

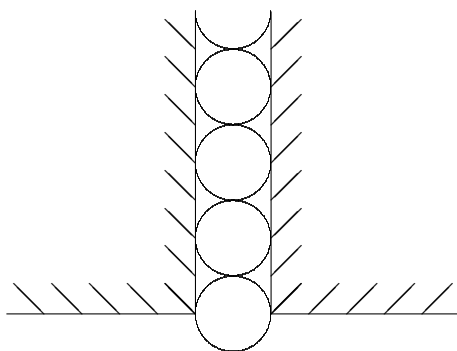
ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ
(ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА)

ВАРИАНТ 47111 для 11 класса

Согласно эпизоду, не вошедшему в окончательный текст повести, старая графиня была так взволнована появлением Германна в своей спальне, что уронила драгоценные бусы (которые, как говорят, стоили не меньше, чем три заветные карты). Бусы потом не нашлись. Ходят слухи, что они попали в щель между балками и сползают в подклет здания. Многие до сих пор ищут в рукописях адрес «дома старинной архитектуры в одной из главных улиц Петербурга», ожидая, что драгоценная диковинка выскользнет, наконец, наружу.

Попробуем смоделировать некоторую часть этого процесса.

Представим расстегнутые бусы как цепочку из 50 связанных друг с другом шариков (вплотную друг к другу), расположенных вертикально и скользящих вниз по ровному вертикальному каналу между двумя пластинами (см. рис).



Пусть диаметр шариков $D = 2$ см, масса каждого из них $m = 20$ г, сила трения каждого шарика о левую плоскость равна силе трения о правую плоскость и равна $F_{\text{тр}} = 0.1$ Н. Ускорение свободного падения примем равным $g = 9.81$ м/с².

Пусть также (для простоты) в начальный момент времени нижний шарик выскользывает из канала с нулевой стартовой скоростью.

1. Определите скорость цепочки в моменты времени, когда из канала выскользнет второй, а затем третий шарик.
2. Определите скорость цепочки в тот момент, когда из канала выскользнет последний шарик.
3. Определите время, за которое цепочка полностью выскользнет из канала.
4. Пусть на расстоянии $H = 2$ м от нижнего края пластин находится горизонтальный пол. Определите скорость, с которой нижний шарик ударится о него.
5. Подберите примерное значение величины $F_{\text{тр}}$, при котором время полного выскользывания бус будет вдвое меньше времени, найденного в п. 3.

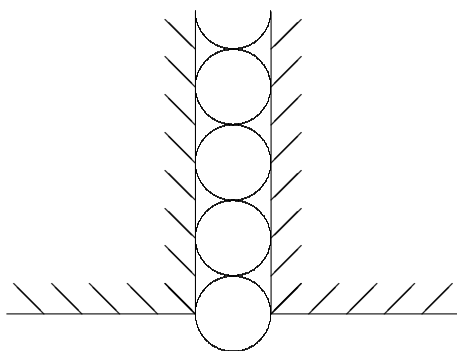
ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ
(ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА)

ВАРИАНТ 47101 для 10 класса

Согласно эпизоду, не вошедшему в окончательный текст повести, старая графиня была так взволнована появлением Германна в своей спальне, что уронила драгоценные бусы (которые, как говорят, стоили не меньше, чем три заветные карты). Бусы потом не нашлись. Ходят слухи, что они попали в щель между балками и сползают в подклет здания. Многие до сих пор ищут в рукописях адрес «дома старинной архитектуры в одной из главных улиц Петербурга», ожидая, что драгоценная диковинка выскользнет, наконец, наружу.

Попробуем смоделировать некоторую часть этого процесса.

Представим расстегнутые бусы как цепочку из 50 связанных друг с другом шариков (вплотную друг к другу), расположенных вертикально и скользящих вниз по ровному вертикальному каналу между двумя пластинами (см. рис).



Пусть диаметр шариков $D = 2$ см, масса каждого из них $m = 20$ г, сила трения каждого шарика о левую плоскость равна силе трения о правую плоскость и равна $F_{\text{тр}} = 0.1$ Н. Ускорение свободного падения примем равным $g = 9.81$ м/с².

Пусть также (для простоты) в начальный момент времени нижний шарик выскользывает из канала с нулевой стартовой скоростью.

1. Определите скорость цепочки в моменты времени, когда из канала выскользнет второй, а затем третий шарик.
2. Определите скорость цепочки в тот момент, когда из канала выскользнет последний шарик.
3. Определите время, за которое цепочка полностью выскользнет из канала.
4. Пусть на расстоянии $H = 2$ м от нижнего края пластин находится горизонтальный пол. Определите скорость, с которой нижний шарик ударится о него.

