\right)=\frac{mv^2}{2}\left(1-2k+k^2\right)=\frac{mv^2}{2}\left(k^2-2k+1\right)=\frac{mv^2}{2}(k-1)^2$$

$$m=\frac{2Q}{v^2(k-1)^2}$$

$$Ответ:\ m=\frac{2Q}{v^2(k-1)^2}.$$

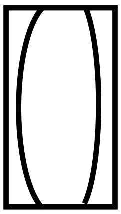
6. Из куска стекла изготовлены три тонкие линзы одного и того же диаметра. Если сложить линзы вплотную друг к другу без воздушных зазоров, то они образуют плоскопараллельную пластину. Диаметр получившейся пластины равен диаметру линз, оптические оси линз совпадают. Известно, что фокусное расстояние линз 1 и 2, сложенных вместе, равно F_{12}= 10 см, а линз 2 и 3, сложенных вместе, равно F_{23}= =2,5 см. Определите фокусное расстояние каждой линзы; нарисуйте эту систему линз и укажите, какие из этих линз собирающие, а какие рассеивающие.

Решение. Фокусное расстояние определяется формулой

$$D=\frac{1}{F}=\left(\frac{n_л}{n_{ср}}-1\right)\left(\pm\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2}\right)$$

Знаки перед слагаемыми второго сомножителя правой части уравнения берутся следующим образом: “+” для выпуклых поверхностей, и“–” – для вогнутых.

Единственная возможная комбинация для образования пластинки имеет вид (см. рис.) Поскольку



$$D_1+D_2=D_{12}=\frac{1}{F_{12}}\quad(1)$$

$$D_3+D_2=D_{23}=\frac{1}{F_{23}}\quad(2)$$

$$D_1+D_2+D_3=0\quad(3)$$

$(1)+(2)-(3)$ *даст*

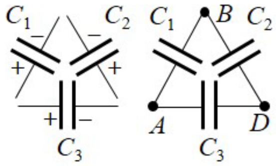
$$D_2=\frac{1}{F_{12}}+\frac{1}{F_{23}}$$

$$D_2=\frac{F_{12}+F_{23}}{F_{12}\cdot F_{23}}=\frac{10+2,5}{25}\cdot 10^2=50$$

$$F_2=2\ см.$$

Тогда из (1): D_1=-40 и F_1 =-2,5 см, из (2): D_3=-10 и F_3 =-10см.

7. Три конденсатора C_1, C_2 и C_3 одинаковой ёмкости зарядили до напряжений U_1=1 В, U_2=2 В и U_3=3 В соответственно и затем соединили «треугольником» (см. рисунок). Найдите разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$ между точками A и B.



Допустим, что полярности обкладок конденсаторов не изменились после соединения. Тогда для зарядов обкладок, соединяемых в точке А:

$Q_1 + Q_3 = Q_1' + Q_3'$, *т.е.* $CU_1 + CU_3 = CU_1' + CU_3'$, *т.е.* $U_1 + U_3 = U_1' + U_3'$.

Аналогично для зарядов обкладок, соединяемых в точке В:

$-Q_2 - Q_1 = -Q_2' - Q_1'$, *т.е.* $-CU_2 - CU_1 = -CU_2' - CU_1'$, *т.е.* $-U_2 - U_1 = -U_2' - U_1'$.

Для обхода контура ABD после соединения конденсаторов

$U_1' + U_2' + U_3' = 0$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} U_1 + U_3 = U_1' + U_3' \\ -U_2 - U_1 = -U_2' - U_1' \\ U_1' - U_2' - U_3' = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} U_1 + U_3 = U_1' + U_3' \\ U_2 + U_1 = U_2' + U_1' \\ U_1' - U_2' - U_3' = 0 \end{cases};$$ *далее сложим два первых уравнения*

$$2U_1 + U_2 + U_3 = 2U_1' + U_2' + U_3' = \left(3U_1' - U_1'\right) + U_2' + U_3' =$$

$$= 3U_1' - \left(U_1' - U_2' - U_3'\right) = 3U_1'$$

$$U_1' = \frac{2U_1 + U_2 + U_3}{3} = \frac{2 \cdot 1 + 2 + 3}{3} = \frac{7}{3} B$$

$$\varphi_A - \varphi_B = U_1' = \frac{7}{3} B$$

$$\mathit{Ответ}: \ \varphi_A - \varphi_B = \frac{2U_1 + U_2 + U_3}{3} = \frac{7}{3} B.$$

ВАРИАНТ 7101 для 10 классов

1. Учащиеся Лицея №1502 при МЭИ выступали на научной конференции школьников с докладом о результатах своей работы. Они исследовали отражательные свойства белого материала, из которого изготавливаются экраны в кинотеатрах. Учащиеся обнаружили, что свойства материала оптимизированы для минимизации потерь при отражении света. После доклада председатель жюри конференции задал лицеистам вопрос: «Что мешает сделать экран зеркальным, ведь при этом потери света будут заведомо меньше?». Учащиеся получили диплом 1 степени, потому что ответили на вопрос совершенно правильно. Что ответили школьники председателю жюри? Как вы объясните их ответ?

Решение: Для того, чтобы зритель в кинотеатре увидел изображение кадра, отраженного от экрана, необходимо, чтобы в направлении зрителя отразились лучи от всех точек экрана, освещенных кинопроектором. Кроме того необходимо обязательно учесть, что зритель в зале не один., т.е. условия отражения от экрана должны одинаково выполняться для всех зрителей. Очевидно, что выполнение закона отражения при использовании зеркального экрана на позволит выполнить эти условия. Иными словами, закон отражения выполняться не должен: лучи должны отражаться от каждой точки экрана во всех направлениях (такое отражение называется диффузным).

2. Корпус подводной лаборатории состоит из двух полусфер - верхней и нижней. Определите силу давления на внешнюю поверхность нижней полусферы, если её радиус равен $\boldsymbol{R}$, а самая верхняя точка лаборатории расположена на глубине $2\boldsymbol{R}$ метров. Плотность морской воды в районе лаборатории равна $\boldsymbol{\rho}$, атмосферное давление нормальное.

Сила давления на нижнюю полусферу складывается из силы Архимеда и суммы силы давления вышележащих слоев воды и силы атмосферного давления:

$$F = \rho g \frac{2}{3}\pi R^3 + \left(\rho g\left(H+R\right)+p_0\right)\cdot \pi R^2 = \pi\rho g R^2 \cdot \left(\frac{2}{3}R + R + H\right) + \pi R^2 p_0 =$$

$$= \pi R^2 \left(p_0 + \rho g\left(\frac{5}{3}R + H\right)\right)$$

3. Одноатомный идеальный газ совершает два процесса. В процессе 1-2 газ расширяется втрое по закону $p = \alpha \cdot \sin\left(\dfrac{\pi V}{6V_1}\right)$, где p – давление, V – объём, V_1 – первоначальный объём, α - некоторая постоянная. В процессе 2-3 газ продолжает расширяться по закону $p = \alpha \cdot \left(1-\cos\left(\dfrac{\pi V}{2V_2}\right)\right)$ до объема 4 V_1. Чему равна внутренняя энергия газа U_3 в конце процесса, если в процессе 1-2 она увеличилась на 50 Дж?

Определим параметры состояния газа в точках 1, 2, 3:

$$p_1 = \alpha \sin\left(\frac{\pi V_1}{6V_1}\right) = \alpha \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\alpha}{2}$$

$$p_2 = \alpha \sin\left(\frac{\pi V_2}{6V_1}\right) = \alpha \sin\left(\frac{\pi 3V_1}{6V_1}\right) = \alpha \sin\frac{\pi}{2} = \alpha$$

$$p_3 = \alpha\left(1-\cos\frac{\pi V_3}{2V_2}\right) = \alpha\left(1-\cos\frac{\pi 4V_1}{2\cdot 3V_1}\right) = \alpha\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\alpha$$

Тогда значения внутренней энергии в состояниях 1, 2, 3:

$$U_1 = \frac{3}{2}p_1V_1 = \frac{3}{2}\frac{\alpha}{2}V_1 = \frac{3}{4}\alpha V_1\ ,\quad U_2 = \frac{3}{2}p_2V_2 = \frac{3}{2}\alpha 3V_1 = \frac{9}{2}\alpha V_1,\quad U_3 = \frac{3}{2}p_3V_3 = \frac{3}{2}\frac{3\alpha}{2}4V_1 = 9\alpha V_1$$

Соответственно,

$$\Delta U_{12} = \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{4}\right)\alpha V_1 = \frac{15}{4}\alpha V_1;\quad \alpha V_1 = \frac{4}{15}\Delta U_{12}$$

$$U_3 = 9\alpha V_1 = 9\cdot\frac{4}{15}\Delta U_{12} = 9\cdot\frac{4}{15}\cdot 50 = 120 \text{ Дж.}$$

4. Силовые линии однородного электростатического поля направлены вертикально вверх. Электрон начинает двигаться в этом поле так, что его начальная скорость составляет угол $\alpha = 45°$ с напряжённостью поля. Определите отношение минимального радиуса ρ кривизны траектории электрона к его максимальному смещению L в направлении силовой линии.

Радиус кривизны траектории электрона будет минимален в точке вершины параболы, когда $\vec{v} \perp \vec{a}$ *, т.е.*

$$\rho = \frac{v^2}{a} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{a} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{eE/m}\ .$$

Из законов кинематики максимальное смещение в направлении силовых линий:

$$L = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2a} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2\,eE/m}$$

Тогда $$\frac{\rho}{L} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{eE/m} : \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2\,eE/m} = 2$$

5. Абсолютно гибкая однородная цепочка висит вертикально над поверхностью стола, подвешенная за верхний конец. Нижний конец цепочки касается стола. Верхний конец цепочки отпускают. Докажите, что в любой момент времени падения цепочки сила её давления на стол равна утроенному весу лежащей на столе части цепочки.

Обозначим массу цепочки m, а ее длину l. Пусть к моменту t ($t \le \sqrt{2l/g}$) длина лежащей на столе части цепочки равна x, а сила давления на стол этой части , т.е. ее вес, $G(x)$.

Очевидно, что $G(x) = mgx/l$.

