Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

СУ 38-64

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ АГРИНСКИЙ

ИМЯ АЛЕКСАНДР

ОТЧЕСТВО ЕВГЕНЬЕВИЧ

Дата рождения 27.05.2002

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 7 листах

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$$
$$4x^4+4px^3=px^2-4x^2-4px+p$$
$$4x^4+4x^2=px^2+p-4px^3-4px$$
$$4x^2(x^2+1)=p(x^2+1)-4px(x^2+1).$$

$x^2+1\geq 1$, значит на скобку можно сократить.

$$4x^2=p-4px.$$
$$4x^2+4px-p=0.$$
$$D=16p^2+16p=16\cdot(p^2+p).$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16(p^2+p)}}{8}=\frac{-4\pm 4\sqrt{p^2+p}}{8}.$$

Чтобы корни были рациональные, корень должен уйти, т.е p^2+p - квадрат ~~натурального~~ целого числа.

$p^2+p=p(p+1)$. Т.е это два последовательных целых числа. А если произведение двух последовательных целых чисел - квадрат, то этот квадрат $=0$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Т.е. $p^2+p=0$, $p(p+1)=0$

(+) $p=0$ или $p+1=0$

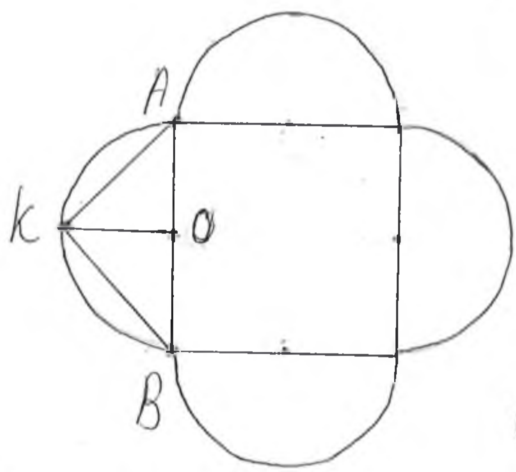
$p=-1$

Ответ: $p=0;-1$.

№2.

(+)

Заметим, что т.к. угол, под кототорым видна будка - $90°$, то этот угол опирается на окружность в которой сторона будки - диаметр.



Наименьшим расстояние будет, если человек стоит в вершине квадрата (у самого угла будки)

Наибольшим расстояние будет, если человек находится ровно на середине дуги окружности (точка K).

$OK = \frac{1}{2} AB$, т.к. OK – медиана в прямоугольном треугольнике ABC с ~~медиана~~ гипотенузой AB. Но AB – это длина исходной будки (L локтей – по условию)

Ответ: минимальное расстояние – 0, максимальное расстояние – $\frac{1}{2}L$ локтей.

геометрическое место таких точек – полуокружности около сторон будки.

№5.

Заметим, что:

если изначально число имеет остаток 1 при делении на 7, то это число в квадрате имеет остаток также 1;

если изначально 2, то в квадрате 4;

если изначально 3, то в квадрате 2;

если изначально 4, то в квадрате 2;

если изначально 5, то в квадрате 4;

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ СУ 38-64

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

если изначально 6, то в квадрате 1.
если изначально 0, то и в квадрате 0.
Это видно, если записать уравнения:
~~$(x+1)^2 = x^2+2x+1$~~, где $x \vdots 7$:
$(x+1)^2 = x^2+2x+1$, $x^2 \vdots 7$, $2x \vdots 7$, $1 \not\vdots 7$,
значит остаток 1
$(x+2)^2 = x^2+4x+4$, $x^2 \vdots 7$, $4x \vdots 7$, $4 \not\vdots 7$,
остаток 4.
и т.д.

Заметим, что число будет делиться на 7, тогда и только тогда, когда все три первых числа делятся на 7, либо квадрат одного дает остаток 4, второго остаток 2, третьего остаток 1, иными способами это получить нельзя.

Если изначально все кратны 7, то всего их, т.к. от 1 до 70 - 10 чисел кратных 7 но тройки упорядочен
$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ вариантов
~~вариантов~~

Теперь, если все числа не делятся на 7:

Чисел изначально дающих остаток 1 и 6 при делении на 7 (в последующем также дающих остаток 1) – 20 штук.

Чисел изначально дающих остаток 2 и 5 при делении на 7 (в последующем дающие остаток 4) – 20 штук.

Чисел изначально дающих остатки 3 и 4 при делении на 7 (в последующем дающие остаток 2) – также 20 штук.

Тогда всего вариантов:

~~20·20·20~~ $(20+20+20)\cdot(20+20)\cdot 20 =$

$= 60\cdot 40\cdot 20 = 2400\cdot 20 = 48000,$

~~Тогда~~ потому что изначально можно взять 1 число из общего количества, на второе место – число, которое не относится к группе числа, стоящего на первой позиции, а на третье место – число которое не относится к группам двух предыдущих

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ СУ-28-64

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

чисел.

Тогда общее количество вариантов будет:

$48000+720=48720$.

не учтено, что тройки по человечно упорядочены

Ответ: 48720 вариантов.

№4.

$x\cdot[x\cdot[x\cdot[x]]]<2018$.

Заметим, что x^4 будет точно <2018, т.е. при натуральном x:

$x^4<2018$.

$x<6$. ??

Т.к. целая часть от $\sqrt{2}=1$, то $[x]<6\sqrt{2}$.

~~Пусть k - целая часть числа x, y - дробная, тогда.~~

~~$[k+y]=k$~~

~~$k\cdot(k+y)=k^2+ky$~~

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ СУ 38-64

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Т.е. любое вещественное положительное число меньшее 6 подходит.

Пусть $x = k+6$, где k - дробная (нецелая) часть числа x, тогда:

$[6+k] = 6.$

$[(6+k)[6+k]] = [(6+k)\cdot 6] = [36+6k]$

При $k<0,5$. $36+6k<39$.

$[(k+6)[(6+k)[(6+k)]]] = [(6+k)\cdot[36+6k]] <$

$[(6+k)\cdot 39] = [234+39k].$

$39\cdot k \leq 19$

$[234+39k] \leq 253$

$253(6+k) < 2018.$

$253(6+k) \leq 1644$ – подходит.

Знач. $x \leq 6,5.$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МБОУ СОШ № 11

Место проведения

VA 29-57

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Андреев

ИМЯ Арсёни

ОТЧЕСТВО Викторович

Дата рождения 11.03.2002 **Класс:** 9

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Андр

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VA 29-57

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^4+4px^3-x^2p+4x^2+4px-p=0$

$4x^3(x+p)+4x(x+p)-p(x^2+1)=0$

$4x(x+p)(x^2+1)-p(x^2+1)=0$

$(x^2+1)(4x^2+4xp-p)=0$

$x^2+1>0$, т.к. $x^2\geq0$

~~4x²~~ значит, $4x^2+4xp-p=0$

$D=16p^2+16p$

$x_{1,2}=\frac{-4p\pm4\sqrt{p^2+p}}{8}$ ⇒

⇒ чтобы корни были ~~не ир~~ рациональные нужно, чтобы $\sqrt{p^2+p}$ было рациональным, т.к. $4p$ - целое. $p^2+p=p(p+1)$ единственное ~~знач~~ целое значение $\sqrt{p^2+p}$, это $0 \Rightarrow p(p+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}p=-1\\p=0\end{array}\right.$

+

Ответ: -1; 0

№4

$\sqrt[4]{2018}\approx\sqrt[2]{45}\approx7$

Подставим 7 в выражение $x[x[x[x]]]$

$7^4=$ ~~49~~ ~~343~~ $\cdot7=$ ~~20~~ $2401>2018\Rightarrow7$ не подходит

т.к. мы берем целую часть от числа, то произведение будет меньше. Возьмём такое x при кот ~~x→7~~ ~~т.е~~ $[x]=6$, а $\{x\}\to1$. Подставим

$7[7[7\cdot6]]\approx7[7\cdot41]$, 41, т.к. ~~4~~ ~~4?7~~ $7\cdot6=42$ и минус 1 т.к.

4 ~~[7]=6~~ ⇒ $6\cdot x\approx42$, но $[6\cdot x]=41$

$7[\cancel{7}287]\approx7\cdot286\approx2012<2018$

Из выше сказанного, следует, что ~~x~~ $0<x<7$

Ответ $0<x<7$

+

№5

$x=y-1$
$z=y+1$ ⇒ $(y-1)^2+y^2+(y+1)^2=7n$, где y и n - натуральные
$x^2+y^2+z^2=7n$

$y^2-2y+1+y^2+y^2+2y+1=7n$

$3y^2+2=7n$

$n=\frac{3y^2}{7}+\frac{2}{7}$

т.к. n - натур ⇒ $\left\{\frac{3y^2}{7}\right\}=\frac{5}{7}$ ⇒

⇒ $3y^2$ может быть равно: 12, 19, 26, 33...

т.к. y^2 - натур, то y^2 н.б.: ~~12, 3~~ 4, 11, 18, 25 (1)

Рассмотрим все нат. числа в квадрате:

(2) 1, 4, 9, 16, 25, 36... первые совп. чисел в

(1) и (2) это 4, следующие 25, и ~~это~~ заметим что это зависит от ср. арифм. прибавления (2)(1), когда оно ~~равно~~ кратно 7, то число ~~нед~~ подходит ~~нед~~ для y^2 $\left(\frac{5+\cancel{7}+9}{2}\right)$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VA 29-57

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

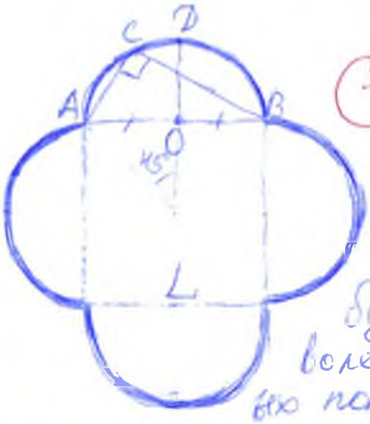
след число $\left(\frac{11+13+15+17}{4}=14\right)$, $\left(\frac{19+21+23}{2}=21\right)$, следовательно числа, такие 2, 5, 9, 12, 16. Итак, если брать по 7 чисел из ряда $\{1, 2, \ldots, 70\}$, то ~~каждые~~ 2 из них будут подходящими

$\frac{70}{7}\cdot 2=20$

Ответ: 20 (8)?

+ Задача не решена.

№2



+

Если мы будем стоять в любой т. C, крайние точки будут A и B. Для любого $\triangle ABC$ описанная окр. будет с центром на середине гипотенузы (AB), и радиуса $\frac{L}{2}$. Находясь в углах трансформаторной будки, ~~он~~ крайними т. будут ~~углы~~ не противолежащие углы. Значит будка видна на выделенных полуокружностях.

Максимальное расстояние будет в точке D, равное радиусу $\frac{L}{2}$, минимальное в углах равное 0. Если рассчитать расст. до центра будки, то максимальное: $\frac{L}{2}+\frac{L}{2}=L$, а минимальное $\frac{L}{\sqrt{2}}=\frac{L\sqrt{2}}{2}$

~~№3~~

~~$f(x)=0$~~

~~$f(x)=1$~~

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Екатеринбург

Место проведения

АН15-60

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Аристархов

ИМЯ Никита

ОТЧЕСТВО Михайлович

Дата рождения 28.04.2003

Класс: 8

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 2 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Арист

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

~~Вот~~ Подберем числа так, чтобы они выполняли условие. Составим из них цепочку. Так как первое число 2018, значит второе тоже будет 2018, следущее число будет 1, т.к. произв. должно равняться 2018, следущие два числа будут $\frac{1}{2018}$ и $\frac{1}{2018}$ и затем 1

Проверка:

$2018 = 2018 \cdot 1$; $1 = 2018 \cdot \frac{1}{2018}$; $\frac{1}{2018} = 1 \cdot \frac{1}{2018}$; $\frac{1}{2018} = \frac{1}{2018} \cdot 1$; $1 = 2018 \cdot \frac{1}{2018}$ и так далее

Составим цепочку:

$2018 \to 2018 \to 1 \to \frac{1}{2018} \to \frac{1}{2018} \to 1 \to 2018 \to 2018 \to 1 \to \frac{1}{2018} \to \frac{1}{2018} \to 1 \ldots$

Мы выявили закономерность первая и последущие группы по 6 чисел повторяются.

Т.к. всего 100 чисел найдем ближайшее число меньше 100 и делящееся на 6 - это 96; ~~…~~ значит после 96 чисел следуют еще 4 числа это

$2018 \to 2018 \to 1 \to \frac{1}{2018}$ => последнее число это $\frac{1}{2018}$

+

Ответ: $\frac{1}{2018}$

№2

~~Воз~~ Допустим на турнире было 14 команд потом половина команд ушла $14 : 2 = 7$; первые ~~…~~ 7 команд сыграли между собой получилось 21 игра и други 7 команд сыграли между собой и все вместе получилось 42 игры, затем выбовшим команда допустим игра-

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ АН15-60

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

ли сначала с первой оставшейся командой, потом со второй, с третьей и с четвертой в итоге получилось 77 игр, выбывшие команды сыграли одинаковое количество матчей и выполнили условия.

Ответ: 14 команд

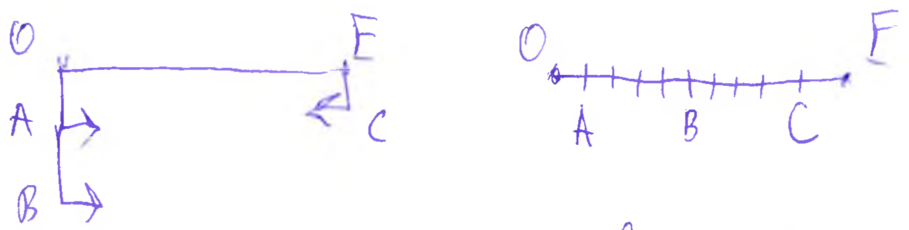
+

№2

Назовем Санин – С; Анин – А; Ванин – В

Начертим схему передвижения:

в 9:00 в 10:00



в 10:30

В переместился на 4 деления; С на ~~3~~ 3; и А на 2

~~Подберем число X так чтобы~~

Подберем время так чтобы А был между В и С

в 12:00

прошло $1{,}5\text{ ч} = 3 \cdot 30\text{мин}$ => В переместился на $4 \cdot 3 = 12$ (д.)

С на $3 \cdot 3 = 9$ и А на $3 \cdot 2 = 6$, теперь между ними ~~растояние~~ расстояние одинаковое и равное 12 делений мы выполнили условие

Ответ: в 12:00 „Анин" находится по середине между „Саниным" и „Ваниным"

±

Лист 02 из 02

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МБОУ СОШ № 11

Место проведения

ЕВ 31-19

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Батраков

ИМЯ Иван

ОТЧЕСТВО Сергеевич

Дата рождения 19.06.2003 **Класс:** 8

Предмет Математика **Этап:** ______

Работа выполнена на 3-х **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ______

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №1:

Т.к. по условию ІІ-е число может быть любым ненулевым делаем вывод:

$2018;\ x;\ \frac{x}{2018};\ \frac{1}{2018};\ \frac{1}{x};\ \frac{2018}{x}\ \Big|\ 2018;\ x;\ \frac{x}{2018}\ldots$

То есть, как мы видим, каким бы ни было число x будет повторяться одна комбинация из 6 чисел: делим 100 на 6 = 16 (ост. 4) остается 4 числа из незаконченной комбинации, а значит последним числом будет 4 число комбинации: $\frac{1}{2018}$

+

Ответ: $\frac{1}{2018}$

Задача №5:

возможны ли другие варианты?

Т.к. $\left.\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \ldots a_n^2 = 2018^2 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \ldots b_n^2 = 2017^2 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ldots a_n b_n = 2017 \cdot 2018 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{2018^2}{2017^2}$?

$\Downarrow$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{2018}{2017}$

Ответ: $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2018}{2017}$ обоснования нет

–

~~Задача №2:~~

Задача №3: — 0

~~Задача №4:~~

Задача №2: Т.к. команд (дисн. и не дисн.) было поровну, а матчи, сыгранные дисн. командами равны можем сделать вывод, что: $2(x-1)+(x-2)+(x-3\ldots) = 77$ но, т.к. 77 не кратно 2-м можно сделать вывод что некоторые дисн. команды успели сыграть с не дисн. командами, причем т.к. матчи дисн. команд равны ⇒ ⇒ что все дисн. команды играли с некоторым кол-вом не дисн. команд. Методом подсчетов я получил число 14, (кол-во всех команд), из

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

которых 7 были дисквалифицированы: $2((7-1)+(7-2)+(7-3)+(7-4)+(7-5)+$
$+(7-6)) = 42$ и еще $77-42=35$ матчей были сыграны между диск. командами и не диск. командами, а т.к. диск. команды имеют равное кол-во матчей $\Rightarrow 35:7=5$ матчей сыграла каждая диск. команда с не диск. □

Ответ: 14 команд.

+

Задача № 4: Выведем 2 уравнения, где
x - путь „Аиста"
z - путь „Ванино"
y - путь „Санина"
S - весь путь

зная, что корабли шли навстречу делаем ур-ие:

$$\begin{cases} S-y = 2+(z-x):2 \\ \cancel{S-1{,}5y = 1{,}5z-(z-x):2} \\ S-1{,}5y = 1{,}5z-(1{,}5z-1{,}5x):2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S-y = 2+0{,}5z-0{,}5x \\ S-1{,}5y = 1{,}5z-0{,}75z+0{,}75x \end{cases} \quad \begin{cases} S-y = 1{,}5z-0{,}5x \\ S-1{,}5y = 0{,}75z+0{,}75x \end{cases}$$

$$\begin{cases} S-y = 1{,}5z-0{,}5x \\ -2S+3y = -1{,}5z-1{,}5x \end{cases} \quad \begin{cases} -S+2y = -2x \\ S-2y = 2x \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{\#3S*3y = *4{,}5z*1{,}5x} \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3S-3y = 4{,}5z-1{,}5x \\ 2S+3y = 7{,}5z+1{,}5x \end{cases} \quad \begin{cases} 5S = 6z \\ S = \frac{6}{5}z \end{cases}$$

+
−

Из этого всего делаем вывод, ? что спустя 3 ч. после отплыва „Аист" оказался посередине, то есть в 12 ч.

Ответ: в 12 ч.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

LV 21 - 69

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Боков

ИМЯ Адам

ОТЧЕСТВО Исрапилович

Дата рождения 05.07.2002 **Класс:** 9

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Боков

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №1.

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^4+4px^3-(p-4)x^2+4px-p=0$

$4x^4+4px^3-px^2+4x^2+4px-p=0$

$4x^4+4x^2+4px^3+4px-px^2-p=0$

$4x^2(x^2+1)+4px(x^2+1)-p(x^2+1)=0$

$(x^2+1)(4x^2+4px-p)=0$ одна из скобок $=0$, но x^2+1 всегда >0 (квадрат числа - неотриц.) $\Rightarrow$

$4x^2+4px-p=0$

$D=(4p)^2-4\cdot4\cdot(-p)=16p^2+16p=16p(p+1)$. Т.к. корни ур-ния должны быть рац., то $16p(p+1)$ - точный квадрат. Т.к. 16 является точным квадратом, то и $p(p+1)$ - точ. кв. быть им $p(p+1)$ может только при $p=0$ или $p=-1$. (p - целое)

Проверка:

$(p=0)$ $4x^4=-4x^2$

$4x^4+4x^2=0$

$4x^2(x^2+1)=0$, $x^2+1>0\Rightarrow$

$4x^2=0$,

$x=0$, $x\in\mathbb{Q}$ (рац).