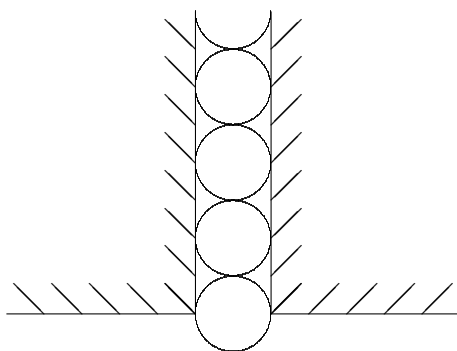
ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ
(ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА)

ВАРИАНТ 47091 для 9 класса

Согласно эпизоду, не вошедшему в окончательный текст повести, старая графиня была так взволнована появлением Германна в своей спальне, что уронила драгоценные бусы (которые, как говорят, стоили не меньше, чем три заветные карты). Бусы потом не нашлись. Ходят слухи, что они попали в щель между балками и сползают в подклет здания. Многие до сих пор ищут в рукописях адрес «дома старинной архитектуры в одной из главных улиц Петербурга», ожидая, что драгоценная диковинка выскользнет, наконец, наружу.

Попробуем смоделировать некоторую часть этого процесса.

Представим расстегнутые бусы как цепочку из 50 связанных друг с другом шариков (вплотную друг к другу), расположенных вертикально и скользящих вниз по ровному вертикальному каналу между двумя пластинами (см. рис).



Пусть диаметр шариков $D = 2$ см, масса каждого из них $m = 20$ г, сила трения каждого шарика о левую плоскость равна силе трения о правую плоскость и равна $F_{\text{тр}} = 0.1$ Н. Ускорение свободного падения примем равным $g = 9.81$ м/с².

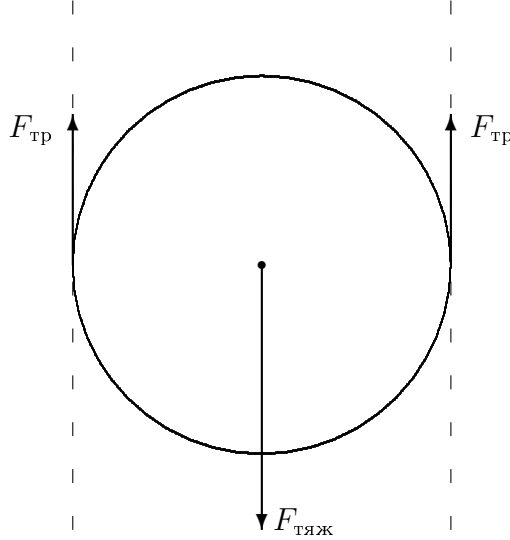
Пусть также (для простоты) в начальный момент времени нижний шарик выскользывает из канала с нулевой стартовой скоростью.

1. Определите скорость цепочки в моменты времени, когда из канала выскользнет второй, а затем третий шарик.
2. Определите скорость цепочки в тот момент, когда из канала выскользнет последний шарик.
3. Определите время, за которое цепочка полностью выскользнет из канала.

РЕШЕНИЕ

1. Будем рассматривать цепочку из M шариков как единое тело.

По вертикали на это тело действует сила тяжести $F_{\text{тяж}} = M m g$, направленная вниз, и силы трения $F_{\text{тр}}$, приложенные в точках касания шариков с пластинами и направленные вверх. Эти силы изображены на рисунке ниже для одного шарика.



Силы трения с каждой стороны равны и приложены на равных расстояниях, следовательно каждый шарик не вращается, а движется поступательно вниз под действием разницы между силой тяжести и суммой сил трения. Заметим, что сумма сил трения будет уменьшаться по мере того, как шарики будут выскакивать из канала.

2. Пусть в рассматриваемый момент времени k шариков уже вышло из канала. Тогда равнодействующая (направленная вертикально вниз) сила будет равна

$$F_k = M m g - 2(M - k)F_{\text{тр}}$$

Эта сила будет придавать ускорение

$$a_k = g - \frac{M - k}{M} \frac{2F_{\text{тр}}}{m},$$

с которым цепочка будет двигаться вниз. В тот момент, когда вся система сместится вниз на расстояние D , из канала выскочит очередной шарик, и равнодействующая сила изменится.

3. Чтобы ответить на первый вопрос, нужно рассмотреть перемещение цепочки вниз из начального положения на расстояние D , а затем еще на такое же расстояние.