Пусть за малый промежуток времени от t до $t+\Delta t$ на стол падает часть длиной Δx. Масса этого кусочка $\Delta m = m\Delta x/l$, а скорость падения $v = gt = \sqrt{2gx}$. Очевидно, что $\Delta t = \dfrac{\Delta x}{v}$.

Пусть F – сила, действующая со стороны стола на элемент Δx и приводящая к его остановке. Поскольку $\Delta m v = F\Delta t$, то после всех подстановок получим $F = 2mgx/l$. Очевидно, что элемент Δx действует на стол с такой же по модулю силой.

Полная сила давления на стол будет равна

$$F + G(x) = 2mgx/l + mgx/l = 3mgx/l = 3G(x).$$

6. К батарее последовательно подключены переменный резистор и вольтметр. Если сопротивление резистора уменьшить втрое, то показания вольтметра возрастут вдвое. Во сколько раз изменятся показания вольтметра по сравнению с первоначальными, если его подключить к батарее без резистора?

Решение:

В исходном состоянии $I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R + R_V + r}$, *показания вольтметра* $U_{V0} = I_0 R_V = \dfrac{\mathcal{E}}{R + R_V + r} R_V$.

Во втором случае $I_1 = \dfrac{\mathcal{E}}{\frac{1}{3}R + R_V + r}$, *показания вольтметра* $U_{V1} = I_1 R_V = \dfrac{\mathcal{E}}{\frac{1}{3}R + R_V + r} R_V$.

В финальном варианте $I_2 = \dfrac{\mathcal{E}}{R_V + r}$, *показания вольтметра* $U_{V2} = I_2 R_V = \dfrac{\mathcal{E}}{R_V + r} R_V$.

По условию задачи $U_{V1} = 2U_{V0}$, $U_{V2} = xU_{V0}$*:*

$\dfrac{\mathcal{E}}{\frac{1}{3}R + R_V + r} R_V = 2\dfrac{\mathcal{E}}{R + R_V + r} R_V$, *откуда* $R = 3(R_V + r)$ *;*

$\dfrac{\mathcal{E}}{R_V + r} R_V = x\dfrac{\mathcal{E}}{R + R_V + r} R_V$, *откуда* $R = (x-1)(R_V + r)$ *. Из сопоставления последних выражений следует, что* $x - 1 = 3$ *,* $x = 4$ *.*

Ответ: показания вольтметра увеличатся в 4 раза по сравнению с первоначальными.

7. Кубик с ребром l начинает скользить по горизонтальной доске с некоторой начальной скоростью. Коэффициент трения кубика о доску равен μ. На расстоянии S от точки начала скольжения из доски выступает маленький гвоздик. Какой должна быть минимальная начальная скорость кубика, чтобы при ударе о гвоздик кубик перевернулся? Кинетическая энергия кубика перед ударом о гвоздик в n раз больше механической энергии, потерянной кубиком при ударе.

Решение:

Если при нормальном положении кубика (на грани) его центр тяжести находится на высоте $h = l/2$ *над поверхностью доски, то при переворачивании центр тяжести поднимается на высоту* $h' = l\sqrt{2}/2 = l/\sqrt{2}$ *над поверхностью доски. Чтобы кубик перевернулся, его энергия после удара должна быть не меньше, чем* $W_{кин2} = mg(h'-h)$. *Энергии перед ударом и после удара связаны соотношением* $W_{кин1} = W_{потерь} + W_{кин2} = \frac{1}{n}W_{кин1} + W_{кин2}$ *Тогда* $W_{кин2} = mg(h'-h) = W_{кин1}\frac{n-1}{n}$. *Поэтому* $W_{кин1} = mg(h'-h)\frac{n}{n-1}$. *Изменение кинетической энергии при движении кубика до удара:*

$W_{кин1} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgs$, *т.е.* $mg(h'-h)\frac{n}{n-1} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgs$;

$$mgl\frac{\sqrt{2}-1}{2}\frac{n}{n-1} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgs;$$

$$\mu gs = \frac{v_0^2}{2} - gl\frac{\sqrt{2}-1}{2}\frac{n}{n-1};$$

$$2\mu gs = v_0^2 - gl\frac{\sqrt{2}-1}{n-1}n;$$

$$v_0 = \sqrt{2\mu gs + gl\frac{\sqrt{2}-1}{n-1}n}.$$

ВАРИАНТ 7102 для 10 классов

1. Учащиеся Лицея №1502 при МЭИ выступали на научной конференции школьников с докладом о результатах изучения теплообмена при различных условиях. В докладе лицеистов был приведён интересный пример: если в хорошо протопленной парилке русской бани плеснуть на камни водой, температура в парилке через некоторое время резко повышается. Школьники объяснили, почему это происходит не сразу и почему эффект сильнее, если использовать горячую воду, а не холодную. Повторите рассуждения докладчиков.

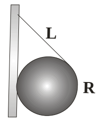
Решение: При попадании воды на раскаленные камни происходит ее нагрев до температуры кипения, затем – кипение (парообразование). Образовавшийся водяной пар имеет температуру, очень близкую к температуре кипения воды, и поднимается под потолок парилки. Однако, поскольку в парилке русской бани температура не выше 80-85 градусов, то происходит конденсация пара. При этом образовавшийся «туман» оседает вниз. При конденсации пара выделяется количество теплоты, которое и приводит к нагреванию воздуха в парилке. Создается ощущение, что с потолка вниз опускается очень горячий влажный пар. Поскольку нагрев воды, её испарение и последующая конденсация пара происходят не мгновенно, то эффект повышения температуры воздуха в парилке наблюдается через некоторое время.

Очевидно, что если использовать горячую воду, то для ее нагрева до температуры кипения потребуется меньшее количество теплоты (которое будет забираться от горячих камней), температура камней понизится меньше и камни будут дополнительно нагревать воздух в помещении парной.

2. По наклонной плоскости берегового водосброса на гидроэлектростанции стекает широкий поток воды. На расстоянии ***L*** от начала водосброса глубина потока уменьшается в 4 раза. Определите, на каком расстоянии от начала водосброса глубина потока была в 2 раза больше. Трением воды о стенки и дно водосброса можно пренебречь.

В соответствии с уравнением непрерывности для потока жидкости
$V_0S_0 = V_1S_1 = V_2S_2$,
где V_0 *- скорость потока на вершине наклонной плоскости,* V_1 *– на расстоянии l от вершины в месте уменьшения глубины в два раза,* V_2 *- на расстоянии L от вершины в месте уменьшения глубины в четыре раза,* S_0, S_1 и S_2 *– площади поперечного сечения потока в соответствующих местах. При постоянной ширине потока площади поперечного сечения можно связать с глубинами потока. Тогда уравнение непрерывности можно представить в виде*
$V_0h_0 = V_1h_1 = V_2h_2$.
Теперь выразим скорости V_1 *и* V_2:
$$V_1 = V_0\frac{h_0}{h_1} = 2V_0, \qquad V_2 = V_0\frac{h_0}{h_2} = 4V_0$$
По закону сохранения энергии для потока можно записать
$$\frac{mV_0^2}{2} + mgl\sin\alpha = \frac{mV_1^2}{2},$$
$$\frac{mV_0^2}{2} + mgL\sin\alpha = \frac{mV_2^2}{2}.$$
где m *– масса элемента потока,* α *– угол наклона водосброса.*
Подставляя вместо скоростей V_1 *и* V_2 *их выражения через скорость* V_0, *получаем*
$$2gl\sin\alpha = 3V_0^2,\ 2gL\sin\alpha = 15V_0^2.$$
Отношение этих равенств дает искомую величину l
$l = L/5$.

3. Тяжёлый цилиндр радиусом R=3см подвешен за прикреплённую к нему нить к вертикальной стене. Минимальный коэффициент трения о стену, при котором цилиндр не скользит по ней, равен $\mu = \frac{25}{24}$. Определите длину нити L.



Если обозначить угол между нитью и стеной как α, то

$$\begin{cases} T\sin\alpha = N \\ F_{тр}R \ge TR \end{cases}$$ *, поэтому* $\mu T\sin\alpha \ge T$, $\mu \ge \frac{1}{\sin\alpha}$

Чтобы найти $\sin\alpha$ *учтем, что* $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{\sqrt{L^2+R^2}}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{\sqrt{L^2+R^2}}$ *. Тогда*

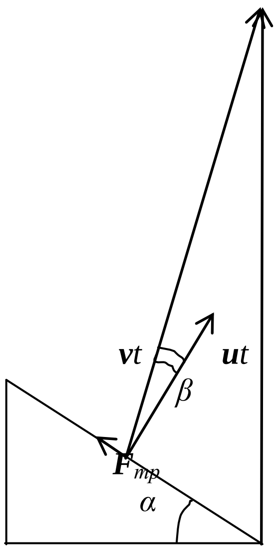
$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2RL}{R^2+L^2}.$$

Окончательно $\mu \ge \frac{R^2+L^2}{2RL}$. *Тогда* $\frac{25}{24} = \frac{R^2+L^2}{2RL}$.

Решение квадратного уравнения дает $L = \frac{25\pm7}{24}R = \frac{25\pm7}{24}\cdot 3$, *т.е.* $L_1 = 4см$, $L_2 = 2{,}25см$

Ответ: $L = 4см$.

4. На горизонтальном столе лежат кубик и чертежный треугольник. Треугольник своей гипотенузой касается одной из боковых граней кубика. Треугольник начинают двигать поступательно по столу с постоянной скоростью u, перпендикулярной катету, образующему с гипотенузой угол α=45°, толкая кубик. Отношение скорости треугольника к скорости кубика $u/v = \sqrt{3/2}$. Найдите коэффициент трения между кубиком и треугольником.



Скорость кубика $\boldsymbol{v}$ *будет направлена вдоль равнодействующей* **N** *и* $\boldsymbol{F}_{тр}$*, т.е. под углом β=arctgμ к вектору* **N** *(см. рисунок).*

$$\mu = tg\beta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

$$\frac{ut}{\sin(90^\circ+\beta)} = \frac{vt}{\sin(90^\circ-\alpha)}$$

$$\frac{u}{\cos\beta} = \frac{v}{\cos\alpha}$$

$$v = u\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = u\cdot\sqrt{1+\mu^2}\cdot\cos\alpha$$

$$1+\mu^2 = \frac{v^2}{u^2\cos^2\alpha}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{v^2}{u^2\cos^2\alpha}-1} = \sqrt{\frac{2\cdot2}{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$Ответ: \mu = \sqrt{\frac{v^2}{u^2\cos^2\alpha}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. В вертикальной абсолютно гладкой стеклянной трубке в поле силы тяжести находятся два одинаковых заряженных шарика массами *m* с положительными зарядами *q* и радиусами *R*. В начальный момент времени шарики удерживают вплотную друг к другу. Как будет двигаться нижний шарик, если его отпустить? Перераспределения зарядов на шариках не происходит.