$(p=-1)$ $4x^4-4x^3=-x^2-4x^2+4x-1$

$4x^4-4x^3+x^2+4x^2-4x+1=0$

$4x^2(x^2+1)-4x(x^2+1)+(x^2+1)=0$

$(x^2+1)(4x^2-4x+1)=0$, $x^2+1>0\Rightarrow$

$4x^2-4x+1=0$

$D=16-16=0$

$x=\frac{-(-4)}{2\cdot4}=\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{Q}$

+

Ответ: верно при $p=0$, $p=-1$

Задача №3. Рассмотрим вариант, когда $y=x$. Т.к. ~~на~~ при всех x, y верно выражение, то: $f(0)=f^2(x)$. Рассмотрим два случая.

1) $f(0)=0$. Тогда $f^2(x)=0$, из чего следует, что при $f(0)=0$ $f(x)=0$.

2) $f(0)\neq0$. Если $x=y=0$, то:

$f(0)=f^2(0)$

$f(0)-f^2(0)=0$

$f(0)(1-f(0))=0$

$f(0)=0$ или $1-f(0)=0$

+

$f(0)=0$ нам не подходит, т.к. рассматривается вариант, когда $f(0)\neq0$. Если $1-f(0)=0$, то $f(0)=1\Rightarrow 1=f^2(x)$, $f(x)=\pm1$. Но -1 быть не может, ведь тогда $-1=(-1)^2$, что неверно; если $f(x)=1$, то $1=1^2$ - верно.

Т.к. все $f(x)$ определены на всей оси и $f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$ верно для всех x, y, то рассуждения выше справедливы и для любых x, y, $\Rightarrow$ $f(x)=0$, если $f(0)=0$, и $f(x)=1$, если $f(0)\neq0$.

Ответ: $f(x)=0$ при $f(0)=0$, $f(x)=1$ при $f(0)\neq0$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 1709

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ LV 21-69

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №4.

Если $x=7$, то $7[7[7[7]]]=7^4=2401>2018$, значит, $0<x<7$. (0 не положит.)

Рассмотрим, чему тогда это выражение равно (или чего меньше), если $x<7$.

$0<x<7$

$0<[x]\leqslant 6$ – т.к. целая часть, наиб. возможное – 6 (7 не может быть)

$0<x[x]<42=6\cdot 7$

$0<[x[x]]\leqslant 41$ – т.к. 42 не может быть, а на 1 меньше – может

$0<x[x[x]]<287=41\cdot 7$

$0<[x[x[x]]]\leqslant 286$ – т.к. 287 не может быть

$0<x[x[x[x]]]<2002\overset{=286\cdot 7}{}<2018$

Выражение всегда меньше 2002, ⇒ меньше 2018 при $x<7$.

Ответ: $0<x<7$. ($x\in(0;7)$)

+

Задача №5.

Возможные остатки от деления на 7 числа вида a^2 – 0, 1, 4, 2, т.к.:

- Если $a=7k$, ~~ост~~ $a^2=49k$, ост. = 0
- $a=7k+1$, $a^2=\underbrace{49k^2+14k}_{\vdots 7}+1$, ост. = 1
- $a=7k+2$, $a^2=\underbrace{49k^2+28k}_{\vdots 7}+4$, ост. = 4
- $a=7k+3$, $a^2=49k^2+42k+9=\underbrace{49k^2+42k+7}_{\vdots 7}+2$, ост. = 2
- $a=7k+4$, $a^2=49k^2+56k+16=\underbrace{49k^2+56k+14}_{\vdots 7}+2$, ост = 2
- $a=7k+5$, $a^2=49k^2+70k+25=\underbrace{49k^2+70k+21}_{\vdots 7}+4$, ост. = 4
- $a=7k+6$, $a^2=49k^2+84k+36=\underbrace{49k^2+84k+35}_{\vdots 7}+1$, ост. 1

✗ Значит, чтобы $x^2+y^2+z^2$ было кратно 7, то сумма остатков от деления на 7 у x^2, y^2, z^2 должна быть либо 7, либо 0.

- если 0, то все числа $(x^2, y^2, z^2)\ \vdots\ 7$. Т.к. нам важен порядок, а чисел от 1 до 70, кратных 7 – 10 штук, то вариантов троек (x,y,z) для этого случая – $10\cdot 10\cdot 10=1000$ (числа могут ~~быть равны~~).

Это неверно

- Если 7, то одно из x^2, y^2, z^2 имеет ост. 1, другое – 4, третье – 2 (чтобы сумма была 7). Чисел от 1 до 70 с ост. от деления на 7, равному 1 – 10 шт. (это 1 и каждое число, кратное 7, +1, кроме 71); с ост. 4 – 10 шт. (4, числа кр. 7, +4, кроме 74); с ост. 2 – 10 шт. (аналогично – 2 и кр. 7, +2, кроме 72). Т.к. вар-тов перестановок 1, 4, 2 $=3\cdot 2\cdot 1=6$, то и вар-тов, какое из чисел x^2, y^2, z^2 какой ост. будет иметь – 6. Т.к. нам важен порядок, то троек (x,y,z) будет с учетом порядка и перестановок $6\cdot 10\cdot 10\cdot 10=6000$.

$6000+1000=7000$ троек.

Ответ: 7000 троек (x,y,z).

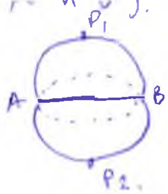
–

Лист 02 из 03

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

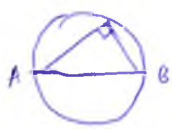
Задача №2.

ГМТ – геометрическое место точек.
Для начала вспомним про ГМТ, именуемое „Уши чебурашки". Это ГМТ, из которого прямая АВ видна под данным углом. В это ГМТ входят две дуги ~~по~~ окружности, находящиеся по разные стороны от АВ, и стягиваемые АВ (без точек А и В). Пример „ушей чебурашки" для произвольных угла и АВ:



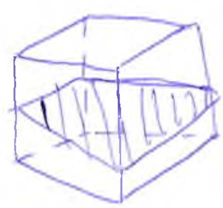
(без пунктира).

На каждой из точек, лежащих на дуге AP_1B или AP_2B, прямая АВ видна под одним и тем же углом, т.к. эти углы опираются на одну и ту же дугу. Для угла 90° две этих дуги складываются в окружность, АВ – диаметр:

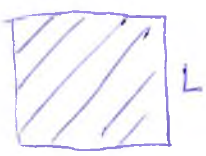


(+)

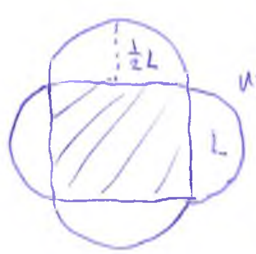
Теперь будем рассматривать будку. Поперечное сечение выглядит так:



Закрашенное – сечение. Рассмотрим вид сверху.



Если наблюдатель видит только одну из сторон будки (будка – параллел~~ограмм~~епипед; исходя из здравого смысла считаем, что будка выше наблюдателя), то ГМТ, из которых она видна, это одна из дуг „ушей чебурашки" для 90°, если одна из сторон квадратного сечения – прямая, ~~из кото~~ для которой это ГМТ существует.



Из ~~в~~ каждой точки этих дуг мы видим одну сторону будки, и под углом 90°.

Если наблюдатель видит две стороны в сечении будки, то прямая для ГМТ – ушей будет являться диагональю. Но т.к. будка – параллелепипед, то под углом 90° две стороны будут видны из самой точки, лежащей на ребре будки. из вершины сечения Значит, ГМТ – это все ГМТ, из которого видна будка, указанное на рисунке слева.

Наим. расстояние – 0. Наиб. расстояние – радиус полуокружности, у которой диаметр равен стороне сечения, т.е. $\frac{1}{2}L$.

Ответ: наим. – 0, наиб. – $\frac{1}{2}L$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ ~~Л~~ МЭИ

Место проведения

АИ 35-93

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Бондаренко

ИМЯ Дмитрий

ОТЧЕСТВО Александрович

Дата рождения 28.06.2004 **Класс:** 7

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Бонд

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ АЦ 35-93

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Чтобы все машины были в работе надо на каждую машину 4 человека. Если ~~всех~~ нобых 5-ых человек обучить ~~раз~~ одной машине, а трех других по 5 то машины будут ездить, но обойдется это в 200000 рублей. Есть другие ситуации при которых получается больше или такая же сумма.

№2

Начнем с конца.

Саши	Паши	Аркаши	Было во время дел.
8	8	8	конец
4	4	16	Аркаши → Саше Паше
~~14~~ 2	14 ~~2~~	8	Паша → Саше и Аркаше
6 ~~14~~	14 ~~6~~	4	Саша → Аркаше
13 ~~7~~	7 ~~13~~	4	Саша → П. половину
~~7~~13	7	4	Начало

1) Было у них когда Аркаша давал. Если они давал по ~~полов~~ столько же сколько у них было. У саши $8-4=4$; У Паши $8-4=4$; У Аркаши $8+4+4=16$.

2) У Саши $4-2=2$
У Паши $4+8+2=14$
У Аркаши $16-8=8$

3) У Саши $2+4=6$
У Аркаши $8-4=4$
У Паши 14

4) У саши $6+7=13$
У Паши $14-7=7$
У Аркаши 4

+

Ответ: У Саши 13 у Паши 7
У Аркаши 4

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ НI 35-93

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Домов от нумирации 1 до 9 = 9. От нумирации 10 до 99 = 90 домов. От нумирации 100 до 199 = 100 домов. Умножим 90 домов на 2 = 180 табл. Сто домов умножим на 3 и на 6 так как 9 много. Сложим 180 + 1800 + +9 = 1989 табличек ~~это много~~ потребуется на 699 домов. 1989 − 1977 = 72 на таблички больше чем использовалось. 72 делим на три ведь последние дома номер их располагается на 3-х табличках. Получаем, что ошибка составляет 24 дома. 699 − 24 = 675 домов 675 · 1 = 675 табличек с номерами. Число 675 : на ~~5~~ 3 это минимальный множитель. 675 : 3 = 225 табличек в высоту по 3 стопки. Ответ 675 домов, 3 стопки, высота 225.

+

№4

Чисел столько же сколько 5 таблицы. При n = четному числу. Не все последующие строки будут больше на один. Составим уравнение X = строке ~~нечетному четному числу~~, где n^2 кол-во чисел и цифр.

$X \cdot n^2 = X + 1 + X + \ldots X + n$.

Это уравнение будет не верно. Потому, что таблица и трюк со строчками действует если n^2 = не четному числу.

−

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ АИ 35-93

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если известны $x_1 = \frac{1}{2}$ то попробуем найти x_2

$x_2 = \frac{\cancel{x_{2-1}}\,1}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{x_{2-1}}\,1 + 1} = x_2 = \frac{1}{5}$. Тогда $x_3 = \frac{\cancel{x_2}}{2 \cdot 3 \cancel{x_2} + 1}$

$= \frac{1}{7}$ есть закономерность последующие числа

будут $= \frac{1}{y+2}$ где y любой последовательный знаменатель. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \ldots \frac{1}{5+(2 \cdot 2016)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \ldots \frac{1}{4037}$

$= \frac{1 \cdot 5 \cdot 7 \ldots}{2 \cdot 5 \cdot 7 \ldots} \ldots$. Получится 2017 чисел в числителе

всех знаменателей. А в знаменателе одно число

$\frac{2017 \cancel{(2 \cdot 5 \ldots 4037)}}{\cancel{2 \cdot 5 \ldots \cdot 4037}} = 2017.$

Ответ: 2017.

—

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

КГЭУ

Место проведения

JV 44-17

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Борисова

ИМЯ Полина

ОТЧЕСТВО Владимировна

Дата рождения 19.06.2003 **Класс:** 8

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ПБор-

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

1. $2018 \quad x \quad y \quad z \quad \dots$

$\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

Найдем z:

Из условий следует, что:

$x = 2018y \qquad y = xz$

$\frac{x}{y} = 2018 \qquad \frac{x}{y} = \frac{1}{z}$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 2018 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{z} \end{cases}$$

$2018 = \frac{1}{z}$

$z = \frac{1}{2018}$

$2018 \quad x \quad y \quad \frac{1}{2018} \quad a \quad b \quad c \dots$

Найдем c:

Из условий следует, что:

$$\begin{cases} b = ac \\ a = \frac{1}{2018} b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = c \\ \frac{b}{a} = 2018 \end{cases}$$

$c = 2018$

Ряд:

$2018 \quad x \quad y \quad \frac{1}{2018} \quad a \quad b \quad 2018 \quad d \quad e \dots$

Получается так, что мы можем узнать значение числа, расположенного в ряду через два числа от уже известного (или ранее найденного), и, как выяснилось, оно не зависит от чисел, стоящих рядом (только зависит от числа, стоящего через два числа слева)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JV 44-17

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Получилось так, что начальное число (первое) совпало 7-ым

Значит, 4-ое совпадет с 10-ым.

Образуется такой ряд:

$2018 \quad \cancel{x} \quad y \quad \frac{1}{2018} \quad a \quad b \quad 2018 \quad d \; e \quad \frac{1}{2018} \quad g \quad h \quad 2018 \ldots$

Его можно разбить по группам от начала, чтобы в каждой было 6 чисел (но будет группа, в которой будет не 6 чисел, а меньше, т.к. 100⁄6, это последняя группа):

$2018 \quad x \quad y \quad \frac{1}{2018} \quad a \quad b \,|\, 2018 \quad d \quad e \quad \frac{1}{2018} \quad g \quad h \,|\, 2018 \ldots$

Групп будет:

$100 : 6 = 16$ (ост 4)

100ое Число последнее, оно будет 4 в последней группе. Т.к. ~~каждое~~ 1-ое числа в каждой группе, 2-ое числа, 3-ьи числа, 4-ое, 5-ое, 6-ое число в каждой группе совпадают (равны), то 100 число, являющееся 4ым числом в группе, будет равно любому другому 4-ому числу в другой группе.

4-ое число в каждой группе — это $\frac{1}{2018}$

⇓

100-ое число равно $\frac{1}{2018}$

Ответ: $\frac{1}{2018}$

+

3. $b = \frac{a+c}{2}$

ОДЗ: $a+c \neq 0$
$a \neq -c$
$a \neq 0$
$c \neq 0$

Даны числа: $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{c}$; $\frac{1}{b} = \frac{2}{a+c}$

1) Допустим, что число $\frac{2}{a+c}$ является средним арифметич. чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{c}$

Тогда:

$$\frac{2}{a+c} = \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}{2}$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JV 44-17

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$4 = (a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$

$4 = 1 + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + 1$

$2 = \frac{a^2+c^2}{ac}$

$a^2+c^2-2ac=0$

$(a-c)^2=0$

$a=c$

$\Downarrow$

$b = \frac{a+c}{2} = \frac{2a}{2} = a$

$\Downarrow$

$a=c=b$

2) Допустим, что $\frac{1}{c}$ является средним арифметич. чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{2}{a+c}$

$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{2}{a+c}}{2}$

$2 = c\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a+c}\right)$

$2 = \frac{ac+c^2+2ac}{a(a+c)}$

$2a^2+2ac=3ac+c^2$

$2a^2-c^2-ac=0$

$2a^2-c^2-2ac+ac=0$

$2a(a-c)+c(a-c)=0$

$(2a+c)(a-c)=0$

$2a+c=0$ или $a-c=0$

$c=-2a$ $\qquad$ $a=c$

$b=\frac{a-2a}{2}=-\frac{a}{2}=-0{,}5a$ $\qquad$ $\Downarrow$ $\quad b=\frac{2a}{2}=a$

$\Downarrow$

$a=c=b$

3) Допустим, что $\frac{1}{a}$ является средним арифметич. чисел $\frac{1}{c}$ и $\frac{2}{a+c}$

$\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{c}+\frac{2}{a+c}}{2}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

$$2=\frac{a^2+ac+2ac}{c(a+c)}$$

$$2ac+2c^2=a^2+3ac$$

$$2c^2-a^2-ac=0$$

$$2c^2-a^2-2ac+ac=0$$

$$2c(c-a)+a(c-a)=0$$

$$(2c+a)(c-a)=0$$

$2c+a=0$ или $c-a=0$

$a=-2c$ $\Downarrow$ $c=a$ $\Downarrow$

$b=\frac{a+c}{2}=\frac{-2c+c}{2}=-0{,}5c$ $\quad$ $b=\frac{2a}{2}=a$

$\Downarrow$

$a=c=b$

Ответ: 1) При среднем арифметическом $\frac{2}{a+c}$: $a=b=c$

2) При среднем арифметич. $\frac{1}{a}$: $a=b=c$ или $c=-2a$; $b=-0{,}5a$

3) При среднем арифметич. $\frac{1}{c}$: $a=b=c$ или $a=-2c$; $b=-0{,}5c$

Если 3 числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{c}, \frac{2}{a+c}$ удовлетворяют какому-~~нибудь~~ то из условий:

1 условие: $a=b=c$

2 условие: $c=-2a$; $b=-0{,}5a$

3 условие: $a=-2c$; $b=-0{,}5c$

то одно из них является средним арифм. двух других

(+)

№ 2

Пусть всего есть 2n команд. Выбыло n команд. Осталось n ком. Мы знаем, что каждая выбывшая играла один раз с каждой выбывшей из остальных. Следовательно, между выбывшими было:

$\frac{n(n-1)}{2}$ матчей.

Рассмотрим сколько матчей было между оставшимися в турнире командами. По усл. каждая команда должна была сыграть с каждой, значит, каждая оставшаяся в турнире команда играла с каждой оставшейся в турнире командой. Следовательно, между ними было:

$\frac{n(n-1)}{2}$ матчей.