Начальная скорость $v_0 = 0$. Ускорение, получаемое на первом этапе, равно

$$a_1 = g - \frac{M - 1}{M} \frac{2F_{\text{тр}}}{m},$$

поскольку на первый (самый нижний) шарик уже не действует сила трения. Следовательно, для прохождения пути D потребуется время

$$t_1 = \sqrt{\frac{2D}{a_1}}.$$

За это время будет приобретена скорость

$$v_1 = a_1 t_1 = \sqrt{2Da}.$$

По прошествии времени t_1 из канала выскочит второй шарик. Теперь цепочка будет иметь ускорение

$$a_2 = g - \frac{M - 2}{M} \frac{2F_{\text{тр}}}{m},$$

Время, необходимое для смещения вниз на расстояние D можно найти из квадратного уравнения

$$D = v_1 t + \frac{a_2 t^2}{2}.$$

Его корни равны $\frac{-2v_1 \pm \sqrt{4v_1^2 + 8a_2 D}}{2a_2}$, и один из них отрицателен. Следовательно, (сокращая на 2)

$$t_2 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2a_2 D}}{a_2}.$$

За такое время будет приобретена скорость

$$v_2 = v_1 + a_2 t_2 = \sqrt{v_1^2 + 2a_2 D}.$$

4. Заметим, что при поиске величин t_2 и v_2 мы использовали только уже известные значения t_1 и v_1 , величины же с индексом $k = 0$ не требовались. Поэтому можно написать формулы для k -го момента через предыдущий:

$$a_k = g - \frac{M - k}{M} \frac{2F_{\text{тр}}}{m},$$

$$t_k = \frac{-v_{k-1} + \sqrt{v_{k-1}^2 + 2a_k D}}{a_k},$$

$$v_k = v_{k-1} + a_k t_k = \sqrt{v_{k-1}^2 + 2a_k D}.$$

5. Теперь можно сформулировать алгоритм расчета момента выскакивания произвольного шарика.

Алгоритм "Шарик М"

Вход: M % номер последнего вышедшего шарика

Выход: U , T % скорость на выходе и время от начала движения

начало алгоритма

положить $T := 0$; $k := 1$; $v_0 := 0$;

ПОКА $k < M$;

Вычислить ускорение $a_k = g - \frac{M - k}{M} \frac{2F_{\text{тр}}}{m}$;

Вычислить время $t_k = \frac{-v_{k-1} + \sqrt{v_{k-1}^2 + 2a_k D}}{a_k}$;

Увеличить общее время $T = T + t_k$;

Вычислить скорость $v_k = v_{k-1} + a_k t_k = \sqrt{v_{k-1}^2 + 2a_k D}$;

Увеличить счетчик $k := k + 1$;

КОНЕЦ_ПОКА

Сохранить скорость на выходе $U = v_{k-1}$; % т.к. счетчик был увеличен
Вывести U ;
Вывести T ;
конец алгоритма

6. Для ответов на 2 и 3 вопросы теперь достаточно выполнить описанный алгоритм для $M = 50$.

7 (10, 11 классы).

После того, как последний шарик окажется на свободе, движение цепочки будет определяться только силой тяжести.

Обозначим через U скорость, которую приобретет цепочка к моменту полного выхода из канала. Тогда ее смещение вниз (т.е. свободное падение) на расстояние X будет описываться законом

$$X = Ut + \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда можно найти время падения (аналогично тому, как это делалось выше)

$$t_X = \frac{-U + \sqrt{U^2 + 2gX}}{g}$$

и приобретенную скорость

$$V = U + gt_X = \sqrt{U^2 + 2gX}. \quad (*)$$

Поскольку к началу свободного падения нижний шарик находился на расстоянии MD от нижнего края пластин, то в полученную формулу следует подставить $X = H - MD$.

8 (11 класс).

Остается подобрать значение сил $F_{\text{тр}}$, при котором цепочка выскользнет из канала вдвое быстрее. Обозначим через T_0 время выскальзывания, найденное в п. 6 (ответ на вопрос 3). Теперь будем запускать алгоритм при $M = 50$ и некотором значении $F_{\text{тр}}$ и получать время движения T . Если $T > T_0/2$, то новый запуск будем делать с меньшим значением $F_{\text{тр}}$, если же $T < T_0/2$, то с большим.

Ответ.

Запуск описанных алгоритмов выдал нам следующие значения.

1 (все классы).

В момент выскальзывания второго шарика скорость $V_2 = 0.02$ м/с,
в момент выскальзывания третьего $V_3 = 0.17$ м/с.

2 (все классы).

В момент выскальзывания последнего шарика скорость составит $V_{50} = 1.29$ м/с.

3 (все классы).

Время выскальзывания всей цепочки $T = 4.19$ с.

4 (10 и 11 классы).

Скорость, с которой нижний шарик ударится о дно $U = 4.57$ м/с.

5 (11 класс).

Сила трения, при которой время выскальзывания уменьшается вдвое, $F = 0.098$ Н.