Нижний шарик будет двигаться вниз с ускорением $a = g + \frac{kq^2}{mr^2}$, *где* r *– расстояние между их центрами.*

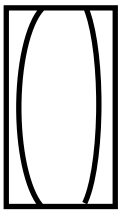
6. Из куска стекла изготовлены три тонкие линзы одного и того же диаметра. Если сложить линзы вплотную друг к другу без воздушных зазоров, то они образуют плоскопараллельную пластину. Диаметр получившейся пластины равен диаметру линз, оптические оси линз совпадают. Известно, что фокусное расстояние линз 1 и 2, сложенных вместе, равно F_{12}= 10 см, а линз 2 и 3, сложенных вместе, равно F_{23}= =2,5 см. Определите фокусное расстояние каждой линзы; нарисуйте эту систему линз и укажите, какие из этих линз собирающие, а какие рассеивающие.

Решение. Фокусное расстояние определяется формулой

$$D = \frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\pm\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2}\right)$$

Знаки перед слагаемыми второго сомножителя правой части уравнения берутся следующим образом: “+” для выпуклых поверхностей, и“–” – для вогнутых.

Единственная возможная комбинация для образования пластинки имеет вид (см. рис.) Поскольку



$$D_1 + D_2 = D_{12} = \frac{1}{F_{12}} \quad (1)$$

$$D_3 + D_2 = D_{23} = \frac{1}{F_{23}} \quad (2)$$

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0 \quad (3)$$

$(1)+(2)-(3)$ *даст*

$$D_2 = \frac{1}{F_{12}} + \frac{1}{F_{23}}$$

$$D_2 = \frac{F_{12} + F_{23}}{F_{12} \cdot F_{23}} = \frac{10 + 2,5}{25} \cdot 10^2 = 50$$

$$F_2 = 2\ см.$$

Тогда из (1): D_1*=-40 и* F_1 *=-2,5 см, из (2):* D_3*=-10 и* F_3 *=-10см.*

7. Автомобиль с мощным двигателем и полным приводом движется равномерно по скользкой дороге со скоростью V. Водитель нажимает педаль акселератора, при этом скорость вращения колес практически мгновенно возрастает в k раз (k>1) и далее остаётся постоянной. Количество теплоты, выделившееся из-за трения шин о дорогу при разгоне автомобиля, равно Q. Найдите массу автомобиля. Сопротивлением воздуха пренебрегите. Коэффициент трения между шинами и дорогой считайте постоянным.

$$\frac{mv^2}{2} + A = \frac{m\left(kv\right)^2}{2} + Q$$

$$A = F_{трения} \cdot \left(kv\right) \cdot t_{разгона} = ma \cdot kv \cdot \frac{kv - v}{a} = mv^2 k(k-1) = \frac{mv^2}{2} \cdot 2k(k-1)$$

$$Q = \frac{mv^2}{2}\left(1 + 2k^2 - 2k - k^2\right) = \frac{mv^2}{2}\left(1 - 2k + k^2\right) = \frac{mv^2}{2}\left(k^2 - 2k + 1\right) = \frac{mv^2}{2}\left(k-1\right)^2$$

$$m = \frac{2Q}{v^2\left(k-1\right)^2}$$

$$Ответ: \; m = \frac{2Q}{v^2\left(k-1\right)^2}.$$

ВАРИАНТ 7091 для **9 классов**

1. Учащиеся Лицея №1502 при МЭИ выступали на научной конференции школьников с докладом о результатах своей работы. Они исследовали отражательные свойства белого материала, из которого изготавливаются экраны в кинотеатрах. Учащиеся обнаружили, что свойства материала оптимизированы для минимизации потерь при отражении света. После доклада председатель жюри конференции задал лицеистам вопрос: «Что мешает сделать экран зеркальным, ведь при этом потери света будут заведомо меньше?». Учащиеся получили диплом 1 степени, потому что ответили на вопрос совершенно правильно. Что ответили школьники председателю жюри? Как вы объясните их ответ?

Решение: Для того, чтобы зритель в кинотеатре увидел изображение кадра, отраженного от экрана, необходимо, чтобы в направлении зрителя отразились лучи от всех точек экрана, освещенных кинопроектором. Кроме того необходимо обязательно учесть, что зритель в зале не один., т.е. условия отражения от экрана должны одинаково выполняться для всех зрителей. Очевидно, что выполнение закона отражения при использовании зеркального экрана на позволит выполнить эти условия. Иными словами, закон отражения выполняться не должен: лучи должны отражаться от каждой точки экрана во всех направлениях (такое отражение называется диффузным).

2. Два истребителя совершают полёт над океаном вдоль экватора с одной и той же скоростью v = 1296 км/час: первый – с запада на восток, а второй – с востока на запад. На сколько отличается вес пластиковой бутылки с водой массой m = 1кг на первом самолёте от её веса на втором? При расчёте примите, что ветер отсутствует, а высота полёта обоих самолётов постоянна и пренебрежимо мала по сравнению с радиусом Земли.

$$\begin{cases} P_2 = m\left(g - a_2\right) \\ P_1 = m\left(g - a_1\right) \end{cases}$$

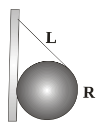
$$\left|\Delta P\right| = \left|m\left(a_1 - a_2\right)\right| = m\left[\frac{\left(\omega R + v\right)^2}{R} - \frac{\left(\omega R - v\right)^2}{R}\right] =$$

$$= m\frac{\left(\omega R + v + \omega R - v\right)\left(\omega R + v - \omega R + v\right)}{R} = m\frac{4\omega R v}{R} = 4m\omega v =$$

$$= 4m\frac{2\pi}{T}v = 8\pi\frac{mv}{T} = 8\cdot 3{,}14\cdot\frac{1\cdot 1296\cdot\frac{1000}{3600}}{24\cdot 3600} \approx 0{,}1H$$

$$Ответ:\ \Delta P = 8\pi\frac{mv}{T} = 0{,}1H$$

3. Тяжёлый цилиндр подвешен за прикреплённую к нему нить к вертикальной стене. При каком наименьшем коэффициенте трения μ цилиндр не будет скользить по стене? Радиус цилиндра R=3см, длина нити L=4 см.



Если обозначить угол между нитью и стеной как α, то

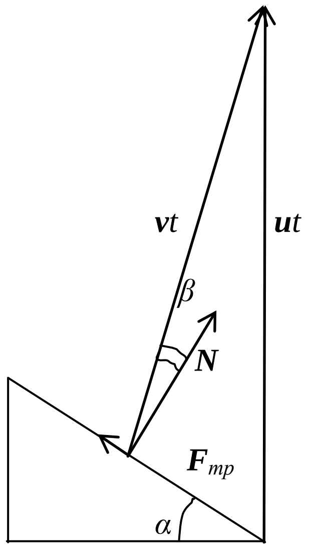
$$\begin{cases} T\sin\alpha = N \\ F_{тр}R \ge TR \end{cases}$$, поэтому $\mu T\sin\alpha \ge T$, $\mu \ge \dfrac{1}{\sin\alpha}$

Чтобы найти $\sin\alpha$ учтем, что $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{\sqrt{L^2+R^2}}; \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{\sqrt{L^2+R^2}}$. Тогда

$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2RL}{R^2+L^2}$.

Окончательно $\mu \ge \frac{R^2+L^2}{2RL} = \frac{25}{24}$.

Ответ: $\mu \ge \frac{25}{24}$.



4. На горизонтальном столе лежат кубик и чертёжный прямоугольный треугольник. Треугольник своей гипотенузой касается одной из боковых граней кубика. Треугольник начинают двигать поступательно по столу с постоянной скоростью *u*, перпендикулярной катету, образующему с гипотенузой угол α=45°, толкая кубик. Коэффициент трения между кубиком и треугольником равен μ=$1/\sqrt{3}$. Найдите скорость движения кубика *v*.

Скорость кубика ***v*** *будет направлена вдоль равнодействующей* ***N*** *и* ***F****тр, т.е. под углом β=arctgμ к вектору* ***N*** *(см. рисунок).*

$$\mu = tg\beta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

$$\frac{ut}{\sin\left(90^\circ+\beta\right)} = \frac{vt}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}$$

$$\frac{u}{\cos\beta} = \frac{v}{\cos\alpha}$$

$$v = u\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = u\cdot\sqrt{1+\mu^2}\cdot\cos\alpha =$$

$$= u\sqrt{1+\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{2}}{2} = u\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$Ответ: v = u\cdot\sqrt{1+\mu^2}\cdot\cos\alpha = u\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

5. В калориметре находятся металлический брусок, некоторое количество песка и некоторое количество воды. Если содержимому калориметра сообщить некоторое количество тепла и выждать достаточно большое время, то температура в калориметре изменится на некоторое число градусов. Если повторить тот же опыт, но с массой песка в *n* раз меньшей, то изменение температуры оказывается в *m* раз больше. Во сколько раз больше будет изменение температуры по сравнению с первым опытом, если опыт провести вообще без песка? Теплоёмкостью калориметра и утечками тепла за время опытов пренебрегите; примите *n*>*m*>1.

$$\begin{cases} \Delta t\left(c_п m_п + c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \\ m\Delta t\left(\dfrac{c_п m_п}{n} + c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \\ k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta t\left(c_п m_п + c_м m_м + c_в m_в\right) = k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \\ m\Delta t\left(\dfrac{c_п m_п}{n} + c_м m_м + c_в m_в\right) = k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_п m_п = (k-1)\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \\ \dfrac{m}{n} c_п m_п = (k-m)\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \end{cases}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{k-m}{k-1}$$

$$mk - m = nk - nm$$

$$k(n-m) = m(n-1)$$

$$k = \frac{m(n-1)}{n-m}$$

$$Ответ:\ в\ \frac{m(n-1)}{n-m}\ раз.$$

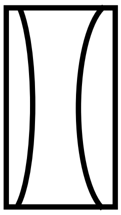
6. Из куска стекла изготовлены три тонкие линзы одного и того же диаметра. Если сложить линзы вплотную друг к другу без воздушных зазоров, то они образуют плоскопараллельную пластину. Диаметр получившейся пластины равен диаметру линз, оптические оси линз совпадают. Известно, что фокусное расстояние линз 1 и 2, сложенных вместе, равно F_{12}= –2,5 см, а линз 2 и 3, сложенных вместе, равно F_{23} = = –10 см. Определите фокусное расстояние каждой линзы; нарисуйте эту систему линз и укажите, какие из этих линз собирающие, а какие рассеивающие.