Рассмотрим сколько матчей было между выбывшими и оставшимися в турнире (то есть сколько успели матчей сыграть выбывшие с оставшимися до дисквалификации)

Они сыграли $n \cdot x$ матчей, потому что в условии задачи сказано, что выбывшие команды сыграли одинаковое кол-во матчей. То есть, если одна из выбывших сыграла x матчей с оставшимися, то и каждая другая выбывшая команда сыграла x матчей с оставшимися. Следовательно матчей выбывших с оставшимися было $n \cdot x$

Составим уравнение:

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n \cdot x = 77$$

$$n(n-1) + n \cdot x = 77$$

$$n(n-1+x) = 77$$

$77 \mid 7$, $11 \mid 11$, 1 $\Rightarrow$

$n = 7$
$n-1+x = 11$
$6 + x = 11$
$x = 5$

Тогда всего команд: $2 \cdot 7 = 14$

или

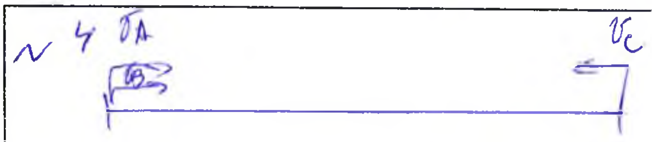
$n = 11$
$n-1+x = 7$
$11-1+x = 7$
$x = -3$

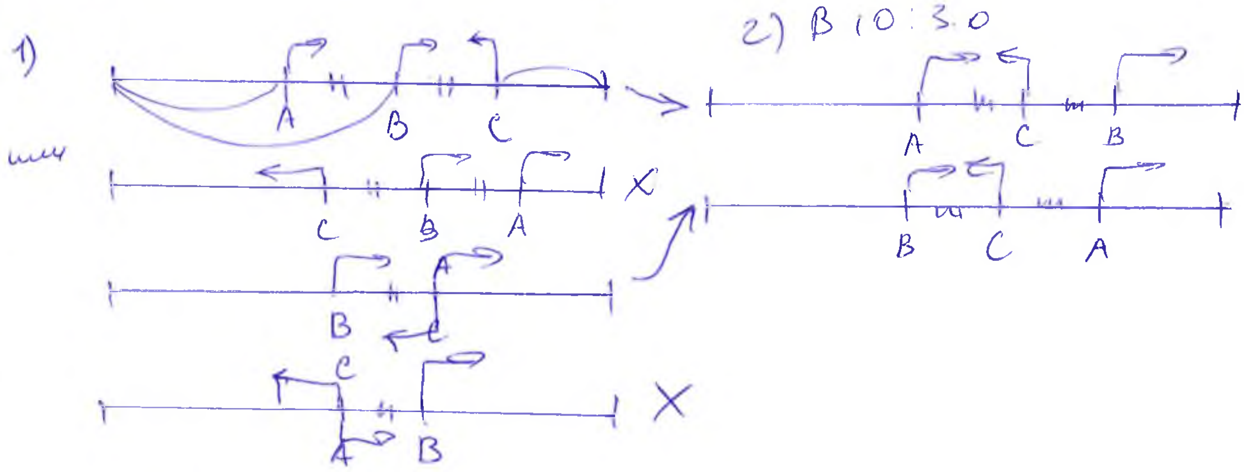
Количество матчей не может быть отриц. числом

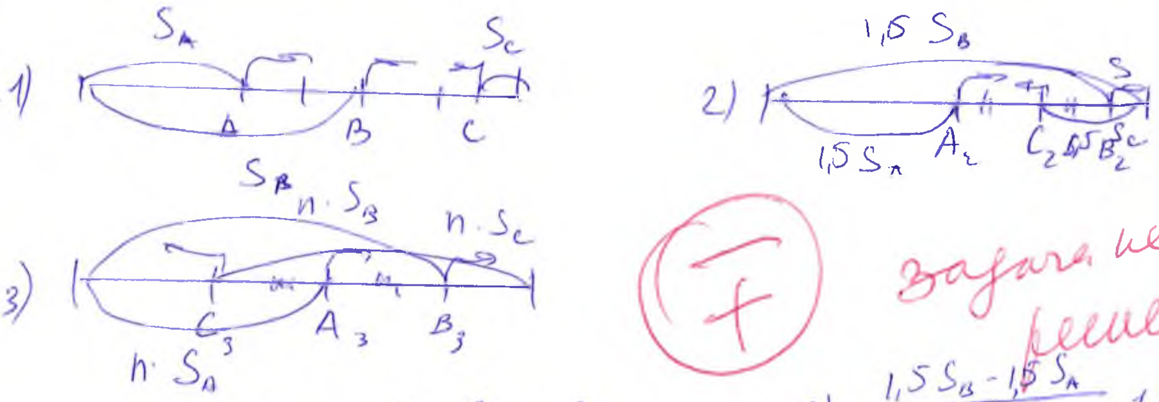
Ответ: всего 14 команд было в начале турнира

(+)

№ 4







F

задача не решена

1) $S_B - S_A = S - S_B - S_C$

$2S_B - S_A - S_C = S$

3) $S_B\cdot n - S_A\cdot n = S_C\cdot n - (S - S_A\cdot n)$

$S = n(S_C + 2S_A - S_B)$

$$n = \frac{S}{S_C + 2S_A - S_B}$$

$$n = \frac{4\cdot\left(\frac{5S_B - 7S_A}{10}\right) - 0{,}5S_B + 2{,}5S_A}{\left(\frac{5S_B - 7S_A}{10}\right) + 2S_A + S_B}$$

$$n = \frac{2S_B - 2{,}8S_A - 0{,}5S_B + 2{,}5S_A}{0{,}5S_B - 0{,}7S_A + 2S_A + \cancel{S_B}}$$

$$n = \frac{1{,}5S_B - 0{,}3S_A}{-0{,}5S_B + 1{,}3S_A}$$

2) $\frac{1{,}5S_B - 1{,}5S_A}{2} = 1{,}5S_C - (S - 1{,}5S_B)$

$1{,}5S_B - 1{,}5S_A = 3S_C - 2S + 3S_B$

$2S = 3S_C + 3S_B - 1{,}5S_B + 1{,}5S_A$

$2S = 3S_C + 1{,}5S_B + 1{,}5S_A$

$$\begin{cases} 2S_B - S_A - S_C = S \\ 3S_C + 1{,}5S_B + 1{,}5S_A = 2S \end{cases}$$

$3S_C + 1{,}5S_B + 1{,}5S_A - 2S_B + S_A + S_C = S$

$4S_C - 0{,}5S_B + 2{,}5S_A = S$

$3S_C + 1{,}5S_B + 1{,}5S_A = 2\cdot(2S_B - S_A - S_C)$

$3S_C + 1{,}5S_B + 1{,}5S_A = 4S_B - 2S_A - 2S_C$

$2{,}5S_B - 3{,}5S_A - 5S_C = 0$

$5S_B - 7S_A - 10S_C = 0$

$5S_B - 7S_A = 10S_C$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

РЮ 98-93

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ВАЛЬКОВ

ИМЯ МИХАИЛ

ОТЧЕСТВО ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения 25.12.2000

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: [signature]

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$f(x_1;x_2;x_3)=\sqrt{x_1^2+x_2x_3}+\sqrt{x_2^2+x_1x_3}+\sqrt{x_3^2+x_1x_2}$

$\sqrt{x_2x_3}\le\sqrt{\frac{x_2^2+x_3^2}{2}}$ (на основании неравенства о средних)

$x_2x_3\le\frac{x_2^2+x_3^2}{2}$

$\sqrt{x_1^2+x_2x_3}\le\sqrt{x_1^2+\frac{x_2^2+x_3^2}{2}}$

причём равенство достигается, если $x_2=x_3$

Аналогично можно записать для остальных двух слагаемых, т.е.

$\sqrt{x_2^2+x_1x_3}\le\sqrt{x_2^2+\frac{x_1^2+x_3^2}{2}}$

$\sqrt{x_3^2+x_1x_2}\le\sqrt{x_3^2+\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$

Тогда несложно заметить? что максимум ф-ии достигается при $x_1=x_2=x_3$.

Если это так, то надо это доказать!

$x_1+x_2+x_3\le 2$

$3x_1\le 2$

$x_1\le\frac{2}{3}$

$f(x_1;x_2;x_3)=x_1\sqrt{2}+x_1\sqrt{2}+x_1\sqrt{2}$

$f(x_1;x_2;x_3)=3\sqrt{2}\,x_1$

$\max f(x_1;x_2;x_3)=3\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}=2\sqrt{2}$

Очевидно, что $\min f(x_1;x_2;x_3)\to 0$ при $x_1\to 0, x_2\to 0, x_3\to 0$. След-но минимум ф-ии может быть достигнут только при условии, что $x_1=x_2=x_3=0$.

Ответ: $\max f(x_1;x_2;x_3)=2\sqrt{2}$ −
$\min f(x_1;x_2;x_3)=0$ +

∓

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Пусть имеются два цилиндра:

$r_1 = a r_2$

$h_1 = b h_2$, $a, b > 0$ (далее a и b рассматриваются только на этом условии)

Докажем, что если $V_1 = V_2$ и $S_1 = S_2$, то $a = 1$ и $b = 1$.

$V_1 = a^2 b \pi r_2^2 h_2$ $\quad V_2 = \pi r_2^2 h_2$

$S_1 = 2\pi ab r_2 h_2 + \pi a^2 r_2^2$ $\quad S_2 = 2\pi r_2 h_2 + \pi r_2^2$

$V_1 = V_2 \Rightarrow a^2 b = 1 \quad ab = \frac{1}{a} \quad (1)$

$S_1 = S_2 \Rightarrow S_1 - S_2 = 0$

$2\pi r_2 h_2 (ab - 1) + \pi r_2^2 (a^2 - 1) = 0 \quad (2)$

$(1) \to (2)$

$2\pi r_2 h_2 \left(\frac{1}{a} - 1\right) + \pi r_2^2 (a^2 - 1) = 0$

$2\pi r_2 h_2 \left(\frac{a-1}{a}\right) = \pi r_2^2 (1 - a^2)$

Так как $2\pi r_2 h_2 > 0$ и $\pi r_2^2 > 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 1 = 0 \\ 1 - a^2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{a-1}{a} > 0 \\ 1 - a^2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{a-1}{a} < 0 \\ 1 - a^2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} a > 1 \\ a^2 < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 1 \\ a^2 > 1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad a = 1$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a^2 b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

+

след-но

$r_1 = r_2$

$h_1 = h_2$, т.е. два цилиндра равны. ЧТД.

~~Ответ~~ Значит два цилиндра равны, если равны их объёмы и площади поверхности. след-но V и S цилиндров могут быть любыми.

Ответ: при любых V и S два цилиндра с такими параметрами равны.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ РЮ 93 - 93

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 5

$x^y + y^z = xyz$

Пусть $f(x) = x^y$, а $g(x) = xy$

$f'(x) = yx^{y-1}$ $g'(x) = y$ Для чего?

т.к. $x, y \in N$, то

$yx^{y-1} \geq y$, причём равенство достигается в $(1;1)$ и $y = 1$

~~след-но функция $f(x)$ возрастает быстрее функции $g(x)$ на множестве натуральных чисел.~~

Аналогично для y^z и yz.

$\begin{cases} yx^{y-1} \geq y \\ zy^{z-1} \geq z \end{cases}$

Несложно заметить, что тогда

$\begin{cases} x^y \geq xy \\ y^z \geq yz \end{cases}$, причём равенство достигается при

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$

$$+\begin{array}{l} x^y \geq xy \\ y^z \geq yz \end{array}$$

$x^y + y^z \geq xy + yz = y(x+z)$

Пусть $a(x) = x+z$, а $b(x) = xz$

$a'(x) = 1$ $b'(x) = z$

$a'(x) \leq b'(x)$ на N. $(z \in N)$

Равенство достигается при $z = 1$.

След-но $x + z \geq xz$.

$x+z = xz$ ~~при~~.

$\begin{cases} x=2 \\ z=2 \end{cases}$

$x^y + y^z = xy + yz \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=2 \end{cases}$ - решение

$x+z = xz \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=2 \end{cases}$

Ответ: $(2; 2; 2)$.

(+)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

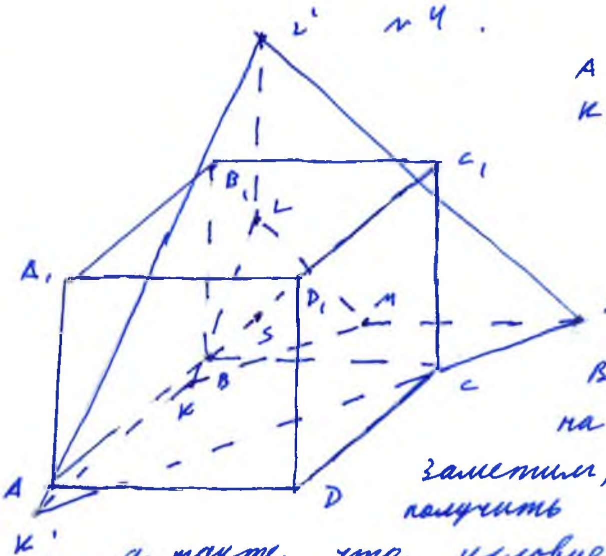
Вариант: 17111

ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ РЮ 98-93

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

А.



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб
K, L, M – центры граней AA_1D_1D, $A_1B_1C_1D_1$, DCC_1D_1 соответственно
$L'L \perp (A_1B_1C_1D_1)$
$M'M \perp (DCC_1D_1)$
$K'K \perp (AA_1D_1D)$
Вершины пирамид лежат на прямых KK', LL', MM'.
Заметим, что $\triangle K'L'M'$ можно получить из $\triangle KLM$ гомотетией, а также, что условие 4А равносильно условию $D_1 \in (K'L'M')$.

Д. п. $KLM \cap BD_1 = S$

Т.к. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, то $BS = SD_1$, а значит коэффициент гомотетии равен 2

Верно ли??

$\triangle DA_1C_1$: KM – средняя линия $\Rightarrow KM = \frac{1}{2}A_1C_1 = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

Аналогично для KL и LM. след-но
$K'M' = K'L' = L'M' = a\sqrt{2}$.

Т.к. т. S – центр опис. окр. для $\triangle KLM$, то т. D_1 – центр опис. окр. для $\triangle K'L'M'$. след-но

$D_1M' = \frac{L'M'\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

+

$\triangle D_1MM'$: $MM' = \sqrt{D_1M'^2 - D_1M^2} =$

$= \sqrt{\frac{a^2 \cdot 6}{9} - \frac{a^2 \cdot 2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot 2}{3} - \frac{a^2}{2}} =$

$= \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Ответ: $\frac{a\sqrt{6}}{6}$

В. Заметим, что если повторить действия из А для каждой вершины, то образуется правильный восьмигранник. А в правильный восьмигранник можно вписать куб. след-но условие 4В выполнимо.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ РЮ 93-93

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

$P(x) = a_1 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n$

$P(1) = 2019 \Leftrightarrow$ сумма $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2019$

Для $n = 2$ решение очевидно:

$P(x) = a_1 x + a_2$

$$-\begin{cases} a_1 + a_2 = 2019 \\ 2019 a_1 + a_2 = 1 \end{cases}$$

$-2018 a_1 = 2018 \qquad a_1 = -1$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 2020 \end{cases}$$

$-k + 2020 = P(k) = k$

$k = 1010$

Несложно заметить, что для больших n решений быть не может, т.к. ~~что~~ дабы убрать при $x = 2019$ воздействие старшего члена остальные коэффициенты должны быть сравнимы с 2000 и отрицательны, а значит $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 2019$.

Ответ: $k = 1010$.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ	Qю 33-51
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Василевская

ИМЯ Дарья

ОТЧЕСТВО Алексеевна

Дата рождения 17.03.04. **Класс:** 7

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Вас

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1

Каждую машину должны уметь водит 4 человека (т.к. если взять меньше, например 3, может получится так, что заболеют сразу три водителя одной машины и её нельзя будет использовать).

Т.о. 5·4 = 20 (обучений)

(т.е. т.к. 20:8 = 2 (ост.4)) 4 водителя должны уметь водить 2 машины и 4 водителя должны уметь водить 3 машины).

20·10.000 = 200000 руб.

Ответ: 200 000 руб.

+

№2

Решаем с конца.

С. П. А.

8 8 8

−4 −4 +8

4 4 16] ход Аркашки

−2 −10 +10 −8

2 14 8] ход Паши

+11 −7 −4

13 7 4

+

Ответ 13 у Саши, 7 у Паши, 4 у Аркаши.

№3

1÷9 — 9д. => 9 ст.

10÷99 — 90 д. => 180 ц. => 180 ст.

180+9 = 189 (т.) - на дома с 1-знач. и 2-знач. номерами

1917−189 = 1728 (т.) - ещё осталось на 3-х знач. номера

1728:3 = 576 (д.) - 3-х значных

9+90+576 = 675 (д.)

наименьший делитель 675 — это 3, т.е. все стандартные таблички можно разложить на 3 кучки высотой 675:3 = 225 табличек.

Ответ: 675 домов; да, можно: min на 3 стопки по 225 табличек.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ QЮ 33-51

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$X_2 = \frac{X_{2-1}}{2\cdot 2\cdot X_{2-1}+1}$;

$X_2 = \frac{X_1}{4\cdot X_1+1}$;

$X_2 = \frac{\frac{1}{2}}{4\cdot\frac{1}{2}+1}$;

$X_2 = \frac{1}{6}$

$X_3 = \frac{X_{3-1}}{3\cdot 2\cdot X_{3-1}+1}$;

$X_3 = \frac{X_2}{6\cdot X_2+1}$;

$X_3 = \frac{\frac{1}{6}}{6\cdot\frac{1}{6}+1}$;

$X_3 = \frac{1}{12}$

$X_4 = \frac{\frac{1}{12}}{4\cdot 2\cdot\frac{1}{12}+1}$;

$X_4 = \frac{1}{20}$;

$X_5 = \frac{1}{30}$

$X_6 = \frac{1}{42}$ и т.д.

$X_7 = \frac{1}{56}$

$X_8 = \frac{1}{72}$

$X_8 = \frac{1}{8\cdot 10}$ ...

Т.о. получается закономерность:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{2018\cdot 2019} =$

$= \frac{4}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2018\cdot 2019} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{2018\cdot 2019} =$

$= \frac{8+1}{4\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{2018\cdot 2019} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{2018\cdot 2019} =$

$= \frac{4}{5} + \ldots + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{2018\cdot 2019}$

& и каждый раз складывая две первые дроби мы фактически прибавляем 1 к знаменателю и 1 к числителю.
У нас 2018 дробе ⇒ мы делаем 2017 сложений ⇒ прибавляем 2017 к знаменателю и 2017 к числителю: $\frac{2018}{2019}$

Ответ: $\frac{2018}{2019}$.

(+)

Лист 2 из 3

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Разобьём все числа на пары: $\underbrace{1, \underbrace{2, 3 \ldots n^2-1}_{n^2+1}, n^2}_{n^2+1}$

Т.о. можно вывести алгоритм заполнения таблицы $n \times n$

Причём n — нечётное.

Пусть $n=3$, тогда:

числа по-возраст. | их пары | остав. числа по-возраст.

1	$n^2=9$	4
2	$n^2-1=8$	5
3	$n^2-2=7$	6

Т.к. $1+n^2=2+n^2-1=3+n^2-2$, а $6=5+1$; $5=4+1$, то правило соблюдено.

Пусть $n=7$ тогда:

1	49	8	42	15	35	22
2	48	9	41	16	34	23
3	47	10	40	17	33	24
4	46	11	39	18	32	25
5	45	12	38	19	31	26
6	44	13	37	20	30	27
7	43	14	36	21	29	28

числа по-возраст. | их пары | числа по-возраст. | их пары | числа по-возраст.

Пусть $n=5$, тогда:

1	25	6	20	11
2	24	7	19	12
3	23	8	18	13
4	22	9	17	14
5	21	10	16	15

Т.о. можно сделать вывод, что n м.б. любым нечётным числом.

Ответ: n - любое нечётное число.

а если n чётное?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

EG 35-36

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Власова

ИМЯ Екатерина

ОТЧЕСТВО Евгеньевна

Дата рождения 25.11.2001.

Класс: 10

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EG 35-36

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$997 = 7x + 9y$, x – кол-во знаков в 7 лимонов, y – кол-во знаков в 9 лимонов

$997 - 9y = 7x$

Р-м числа, делящиеся на 9 меньшие 997:
т.е числа вида $9y$.

990 927 864 801
981 918 855 и т.д.
972 909 846
963 900 837
954 891 828
945 882 819
936 873 810

Заметим, что через каждые 6 чисел ~~повторяется~~ находится число, при вычитании которого из 997 получается число вида $7x$.

Значит, кол-во этих чисел и есть кол-во вариантов представления суммы с помощью знаков.

Заметим, что между этими числами разница 63 и она постоянна.

Наименьшее подходящее число вида $9y$ – 45, ~~на~~ (меньше числа не подходят).

Тогда можно задать уравнение:

$990 - 63(z+1) = 45$, где ~~(z+1)~~ z кол-во чисел и, соответственно, вариантов

~~z+1 – потому что включаем 990~~

$990 - 63z - 63 = 45$

$990 - 63 - 45 = 63z$

$882 = 63z$

$z = 14$

$z + 1 = 15$

$990 - 63z = 45$

$z = 15$

но т.к. мы не включили 990, то всего способов 4 чисел 16

~~1) $997 = 9\cdot110 + 7\cdot1$~~
~~2) $997 = 9\cdot103 + 7\cdot2$~~
~~3) $997 = 9\cdot96 + 7\cdot3$~~
~~4) $997 = 9\cdot89 + 7\cdot4$~~
~~5) $997 = 9\cdot82 + 7\cdot5$~~

1) $997 = 9\cdot110 + 7\cdot1$
2) $997 = 9\cdot103 + 7\cdot10$
3) $997 = 9\cdot96 + 7\cdot19$
4) $997 = 9\cdot89 + 7\cdot28$
5) $997 = 9\cdot82 + 7\cdot37$
6) $997 = 9\cdot75 + 7\cdot46$
7) $997 = 9\cdot68 + 7\cdot55$
8) $997 = 9\cdot61 + 7\cdot64$
9) $997 = 9\cdot54 + 7\cdot73$
10) $997 = 9\cdot47 + 7\cdot82$
11) $997 = 9\cdot40 + 7\cdot91$
12) $997 = 9\cdot33 + 7\cdot100$
13) $997 = 9\cdot26 + 7\cdot109$
14) $997 = 9\cdot19 + 7\cdot118$
15) $997 = 9\cdot12 + 7\cdot127$
16) $997 = 9\cdot5 + 7\cdot136$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EG 35-36

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

~~N=1~~ Если x – целое, то ∃ решения для:

~~$0,1^2=1$~~

$1^1=1=N$ $N\neq 2$, т.к. если мы возьмем $1,\ldots$ и возведем в 1 степень, мы не получим 2, и если возьмем

$2^2=4=N$ $2,\ldots$ во второй степени, то тоже не получим

$3^3=27=N$ 2, а дальше – тем более не получим

$4^4=256=N$ Аналогично с $N=3$

$N=5 \to \sqrt[2]{5}$ $2<\sqrt{5}<3$ возводим в квадрат

$\sqrt{5}^2=5$

$2,\ldots^2=5$

$N=6 \to \sqrt[2]{6}$ аналогично

$N=7 \to \sqrt[2]{7}$ аналогично

$N=8 \to \sqrt[2]{8}$ аналогично

$N=9$ – не получится, $1,\ldots^1\neq 9$; $2,\ldots^2\neq 9$, т.к $\sqrt[2]{9}=3$

То есть до $N=27$ числа не подходят. $3,\ldots^3\neq 9$, т.к. $9<3,\ldots^3$

$3<\sqrt{10}<4$ – аналогично нельзя – $N=10$.

$3<\sqrt{11}<4$ – " – " – " – $N=11$

$3<\sqrt{12}<4$ – " – " – " – $N=12$

$3<\sqrt{13}<4$ – " – " – " – $N=13$

$3<\sqrt{14}<4$ – " – " – " – $N=14$

$3<\sqrt{15}<4$ – " – " – " – $N=15$ $3,\ldots^3 \geq 27$

$3<\sqrt{16}\leq 4$

. . . . .

$N=28$ $3^3<28<4^4$

Подойдут все числа этого интервала до $4^3=64$

Значит, найдется такое $x=3,\ldots^3$, что $28=3,\ldots^3$

$\underset{\pi}{3,\ldots}$ какая-то дес. дробь, при возведении в куб которой получится 28.

$N\neq 64 \longrightarrow$ $\sqrt[3]{64}=4$

$2,\ldots^2\neq 64$ $4^4\neq 64$

$3,\ldots^3\neq 64$

До $N=256$ числа не подойдут (по аналогии).

Аналогично, до $5^4=N$ числа снова подойдут

$4^4<257<5^4$

$4,\ldots^4$

при $N=625$ решений нет

$625\neq 2,\ldots^2$ $625<5^5$

$625\neq 3,\ldots^3$

$625\neq 4,\ldots^4$

И до конца множества решений тоже нет, т.к. $5^5>2018$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EG 35-36

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Посчитаем кол-во чисел:

$N = 1, 4, 5, 6, 7, 8, 27, 28, \ldots, 63, \ldots, 256, \ldots 624.$

Их всего: ~~1500~~.

Ответ: 1500.

Ошибка в подсчетах

∓

№1.

По методу Штурма?, максимум достигается, когда все числа равны.

$x_1 = x_2 = x_3.$

Т.к. у нас симметрическое выражение (при замене одной переменной на другую выражение не меняет смысл), запишем относительно одной переменной:

$$2 \cdot 3x_1 + 4x_1^3 = 3(x_1^2 + x_1^2 + x_1^2) + 1$$

∓

$$6x_1 + 4x_1^3 = 3 \cdot 3x_1^2 + 1$$

$$4x_1^3 - 9x_1^2 + 6x_1 - 1 = 0$$

Заметим, что $x_1 = 1$ яв-ся корнем. ($x_1 < 1$ по усл.)

$$\begin{array}{l|l} 4x_1^3 - 9x_1^2 + 6x_1 - 1 & x_1 - 1 \\ \underline{-\,4x_1^3 - 4x_1^2} & 4x_1^2 - 5x_1 + 1 \;(*) \\ \quad -5x_1^2 + 6x_1 & \\ \quad \underline{-\,5x_1^2 + 5x_1} & \\ \qquad x_1 - 1 & \\ \qquad \underline{-\,x_1 - 1} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$4x_1^2 - 5x_1 + 1 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_{1,2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$ — не подходит по усл.

значит, $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{4}$

$$X_{общ.} = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Заметим, что мы может получить любое $m \in (\frac{1}{3}; 1)$, т.к ~~части относятся не более чем в~~ отношение любые две любых двух кусков не более чем 3, т.е. $\in (1;3)$. Мы получим эти m, если поменяем местами куски (в дроби).

получена только оценка снизу

∓

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

АЛ 35-16

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Володин

ИМЯ Михаил

ОТЧЕСТВО Владимирович

Дата рождения 20.10.2004 **Класс:** 7

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Володин

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ АИ 35-16

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

Необходимо, чтобы специалистов по каждому виду транспорта было больше 3.

Если специалистов будет ≤ 3, то при их отсутствии, какой-то транспорт будет простаивать, что противоречит условию. Т.к. одновременно отсутствовать может только 3 человека, нам нужно минимум 4 специалиста по каждому виду транспорта.

По условию у нас 5 видов транспорта. Значит, нужно провести $5 \cdot 4 = 20$ подготовок.

Например, это может выглядеть так (римскими цифрами обозначен номер водителя, арабскими — вид транспорта, по которому произведено обучение):

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5				

Денег мы при этом потратим:

$20 \cdot 10\,000 = 200\,000$ (рублей)

+

Ответ: как организовать обучение показано в таблице, стоимость обучения составит 200 000 рублей.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ АИ 35-16

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 2

Пусть изначально у Саши было S биткоинов, у Паши было p биткоинов, у Аркаши было a биткоинов

	Саша	Паша	Аркаша
В начале	S б.	p б.	a б.

После первых двух операций стало:

	Саша	Паша	Аркаша
I	$S-(p+a)$ б.	$2p$ б.	$2a$ б.

$$S-(p+a) = S-p-a$$

После следующих двух операций стало:

	Саша	Паша	Аркаша
II	$2(S-p-a)$	$2p-(2a+(S-p-a))$	$4a$

$2(S-p-a) = 2S-2p-2a$ $\quad$ $2p-(2a+(S-p-a)) = 3p-a-S$

После последних двух операций стало:

	Саша	Паша	Аркаша
III	$2(2S-2p-2a)$	$2(3p-a-S$	$4a-((3p-a-S)+(2S-2p-2a))$

$$2(2S-2p-2a) = 4S-4p-4a$$

$$2(3p-a-S) = 6p-2a-2S$$

$$4a-((3p-a-S)+(2S-2p-2a)) = 7a-p-S$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (продолжение)

По условию задачи, в конце всех операций у каждого стало по 8 биткоинов.

Значит:

$4S-4p-4a=8$

$6p-2a-2S=8$

$7a-p-S=8$

$4S-4p-4a=8$

$S-p-a=2$

$6p-2a-2S=8$

$3p-a-S=4$

$(7a-p-S)-(3p-a-S)=8-4$

$8a-4p=4$

$2a-p=1$

$p=2a-1$

$(7a-p-S)-(S-p-a)=8-2$

$8a-2S=6$

$4a-S=3$

$S=4a-3$

Подставим эти значение p и S в уравнение $S-p-a=2$. Получим

$(4a-3)-(2a-1)-a=2$

$4a-3-2a+1-a=2$

$a-2=2$

$\boxed{a=4}$

$\boxed{S=4a-3=4\cdot4-3=13}$

$\boxed{p=2a-1=2\cdot4-1=7}$

+

Ответ: у Саши в начале было 13 биткоинов, у Паши было 7 биткоинов, у Аркаши было 4 биткоина.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

1) Для домов с номерами от 1 до 99 понадобится

$9+90\cdot 2=189$ табличек.

Значит, для домов с трёхзначными номерами останется

$1917-189=1728$ табличек.

$1728:3=576$ – табличек с трехзначными номерами (домов с трехзначными номерами)

Всего домов будет:

$576+99=\underline{675}$ домов

2) 675 <u>можно</u> разложить на несколько кучек (в каждой больше 1 таблички) одинаковой высоты, т. к. 675 – составное число.

$675=3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5$

Например, можно разложить 675 табличек на 27 кучек по 25 табличек в каждой.

3) $k=m\cdot h$, где

k – общее число табличек,

m – кол-во кучек,

h – высота 1 кучки.

У нас всего 675 табличек.

$m\cdot h=675$

$h\in N$, ~~$h<1$~~, $h>1$;

$m\in N$, $m>1$

$\Rightarrow$ $m_{min}=3$

$h_{max}=3\cdot3\cdot5\cdot5=225$

+

Ответ: на проспекте 675 домов, таблички можно разложить на несколько стопок одинаковой высоты, минимальное число стопок $=3$, максимальная высота 1 стопки $=225$ табличек

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ АИ 35-16

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

1) Если числа в таблице идут друг за другом.

$$\sum_{1\ строке} = 1+2+3+\ldots+n = \frac{n^2+n}{2}$$

$$\sum_{2\ строке} = (n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots+2n = \frac{3n^2+n}{2}$$

По условию задачи во 2 строке сумма на 1 больше, чем в 1. Составим уравнение.

$$\frac{n^2+n}{2}+1 = \frac{3n^2+n}{2}$$

$$n^2+n+2 = 3n^2+n$$

$$n^2+2 = 3n^2$$

$$2n^2 = 2$$

$$n^2 = 1$$

$$n = 1$$

Значит, никакой 2 строки не существует, а мы располагали в таблице число 1.

Решение не доведено до конца

∓

2) Если в таблице числа идут хаотично. Мы вряд ли сможем тогда найти n, зато сможем найти сумму в 1, а значит, и в последующих строках.

$$\sum_{всех} = 1+2+3+\ldots+n^2 = \frac{n^4+n^2}{2}$$

$$\sum_{1\ строки} = a$$

$$\sum_{2\ строки} = a+1$$

$$\sum_{3\ строки} = a+2$$

$$\ldots$$

$$\sum_{n\ строки} = a+n-1$$

Уравняем суммы во всех строках. Для этого вычтем из общей суммы

$$1+2+\ldots+(n-1) = \frac{n^2-n}{2}$$

$$\frac{n^4-n^2}{2} - \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^4+n}{2}$$

$$\frac{n^4+n}{2} : n = \frac{n^3+1}{2}$$ – сумма в 1 строке

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Екатеринбург

Место проведения

CV 80-70

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ ГАСИЛОВ

ИМЯ МАКАР

ОТЧЕСТВО АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 09.04.2001

Класс: 10

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ CV80-70

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

~~Пусть $N_1 = x_1 \to 1$ (очень близко к 1, отличается на бесконечно малую величину)~~

~~$N_2 = x_2 \to 1$ Тогда $N_{общ_1} = x_1+x_2+x_3 \to 3$~~

~~$N_3 = x_3 \to 1$~~

~~Тогда, подставим вместо x_1, x_2, x_3 единицу в ур-ие:~~

~~$2(x_1+x_2+x_3) + 4x_1x_2x_3 = 3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+1$~~

~~так как x_1, x_2, x_3 отличаются бесконечно мало от 1.~~

~~$2\cdot3 + 4\cdot1 = 3\cdot3+1$~~

~~Ответ:~~

~~$10 = 10 \Rightarrow N_{общ_{макс}} = N_{общ} = x_1+x_2+x_3 \to 3$~~

№1

$x_1 < 1$

$x_2 < 1$

$x_3 < 1$

$2(x_1+x_2+x_3)+4x_1x_2x_3 = 3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+1$

Пусть

$N_{макс}$ при $x_1 = x_2 = x_3 = x$

$2\cdot 3x + 4x^3 = 3\cdot 3x^2 + 1$

$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$

$(4x^2 - 5x + 1)(x-1) = 0$

$x \neq 1 \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{5\pm3}{8} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ \frac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$$\begin{array}{r|l} 4x^3-9x^2+6x-1 & x-1 \\ \hline 4x^3-4x^2 & 4x^2-5x+1 \\ -5x^2+6x & \\ -5x^2+5x & \\ x-1 & \end{array}$$

Отв.: $N_{макс} = 3x = \frac{3}{4}$ МВт

Док-во:

пусть x_1 ув. на Δx, а ост. x ост. неизм.

$6x + 2\Delta x + 4x^3 + 4x^2\Delta x - 6\Delta x x - 9x^2 - 1 = 0$

$4x^3 + x^2(4\Delta x - 9) + x(6 - 6\Delta x) - 1 + 2\Delta x = 0$

$4x^3 + x^2(4\Delta x - 9) + x(6 - 6\Delta x - 1 + 2\Delta x$ | $x-1$

$4x^3 - 4x^2$ | $4x^2 + (4\Delta x - 5)x$

$4\Delta x - 5x^2$

.... в конце получаем, что решений нет $\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3$ чтд.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

7 9 НОК(7;9)=63 $7\cdot 9=9\cdot 7=$ НОК

НОД(7;9)=1 => представив 997 как $9\cdot 110+7$, вычитая за одну операцию 7 ден. знаков достоинством в 9 миллионов и прибавляя к сумме 9 ден. знаков достоинством в 7 миллионов, мы переберем все возм. варианты (их кол-во k). ~~Будем вычитать, пока помним о том, что не может быть отриц. кол-ва~~ ден. знаков.

$k=k_1+1$, k — кол-во вариантов, k_1 — кол-во операций

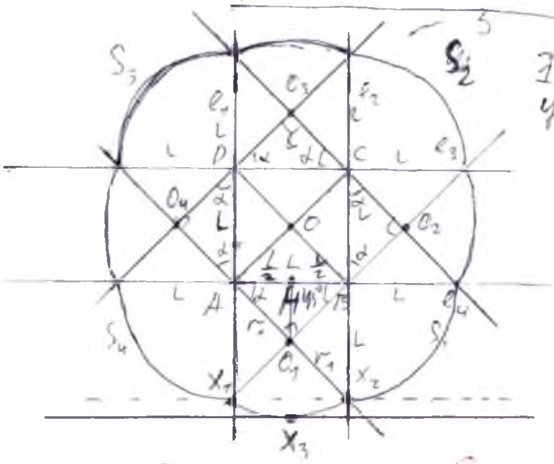
$\frac{110}{7}=15+\frac{5}{7}$ =>

=> $k_1=15$ =>

=> $k=15+1$

Ответ: 16 способов.

№3



ABCD — будка

$\alpha=45^\circ$

II Пусть точка $P\in S_1, S_2, S_3$ или S_4. Тогда смотрящий видит точки всегда

A и C, если $P\in S_1$ или S_3; D и B, если $P\in S_2$ или S_4 => Аналогично первому случаю:

$r_A'=r_C'$, $\angle AO_5C=90^\circ$ — центр. угол =>

=> B — центр окр.

$r_2=L$ => $ГМТ_2$ (для S_1): четверть окружности, ограниченная l_2 и l_4, с $r=L$ и центром в B.

Аналогично для S_1, S_3 и S_4.

Заметим, что h (расст. до будки) равно $L=PB$ для любого $P\in ГМТ_2$ =>

=> $h_{мин}=h_{наим_1}=L$

$h_{макс}=h_{наиб_1}=L\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2}>1\cdot L$

Ответ: $h_{мин}=L$

$h_{макс}=L\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

в) пусть точка P (точка из которой возможно увидеть будку) лежит между l_1 и l_2, а также лежит по другую сторону от O относительно l_4. Случай, когда P лежит между l_3 и l_4 аналогичен. Также аналогичен случай, когда P лежит по разные стороны от l_3.

г) Так как $\angle APB$ всегда равен 45°, то AB представима в виде хорды, стягивающей дугу 90° некоторой окружности, а $\angle APB$ — вписанный, след-но P — элемент этой окружности.

$r_A=r_B$

дуга $\overset{\frown}{AB}=90^\circ$ => центр. угол $\angle AO_1B=90^\circ$ => $\angle BAO_1=\angle ABO_1=45^\circ$

Построим эти углы для всех случаев (так как они аналогичны).

Построим ~~участок~~ части окружности, лежащей между l_1 и l_2 с $r=O_1B$.

Расстояние h от произв. точки постр. ГМТ точек P до будки равно высоте, опущенной на „стену" будки. Если провести через ГМТ прямые парал. AB, то чем ближе они будут к AB, тем меньше будет h. =>

=> нас интересуют касательные к ГМТ: $l_{x_1x_2}$ и l_0. => $X_1A=X_2B=h_{наим.}$

Опустим высоту O_1M. ГМТ симм. отн l_{HO_1} =>

=> $h_{наиб.}=X_3H=r_1+OH$

AOH — равнобедр. => $OH=HA=\frac{L}{2}$ => $X_3M=\frac{L}{2}+\frac{L}{\sqrt{2}}=L\frac{1+\sqrt{2}}{2}=h_{наиб.}$

$r_1=OB=\frac{L}{\sqrt{2}}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Рассмотрим все возможные значения x

$N \in \mathbb{N}$ - натур. $N \in \{1, 2, \dots, 2018\}$

$x > 0$ k_i - количество новых натур. чисел в случае i.