Решение. Фокусное расстояние тонкой линзы определяется формулой

$$D = \frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\pm\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2}\right)$$

Знаки перед слагаемыми второго сомножителя правой части уравнения берутся следующим образом: “+” для выпуклых поверхностей, и“–” – для вогнутых.

Единственная возможная комбинация для образования пластинки имеет вид (см. рис.) Поскольку



$$D_1 + D_2 = D_{12} = \frac{1}{F_{12}} \quad (1)$$

$$D_3 + D_2 = D_{23} = \frac{1}{F_{23}} \quad (2)$$

$$D_1 + D_2 + D_3 = 0 \quad (3)$$

$(1)+(2)-(3)$ *даст*

$$D_2 = \frac{1}{F_{12}} + \frac{1}{F_{23}}$$

$$D_2 = \frac{F_{12} + F_{23}}{F_{12} \cdot F_{23}} = \frac{-2,5-10}{25} \cdot 10^2 = -50$$

$$F_2 = -2 \text{ см.}$$

Тогда из (1): D_1*=10 и* F_1 *=10 см, из (2):* D_3*=40 и* F_3 *=2,5 см.*

7. На кондитерской фабрике работает автомат по укладке шоколадных конфет. Он представляет собой механический манипулятор, способный перемещаться вдоль одной прямой перпендикулярно ленте транспортера, на которой лежат пустые коробки с ячейками для конфет. Конфета моментально попадает в ячейку, как только манипулятор окажется над ней. Рассмотрим движение автомата и коробок на плоскости *XOY*. Координаты ячеек (x, y) – это натуральные числа, причем в исходном положении $8 \le x \le 26$, $2 \le y \le 15$ (все значения координат заданы в дюймах). Лента транспортера начинает двигаться в направлении, противоположном оси *OX*, со скоростью v=1дюйм/с. Одновременно из начала координат вдоль оси *OY* с постоянной скоростью без остановок начинает двигаться манипулятор. Какое максимальное количество конфет сможет уложить манипулятор за время однократного пересечения транспортера и с какой скоростью он должен двигаться?

Решение:

В направлении своего движения ячейки для конфет расположены в 19 рядов (26-8+1), параллельных оси *OY*, а в каждом ряду находится по 14 штук (15-2+1).

Обозначим скорость манипулятора как $\vec{u}$. Перейдем в систему отсчета, связанную с транспортером, а скорость манипулятора относительно транспортера обозначим как $\vec{u}_{отн}$. Поскольку $\vec{u} = \vec{u}_{отн} + \vec{v}$, то $\vec{u}_{отн} = \vec{u} - \vec{v}$. Поскольку начало координат расположено в точке старта манипулятора, то его движение над «остановленными» ячейками будет описываться уравнениями

$$\begin{cases} x = vt \\ y = ut \end{cases}.$$

Траекторией движения манипулятора будет прямая линия $y = \frac{u}{v}x = ux$ (поскольку $v = 1$ дюйм/с). Необходимо проанализировать, при каком u уравнение $y = ux$ будет иметь наибольшее число натуральных корней в диапазоне $2 \le y \le 15$ при $8 \le x \le 26$.

Если $u = 1$, то уравнение $y = x$ имеет 8 натуральных корней в указанном диапазоне.

Если $u = \frac{1}{2}$, то уравнение $y = \frac{1}{2}x$ имеет 10 натуральных корней в указанном диапазоне.

Если $u = \frac{1}{3}$, то уравнение $y = \frac{1}{3}x$ имеет 6 натуральных корней в указанном диапазоне.

Ответ: u = 0,5 м/с, N = 10 конфет.

ВАРИАНТ 7092 для 9 классов

1. Учащиеся Лицея №1502 при МЭИ выступали на научной конференции школьников с докладом о результатах изучения теплообмена при различных условиях. В докладе лицеистов был приведён интересный пример: если в хорошо протопленной парилке русской бани плеснуть на камни водой, температура в парилке через некоторое время резко повышается. Школьники объяснили, почему это происходит не сразу и почему эффект сильнее, если использовать горячую воду, а не холодную. Повторите рассуждения докладчиков.

Решение: При попадании воды на раскаленные камни происходит ее нагрев до температуры кипения, затем – кипение (парообразование). Образовавшийся водяной пар имеет температуру, очень близкую к температуре кипения воды, и поднимается под потолок парилки. Однако, поскольку в парилке русской бани температура не выше 80-85 градусов, то происходит конденсация пара. При этом образовавшийся «туман» оседает вниз. При конденсации пара выделяется количество теплоты, которое и приводит к нагреванию воздуха в парилке. Создается ощущение, что с потолка вниз опускается очень горячий влажный пар. Поскольку нагрев воды, её испарение и последующая конденсация пара происходят не мгновенно, то эффект повышения температуры воздуха в парилке наблюдается через некоторое время.Очевидно, что если использовать горячую воду, то для ее нагрева до температуры кипения потребуется меньшее количество теплоты (которое будет забираться от горячих камней), температура камней понизится меньше и камни будут дополнительно нагревать воздух в помещении парной.

2. Два истребителя совершают полёт над океаном вдоль экватора с одной и той же скоростью v=1296 км/час: первый – с запада на восток, а второй – с востока на запад. Известно, что вес пластиковой бутылки с минеральной водой на первом самолёте отличается от её веса на втором на ΔP=0,1 Н. Какова масса бутылки с минеральной водой? При расчёте примите, что ветер отсутствует, а высота полёта обоих самолётов постоянна и пренебрежимо мала по сравнению с радиусом Земли.

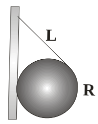
$$\begin{cases} P_2 = m(g - a_2) \\ P_1 = m(g - a_1) \end{cases}$$

$$\Delta P = m(a_1 - a_2) = m\left[\frac{(\omega R + v)^2}{R} - \frac{(\omega R - v)^2}{R}\right] =$$

$$= m\frac{(\omega R + v + \omega R - v)(\omega R + v - \omega R + v)}{R} = m\frac{4\omega R v}{R} = 4m\omega v = 4m\frac{2\pi}{T}v$$

$$m = \frac{\Delta P T}{8\pi v} = \frac{0{,}1 \cdot 24 \cdot 3600}{8 \cdot 3{,}14 \cdot 1296 \cdot \frac{1000}{3600}} \approx 1 \text{ кг}$$

Ответ: $m = \frac{\Delta P T}{8\pi v} \approx 1$ *кг*



3. Тяжёлый цилиндр радиусом R=3см подвешен за прикреплённую к нему нить к вертикальной стене. Минимальный коэффициент трения о стену, при котором цилиндр не скользит по ней, равен $\mu = \frac{25}{24}$. Определите длину нити L.

Если обозначить угол между нитью и стеной как α, то

$$\begin{cases} T\sin\alpha = N \\ F_{тр}R \ge TR \end{cases}$$ *, поэтому* $\mu T\sin\alpha \ge T$, $\mu \ge \frac{1}{\sin\alpha}$

Чтобы найти $\sin\alpha$ *учтем, что* $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{\sqrt{L^2 + R^2}}; \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{\sqrt{L^2 + R^2}}$ *. Тогда*

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2RL}{R^2 + L^2}.$$

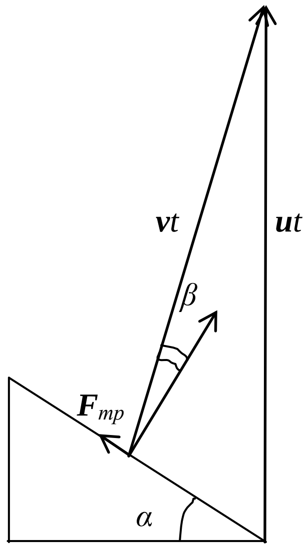
Окончательно $\mu \ge \frac{R^2 + L^2}{2RL}$. *Тогда* $\frac{25}{24} = \frac{R^2 + L^2}{2RL}$.

Решение квадратного уравнения дает $L = \frac{25 \pm 7}{24}R = \frac{25 \pm 7}{24} \cdot 3$, *т.е.* $L_1 = 4см$, $L_2 = 2{,}25см$

Ответ: $L = 4см$.

4. На горизонтальном столе лежат кубик и чертежный треугольник. Треугольник своей гипотенузой касается одной из боковых граней кубика. Треугольник начинают двигать поступательно по столу с постоянной скоростью *u*, перпендикулярной катету, образующему с гипотенузой угол α=45°, толкая кубик. Отношение скорости треугольника к скорости кубика $u/v = \sqrt{3/2}$. Найдите коэффициент трения между кубиком и треугольником.