$x^{[x]} = N$

1) $x \in (0; 1) \Rightarrow x^{[x]} = x^0 = 1 \Rightarrow k_1 = 1$ $(N=1)$

2) $x \in [1; 2) \Rightarrow x^{[x]} = x^1 = x \Rightarrow N = 1$ (уже учтено) $\Rightarrow k_2 = 0$

3) $x \in [2; 3) \Rightarrow x^{[x]} = x^2 \Rightarrow x^2 \in [4; 9) \Rightarrow N = \{4 5 6 7 8\}$ $k_3 = 9 - 4 = 5$

4) $x \in [3; 4) \Rightarrow x^{[x]} = x^3 \Rightarrow x^3 \in [27; 64) \Rightarrow k_4 = 64 - 27 = 37$

5) $x \in [4; 5) \Rightarrow x^{[x]} = x^4 \Rightarrow x^4 \in [256; 625) \Rightarrow k_5 = 625 - 256 = 369$

$$\begin{array}{r} 625 \\ -256 \\ \hline 369 \end{array}$$

6) $x \in [5; +\infty) \Rightarrow x^{[x]} \in [5^5; +\infty) \Rightarrow x^{[x]} \in [3125; +\infty) \Rightarrow k_6 = 0$

(+)

$k_{общ} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 1 + 0 + 5 + 37 + 369 + 0 = 43 + 369 = 412$ (чисел)

Ответ: 412 чисел (различных).

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

КГЭУ

Место проведения

ТИ92-31

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Гимранов

ИМЯ Артур

ОТЧЕСТВО Маратович

Дата рождения 20.03.2002

Класс: 9

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 7 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ Т492-31

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 3.

+

Посмотрим на числа x и $2x$, тогда

$f(2x-x)=f(x)\cdot f(2x) \Leftrightarrow f(x)=f(x)\cdot f(2x) \Rightarrow$

$f(2x)=1$, где x может быть чем угодно $\Rightarrow$

? это функция $f(x)=1$, ~~...~~ т.к для любого x функции $f(x)=1$, мы можем подобрать такое x', что $2x'=x$

Задача 5.

Посмотрим на остатки ~~чисел~~ чисел при делении на 7 и их квадраты, заметим,

x	x^2
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

что в ~~каждой семерке подр~~ такой семерке ост. один ~~одно~~ кв. число дает 0 при делении на 7, два кв. числа дают ост. 2, ~~чсл~~ еще два кв. числа ост. 1, и другие два кв. числа ост. 4, т.к таких семерок у нас $70:7=10$, то всего 10 кв. чисел $\equiv 0 \pmod 7$, 20 кв. чисел $\equiv 1 \pmod 7$, еще 20 кв. чисел $\equiv 2 \pmod 7$, и еще 20 кв. чисел $\equiv 4 \pmod 7$

кв. - квадрат, тогда заметим, что ~~кому~~ ~~кому~~ получить 0 по модулю 7, мы можем только двумя способами

$4+2+1\equiv 0 \pmod 7$, $0+0+0\equiv 0 \pmod 7$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ТЦ 92-31

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

тогда заметим, что выбрать тройку 4+2+1, мы можем 20·20·20 способами, т.к 20 чисел $\equiv 4 \pmod 7$, 20 чисел $\equiv 1 \pmod 7$, 20 чисел $\equiv 2 \pmod 7$, а тройку $0+0+0$, мы можем выбрать $10\cdot 9\cdot 8$ способами т.к всего 10 чисел $\equiv 0 \pmod 7$, мы выбираем первое, потом из 9 чисел второе, и из 8 чисел третье, тогда всего способов будет ~~$20\cdot 20\cdot 20 + 10\cdot 9\cdot 8 = 8000+720=8720$, если нам не важен порядок, тогда тройки $x=1; y=4; z=2$ и $x=2; y=1; z=4$ считаются одинаковыми, если разными, а если они считаются одинаковыми, то всего способов $\frac{8720}{6}$, т.к каждый набор из трех чисел мы посчитали 6 раз $\frac{8720}{6} = \frac{4360}{3} = 14$~~ ~~$20\cdot 20\cdot 20 + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}$~~, т.к

$20\cdot 20\cdot 20 + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}$ — надо делить на 6, т.к каждый набор чисел мы посчитали 6 раз ~~x, y, z~~ $= 20\cdot 20\cdot 10 + 10\cdot 3\cdot 4 = 8120$ способов

часть троек утеряна ±

① $4x^4 + 4px^3 = (p-4)x^2 - 4px + p \Leftrightarrow$

$4x^4 + 4px^3 - px^2 + 4x^2 + 4px - p = 0 \Leftrightarrow$

$4x^3(x+p) + 4x(x+p) - p(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x+p)(4x^3+4x) - p(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ТК92-31

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$(x+p)(4x^3+4x)-p(x^2+1)=0 \Leftrightarrow 4x(x+p)(x^2+1)-p(x^2+1)=0$

$\Rightarrow$ ~~$4x^2+4xp-p)$~~ $(4x^2+4xp)(x^2+1)-p(x^2+1)=0 \Leftrightarrow$

$(4x^2+4xp-p)(x^2+1)=0$; допустим это 0, то

тогда $x^2=-1$, чего не может быть,

тогда $4x^2+4xp-p=0$, посмотрим

$x_{1,2}=\frac{-4p\pm\sqrt{D}}{8}$, если $\sqrt{D}$ рациональный,

то и корни ~~это~~ этого многочлена

тоже $D=16p^2+16p$, заметим, что ~~если~~

это число целое, и ~~со~~ если оно не

точный квадрат, то корень из

него иррациональный, тогда

$16p^2+16p=z^2$, $(4p)^2+16p=z^2$ ~~это тоже это квадрат квадрат~~

~~посмотрим на следующий квадрат если~~

~~$p>0$ $(4p+1)^2=16p^2+$~~

$16p^2+16p=z^2 \Rightarrow 16(p^2+p)=z^2$, пусть $\frac{z^2}{16}=z_1^2$,

новое число будет квадратом т.к 16

тоже квадрат $p^2+p=z_1^2$, пусть $p>0$

посмотрим на ~~квадрат~~ след квадрат числа

$(p+1)^2=p^2+2p+1>p^2+p \Rightarrow$ $p^2<z_1^2<(p+1)^2$, чего

не может быть т.к p^2 и $(p+1)^2$ два ~~подр~~

подряд идущих квадрата

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если $p<0$ ~~отрицательное~~, то мы могли положить в ~~предыдущ~~ предыдущий квадрат заменив p, на $-p$

$p^2-p>z_1^2$, посмотрим $(p-1)^2=p^2-2p+1$

~~$p^2-2p+1<p^2-p<p^2$~~ p^2-p очевидно меньше p^2,

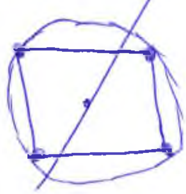
и $p^2-p \geq p^2-2p+1$ они равны при $p=-1$,

а при $p<-1$, $p^2-p>p^2-2p+1 \Rightarrow$

$p^2-2p+1 \leq p^2-p<p^2 \Rightarrow (p-1)^2 \leq z_1^2<p^2 \Rightarrow$ это может быть при $p=-1$, а при $p<-1$, $(p-1)^2<z_1^2<p^2$ чего не может быть т.к $(p-1)^2$ и p^2 р-во ~~подр~~ подряд идущих квадрата, тогда $p^2+p=z^2$ только при $p=0$, и $p=-1$, тогда $p^2+p=0$ и ~~...~~, заметим, что $4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p=?$ $(4x^2+4xp-p)(x^2+1)=0$, и корнем этого уравнения всегда независимо от p будет $x^2=-1$, $x=\sqrt{-1}$, что иррациональное число

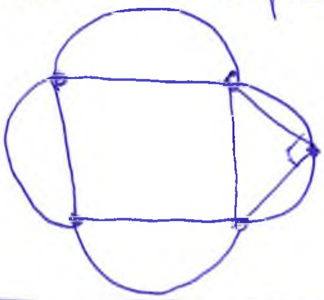
~~Задача 2~~

~~Отв.~~ Г.М.Т этих точек будет окружность с радиусом в центре квадрата.

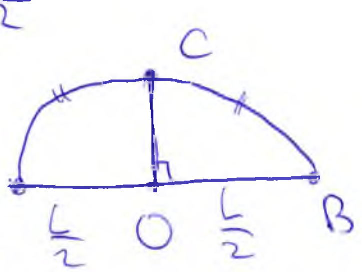


Задача 2.

Г.М.Т этих точек будут 4 ~~полуокруж~~ полуокружности ~~с центро~~ построенные на сторонах как на диаметре



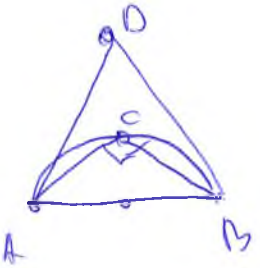
т.к с любой точки на этих полуокружностях видно сторону под углом в 90° т.к эти углы ~~опи~~ опираются на диаметр, тогда минимально расстояние будет на углах квадрата и $=0$, а самая удаленная $\frac{L}{2}$ логичей т.к $OC = OB = AO = \frac{AB}{2} = \frac{L}{2}$



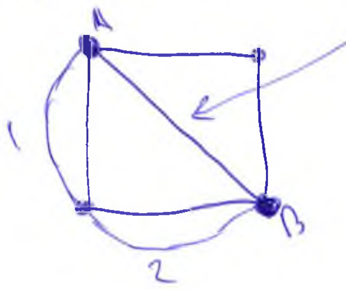
где C середина дуги AB,

Т.к ~~Окр~~ Полуокружность симметрична относительно OC, и ~~веко~~ удаленность точек увеличивается до C, а потом уменьшается,

Другие точки не подходят т.к мы видим две вершины под углом 90°, если это две подряд идущие вершины то это сторона, допустим есть такая точка вне окружности, тогда $\angle ADB = \angle ACB = 90° \Rightarrow$
$\angle DAB + \angle DBA = \angle CAB + \angle CBA =$
$\angle DAC + \angle CAB + \angle DBC + \angle CBA \Rightarrow$
$\angle DAC + \angle DBC = 0 \Rightarrow$
$\angle DAC = \angle DBC = 0° \Rightarrow$
что точка D лежит на окружности



Если эти две точки не подряд идущие, то это ~~то~~ диагональ, тогда построим на



ней как на диаметре ~~от~~ окружность, тогда из этих точек ее видно под углом 90°, ~~на~~ тогда ~~разоб~~ разобьем окружность на две дуги относительно ~~т.ч~~ третьей вершины, на дуги 1 и 2, тогда с 1 дуги не видно вершину B, а со 2 дуги не видно вершину A ⇒ что точек точек больше нет

Задача 6.

Все числа < 7, числа ≥ 7 не ~~подо~~ подходят т.к $7\cdot7\cdot7\cdot7 = 2401 > 2018$, тогда почему подходят все числа < 7. Все числа ≤ 6 очевидно подходят т.к $6\cdot6\cdot6\cdot6 =$ ~~1296 < 2018~~ $1296 < 2018$, докажем, что подходят числа ~~xx~~ $6 < x < 7$, целая часть этого числа $= 6$ ~~, тогда заметим, что $[x] = x - \{x\}$, где $\{x\}$ - дробная часть числа x, построим неравную скобку $[x6] < 7\cdot6 - 5$, т.к $x < 7\cdot6$, а $\{x\} \leq 5$ $[x6]$, заметим, что $[x6] =$~~

8 6 ~~$x6 = [x]6 + \{x\}6$, тогда $x6 = [x]6 + [\{x\}6] \Leftrightarrow x6 = [x]6$~~

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ТЦ 92-31

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Раскроем Предположим, это как $6\cdot7\cdot7\cdot7=6\cdot343=2058$, но заметим, что $[6x]\le 6\cdot7-1$~~

Заметим, что $[6x]\le 6\cdot7-1$ т.к

~~$[6x]<6\cdot7$, при $x<7$, тогда~~

~~$[7(6\cdot7-1)]<7\cdot6\cdot7-7$, и~~

~~$7(7\cdot6\cdot7-7)<$~~

Раскроем $x[x[x[6x]]]$, при $x<7$

$[6x]<6\cdot7 \Leftrightarrow [6x]\le 6\cdot7-1$

$[x(6\cdot7-1)]<7\cdot6\cdot7-7$, и

$x(7\cdot6\cdot7-7)<7\cdot7\cdot6\cdot7-49 \Rightarrow$

$x[x[x6]]<7\cdot7\cdot7\cdot6-49$, при $x<7$

$7\cdot7\cdot7\cdot6=2058 \Rightarrow x[x[x6]]<2058-49 \Rightarrow$

$x[x[x6]]<2009<2018 \Rightarrow$ что $x<7$ подходит

+

ответ: ?

Лист 7 из 7

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Место проведения

Й044-57

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ ГОЛОВАЦКИЙ

ИМЯ АНДРЕЙ

ОТЧЕСТВО Константинович

Дата рождения 17.03.2001 **Класс:** 10

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Голов

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть x - к-во денежных знаков в 7 лимонов, y - в 9 лимонов. Тогда: $x \geq 0, y \geq 0, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$

$7x+9y=997$

т.к $997 \equiv 7 \pmod 9$

$9y \equiv 0 \pmod 9$ то $7x \equiv 7 \pmod 9 \Rightarrow$

$x \equiv 1 \pmod 9$ т.е $x = 9k+1$ $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$

Понятно, что если пара $(x_1; y_1)$ подходит, и мы знаем значение x_1 то значение y_1 определяется однозначно, отметим, что $x \leq 142$ (Иначе $7 \cdot x \geq 7 \cdot 143 = 1001 > 997$, а $y \geq 0$ т.е x ~~не удовлет~~ сумму ~~при~~ 997 представить нельзя)

т.к ~~$7x+9y=997$~~ $x = 9k+1 \Rightarrow 7x+9y=997 \Leftrightarrow$

$7 \cdot 9k + 7 + 9y = 997;$

$9(7k+y) = 990$

$7k+y=110$, $k \geq 0, y \geq 0; k \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$, а значит k может принимать 16 значений $\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15\}$ (если $k > 15 \Rightarrow 7k \geq 7 \cdot 16 = 112 > 110$) и каждому k ~~взаимо~~однозначно соответствует x $(x = k+1)$ и y $(y = 110-7k$ $(110-7k \geq 0))$, а значит взаимооднозначно соответствует решение $(x;y)$ т.к $(k+1; 110-7k)$ является решением по доказанному. т.е всего способов представления суммы 997 – 16.

Ответ: 16

№4

$x^{[x]} = N$; $N \in \{1, 2 \ldots 2018\}$;

Пусть $[x] = k$; $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, т.к $[x] \leq x < [x]+1$ то $k \leq x < k+1$, Рассмотрим 2 случая:

1. $k=0$
$x^{[x]} = x^k = x^0 = 1$ (при $x \neq 0$)
т.е для $N=1$ решение существует.

2. $k>0 \Rightarrow k \geq 1$
тогда $k \leq x < k+1 \Rightarrow k^k \leq x^k < (k+1)^k \Leftrightarrow$
$k^k \leq N < (k+1)^k$, причем N принимает все значения из промежутка $[k^k; (k+1)^k)$; Нас интересуют только целые значения

$k=1$ $1 \leq N < 2$ – 1 значение – $N=1$ уже считали в случае 1
$k=2$ $4 \leq N < 9$ – 5 значений
$k=3$ $27 \leq N < 64$ – 37 значений
$k=4$ $256 \leq N < 625$ – 369 значений
$k=5$ $3125 \leq N$ т.е нас не интересует т.к $N \leq 2018$
Таким образом N принимает $1+5+37+369=412$ различных значений.
Ответ: 412

№5

Ответ: $\sqrt[20]{3}$

Док-во: Обозначим $m_0 = \sqrt[20]{3}$, x_i – длинна i-го куска $1 \leq i \leq 21$, $i \in \mathbb{Z}$
1. Докажем, что $\neg \exists \left(\frac{x_i}{x_j} < m_0 \wedge x_i > x_j\right)$, где $i \neq j$ $1 \leq i, j \leq 21$ при определенном разрезании. Рассмотрим разрезание на отрезки с длинами.
$k; m_0 \cdot k; m_0^2 \cdot k \ldots m_0^{20} \cdot k$;
причем $k + m_0 k + \ldots m_0^{20} k = k(1 + m_0 + \ldots m_0^{20}) = 21$
(Понятно, что решение существует, т.е разрезание возможно)
тогда отношение любых двух отрезков $\leq m_0^{20} = 3$, и нет отрезков, с отношением $< m_0$ т.е мы доказали нижнюю оценку для m.
ЧТД.

2. Докажем, что всегда найдутся два отрезка, с отношением $\leq m_0$; Пусть это не так, тогда $x_1; x_2 \ldots x_{21}$ – длины отрезков по неубыванию, тогда
$x_2 > x_1 \cdot m_0$ по предположению
$x_3 > x_2 \cdot m_0 > x_1 m_0^2$ и т.д т.е

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЙО44-57

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x_{21} > x_{20}\cdot m_0 > \ldots > x_1\cdot m_0^{20}$

по условию для $\forall\ x_i > x_j$ верно $\frac{x_i}{x_j} \le 3$

тогда $x_{21} > x_1 \Rightarrow \frac{x_{21}}{x_1} \le 3$, но

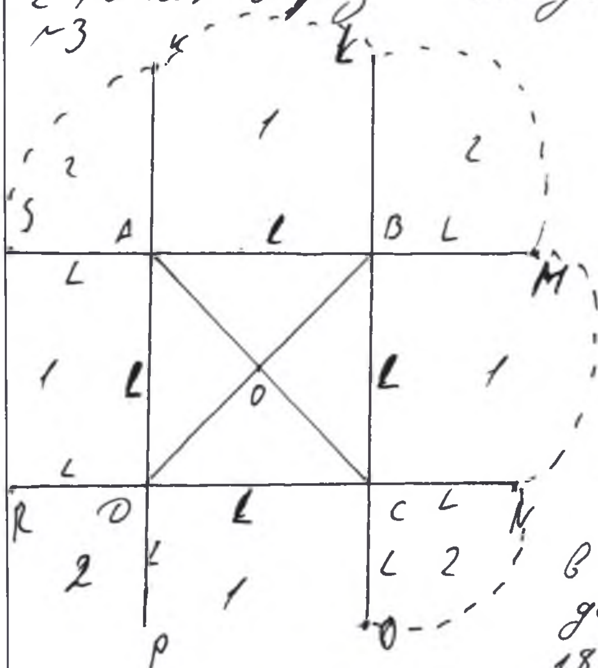
$\frac{x_{21}}{x_1} > \frac{x_1\cdot m_0^{20}}{x_1} = m_0^{20}$ и $\frac{x_{21}}{x_1} \le 3$ т.е.

$m_0^{20} < 3$, но $m_0^{20} = 3$ – противоречие, значит 2 таких отрезка всегда найдутся ЧТД.

рассмотрено отношение большего к меньшему

(+)

№3



ABCD – будка (+)

$KA = SA = AB = LB = BM = BC = CN = CD = CO = DP = RD = DA = L$

Наблюдатель видит либо 3 угла будки, либо 2.