*Скорость кубика **v** будет направлена вдоль равнодействующей **N** и **F**тр, т.е. под углом β=arctgμ к вектору **N** (см. рисунок).*



$$\mu = tg\beta = \frac{\sqrt{1-\cos^2\beta}}{\cos\beta} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

$$\frac{ut}{\sin\left(90^\circ+\beta\right)} = \frac{vt}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}$$

$$\frac{u}{\cos\beta} = \frac{v}{\cos\alpha}$$

$$v = u\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = u\cdot\sqrt{1+\mu^2}\cdot\cos\alpha$$

$$1+\mu^2 = \frac{v^2}{u^2\cos^2\alpha}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{v^2}{u^2\cos^2\alpha}-1} = \sqrt{\frac{2\cdot 2}{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\textit{Ответ}: \mu = \sqrt{\frac{v^2}{u^2\cos^2\alpha}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. В калориметре находятся металлический брусок, некоторое количество песка и некоторое количество воды. Если содержимому калориметра сообщить некоторое количество тепла и выждать достаточно большое время, то температура в калориметре изменится на некоторое число градусов. Если повторить тот же опыт, но с меньшей массой песка, то изменение температуры оказывается в *m* раз больше. Если же опыт провести вообще без песка, то изменение температуры в калориметре оказывается в *k* раз большим, чем в первом опыте. Во сколько раз масса песка во втором опыте меньше, чем в первом? Теплоёмкостью калориметра и утечками тепла за время опытов пренебрегите; примите *k*>*m*>1.

$$\begin{cases} \Delta t\left(c_n m_n + c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \\ m\Delta t\left(\dfrac{c_n m_n}{n} + c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \\ k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta t\left(c_n m_n + c_м m_м + c_в m_в\right) = k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \\ m\Delta t\left(\dfrac{c_n m_n}{n} + c_м m_м + c_в m_в\right) = k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_n m_n = \left(k-1\right)\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \\ \dfrac{m}{n}c_n m_n = \left(k-m\right)\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \end{cases}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{k-m}{k-1}$$

$$mk - m = nk - nm$$

$$n\left(k-m\right) = m\left(k-1\right)$$

$$n = \frac{m\left(k-1\right)}{k-m}$$

$$\textit{Ответ}: \ \textit{в} \ \frac{m\left(k-1\right)}{k-m} \ \textit{раз}.$$

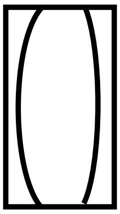
6. Из куска стекла изготовлены три тонкие линзы одного и того же диаметра. Если сложить линзы вплотную друг к другу без воздушных зазоров, то они образуют плоскопараллельную пластину. Диаметр получившейся пластины равен диаметру линз, оптические оси линз совпадают. Известно, что фокусное расстояние линз 1 и 2, сложенных вместе, равно F_{12}= 10 см, а линз 2 и 3, сложенных вместе, равно F_{23}= =2,5 см. Определите фокусное расстояние каждой линзы; нарисуйте эту систему линз и укажите, какие из этих линз собирающие, а какие рассеивающие.

Решение. Фокусное расстояние определяется формулой

$$D=\frac{1}{F}=\left(\frac{n_л}{n_{ср}}-1\right)\left(\pm\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2}\right)$$

Знаки перед слагаемыми второго сомножителя правой части уравнения берутся следующим образом: "+" для выпуклых поверхностей, и "–" – для вогнутых.

Единственная возможная комбинация для образования пластинки имеет вид (см. рис.) Поскольку



$$D_1+D_2=D_{12}=\frac{1}{F_{12}} \quad (1)$$

$$D_3+D_2=D_{23}=\frac{1}{F_{23}} \quad (2)$$

$$D_1+D_2+D_3=0 \quad (3)$$

$(1)+(2)-(3)$ *даст*

$$D_2=\frac{1}{F_{12}}+\frac{1}{F_{23}}$$

$$D_2=\frac{F_{12}+F_{23}}{F_{12}\cdot F_{23}}=\frac{10+2{,}5}{25}\cdot 10^2=50$$

$$F_2=2\,см.$$

Тогда из (1): D_1=-40 и F_1 =-2,5 см, из (2): D_3=-10 и F_3 =-10см.

7. На кондитерской фабрике работает автомат по укладке шоколадных конфет. Он представляет собой механический манипулятор, способный перемещаться вдоль одной прямой перпендикулярно ленте транспортёра, на которой лежат пустые коробки с ячейками для конфет. Конфета моментально попадает в ячейку, как только манипулятор окажется над ней. Рассмотрим движение автомата и коробок на плоскости *XOY*. Координаты ячеек (*x*, *y*) – это натуральные числа, причем в исходном положении $8\le x\le 15$, $2\le y\le 12$ (все значения координат заданы в дюймах). Лента транспортера начинает двигаться в направлении, противоположном оси *OX*, со скоростью *v*=1дюйм/с. Одновременно из начала координат вдоль оси *OY* с постоянной скоростью без остановок начинает двигаться манипулятор. Какое максимальное количество конфет сможет уложить манипулятор за время однократного пересечения транспортера и с какой скоростью он должен двигаться?

В направлении своего движения ячейки для конфет расположены в 8 рядов (15-8+1), параллельных оси OY, а в каждом ряду находится по 11 штук (12-2+1).

Обозначим скорость манипулятора как $\vec{u}$. Перейдем в систему отсчета, связанную с транспортером, а скорость манипулятора относительно транспортера обозначим как $\vec{u}_{отн}$. Поскольку $\vec{u}=\vec{u}_{отн}+\vec{v}$, то $\vec{u}_{отн}=\vec{u}-\vec{v}$. Поскольку начало координат расположено в точке старта манипулятора, то его движение над «остановленными» ячейками будет описываться уравнениями

$$\begin{cases} x=vt \\ y=ut \end{cases}.$$

Траекторией движения манипулятора будет прямая линия $y=\frac{u}{v}x=ux$ (поскольку $v=1$ дюйм/с). Необходимо проанализировать, при каком u уравнение $y=ux$ будет иметь наибольшее число натуральных корней в диапазоне $2\le y\le 12$ при $8\le x\le 15$.

Если $u=1$, то уравнение $y=x$ имеет 5 натуральных корней в указанном диапазоне.

Если $u=\frac{1}{2}$, то уравнение $y=\frac{1}{2}x$ имеет 4 натуральных корня в указанном диапазоне.

Если $u=\frac{1}{3}$, то уравнение $y=\frac{1}{3}x$ имеет 3 натуральных корня в указанном диапазоне.

***Ответ:** u = 1 м/с, N = 5 конфет.*

ВАРИАНТ 7081 для 8 классов

1. Учащиеся Лицея №1502 при МЭИ выступали на научной конференции школьников с докладом о результатах своей работы. Они исследовали отражательные свойства белого материала, из которого изготавливаются экраны в кинотеатрах. Учащиеся обнаружили, что свойства материала оптимизированы для минимизации потерь при отражении света. После доклада председатель жюри конференции задал лицеистам вопрос: «Что мешает сделать экран зеркальным, ведь при этом потери света будут заведомо меньше?». Учащиеся получили диплом 1 степени, потому что ответили на вопрос совершенно правильно. Что ответили школьники председателю жюри? Как вы объясните их ответ?

Решение: Для того, чтобы зритель в кинотеатре увидел изображение кадра, отраженного от экрана, необходимо, чтобы в направлении зрителя отразились лучи от всех точек экрана, освещенных кинопроектором. Кроме того необходимо обязательно учесть, что зритель в зале не один., т.е. условия отражения от экрана должны одинаково выполняться для всех зрителей. Очевидно, что выполнение закона отражения при использовании зеркального экрана на позволит выполнить эти условия. Иными словами, закон отражения выполняться не должен: лучи должны отражаться от каждой точки экрана во всех направлениях (такое отражение называется диффузным).

2. В калориметре находятся металлический брусок, некоторое количество песка и некоторое количество воды. Если содержимому калориметра сообщить некоторое количество тепла и выждать достаточно большое время, то температура в калориметре изменится на некоторое число градусов. Если повторить тот же опыт, но с массой песка в n раз меньшей, то изменение температуры оказывается в m раз больше. Во сколько раз больше будет изменение температуры по сравнению с первым опытом, если опыт провести вообще без песка? Теплоёмкостью калориметра и утечками тепла за время опытов пренебрегите; примите n>m>1.

$$\begin{cases} \Delta t\left(c_п m_п + c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \\ m\Delta t\left(\dfrac{c_п m_п}{n} + c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \\ k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta t\left(c_п m_п + c_м m_м + c_в m_в\right) = k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \\ m\Delta t\left(\dfrac{c_п m_п}{n} + c_м m_м + c_в m_в\right) = k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_п m_п = (k-1)\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \\ \dfrac{m}{n} c_п m_п = (k-m)\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \end{cases}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{k-m}{k-1}$$

$$mk - m = nk - nm$$

$$k(n-m) = m(n-1)$$

$$k = \frac{m(n-1)}{n-m}$$

$$Ответ:\ в\ \frac{m(n-1)}{n-m}\ раз.$$

3. Девочки из 7-го «а» сделали снежную бабу, а их одноклассники мальчики – снеговика. Снежная баба представляет собой три поставленных друг на друга снежных шара («ноги», «туловище», «голова»), диаметры которых относятся как 6:4:2. Снеговик представляет собой точную копию снежной бабы, но в два раза большей высоты. Во сколько раз «ноги» снеговика тяжелее «головы» снежной бабы?

Отношение массы «ног» снеговика к массе «головы» снежной бабы будет равно $\dfrac{3^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3}{2^3} = 216$.

4. Друзья Катя, Петя и Ваня живут в одном доме и учатся в одной школе. На день рождения родители купили Пете двухместный скутер, и Петя решил прокатить друзей от дома до школы. Ребята вышли из дома одновременно. Сначала Петя посадил Катю на скутер и повёз к школе, а Ваня пошёл пешком. Не доезжая до школы некоторое расстояние, Петя высадил Катю, которая далее пошла пешком, а сам поехал навстречу Ване. В результате, Катя – пешком, а Петя и Ваня – на скутере, прибыли в школу одновременно. С какой средней скоростью ребята добрались до школы, если и Катя, и Ваня шли со скоростью v=5 км/час, а Петя ехал на скутере со скоростью V=15 км/час? Напоминание: средней скоростью называют отношение пройденного пути ко времени, затраченному на этот путь.

t_1 *– КП едут на скутере*

t_2 *– П возвращается к В на скутере*

t_3 *– ВП едут на скутере*

условие одновременности прибытия: $t_1 = t_3$

$$\begin{cases} Vt_1 + v\left(t_2 + t_3\right) = v_{cp}\left(t_1 + t_2 + t_3\right) \\ Vt_1 - Vt_2 = v\left(t_1 + t_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Vt_1 + v\left(t_1 + t_2\right) = v_{cp}\left(2t_1 + t_2\right) \\ Vt_1 - Vt_2 = v\left(t_1 + t_2\right) \end{cases}$$

$$t_1\left(V - v\right) = t_2\left(V + v\right) \Rightarrow t_2 = \frac{V - v}{V + v} t_1$$

$$v_{cp} = \frac{t_1\left(V + v\right) + t_2 v}{2t_1 + t_2} = \frac{t_1\left(V + v\right) + \dfrac{V - v}{V + v} t_1 v}{2t_1 + \dfrac{V - v}{V + v} t_1} =$$

$$= \frac{\left(V + v\right)^2 + \left(V - v\right)v}{2\left(V + v\right) + V - v} = \frac{V^2 + 2Vv + v^2 + Vv - v^2}{2V + 2v + V - v} =$$

$$= \frac{V\left(V + 3v\right)}{3V + v} = \frac{15 \cdot \left(15 + 15\right)}{45 + 5} = 9 \ \text{км / час}$$

Ответ: $v_{cp} = \dfrac{V\left(V + 3v\right)}{3V + v} = 9$ *км / час*

5. Из городов A и $Б$ навстречу друг другу одновременно выехали автобус и грузовик. Спустя время t_1 = 40 мин после встречи автобус прибыл в город A, а спустя t_2 = 1,5 часа после встречи грузовик прибыл в город $Б$. Определите время t движения автобуса до встречи с грузовиком. Скорости автобуса и грузовика считайте постоянными.