1. видит 2 угла ⇒ находится в части пл-ти, ограниченной A и DC и по разные полупл-ти с будкой, относительно BC, либо в части пл-ти полученной из данной поворотом на 90° или 180° относительно O – центра будки. (На рисунке – 1), а значит видит AC под 45°, а значит находится на ◡MN, не содержащей B окружности, описанной около BMNC (т.к BMCN – квадрат, то угол опир. на BC = 45°). Аналогично для других указанных частей пл-ти.

2. Видит 3 угла будки ⇒ находится в части пл-ти отсеченной одним из углов ∠SAK, ∠LBM, ∠NCO, ∠RDP (на рисунке – 2)

Пусть он видит углы D; A; B т.е. видит DB под углом 45°, а значит находится на ◡SK не содержащей точки D, окружности, описанной около SKBD (т.к SKBD – квадрат, то угол, опирающийся на BD = 45°)

Аналогично для других возможных положений наблюдателя

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

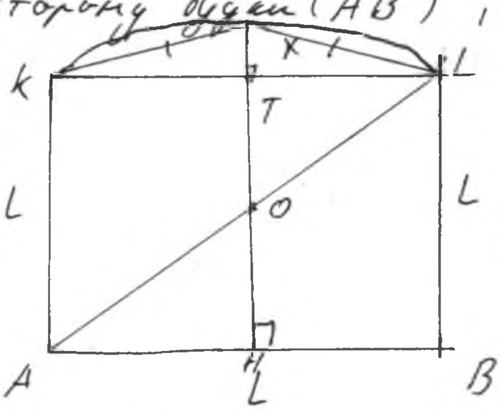
Вариант: 17 101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 404-57

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если наблюдатель находится в части пл-ти 2, то его расстояние до будки $-L$ т.к $R_{\triangle KBD}=L$.

Если наблюдатель (X) находится в части пл-ти 1 то его расстояние до будки = длинна перпендикуляра XH на сторону будки (AB), понятно, что $HX \geq LB = L$



и XH максимальна, когда X - середина $\smile KL \Rightarrow$

$KX = XL$

$OA = R_{AKLB} = \frac{\sqrt{2}}{2}L$

$XH = XO + OH = R_{AKLB} + \frac{LB}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}L + \frac{L}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}L$, а значит

$HX \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, а значит минимальное расст. до будки $-L$, максимальное - $\frac{\sqrt{2}+1}{2}L$

Ответ: минимальное - L, максимальное $\frac{\sqrt{2}+1}{2}L$

№1

$2(x_1+x_2+x_3)+4x_1x_2x_3 = 3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+1$

$2(x_1+x_2+x_3)-3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)+4x_1x_2x_3 = 1$

т.к $0 \leq x_1 < 1$; $0 < x_2 < 1$; $0 \leq x_3 < 1$ + 0

$\cancel{2(x_2+1}$ $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 \geq 0$; $x_1x_2x_3 \geq 0 \Rightarrow$

$2(x_1+x_2+x_3) \leq 1$ неверно

$x_1+x_2+x_3 \leq \frac{1}{2}$, докажем, что $x_1+x_2+x_3 = \frac{1}{2}$ достигается.

$x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$

$2(\frac{1}{2}+0+0)+4\cdot\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 0 = 3(\frac{1}{2}\cdot 0+0\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0)+1$

$1=1$ - верно. ЧТД.

Ответ: $\frac{1}{2}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ССТ	ДК 67-65	← **Не заполнять** **Заполняется ответственным работником**
Место проведения	шифр	

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ГРЕНЦ

ИМЯ АРТЕМ

ОТЧЕСТВО АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 05.01.2000 **Класс:** 11

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 2K 67-65

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. $P(1)=2019$

$P(2019)=1$

$P(k)=k$

$k-?$

$P(1)=2020-1=2019$

$P(2019)=2020-2019=1$

$P(k)=2020-k=k$

$\downarrow$

$2k=2020$

$k=1010$

+

Ответ: $k=1010$

1. $f(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{x_1^2+x_2x_3}+\sqrt{x_2^2+x_1x_3}+\sqrt{x_3^2+x_1x_2}$ - max, когда

$\begin{cases} x_1^2+x_2x_3 - max \\ x_2^2+x_1x_3 - max \\ x_3^2+x_1x_2 - max \end{cases}$, тогда

$x_1^2+x_2x_3+x_2^2+x_1x_3+x_3^2+x_1x_2$ - max

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2=$

$=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2x_3-x_1x_3-x_1x_2$ - max,

тогда, когда $x_1+x_2+x_3=2$, а $-x_2x_3-x_1x_3-x_1x_2=0$,

а min, когда $(x_1+x_2+x_3)^2-x_2x_3-x_1x_3-x_1\cancel{x_2}$ - min, при

$x_1+x_2+x_3=0$ и $-x_2x_3-x_1x_3-x_1x_2=0$

$f_{max}(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{4}+\sqrt{0}+\sqrt{0}=2$?!

$f_{min}(x_1,x_2,x_3)=0+0+0=0$

задача не решена

−

Ответ: $f_{max}(x_1,x_2,x_3)=2$, $f_{min}(x_1,x_2,x_3)=0$

2. $V=\cancel{2}\pi R^2 L$ $\quad V=\pi r^2 l$

$S=2\pi RL$ $\quad S=2\pi r l$

$\begin{cases} \pi R^2 L=\pi r^2 l \\ 2\pi RL=2\pi r l \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \frac{R^2}{r^2}=\frac{l}{L} \\ \frac{R}{r}=\frac{l}{L} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \left(\frac{R}{r}\right)^2=\frac{R}{r} \\ \frac{l}{L}=\frac{R}{r} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{R}{r}=1 \\ \frac{l}{L}=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} R=r \\ l=L \end{cases}$

Ответ: радиусы должны быть равны $R=r$, и высоты должны быть равны $l=L$.

±

Лист 1 из 3

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ LK 67 - 65

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. $x^y + y^z = xyz$

$\begin{cases} x \in N \\ y \in N \\ z \in N \end{cases}$

$y = 0$: $1 + 0 = 0$ $\varnothing$

$y = 1$: $x + 1 = xz$, $\frac{1}{z-1} = x$ $\downarrow$ N $\begin{cases} z = 2 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

$y = 2$: $x^2 + 2^z = 2xz$

$x = 1$: $\underset{\text{нечет}}{1 + 2^z} = \underset{\text{чет}}{2z}$ $\varnothing$

$x = 2$: $4 + 2^z = 4z$ $\left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z = 3 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \\ z = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} z = 3 \\ y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \end{array}\right.$

⊤̄ (−/+)

видно, что решения есть при условии

Надо было рассмотреть еще $x \neq y \neq z$

$x = z$: $x^y + y^x = x^2 y$

$x \neq 1$ $\varnothing$

$x \neq 2$ – последний вариант

$x = 3$ $\varnothing$

$x = 4$

$\begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \\ z = 4 \end{cases}$

дальше $\varnothing$

$x = y$: $x^x + x^z = x^2 z$

$x = 1$ $\begin{cases} y = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

~~$x = 2$ – послед. вар~~

~~$x = 3$ $\varnothing$~~

~~$\begin{cases} x = 4 \\ z = 2 \\ y = 4 \end{cases}$~~

$\begin{cases} z = 2 \\ x = y \in N \end{cases}$

$z = y$: $x^{\cancel{z}} + \cancel{y^z} = \cancel{y^2 z}$

$x = 1$ $\varnothing$

$x = 2$ – послед. вар.

$x = 3$ $\varnothing$

$x \neq 4$ $\varnothing$

$x = 5$ $\varnothing$

дальше $\varnothing$

$x = z = y$: $x^x + x^x = x^3$ $\downarrow$ $\begin{cases} y = 2 \\ z = 2 \\ x = 2 \end{cases}$

Частный случай 2 варианта

Ответ: $x = 4, z = 4, y = 2$; $z = 2$, $x = y \in N$, ~~$y \in N, x \in N$~~;

Лист 2 из 3

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.

4A Да, как минимум когда ребра совпадут

т. A пересечение ребра. одно из ребер $c = \sqrt{b^2+a^2}$

$h^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 = 2a^2$

$h^2 = \frac{3}{4}a^2;\ h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ Ответ: да, $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

4B. Нет, иначе не получится пирамиды.

Ответ: нет.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МБОУ „СОШ № 11"

Место проведения

ОГ 78 - 15

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ ГРИГОРЬЕВ Х

ИМЯ РОМАН

ОТЧЕСТВО АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 13.05.2004 **Класс:** 7 А

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:**

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ОГ 78-15

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

Чтобы при отсутствии 3 водителей на всех машинах были водители нужно чтобы на каждой машине могло ездить по 4 человека, тогда мин. затраты в любом случае будут равны:

$(4 \cdot 5) \cdot 10.000 = 200.000$ (руб.) — минимальные затраты на обучение.

А обучить можно так: 3 на всех машинах, а ост. по одной на каждого.

не доказано, что лучшего вар-та нет.

Ответ: 200.000 рублей.

±

№ 2

После перевода Аркаши у них у всех стало по 8 биткоинов, тогда перед этим у Паши и Саши было по 4 биткоина, тогда у Аркаши было 16. Перед переводом Паши, у Саши и Аркаши было в 2 раза меньше биткоинов, у Саши - 2, у Аркаши - 8, тогда у Паши было 14 биткоинов. До перевода Саши (вначале) у Паши и Аркаши было в 2 раза меньше биткоинов, у Паши - 7, у Аркаши - 4, а тогда у Саши было 13 биткоинов.

+

Ответ: у Саши — 13 бит., у Паши — 7 бит., у Аркаши 4 бит.

№ 3

Для первых 9 домов нужно 9 табличек, для домов с двузначными числами нужно еще 180 табличек, тогда для трехзначных нужно: $2.917 - (180+9) = 1728$ (таб.) — для трехзн. ном. для домов с трехзн. номером приходилось по 3 таблички, тогда макс. номеров было: $1728 : 3 = 576$ (н.) — трехзначных.

Всего домов: $9 + 90 + 576 = 756$ (д.) — на проспекте.

Если каждый номер вывешивать на отдельную табличку и складывать в стопки, то минимальное число стопок = 2, а максимальная высота 378.

Ответ: 756 домов, можно, стопок 2, высота 378.

(−)

Лист 01 из 02

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ОГ 78-15

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4

Таблицу 1×1 нет смысла строить, т.к. там только одна строчка.

Чтобы каждая следующая строчка была на единицу больше, нужно чтобы сумма цифр в первой строке было натур. число.

Чтобы определить его нужно из ~~всех~~ суммы цифр всех чисел (y) отнять сумму разниц всех строк от верхней, и поделить на само число:

$\frac{y-(1+2+...+n-1)}{n}$, путем проб и ошибок можно понять, что сумма цифр всех чисел делится на n, тогда $y=xn$,

$\frac{xn-(1+2+...+n-1)}{n}$, только в том случае если $1+2+...+n-1 \vdots n$, а это произойдет, только если n — любое нечётное число: $1+2+...+n-1=(1+n-1)\cdot n-1$, а если n-чет., то $n-1$ — нечет., а значит сумма $\vdots$ на n не будет. $n\cdot n-1 \vdots n$, а значит вся разница $\vdots$ на n.

Ответ: $n=\{2x+1\}$ или бесконечность.

№ 5

По формуле $x_n=\frac{x_{n-1}}{2nx_{n-1}+1}$, $x_2=\frac{x_1}{2\cdot 2x_1+1}=\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot 2\frac{1}{2}+1}=\frac{\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{6}=\frac{1}{2\cdot 3}$;

$x_3=\frac{\frac{1}{2\cdot 3}}{2}=\frac{1}{3\cdot 4}$; $x_4=\frac{\frac{1}{3\cdot 4}}{\frac{5}{3}}=\frac{1}{4\cdot 5}$, и так далее, тогда по закон.

$x_{2018}=\frac{1}{2018\cdot 2019}$;

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2018\cdot 2019}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2018}-\frac{1}{2019}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2019}=\frac{2018}{2019}$

Ответ: $\frac{2018}{2019}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ
Место проведения

EG 98-78
шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Громова

ИМЯ Анастасия

ОТЧЕСТВО Александровна

Дата рождения 25.08.2002 **Класс:** 10

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Гром

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EG 98-78

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2.

1) Предположим, что в одном из искомых представлений нет цифры 7, тогда число 997 будет суммой какого-то числа девяток и будет делиться на 9, но оно не делится на 9 (т.к. сумма цифр равна $9+9+7=25 \not\vdots 9$) — противоречие, значит, в каждом из искомых представлений есть хотя бы одна цифра 7 (к цифре достаточно 7) Каждое представление будет выглядеть как $997 = 7 + m$ (m - число, которое можно представить семерками и девятками) $m = 997 - 7 = 990$

2) Найдём количество способов представить число $m = 990$ как сумму только девяток и семерок, для этого решим в целых числах уравнение

+

$$9k + 7n = 990$$

(где** k - количество девяток, причем их не было $\frac{990}{9} = 110$; n - количество семерок, их не было $\frac{990}{7} = 141\frac{1}{3}$, т.к. $n \in N$, то их не было 141)

$990 \vdots 9$, т.е. $9k + 7n \vdots 9$

$\Downarrow$

$7n \vdots 9$

$\Downarrow$

$n \vdots 9$, т.е. $n = 9p$, где $p \in N$

$9k + 7 \cdot 9p = 990$

$k + 7p = 110$

$k + 7p = 103 + 7$

$7(1-p) = k - 103$

$\Downarrow$

$\begin{cases} k - 103 = 7t \quad (t \in Z) \\ 1 - p = t \end{cases}$

$\begin{cases} k = 7t + 103 \\ p = 1 - t \end{cases}$

$\begin{cases} k = 7t + 103, \ t \in Z \\ n = 9 - 9t, \ t \in Z. \end{cases}$

3) Из условия (**) и того, что числа n и k - натуральные (или 0), следует:

$0 \le n \le 141$

? $\begin{cases} 9 - 9t \le 141 \\ 9 - 9t \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 9t \ge -132 \\ t \le 1 \end{cases}$

$-14\frac{6}{9} \le t \le 1$

$-14 \le t \le 1$

$0 \le k \le 110$

$0 \le 7t + 103 \le 110$

$-103 \le 7t \le 7$

$-14 \le t \le 1$

значит, $-14 \le t \le 1$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EG 98-78

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Заметим, что все искомые представления будут выглядеть как. $997 = 7 + 9k + 7n$

$997 = 7(n+1) + 9k$

$997 = 7(9 - 9t + 1) + 9(7t + 103)$

$997 = 7(10 - 9t) + 9(7t + 103)$, где $t \in \mathbb{Z}$

$-14 \le t \le 1$

Всего таких представлений $14 + 1 + 1 = 16$

(Чтобы получить, ~~сколько надо взять~~ 997 нужно взять $(10-9t)$ семерок и $(7t+103)$ девяток, где t - целое число от -14 до 1 (т.к. для $n = 1$ - 1 семерка и 110 девяток, $n = 0$ 10 семерок и 103 девятки, $n = -1$ 19 семерок и 96 девяток и так далее)

Ответ: 16, явный вид каждого из способов обведён.

Задача 3.

~~Будем считать, что высота наблюдателя любая. Рассмотрим две ситуации: I наблюдатель не видит будки и II наблюдатель видит будку.~~

I

~~(голова наблюдателя и находится между параллель)~~

Будем считать, что наблюдатель не видит будки, (если он видит, то т.к. он смотрит параллельно земле, он не увидит будку.

Рассмотрим часть равнины, расположенную по одну сторону от прямой, содержащей прямую пересечения будки и плоскости поперечного сечения (см. рис)

Лист 02 из 06

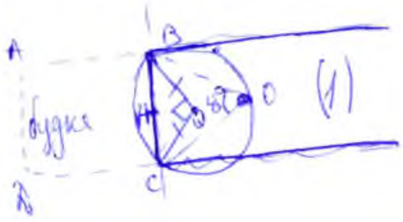
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EG 98-78

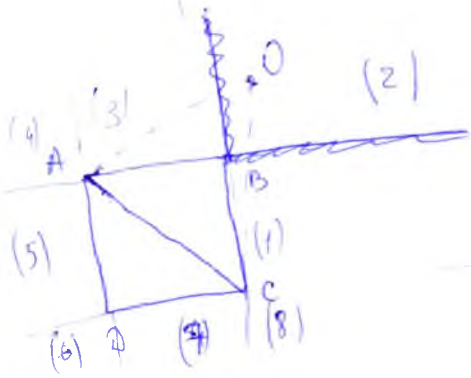
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

вид сверху



1) Если наблюдатель (точка O) в части плоскости (1), то он видит будку под углом равным $\angle BOC$. По усл. $\angle BOC = 45^\circ$. ~~$\angle BOC = 45^\circ$ ⇒ $\angle BOC$ – вписанный, т. точка O лежит на пересечении окружности с центром~~

Все такие углы, что $\angle BO_1C = 45^\circ$ с вершиной в т. O_1 опирающиеся на отрезок BC, то эти углы равны, значит все такие точки лежат на одной окружности (на ее части, лежащей внутри части плоскости (1)).



Заметим что дуга $\breve{BC}$ этой окружности равна $2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$, значит, $\angle BQC$ – (центральный) равен 90°. В $\triangle BQC$ (р/б) QH – высот, H – сер. BC (Q – центр окр.), $BH = \frac{BC}{2}$.

2) Для части плоскости (2) угол зрения из O будет равен углу $\angle AOC$. Аналогично рассуждениям в п. (1) ГМТ O, т.е. $\angle AOC = 45^\circ$ – часть окружности, лежащей внутри части плоскости (2). т.к. $AB = BC = r$, $\angle ABC = 90^\circ$ – ~~[illegible]~~, то точка B – является центром данной окружности.

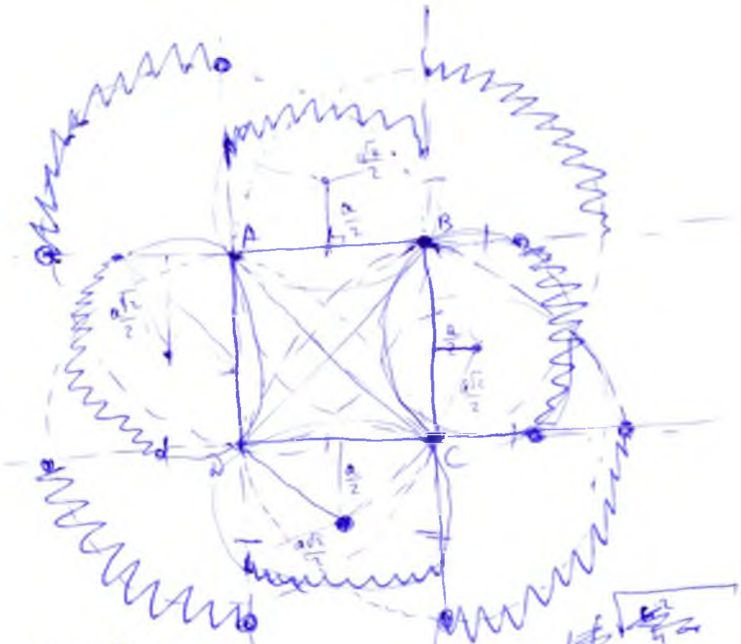
ГМТ плоскости в зонах (3), (5), (7) аналогичны зоне (1), а ГМТ плоскости в зонах (4), (6), (8) аналогичны зоне (2), тогда искомое ГМТ изображено на рис. как закрашенные части (т.е. так: „////")

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EG 98-78

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



a - сторона квадрата, натянутого ими будк.