Решение

$$\begin{cases} v_a t = v_г t_2 \\ v_a t_1 = v_г t \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{t_1} = \frac{t_2}{t} \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{t_1 t_2} = \sqrt{90 \cdot 40} = 60 = 1 \text{ час}$$

$$Ответ: \ t = \sqrt{t_1 t_2} = 1 \text{ час}$$

6. Имеются два гидравлических пресса. Радиус большого поршня второго пресса на x=20 % больше, чем радиус большого поршня первого пресса, а площадь малого поршня второго пресса на те же x=20 % меньше, чем площадь малого поршня первого пресса. Когда к малому поршню первого пресса прилагают силу F_1=10 Н, то на большой поршень действует сила F_2=120 Н. Какая сила будет действовать на большой поршень второго пресса, если к его малому поршню приложить силу F_2?

Решение

$$\begin{cases} F_1 S_2 = F_2 S_1 \\ F_2 S_2 (1+x)^2 = F_3 S_1 (1-x) \end{cases}$$

$$\frac{F_1}{F_2 (1+x)^2} = \frac{F_2}{F_3 (1-x)}$$

$$F_3 = \frac{F_2^2 \cdot (1+x)^2}{F_1 (1-x)} = \frac{120 \cdot 120 \cdot 1.2 \cdot 1.2}{10 \cdot 0.8} = 2592 \ H$$

$$Ответ: F_3 = \frac{F_2^2 \cdot (1+x)^2}{F_1 (1-x)} = 2592 \ H.$$

7. На кондитерской фабрике работает автомат по укладке шоколадных конфет. Он представляет собой механический манипулятор, способный перемещаться вдоль одной прямой перпендикулярно ленте транспортера, на которой лежат пустые коробки с ячейками для конфет. Конфета моментально попадает в ячейку, как только манипулятор окажется над ней. Рассмотрим движение автомата и коробок на плоскости XOY. Координаты ячеек (x, y) – это натуральные числа, причем в исходном положении $8 \le x \le 26$, $2 \le y \le 15$ (все значения координат заданы в дюймах). Лента транспортера начинает двигаться в направлении, противоположном оси OX, со скоростью v=1дюйм/с. Одновременно из начала координат вдоль оси OY с постоянной скоростью без остановок начинает двигаться манипулятор. Какое максимальное количество конфет сможет уложить манипулятор за время однократного пересечения транспортера и с какой скоростью он должен двигаться?

Решение:

В направлении своего движения ячейки для конфет расположены в 19 рядов (26-8+1), параллельных оси *OY*, а в каждом ряду находится по 14 штук (15-2+1).

Обозначим скорость манипулятора как $\vec{u}$. Перейдем в систему отсчета, связанную с транспортером, а скорость манипулятора относительно транспортера обозначим как $\vec{u}_{отн}$. Поскольку $\vec{u} = \vec{u}_{отн} + \vec{v}$, то $\vec{u}_{отн} = \vec{u} - \vec{v}$. Поскольку начало координат расположено в точке старта манипулятора, то его движение над «остановленными» ячейками будет описываться уравнениями

$$\begin{cases} x = vt \\ y = ut \end{cases}.$$

Траекторией движения манипулятора будет прямая линия $y = \frac{u}{v}x = ux$ (поскольку $v = 1$ дюйм/с). Необходимо проанализировать, при каком *u* уравнение $y = ux$ будет иметь наибольшее число натуральных корней в диапазоне $2 \le y \le 15$ при $8 \le x \le 26$.

Если $u = 1$, то уравнение $y = x$ имеет 8 натуральных корней в указанном диапазоне.

Если $u = \frac{1}{2}$, то уравнение $y = \frac{1}{2}x$ имеет 10 натуральных корней в указанном диапазоне.

Если $u = \frac{1}{3}$, то уравнение $y = \frac{1}{3}x$ имеет 6 натуральных корней в указанном диапазоне.

Ответ: *u* = 0,5 м/с, N = 10 конфет.

ВАРИАНТ 7082 для 8 классов

1. Учащиеся Лицея №1502 при МЭИ выступали на научной конференции школьников с докладом о результатах изучения теплообмена при различных условиях. В докладе лицеистов был приведён интересный пример: если в хорошо протопленной парилке русской бани плеснуть на камни водой, температура в парилке через некоторое время резко повышается. Школьники объяснили, почему это происходит не сразу и почему эффект сильнее, если использовать горячую воду, а не холодную. Повторите рассуждения докладчиков.

Решение: При попадании воды на раскаленные камни происходит ее нагрев до температуры кипения, затем – кипение (парообразование). Образовавшийся водяной пар имеет температуру, очень близкую к температуре кипения воды, и поднимается под потолок парилки. Однако, поскольку в парилке русской бани температура не выше 80-85 градусов, то происходит конденсация пара. При этом образовавшийся «туман» оседает вниз. При конденсации пара выделяется количество теплоты, которое и приводит к нагреванию воздуха в парилке. Создается ощущение, что с потолка вниз опускается очень горячий влажный пар. Поскольку нагрев воды, её испарение и последующая конденсация пара происходят не мгновенно, то эффект повышения температуры воздуха в парилке наблюдается через некоторое время.

Очевидно, что если использовать горячую воду, то для ее нагрева до температуры кипения потребуется меньшее количество теплоты (которое будет забираться от горячих камней), температура камней понизится меньше и камни будут дополнительно нагревать воздух в помещении парной.

2. В калориметре находятся металлический брусок, некоторое количество песка и некоторое количество воды. Если содержимому калориметра сообщить некоторое количество тепла и выждать достаточно большое время, то температура в калориметре изменится на некоторое число градусов. Если повторить тот же опыт, но с меньшей массой песка, то изменение температуры оказывается в m раз больше. Если же опыт провести вообще без песка, то изменение температуры в калориметре оказывается в k раз большим, чем в первом опыте. Во сколько раз масса песка во втором опыте меньше, чем в первом? Теплоёмкостью калориметра и утечками тепла за время опытов пренебрегите; примите $k>m>1$.

$$\begin{cases} \Delta t\left(c_п m_п + c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \\ m\Delta t\left(\dfrac{c_п m_п}{n} + c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \\ k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) = Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta t\left(c_п m_п + c_м m_м + c_в m_в\right) = k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \\ m\Delta t\left(\dfrac{c_п m_п}{n} + c_м m_м + c_в m_в\right) = k\Delta t\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_п m_п = (k-1)\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \\ \dfrac{m}{n} c_п m_п = (k-m)\left(c_м m_м + c_в m_в\right) \end{cases}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{k-m}{k-1}$$

$$mk - m = nk - nm$$

$$n(k-m) = m(k-1)$$

$$n = \frac{m(k-1)}{k-m}$$

$$Ответ:\ в\ \frac{m(k-1)}{k-m}\ раз.$$

3. Девочки из 8-го «а» сделали снежную бабу, а их одноклассники мальчики – снеговика. Снежная баба представляет собой три поставленных друг на друга снежных кома («ноги», «туловище», «голова»), диаметры которых относятся как 6:4:2. Снеговик представляет собой точную копию снежной бабы, но в два раза большей высоты. Во сколько раз «голова» снеговика тяжелее «туловища» снежной бабы?

Отношение массы «головы» снеговика к массе «туловища» снежной бабы будет равно $\frac{2^3 \cdot 2^3}{4^3} = 1$

4. Друзья Катя, Петя и Ваня живут в одном доме и учатся в одной школе. На день рождения родители купили Пете двухместный скутер, и Петя решил прокатить друзей от дома до школы. Ребята вышли из дома одновременно. Сначала Петя посадил Катю на скутер и повёз к школе, а Ваня пошёл пешком. Не доезжая до школы некоторое расстояние, Петя высадил Катю, которая далее пошла пешком, а сам поехал навстречу Ване. В результате, Катя – пешком, а Петя и Ваня – на скутере, прибыли в школу одновременно, причём их средняя скорость путешествия от дома к школе равнялась $v_{ср}$=9 км/час. Какова была скорость ходьбы ребят, если Катя и Ваня шли с одной и той же скоростью, а Петя ехал на скутере со скоростью V=15 км/час? Напоминание: средней скоростью называют отношение пройденного пути ко времени, затраченному на этот путь.

t_1 – *КП едут на скутере*

t_2 – *П возвращается к В на скутере*

t_3 – *ВП едут на скутере*

условие одновременности прибытия: $t_1 = t_3$

$$\begin{cases} Vt_1 + v(t_2 + t_3) = v_{ср}(t_1 + t_2 + t_3) \\ Vt_1 - Vt_2 = v(t_1 + t_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Vt_1 + v(t_1 + t_2) = v_{ср}(2t_1 + t_2) \\ Vt_1 - Vt_2 = v(t_1 + t_2) \end{cases}$$

$$t_1(V - v) = t_2(V + v) \Rightarrow t_2 = \frac{V - v}{V + v} t_1$$

$$v_{ср} = \frac{t_1(V + v) + t_2 v}{2t_1 + t_2} = \frac{t_1(V + v) + \frac{V - v}{V + v} t_1 v}{2t_1 + \frac{V - v}{V + v} t_1} =$$

$$= \frac{(V + v)^2 + (V - v)v}{2(V + v) + V - v} = \frac{V^2 + 2Vv + v^2 + Vv - v^2}{2V + 2v + V - v} = \frac{V(V + 3v)}{3V + v}$$

$$v(3V - v_{ср}) = V(3v_{ср} - V)$$

$$v = \frac{V(3v_{ср} - V)}{3V - v_{ср}} = \frac{15(27 - 15)}{45 - 9} = 5 \ \textit{км / час}$$

$$\textit{Ответ}: \ v = \frac{V(3v_{ср} - V)}{3V - v_{ср}} = 5 \ \textit{км / час}$$