Радиус больших окружностей a, их центры в точках A, B, C, D.

Радиус малых окружностей $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, их центры удалены от середин сторон квадрата на $\frac{a}{2}$, во внешнюю сторону.

Минимальное расстояние

Максимальное расст. равно L,

Задача 5.

При $m = \frac{1}{\sqrt[20]{3}}$ ($\frac{1}{m} = \sqrt[20]{3}$) (это отношение меньшего к большему, если требовалось отношение большего к меньшему, то ответ: $\frac{1}{\sqrt[20]{3}}$ раз), а если все - равные

Докажем, что ~~...~~ обязательно найдутся 2 куска, которые отличаются не более, чем в $\sqrt[20]{3}$ раз.

Предположим противное, т.е. любые два куска отличаются более чем в $\sqrt[20]{3}$ раз. Пусть a_1 - длина самого ~~...~~ маленького куска, a_2 - следующего по длине, и т.д. (a_{21} - самый длинный).

a_1 —
a_2 —
a_3 —
...
a_{21} —

Тогда $a_2 \geq a_1$, значит, $\frac{a_2}{a_1} > \sqrt[20]{3}$ (по предположению)

$a_3 \geq a_2$, $\frac{a_3}{a_2} > \sqrt[20]{3}$; $a_2 > \sqrt[20]{3}\, a_1$, $a_3 > \sqrt[20]{3}\, a_2 > (\sqrt[20]{3})^2 a_1$

И так далее

$$a_k > (\sqrt[20]{3})^{k-1} a_1$$

$$a_{21} > (\sqrt[20]{3})^{20} a_1 = 3a_1$$

Но по условию для a_{21} и a_1 верно, что $\frac{a_{21}}{a_1} \leq 3$ - противоречие, значит, обязательно найдутся два куска, отличающиеся не более, чем в $\sqrt[20]{3}$ раз.

±

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EG 98-78

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Докажем, что меньше m быть не может. Пусть нашлось такое m_1, что при любом разрезании обязательно находятся два куска, отношение которых не более чем в m_1 раз, причём $m_1 < \sqrt[20]{3}$ (т.е. есть два куска l_1 и l_2 ($l_1 < l_2$), таких что $\frac{l_2}{l_1} < \sqrt[20]{3}$). Рассмотрим такой пример: первый кусок равен $a_1 = \frac{21(\sqrt[20]{3}-1)}{3\sqrt[20]{3}-1}$, n-ый ($n \geq 2$) равен $a_n = a_1\left(\sqrt[20]{3}\right)^{n-1}$, всего кусков 21. ($a_n = a_1 q^{n-1}$, $q = \sqrt[20]{3}$)

Тогда общая длина кабеля будет равна (по сумме членов геом. прогрессии)

$$l = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{21\left(\sqrt[20]{3}-1\right)\cdot\left(3\sqrt[20]{3}-1\right)}{\left(3\sqrt[20]{3}-1\right)\left(\sqrt[20]{3}-1\right)} = 21,$$

что соответствует условию. Но длины любых двух кусков электрокабеля отличаются ~~[illegible]~~ не менее чем в $\sqrt[20]{3}$ (раз) (отношение большего к меньшему)

~~a_1~~ ~~$a_1\sqrt[20]{3}$~~ ~~a_1~~

a_1 — a_1

a_2 — $\frac{a_1}{\sqrt[20]{3}}$

a_3 — $\frac{a_1}{(\sqrt[20]{3})^2}$

...

— противоречие, значит, меньше m быть не может

$$\left(\frac{a_n}{a_k} \geq \frac{\sqrt[20]{3}}{(\sqrt[20]{3})^2} = \frac{1}{\sqrt[20]{3}}\right)$$

~~Рассмотрим~~

Задача 4

по усл. $x^{[x]} = N$

~~x~~ $x = \sqrt[[x]]{N}$ (1)

из определения целой части числа следует, что для положительного x

~~x~~ $[x] \leq x < [x]+1$

Тогда по (1)

$$[x] \leq \sqrt[[x]]{N} < [x]+1$$

т.к. $x > 0$, то $[x] \geq 0$, но $x \in \mathbb{Z}$, значит, $[x] \in N_0$, т.е. $[x] = k$, где $k \in N_0$

$$k \leq \sqrt[k]{N} < k+1, \; k \in N$$

$$k^k \leq N < (k+1)^k$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EG 98-78

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

При $k=0$: $0 \le N < 1$ — нет решений

При $k=1$

$1 \le N < 2$ — 1 значение N ($N \in \mathbb{N}$)

При $k=2$

$4 \le N < 9$ — 5 знач. N

$k=3$

$27 \le N < 64$ 37 знач. N

$k=4$

$256 \le N < 625$ — 369 значений N

$k=5$

$3125 \le N$, но $N \le 2018$, знач., при $k \ge 5$, решений нет.

Всего решений: $1+5+37+369 = \cancel{370+39} = \cancel{409}\ 412$

Ответ: 412.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МБОУ „СОШ №18"

Место проведения

ОГ 78-68

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ ДАНИЛОВ

ИМЯ ВАДИМ

ОТЧЕСТВО ВАЛЕРЬЕВИЧ

Дата рождения 02.05.2004

Класс: 7

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: 10.02.2018

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 0Г 78 - 68

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Как минимум 4 водителя должны быть обучены управлению на 1 машину, т.к. если будут обучены 3 водителя, то если они заболеют, то никто не сможет управлять машиной, а если обучены 5 водителей, то при неприходе 3-х 2 смогут управлять 1 машиной, но это перебор.

Вот вариант их обучения.

машины \ водители	a	b	c	d	e	f	g	h
1	+	+	+	+				
2		+	+	+	+			
3			+	+	+	+		
4				+	+	+	+	
5					+	+	+	+

~~При такой~~ В этом случае при неприходе любых 3 сотрудников, кто-нибудь сможет их заменить.

где ответ? ....

№5.

$n=2$ $\quad X_2=\dfrac{X_{2-1}}{2\cdot2\cdot X_{2-1}+1}=\dfrac{X_1}{4\cdot X_1+1}=\dfrac{\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{1}{6}$

$n=3$ $\quad X_3=\dfrac{X_{3-1}}{2\cdot3\cdot X_{3-1}+1}=\dfrac{X_2}{6\cdot X_2+1}=\dfrac{\frac{1}{6}}{2}=\dfrac{1}{12}$

$n=4$ $\quad X_4=\dfrac{X_{4-1}}{2\cdot4\cdot X_{4-1}+1}=\dfrac{X_3}{8\cdot X_3+1}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{8}{12}+1}=\dfrac{1}{20}$

$n=5$ $\quad X_5=\dfrac{X_{5-1}}{2\cdot5\cdot X_{5-1}+1}=\dfrac{X_4}{10\cdot X_4+1}=\dfrac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{1}{30}$

$X_1=\frac{1}{2}$; $X_2=\frac{1}{6}$; $X_3=\frac{1}{12}$; $X_4=\frac{1}{20}$; $X_5=\frac{1}{30}$

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 2) $\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$, 3) $\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{4}{5}$, 4) $\frac{4}{5}+\frac{1}{30}=\frac{5}{6}$.

Получим закономерность ответов:

$\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{5}{6}$ следовательно дальше будут ~~числа~~ дроби $\frac{6}{7}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{8}{9}$; $\frac{9}{10}$ и т.д.

значит последняя сумма будет равна $\frac{2018}{2019}$.

Ответ: $\frac{2018}{2019}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ОГ 78-68

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Решим эту задачу с конца. I) У всех было 8 биткоинов. Аркаша перевел Саше и Паше столько, сколько у них было, а значит 8:2=4 (биткоина) было у Саши или Паши. 8+4·2=16 (битк) - было у Аркаши.

II) У Саши 4 биткоина, у Паши 4 биткоина, а у Аркаши 16 битк. Паша перевел и Саше и Аркаше столько, сколько у них было, поэтому у них было 4 или 16 битк, значит, 4:2=2 (битк) - было у Саши; 16:2=8 (б) - было у Аркаши; 4+(8+2)=14 (б) - у Паши.

III) У Саши - 2б.; у Паши - 14б; у Аркаши 8б. Саша перевел Аркаше столько, сколько у него было и у него стало 8б. 8:2=4 (битк) - было у Аркаши. 2+4=6 (б) у Саши.

IV) У Саши - 6б, у Паши 14б, у Аркаши 4б. Саша перевел Паше столько, сколько у того было. 14:2=7 (б) - было у Паши вначале. 6+7=13 (б) - было у Саши вначале. 4 (б) - было у Аркаши вначале.

Ответ: у Саши - 13 биткоинов, у Паши 7 биткоинов, у Аркаши - 4 биткоина

+

№3.

1 табличка = 1 цифра

От 1 до 9 = 9 чисел = 9 цифр

От 10 до 99 = 90 чисел = ~~90~~ ·2 = 180 цифр

От 100 до 999 - 900 чисел = 2700 цифр

9 + 180 + 2700 = 2889 цифр

2889 - 1917 = 972 цифры лишние

972 : 3 = 324 числа лишние.

900 - 324 = 576 чисел.

576 + 90 + 9 = 675 чисел или домов ~~или табличек~~

Если 675 чисел перенести ~~на~~ на отдельные таблички, то их можно разделить на 3 стопки, по 225 табличек в каждой.

Ответ 675 домов, можно в 3 стопки по 225 табличек в каждой.

+

Лист 2 из 3

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Это невозможно посчитать, т.к. там может стоять бесконечное число чисел.

Например для числа 3 это

3	4	7
5	2	8
9	6	1

+1, +1, чем больше число, тем больше вариантов. Для числа 9, надо будет расставить 81 число, а для 11 — 121 число, но всё это можно расставить так, чтобы строчки были больше на 1.

Ответ: ∞, бесконечно.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Лицей №42, г. Уфа

Место проведения

Й044-66

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Демитраки

ИМЯ Елизавета

ОТЧЕСТВО Георгиевна

Дата рождения 30.10.2001 **Класс:** 10

Предмет Математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ Й0 44-66

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. $x_1, x_2, x_3 < 1$

Заметим, что наиб. зн. мощности достиг при $x_1 = x_2 = x_3$?! Пусть $x_i = x$, тогда

$$6x + 4x^3 = 9x^2 + 1$$
$$4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$
$$(x-1)(4x^2-5x+1) = 0$$
$$(x-1)^2\left(x-\frac{1}{4}\right) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Т.к. $x < 1$, то удовл зн $x = \frac{1}{4}$,

тогда наиб зн совм мощность $= 3x = \frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

F

2. Пусть x знаков в 7мин и y знаков в 9 мин, тогда

$$7x + 9y = 997$$

$3 \equiv 997 = 7x + 9y \equiv 2y \pmod 7) \Rightarrow 2y \equiv 3 \pmod 7) \Rightarrow$
$y \equiv 5 \pmod 7) \Rightarrow y = 7d + 5$

$7 \equiv 997 = 7x + 9y \equiv 7x \pmod 9) \Rightarrow 7x \equiv 7 \pmod 9) \Rightarrow x = 9k + 1$

$x \equiv 1 \pmod 9)$

$k, d \geq 0$

$k, d \in \mathbb{Z}$

$$7x + 9y = 63k + 7 + 63d + 45 = 997,$$
$$63(k+d) = 945,$$
$$k + d = 15$$

±

Таким образом, ~~решений~~ ур реш-й $k+d=15$ ровно 16, следов. решений $7x+9y$ тоже 16

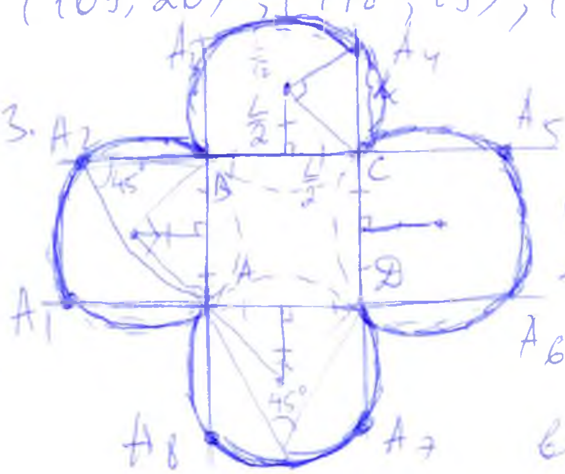
$(k,d) \in \{(0;15);(1;14) \dots (15;0)\} \Leftrightarrow (x,y) \in$ ~~{(1; ...)}~~

~~Ответ {(1; 110)}~~

$(x;y) \in \{(1,110);(10,103),(19,96),(28,89),(37;82);(46;75),(55;68),(64;61);(73,54),(82,47),(91;40),(100;33),(109;26);(118;19);(127;12);(136;5)\}$

Всего 16

3.



Построим 4 окр, у кот центр удален от середины стороны на $\frac{L}{2}$, тогда любой их радиус $\frac{L}{\sqrt{2}}$ точки этих окр, ~~сторона будет видна под углом 45°~~ принадл. хордам A_1A_2, A_3A_4, меньшим A_5A_6, A_7A_8

Вся внутр. часть будет видна под $< 45°$

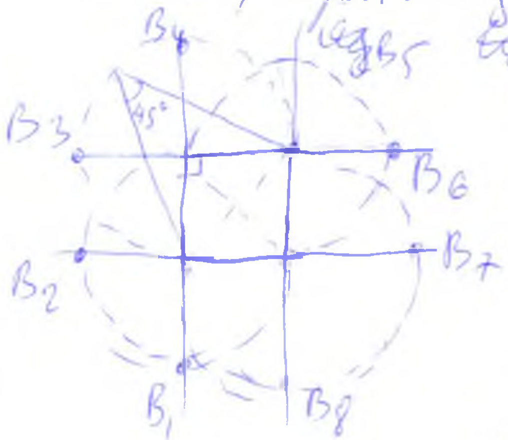
±

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЙО44-66

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Две стороны будет видно из точек, принадл. спрямл. окр. окружности с центр в вершинах квадрата с радиусом L и принадл. меньшим хордам B_1B_2, B_3B_4, B_5B_6, B_7B_8



Тогда ГМТ это объед хорд $A_1A_2 \ldots A_7A_8$ и $B_1B_2 \ldots B_7B_8$

Если расст до фиг это наим расст от тч до тч фигуры, то если тч $P \in \{A_i A_{i+1}, B_i B_{i+1}\}$ наим расст L а наиб $\frac{L}{\sqrt{2}} + \frac{L}{2}$

Ответ: L; $\frac{L}{\sqrt{2}} + \frac{L}{2}$

4

$x^{[x]} = N$ $N \in \{1, \ldots 2018\}$

$[x]^{[x]} \le x^{[x]} < ([x]+1)^{[x]}$ пусть $[x] = k$

$k \le x < k+1$

$k^k \le x^k < (k+1)^k \Leftrightarrow k^k \le N < (k+1)^k$ (*)

Тогда для заметим, что $5^5 > 2018$ т.к. $k < 5$, так же $k \ge 0$, т.к. $x > 0$. Очев, для люб N удовл (*) найд x.

1сл) $k=0$ $0 \le N < 1$ $N=0$ щ есть реш 0 $x=0,1$ наприм

2сл) $k=1$ $1 \le N < 2$ $N=1$ 1

3сл) $k=2$ $4 \le N < 9$ $N \in \{4, 5 \ldots 8\}$ 5

4сл) $k=3$ $27 \le N < 64$ $N \in \{27, \ldots 63\}$ 37

5сл) $k=4$ $256 \le N < 625$ $N \in \{256, \ldots 624\}$ 368

Итого $368 + 37 + 5 + 1 = 411$

Ответ: 411

Лист 02 из 02

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

КО 76 - 29

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Донец

ИМЯ Екатерина

ОТЧЕСТВО Александровна

Дата рождения 08.08.2000 **Класс:** 11

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ КО 76-29

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 Запишем стандартный вид многочлена $P(x)$:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Для каждого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любых чисел x и y верно ~~следующее~~: $P(x) - P(y) \vdots (x-y)$. Это верно, т.к.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$; $P(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_1 y + a_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(x) - P(y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 - a_n y^n - a_{n-1} y^{n-1} - \ldots - a_1 y - a_0 =$

$= a_n(x^n - y^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - y^{n-1}) + \ldots + a_1(x-y)$. Каждое слагаемое этой суммы кратно $(x-y)$, значит и вся эта сумма кратна $(x-y)$, что как раз доказывает, что $P(x) - P(y) \vdots (x-y)$. Доказано.

Теперь воспользуемся доказанным чуть выше утверждением для данных в условии значений:

$P(1) - P(k) \vdots (1-k) \Rightarrow (2019-k) \vdots (1-k)$

$P(2019) - P(k) \vdots (2019-k) \Rightarrow (1-k) \vdots (2019-k)$

$\Rightarrow |2019-k| = |1-k|$

+

Тогда имеем 3 случая:

1) $k<1$: $2019 - k = 1 - k$ — целочисленных решений нет.

2) $1 \le k \le 2019$: $2019 - k = k - 1 \Rightarrow 2k = 2020 \Rightarrow k = 1010$

3) $k > 2019$: $k - 2019 = k - 1$ — целочисленных решений нет

$\Rightarrow k = 1010$

Ответ: $k = 1010$.

№2 Пусть высота цилиндра — h, радиус цилиндра — r. $V_y = \pi r^2 h$, $S = 2\pi r h + 2\pi r^2$. Примем, что $\frac{V}{\pi} = r^2 h = a$, $\frac{S}{2\pi} = rh + r^2 = b$. Тогда нас интересует, когда одно единственное решение имеет система ур-й:

$\begin{cases} r^2 h = a \\ r^2 + rh = b \end{cases} \Rightarrow h = \frac{a}{r^2}$, теперь подставим это во второе уравнение:

$r^2 + \frac{ra}{r^2} = b \Rightarrow r^2 + \frac{a}{r} = b$

Применим неравенство Коши для того, чтобы оценить a и b:

$r^2 + \frac{a}{r} = r^2 + \frac{a}{2r} + \frac{a}{2r}$; $r^2 + \frac{a}{2r} + \frac{a}{2r} \geqslant 3\sqrt[3]{r^2 \cdot \frac{a}{2r} \cdot \frac{a}{2r}} \Rightarrow r^2 + \frac{a}{2r} + \frac{a}{2r} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow b \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}$ — при таком условии система будет иметь единственное решение.

Также не будем забывать о том, что $a>0$, $b>0$, $r>0$. Теперь найдем, когда уравнение $r^2 + \frac{a}{r} = b$ имеет единственное решение.

~~Пусть~~ $r^2 + \frac{a}{r} - b = 0 \Rightarrow r^3 - br + a = 0$; пусть $f(r) = r^3 - br + a$.