5. Из городов *А* и *Б* навстречу друг другу одновременно выехали автобус и грузовик. Спустя t = 1 час после выезда из города *А* автобус встретил грузовик, а ещё через t_1 = 40 мин прибыл в город *Б*. Определите, через какое время после встречи с автобусом грузовик прибыл в город *А*. Скорости автобуса и грузовика считайте постоянными.

$$\begin{cases} v_а t = v_г t_2 \\ v_а t_1 = v_г t \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{t_1} = \frac{t_2}{t} \Rightarrow$$

$$t_2 = \frac{t^2}{t_1} = \frac{60 \cdot 60}{40} = 90 \ \textit{мин} = 1.5 \ \textit{часа}$$

$$\textit{Ответ}: \ t_2 = \frac{t^2}{t_1} = 1.5 \ \textit{часа}$$

6. Имеются два гидравлических пресса. Радиус большого поршня второго пресса на x=20 % больше, чем радиус большого поршня первого пресса, а площадь малого поршня второго пресса на те же x=20 % меньше, чем площадь малого поршня первого пресса. Когда к малому поршню первого пресса прилагают некоторую силу F_1, то на большой поршень действует сила F_2=120 Н. Когда к малому поршню второго пресса прикладывают силу F_2, то на большой поршень действует сила F_3=1800 Н. Чему равна величина силы F_1?

Решение

$$\begin{cases} F_1S_2 = F_2S_1 \\ F_2S_2\left(1+x\right)^2 = F_3S_1\left(1-x\right) \end{cases}$$

$$\frac{F_1}{F_2\left(1+x\right)^2} = \frac{F_2}{F_3\left(1-x\right)}$$

$$F_1 = \frac{F_2^2\left(1+x\right)^2}{F_3\left(1-x\right)} = \frac{120\cdot120\cdot1.2\cdot1.2}{1800\cdot0.8} = 14.4\ H$$

$$Ответ: F_1 = \frac{F_2^2\left(1+x\right)^2}{F_3\left(1-x\right)} = 14.4\ H.$$

7. На кондитерской фабрике работает автомат по укладке шоколадных конфет. Он представляет собой механический манипулятор, способный перемещаться вдоль одной прямой перпендикулярно ленте транспортёра, на которой лежат пустые коробки с ячейками для конфет. Конфета моментально попадает в ячейку, как только манипулятор окажется над ней. Рассмотрим движение автомата и коробок на плоскости *XOY*. Координаты ячеек (*x*, *y*) – это натуральные числа, причем в исходном положении $8 \le x \le 15$, $2 \le y \le 12$ (все значения координат заданы в дюймах). Лента транспортера начинает двигаться в направлении, противоположном оси *OX*, со скоростью v=1дюйм/с. Одновременно из начала координат вдоль оси *OY* с постоянной скоростью без остановок начинает двигаться манипулятор. Какое максимальное количество конфет сможет уложить манипулятор за время однократного пересечения транспортера и с какой скоростью он должен двигаться?

В направлении своего движения ячейки для конфет расположены в 8 рядов (15-8+1), параллельных оси OY, а в каждом ряду находится по 11 штук (12-2+1).

Обозначим скорость манипулятора как $\vec{u}$. *Перейдем в систему отсчета, связанную с транспортером, а скорость манипулятора относительно транспортера обозначим как* $\vec{u}_{отн}$. *Поскольку* $\vec{u} = \vec{u}_{отн} + \vec{v}$, *то* $\vec{u}_{отн} = \vec{u} - \vec{v}$. *Поскольку начало координат расположено в точке старта манипулятора, то его движение над «остановленными» ячейками будет описываться уравнениями*

$$\begin{cases} x = vt \\ y = ut \end{cases}.$$

Траекторией движения манипулятора будет прямая линия $y = \frac{u}{v}x = ux$ *(поскольку* $v = 1$ дюйм/с*).* *Необходимо проанализировать, при каком* u *уравнение* $y = ux$ *будет иметь наибольшее число натуральных корней в диапазоне* $2 \le y \le 12$ *при* $8 \le x \le 15$.

Если $u = 1$, *то уравнение* $y = x$ *имеет 5 натуральных корней в указанном диапазоне.*

Если $u = \frac{1}{2}$, *то уравнение* $y = \frac{1}{2}x$ *имеет 4 натуральных корня в указанном диапазоне.*

Если $u = \frac{1}{3}$, *то уравнение* $y = \frac{1}{3}x$ *имеет 3 натуральных корня в указанном диапазоне.*

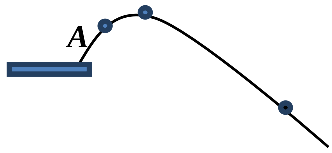
Ответ: *u = 1 м/с, N = 5 конфет.*

ВАРИАНТ 7071 для 7 классов

1. Куда можно попасть, если двигаться всё время на северо-восток? Почему? Сделайте рисунок.

Ответ: *На северный полюс*

2. Вы взяли в руки груз массой 3 кг, встали на стул и прыгнули вместе с грузом на пол. Чему равен вес груза в точке ***A*** траектории прыжка?



Ответ: *Вес равен нулю.*

3. Девочки из 7-го «а» сделали снежную бабу, а их одноклассники мальчики – снеговика. Снежная баба представляет собой три поставленных друг на друга снежных шара («ноги», «туловище», «голова»), диаметры которых относятся как 6:4:2. Снеговик представляет собой точную копию снежной бабы, но в два раза большей высоты. Во сколько раз «ноги» снеговика тяжелее «головы» снежной бабы?

Ответ: *Отношение массы «ног» снеговика к массе «головы» снежной бабы будет равно* $\frac{3^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3}{2^3} = 216$.

4. Друзья Катя, Петя и Ваня живут в одном доме и учатся в одной школе. На день рождения родители купили Пете двухместный скутер, и Петя решил прокатить друзей от дома до школы. Ребята вышли из дома одновременно. Сначала Петя посадил Катю на скутер и повёз к школе, а Ваня пошёл пешком. Не доезжая до школы некоторое расстояние, Петя высадил Катю, которая далее пошла пешком, а сам поехал навстречу Ване. В результате, Катя – пешком, а Петя и Ваня – на скутере, прибыли в школу одновременно. С какой средней скоростью ребята добрались до школы, если и Катя, и Ваня шли со скоростью v=5 км/час, а Петя ехал на скутере со скоростью V=15 км/час? Напоминание: средней скоростью называют отношение пройденного пути ко времени, затраченному на этот путь.

Решение:

t_1 – *КП едут на скутере*

t_2 – *П возвращается к В на скутере*

t_3 – *ВП едут на скутере*

условие одновременности прибытия: $t_1 = t_3$

$$\begin{cases} Vt_1 + v\left(t_2 + t_3\right) = v_{ср}\left(t_1 + t_2 + t_3\right) \\ Vt_1 - Vt_2 = v\left(t_1 + t_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Vt_1 + v\left(t_1 + t_2\right) = v_{ср}\left(2t_1 + t_2\right) \\ Vt_1 - Vt_2 = v\left(t_1 + t_2\right) \end{cases}$$

$$t_1\left(V - v\right) = t_2\left(V + v\right) \Rightarrow t_2 = \frac{V - v}{V + v}t_1$$

$$v_{ср} = \frac{t_1\left(V + v\right) + t_2 v}{2t_1 + t_2} = \frac{t_1\left(V + v\right) + \frac{V - v}{V + v}t_1 v}{2t_1 + \frac{V - v}{V + v}t_1} =$$

$$= \frac{\left(V + v\right)^2 + \left(V - v\right)v}{2\left(V + v\right) + V - v} = \frac{V^2 + 2Vv + v^2 + Vv - v^2}{2V + 2v + V - v} =$$

$$= \frac{V\left(V + 3v\right)}{3V + v} = \frac{15 \cdot \left(15 + 15\right)}{45 + 5} = 9 \ \textit{км / час}$$

Ответ: $v_{ср} = \dfrac{V\left(V + 3v\right)}{3V + v} = 9 \ \textit{км / час}$

5. Из городов *А* и *Б* навстречу друг другу одновременно выехали автобус и грузовик. Спустя время t_1 = 40 мин после встречи автобус прибыл в город *А*, а спустя t_2 = 1,5 часа после встречи грузовик прибыл в город *Б*. Определите время *t* движения автобуса до встречи с грузовиком. Скорости автобуса и грузовика считайте постоянными.

Решение

$$\begin{cases} v_a t = v_г t_2 \\ v_a t_1 = v_г t \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{t_1} = \frac{t_2}{t} \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{t_1 t_2} = \sqrt{90 \cdot 40} = 60 = 1 \ \textit{час}$$

Ответ: $t = \sqrt{t_1 t_2} = 1 \ \textit{час}$

6. Имеются два гидравлических пресса. Радиус большого поршня второго пресса на x=20 % больше, чем радиус большого поршня первого пресса, а площадь малого поршня второго пресса на те же x=20 % меньше, чем площадь малого поршня первого пресса. Когда к малому поршню первого пресса прилагают силу F_1=10 Н, то на большой поршень действует сила F_2=120 Н. Какая сила будет действовать на большой поршень второго пресса, если к его малому поршню приложить силу F_2?

Решение

$$\begin{cases} F_1S_2 = F_2S_1 \\ F_2S_2\left(1+x\right)^2 = F_3S_1\left(1-x\right) \end{cases}$$

$$\frac{F_1}{F_2\left(1+x\right)^2} = \frac{F_2}{F_3\left(1-x\right)}$$

$$F_3 = \frac{F_2^2\cdot\left(1+x\right)^2}{F_1\left(1-x\right)} = \frac{120\cdot120\cdot1.2\cdot1.2}{10\cdot0.8} = 2592\ H$$

$$Ответ: F_3 = \frac{F_2^2\cdot\left(1+x\right)^2}{F_1\left(1-x\right)} = 2592\ H.$$

7. На кондитерской фабрике работает автомат по укладке шоколадных конфет. Он представляет собой механический манипулятор, способный перемещаться вдоль одной прямой перпендикулярно ленте транспортера, на которой лежат пустые коробки с ячейками для конфет. Конфета моментально попадает в ячейку, как только манипулятор окажется над ней. Рассмотрим движение автомата и коробок на плоскости XOY. Координаты ячеек (x, y) – это натуральные числа, причем в исходном положении $8\le x\le 26$, $2\le y\le 15$ (все значения координат заданы в дюймах). Лента транспортера начинает двигаться в направлении, противоположном оси OX, со скоростью v=1дюйм/с. Одновременно из начала координат вдоль оси OY с постоянной скоростью без остановок начинает двигаться манипулятор. Какое максимальное количество конфет сможет уложить манипулятор за время однократного пересечения транспортера и с какой скоростью он должен двигаться?

Решение:

В направлении своего движения ячейки для конфет расположены в 19 рядов (26-8+1), параллельных оси OY, а в каждом ряду находится по 14 штук (15-2+1).

Обозначим скорость манипулятора как $\vec{u}$. Перейдем в систему отсчета, связанную с транспортером, а скорость манипулятора относительно транспортера обозначим как $\vec{u}_{отн}$. Поскольку $\vec{u} = \vec{u}_{отн} + \vec{v}$, то $\vec{u}_{отн} = \vec{u} - \vec{v}$. Поскольку начало координат расположено в точке старта манипулятора, то его движение над «остановленными» ячейками будет описываться уравнениями

$$\begin{cases} x = vt \\ y = ut \end{cases}.$$

Траекторией движения манипулятора будет прямая линия $y = \frac{u}{v}x = ux$ (поскольку $v = 1$ дюйм/с). Необходимо проанализировать, при каком u уравнение $y = ux$ будет иметь наибольшее число натуральных корней в диапазоне $2 \le y \le 15$ при $8 \le x \le 26$.

Если $u = 1$, то уравнение $y = x$ имеет 8 натуральных корней в указанном диапазоне.

Если $u = \frac{1}{2}$, то уравнение $y = \frac{1}{2}x$ имеет 10 натуральных корней в указанном диапазоне.

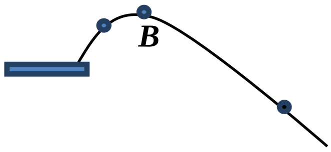
Если $u = \frac{1}{3}$, то уравнение $y = \frac{1}{3}x$ имеет 6 натуральных корней в указанном диапазоне.

Ответ: u = 0,5 м/с, N = 10 конфет.

ВАРИАНТ 7072 для 7 классов

1. Куда можно попасть, если двигаться всё время на юго-восток? Почему? Сделайте рисунок.

На южный полюс.



2. Вы взяли в руки груз массой 3 кг, встали на стул и прыгнули вместе с грузом на пол. Чему равен вес груза в точке ***B*** траектории прыжка?

Вес груза в точке B траектории прыжка равен нулю.

3. Девочки из 7-го «а» сделали снежную бабу, а их одноклассники мальчики – снеговика. Снежная баба представляет собой три поставленных друг на друга снежных кома («ноги», «туловище», «голова»), диаметры которых относятся как 6:4:2. Снеговик представляет собой точную копию снежной бабы, но в два раза большей высоты. Во сколько раз «голова» снеговика тяжелее «туловища» снежной бабы?

Отношение массы «головы» снеговика к массе «туловища» снежной бабы будет равно $\frac{2^3 \cdot 2^3}{4^3} = 1$

4. Друзья Катя, Петя и Ваня живут в одном доме и учатся в одной школе. На день рождения родители купили Пете двухместный скутер, и Петя решил прокатить друзей от дома до школы. Ребята вышли из дома одновременно. Сначала Петя посадил Катю на скутер и повёз к школе, а Ваня пошёл пешком. Не доезжая до школы некоторое расстояние, Петя высадил Катю, которая далее пошла пешком, а сам поехал навстречу Ване. В результате, Катя – пешком, а Петя и Ваня – на скутере, прибыли в школу одновременно, причём их средняя скорость путешествия от дома к школе равнялась $v_{ср}$=9 км/час. Какова была скорость ходьбы ребят, если Катя и Ваня шли с одной и той же скоростью, а Петя ехал на скутере со скоростью V=15 км/час? Напоминание: средней скоростью называют отношение пройденного пути ко времени, затраченному на этот путь.

t_1 *– КП едут на скутере*

t_2 *– П возвращается к В на скутере*

t_3 *– ВП едут на скутере*

условие одновременности прибытия: $t_1 = t_3$

$$\begin{cases} Vt_1 + v(t_2 + t_3) = v_{ср}(t_1 + t_2 + t_3) \\ Vt_1 - Vt_2 = v(t_1 + t_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Vt_1 + v(t_1 + t_2) = v_{ср}(2t_1 + t_2) \\ Vt_1 - Vt_2 = v(t_1 + t_2) \end{cases}$$

$$t_1(V - v) = t_2(V + v) \Rightarrow t_2 = \frac{V - v}{V + v}t_1$$

$$v_{ср} = \frac{t_1(V + v) + t_2 v}{2t_1 + t_2} = \frac{t_1(V + v) + \frac{V - v}{V + v}t_1 v}{2t_1 + \frac{V - v}{V + v}t_1} =$$

$$= \frac{(V + v)^2 + (V - v)v}{2(V + v) + V - v} = \frac{V^2 + 2Vv + v^2 + Vv - v^2}{2V + 2v + V - v} = \frac{V(V + 3v)}{3V + v}$$

$$v(3V - v_{ср}) = V(3v_{ср} - V)$$

$$v = \frac{V(3v_{ср} - V)}{3V - v_{ср}} = \frac{15(27 - 15)}{45 - 9} = 5 \text{ км / час}$$

Ответ: $v = \frac{V(3v_{ср} - V)}{3V - v_{ср}} = 5$ *км / час*

5. Из городов *А* и *Б* навстречу друг другу одновременно выехали автобус и грузовик. Спустя t = 1 час после выезда из города *А* автобус встретил грузовик, а ещё через t_1 = 40 мин прибыл в город *Б*. Определите, через какое время после встречи с автобусом грузовик прибыл в город *А*. Скорости автобуса и грузовика считайте постоянными.

$$\begin{cases} v_a t = v_г t_2 \\ v_a t_1 = v_г t \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{t_1} = \frac{t_2}{t} \Rightarrow$$

$$t_2 = \frac{t^2}{t_1} = \frac{60 \cdot 60}{40} = 90 \ мин = 1.5 \ часа$$

$$Ответ: \ t_2 = \frac{t^2}{t_1} = 1.5 \ часа$$

6. Имеются два гидравлических пресса. Радиус большого поршня второго пресса на x=20 % больше, чем радиус большого поршня первого пресса, а площадь малого поршня второго пресса на те же x=20 % меньше, чем площадь малого поршня первого пресса. Когда к малому поршню первого пресса прилагают некоторую силу F_1, то на большой поршень действует сила F_2=120 Н. Когда к малому поршню второго пресса прикладывают силу F_2, то на большой поршень действует сила F_3=1800 Н. Чему равна величина силы F_1?

$$\begin{cases} F_1 S_2 = F_2 S_1 \\ F_2 S_2 (1+x)^2 = F_3 S_1 (1-x) \end{cases}$$

$$\frac{F_1}{F_2 (1+x)^2} = \frac{F_2}{F_3 (1-x)}$$

$$F_1 = \frac{F_2^2 (1+x)^2}{F_3 (1-x)} = \frac{120 \cdot 120 \cdot 1.2 \cdot 1.2}{1800 \cdot 0.8} = 14.4 \ Н$$

$$Ответ: F_1 = \frac{F_2^2 (1+x)^2}{F_3 (1-x)} = 14.4 \ Н.$$

7. На кондитерской фабрике работает автомат по укладке шоколадных конфет. Он представляет собой механический манипулятор, способный перемещаться вдоль одной прямой перпендикулярно ленте транспортёра, на которой лежат пустые коробки с ячейками для конфет. Конфета моментально попадает в ячейку, как только манипулятор окажется над ней. Рассмотрим движение автомата и коробок на плоскости *XOY*. Координаты ячеек (x, y) – это натуральные числа, причем в исходном положении $8 \le x \le 15$, $2 \le y \le 12$ (все значения координат заданы в дюймах). Лента транспортера начинает двигаться в направлении, противоположном оси *OX*, со скоростью v=1дюйм/с. Одновременно из начала координат вдоль оси *OY* с постоянной скоростью без остановок начинает двигаться манипулятор. Какое максимальное количество конфет сможет уложить манипулятор за время однократного пересечения транспортера и с какой скоростью он должен двигаться?

В направлении своего движения ячейки для конфет расположены в 8 рядов (15-8+1), параллельных оси OY, а в каждом ряду находится по 11 штук (12-2+1).

Обозначим скорость манипулятора как $\vec{u}$. *Перейдем в систему отсчета, связанную с транспортером, а скорость манипулятора относительно транспортера обозначим как* $\vec{u}_{отн}$. *Поскольку* $\vec{u} = \vec{u}_{отн} + \vec{v}$, *то* $\vec{u}_{отн} = \vec{u} - \vec{v}$. *Поскольку начало координат расположено в точке старта манипулятора, то его движение над «остановленными» ячейками будет описываться уравнениями*

$$\begin{cases} x = vt \\ y = ut \end{cases}.$$

Траекторией движения манипулятора будет прямая линия $y = \frac{u}{v}x = ux$ *(поскольку* $v = 1$ дюйм/с *).* *Необходимо проанализировать, при каком u уравнение* $y = ux$ *будет иметь наибольшее число натуральных корней в диапазоне* $2 \le y \le 12$ *при* $8 \le x \le 15$.

Если $u = 1$*, то уравнение* $y = x$ *имеет 5 натуральных корней в указанном диапазоне.*

Если $u = \frac{1}{2}$*, то уравнение* $y = \frac{1}{2}x$ *имеет 4 натуральных корня в указанном диапазоне.*

Если $u = \frac{1}{3}$*, то уравнение* $y = \frac{1}{3}x$ *имеет 3 натуральных корня в указанном диапазоне.*

Ответ: *u = 1 м/с, N = 5 конфет.*