Найдем минимум и максимум этой функции:

$f'(r) = 3r^2 - b = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{b}{3} \Rightarrow r = \pm\sqrt{\frac{b}{3}}$

Точка минимума функции: $r = \sqrt{\frac{b}{3}}$, тогда

$f_{min} = f\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3 - b\sqrt{\frac{b}{3}} + a = \frac{b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}} - \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3}} + a = a - \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}}$. Нас интересует только тот случай, когда $f_{min} = 0$, т.к. если $f_{min} > 0$, то пересечений с Ox у графика функции не будет, т.к. потом функция начинает возрастать ("потом" - после перехода через точку минимума), а если $f_{min} < 0$, то таких пересечений будет два, а нам нужно одно решение - ни больше, ни меньше. Поэтому:

$a - \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} \Rightarrow a^2 = \frac{4b^3}{27} \Rightarrow b^3 = \frac{27a^2}{4}$ (условие, выведенное ранее с помощью неравенства Коши соблюдается, т.к.

Лист 1 из 3

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$b \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}} \Rightarrow b^3 \geq \frac{27a^2}{4}$ – в нашем случае $b^3 = \frac{27a^2}{4}$). Тогда подставим сюда значения a и b:

$\left(\frac{S}{2\pi}\right)^3 = \frac{27V^2}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{S^3}{8\pi^3} = \frac{27V^2}{4\pi^2} \Rightarrow S^3 = \frac{27\cdot 8\pi^3\cdot V^2}{4\pi^2} = 54\pi V^2$. Это и есть условие, при котором ранее записанная система имеет одно единственное решение, а значит, именно такое условие должно быть наложено на V и S, чтобы любые два цилиндра с такими параметрами были равны.

Ответ: $S^3 = 54\pi V^2$

№5 $x^y + y^z = xyz$

По условию, $x \geq 1$, $y \geq 1$ и $z \geq 1$, к тому же, все они натуральные. Тогда рассмотрим несколько случаев:

1) $y=1$: $x+1 = xz \Rightarrow 1 = x(z-1) \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ z=2 \end{matrix}$ – решение: (1, 1, 2)

2) $y=2$: $x^2+2^z = 2xz$. Рассмотрим несколько случаев здесь:

$z=1$: $x^2+2 = 2x \Rightarrow x^2-2x+2=0 \Rightarrow (x-1)^2+1=0$ – решений нет

$z=2$: $x^2+4 = 4x \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$ – решение: (2, 2, 2)

$z=3$: $x^2+8-6x=0 \Rightarrow D=36-32=4 \Rightarrow x_1=4,\ x_2=2 \Rightarrow$ решение: (2, 2, 3) решение: (4, 2, 3)

$z=4$: $x^2+16-8x=0 \Rightarrow (x-4)^2=0 \Rightarrow x=4$ – решение: (4, 2, 4)

$z>4$: $x^2-2zx+2^z=0 \Rightarrow D = 4z^2-4\cdot 2^z = 4(z^2-2^z) < 0$ при $z>4$, т.к. при $z>4$ показательная функция $f(z)=2^z$ растет быстрее, чем $f(z)=z^2$

Теперь докажем, что решений больше не существует, т.е. при $y \geq 3$ решений нет. Пусть $x=1$, тогда:

$1+y^z = yz \Rightarrow \frac{1}{y} + y^{z-1} = z \Rightarrow \frac{1}{y} = z - y^{z-1}$. Справа находится целое число, т.к. мы ищем z и y – натуральные, а слева находится заведомо нецелое число, получаем противоречие $\Rightarrow$ решений нет.

Теперь рассмотрим четность данного в условии выражения. Пусть x – четное, y – нечетное, тогда правая часть уравнения (xyz) будет четной (ровно как и если взять наоборот), а вот сумма в левой части будет нечетной, т.к. сумма четного x^y и нечетного y^z будет нечетной $\Rightarrow$ x и y одинаковы по четности. Но и здесь есть один нюанс: если оба они нечетны, то сумма слева будет четной. Тогда нам нужно будет сделать четным произведение справа, а это будет возможно только тогда, когда z будет четным.

Итак, в целом, решения этого уравнения могут выглядеть так: x – нечетное, y – нечетное, z – четное; x – четное, y – четное, z – любое.

Рассмотрим случай, когда $x \geq 2$ и $y \geq 3$. Подставим наименьшие возможные одинаковые по четности натуральные числа сначала в данное изначально уравнение (подставим $x=2$ и $y=4$): $16+4^z = 8z$. При любом натуральном z левая часть уравнения возрастает быстрее, чем правая, поэтому решений нет.

Возьмем значения чуть больше, но другой четности ($x=3$, $y=3$) $27+3^z = 9z$. Здесь допустимы только четные z, но и при всех таких z левая часть уравнения возрастает намного быстрее, чем правая. Это достигается за счет положительного слагаемого A и быстро

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ КО 76-29

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

растущей показательной функции, сумма которых находится слева; это означает, что чем больше число z, тем быстрее будет возрастать левая часть относительно правой. Изначально сейчас мы рассматриваем $x \geq 2$ и $y \geq 3$. Чем больше число, которое берем из этих диапазонов, тем сильнее возрастает число A (то, во что превращается x^y при перестановке x и y в уравнение), и чем больше y, тем сильнее и быстрее возрастает y^z, т.к. увеличивается основание. В итоге левая часть уравнения при любых допустимых z будет расти быстрее правой, поэтому при $x \geq 2$ и $y \geq 3$ решений не будет, соответственно, кроме найденных ранее, решений больше нет.

Ответ: $(1,1,2)$; $(2,2,2)$; $(2,2,3)$; $(4,2,3)$; $(4,2,4)$

+

№1 $f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2x_3} + \sqrt{x_2^2+x_2x_3} + \sqrt{x_3^2+x_1x_2}$

$x_1+x_2+x_3 \leq 2$. Эти числа неотрицательны, т.к. подкоренные выражения должны быть ≥ 0. Очевидно, что наименьшее значение функции – это $f(0,0,0) = 0$. Наибольшее значение функции достигается в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ и равно оно $f(1,1,0)=3$.
Пусть $x_1 \geq x_2 \geq x_3 > 0$. Тогда:

$\sqrt{x_1^2+x_2x_3} \geq \sqrt{x_1^2+x_1x_3} \Rightarrow \sqrt{x_1^2+x_2x_3} \geq \sqrt{x_1(x_1+x_3)}$, тогда по неравенству Коши

$\sqrt{x_1^2+x_2x_3} \geq \frac{x_1+x_1+x_3}{2} = x_1 + \frac{x_3}{2}$

№4 Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, притом только одну. Тогда выберем три точки, ~~каждая~~ по одной на каждом ребре пирамид (нужных в условии). Если вершина куба будет лежать с ними в одной плоскости, то такое будет возможно (то, что указано в условии)

−

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

BN 81-96

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ ЗАЙЦЕВ

ИМЯ АЛЕКСЕЙ

ОТЧЕСТВО ВИКТОРОВИЧ

Дата рождения 17 июля 2001 года

Класс: 10

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 2 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Зай

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Заметим, что т.к. x_1, x_2 и $x_3 < 1$ МВт, то узнаваемые мощности с 3 МВт, а т.к. при $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ МВт? равенство выполнено, то максимальная совместная мощность всех трёх генераторов – это 3 МВт

−

Ответ: 3 МВт.

2. т.к. $997 \equiv 7 \pmod 9$, то если n_7 – количество монет в 7 копеек $n_7 \equiv 1 \pmod 9$. Значит все возможные варианты (n_7, n_9) – это

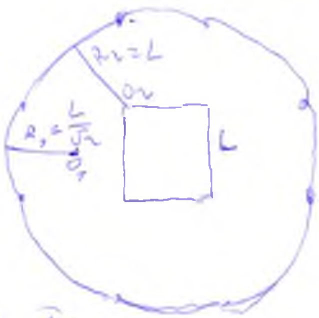
7

$(1;110)$; $(10;103)$, $(19;96)$, $(28;89)$, $(37;82)$, $(46;75)$, $(55;68)$, $(64;61)$, $(73;54)$, $(82;47)$, $(91;40)$, $(100;33)$, $(109;26)$, $(118;19)$, $(127;12)$, $(136;5)$ – всего 16 способов, при большем n_7, $7n_7 > 997$

Ответ: 16 способов

3. Если наблюдатель видит только 1 стену, то ГМТ является дуга окружности $\omega_1(O_1, R_1)$, где O_1 – т. пересечения, получаемая симметричным отражением центра квадрата относительно стороны, а $R_1 = \frac{L\sqrt{2}}{2}$, т.к. в крайней точке ~~будет~~ очевидно будет под углом 45°. Если не видно 2 стены, то ГМТ является дугой окружности $\omega_2(O_2, R_2)$, где O_2 – вершина квадрата, $R_2 = L$, т.к. 1 касательная к окр-ти, причём она непрерывна. Итого ГМТ состоит из 4 дуг окружности

+



– это не окружность

4. Рассмотрим такие числа $1^1 = 1$; $2^2 = 4$; $3^3 = 27$; $4^4 = 256$; $5^5 = 3125$. Теперь заметим, что если N равно одному из этих чисел, тогда x очевидно ~~оче~~ находится. Если же $N \in (n^n; (n+1)^{n+1})$, то x ~~не~~ $< n+1$, $x > n$, если $\exists x$, а если ~~$x = n$~~ $N \geq (n+1)^n$, то $x \in \emptyset$, т.к. $[x] = n$ по I условию, а отсюда $x > n+1$, что невозможно. Значит N может быть $[1^1; 2^1) \cup [2^2; 3^2) \cup [3^3; 4^3) \cup [4^4; 5^4)$, раскроем $N \in [1;1] \cup [4;8] \cup [27;63] \cup$ ~~[…]~~

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ШИФР НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ BN 81-96

$\cup [256, 624]$, значит всего чисел $N: 1+5+37+369=412$.

Ответ: 412.

5. Пусть длины получившихся кабелей $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{21}$, причём $x_1 \le x_2 \le x_3 \ldots \le x_{21}$, тогда условие задачи равносильно то, что $\frac{x_{21}}{x_1} \le 3$. Теперь рассмотрим такие $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{21}$, такие что $x_{i+1} = x_i \sqrt[20]{3}$, причём $x_1+x_2+\ldots x_{21}=21$. Мы всегда сможем сделать такую посл-ть, потому что если $x_1 = \frac{21}{1+\sqrt[20]{3}+(\sqrt[20]{3})^2+\ldots+3}$, то условие вытекает из формулы суммы геометрической прогрессии. Заметим, что если $m < \sqrt[20]{3}$, то в данном примере не найдётся такой пары чисел, что $\frac{x_i}{x_j} \le m$. Это и есть пример на $m = \sqrt[20]{3}$. Т.о. если $m = \sqrt[20]{3}$.

Ответ: $\sqrt[20]{3}$.

частный случай

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО	VE 91-59
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Иванов

ИМЯ Егор

ОТЧЕСТВО Евгеньевич

Дата рождения 29 08 2002 **Класс:** 9

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10. 02. 2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Егор

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^3\cdot(x+p)=px^2-4x^2-4px+p$

$4x^3\cdot(x+p)+4x\cdot(x+p)-p(x^2+1)=0$

$(x+p)\cdot 4x\cdot(x^2+1)-p(x^2+1)=0$

$(x^2+1)\cdot(4x^2+4px-p)=0$

$x^2+1>0$ всегда, значит

$4x^2+4px-p=0$

$D=16p^2+16p=16\cdot(p^2+p)$

$x_{1,2}=\frac{-4p\pm4\sqrt{p^2+p}}{8}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2+p}}{2}$

Значит p^2+p - это полный квадрат, потому что x - рациональное.

$p^2+p=p\cdot(p+1)$. Два последующих целых числа взаимопросты, ~~значит~~ а также их НОД = 1. Значит p - это полный квадрат и p+1 - полный квадрат. А расстояние между двумя квадратами целых чисел равно 1, значит это 0^2 и 1^2. Далее, между двумя ближайшими квадратами расстояние будет увеличиваться.

$p\cdot(p-1)=0\cdot1$.

$p=-1$ $\quad$ $p=0$

$-1\cdot0=1\cdot0=0$ $\quad$ $0\cdot-1=0\cdot1=0$.

Ответ: $p=0;\ -1$.

+

~~№4~~.

№3.

$f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$.

1. Пусть $x=y=0$.

$f(0)=f(0)\cdot f(0)$

$f(0)=0$.

$f(1)=f(0)\cdot f(0)=0$.

Значит $f(a)=0$.

2. Пусть $x=y=1$

$f(0)=f(1)\cdot f(1)$

2. При $f(a)>1$ - верно

3. При других значениях $f(a)$ не верно, так как тогда $f(x-y)=f(y-x)$, причём $x\neq y$, а значит $f(a)=a^2$, но тогда $(x-y)^2\neq x^2+y^2$.

F

Ответ: $f(a)=0$; $f(a)=1$

a - произвольное число.

№4.

Пусть $x = 7$, тогда
$7^4 = 2401 > 2018$, значит $x \in (0; 7)$.
Теперь докажем, что какую-бы дробную часть не имело число, где 6 - целая часть, неравенство выполнится. Представим это число, как $(6 + \ldots)$.

1) $[(6 + \ldots)] = 6$

2) $[(6+\ldots)\cdot 6] < 6 \cdot 7 - 1$,
$[(6+\ldots)\cdot 6] \le 41$.

Так получается потому что дробная часть $(6+\ldots)$ бесконечно стремится к 1, но ей не является, а значит $(6+\ldots)\cdot 6 < 42$, но так как мы получаем целую часть, значит $[(6+\ldots)\cdot 6] \le 41$.

3) $[(6+\ldots) \cdot [(6+\ldots)\cdot 6]]$.
$[(6+\ldots) \cdot \underbrace{[(6+\ldots)\cdot 6]}_{\le 41}] \le 41 \cdot 7 - 1$.

$[(6+\ldots) \cdot [(6+\ldots)\cdot 6]] \le 286$, аналогично со 2 действием.

4) $(6+\ldots) \cdot \underbrace{[(6+\ldots)\cdot[(6+\ldots)\cdot 6]]}_{\le 286} \le 286 \cdot 7 = 2002$, а
$2002 < 2018$.

Значит, при любом числе с целой частью $= 6$ условие выполнится. При меньших значениях целой части произведение будет меньше, а значит условие тоже выполнится.

Ответ: $x \in (0; 7)$

+

№5.

Рассмотрим возможные остатки при делении на 7:

$1^2 \equiv 1 \pmod 7$
$2^2 \equiv 4 \pmod 7$
$3^2 \equiv 2 \pmod 7$
$4^2 \equiv 2 \pmod 7$
$5^2 \equiv 4 \pmod 7$
$6^2 \equiv 1 \pmod 7$
$0^2 \equiv 0 \pmod 7$

Значит, одно из чисел будет иметь остаток либо 2, либо 5; второе – 3 или 4; третье – 1 или 6; либо они все будут иметь остатки 0.

1) Остатки 2 и 5:
2; 5; 9; 12; 16; 17; 23; 26; 30; 33; 37; 40; 44; 47; 51; 54; 58; 61; 65; 68. – всего 20 чисел.

2) Остатки 3 и 4:
3; 4; 10; 11; 17; 18; 24; 25; 31; 32; 38; 39; 45; 46; 52; 53; 59; 60; 66; 67 – всего 20 чисел

3) Остатки 1 и 6:
1; 6; 8; 13; 15; 20; 22; 27; 29; 34; 36; 41; 43; 48; 50; 55; 57; 62; 64; 69 – всего 20 чисел

4) Остаток 0:
7; 14; 21; 28; 35; 42; 49; 56; 63; 70 – 10 чисел

Значит, вариантов когда не кратны 7: $20 \cdot 20 \cdot 20 = 20^3$. Нужно поделить на 6, потому что все варианты посчитали 3! раз

Вариантов, когда кратны 7: $10 \cdot 9 \cdot 8$, делим на 3!

Заметим, что группы чисел, на которые мы разбили числа не обязательно стоят в таком порядке. каждую комбинацию мы посчитали 6 раз и только 1 будет упорядоченная: 123 и 321.

Всего вар: $\frac{20^3 \cdot 2 + 10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = \frac{20^3 \cdot 2}{3} + 120 = 2786\frac{2}{3}$ троек

Ответ: $2786\frac{2}{3}$?! троек чисел

(–)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

ЦZ 92-61

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Ивина

ИМЯ Яна

ОТЧЕСТВО Павловна

Дата рождения 31. 05. 00

Класс: 11 А

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 10. 02. 2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: [подпись]

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3. $P(1)=2019$
$P(2019)=1$ $\Big| \Rightarrow P(x)=2020-x$

Только частн. случай

+

$P(k)=k \Rightarrow 2020-k=k \Rightarrow 2020=2k \Rightarrow k=1010$

Ответ: $k=1010$

5. $X, Y, Z \in \mathbb{N}$

$X^Y+Y^Z=XYZ$

1) допустим, что X, Y и Z - нечётные, тогда XYZ - нечётное, а X^Y+Y^Z - чётное (сумма 2-х нечётных) $\Rightarrow$ хотя бы одно из чисел X, Y или Z чётное $\Rightarrow XYZ$ - чётное $\Rightarrow$

$\Rightarrow X^Y+Y^Z$ - чётное $\Rightarrow X$ и Y либо оба чётные, либо оба нечётные (в таком случае Z - чётное)

2) решим подбором из соображений рациональности. Допустим X и Y - нечётные, Z - чётное. Начнём с самых маленьких возможных значений X и Y

а) $X=Y=1 \Rightarrow X^Y+Y^Z=2 \Rightarrow Z=2$

$1^1+1^2=1\cdot1\cdot2=2$ - подходит $X=Y=1,\ Z=2$

б) $X=3,\ Y=1$

$3^1+1^2=3Z=4$ - невозможно

в) $X=1,\ Y=3$

$1^3+3^2=1+3^2=3Z$ - невозможно

г) очевидно, что если мы дальше будем увеличивать значения X и Y, то ~~правая~~ левая часть уравнения будет возрастать быстрее, чем правая, значит больше ~~значит бор~~ нечётных значений X и Y нет.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) X и Y - чётные, В таком случае методом подбора подходят:

$X=Y=Z=2 \qquad 2^2+2^2=2\cdot2\cdot2=8$

$X=Y=2,\ Z=3 \qquad 2^2+2^3=2\cdot2\cdot3=12$

$X=4,\ Y=2,\ Z=3 \qquad 4^2+2^3=4\cdot2\cdot3=24$

$X=4,\ Y=2,\ Z=4 \qquad 4^2+2^4=2\cdot4\cdot4=32$

$\mp$

Если дальше увеличивать значения X и Y, то X^x+Y^z будет возрастать быстрее, чем XYZ при $\forall$ значении Z, т.е. равенство не будет соблюдаться. Это надо доказывать

Ответ: $(1;1;2)$, $(2;2;2)$, $(2;2;3)$, $(4;2;3)$, $(4;2;4)$.

1. $0 \le X_1+X_2+X_3 \le 2$ МВт, $X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$, $X_3 \ge 0$

$f(X_1,X_2,X_3)=\sqrt{X_1^2+X_2X_3}+\sqrt{X_2^2+X_1X_3}+\sqrt{X_3^2+X_1X_2}$

Очевидно, что ф-ция в ОДЗ всё время возрастает (т.к. это сумма корней), ~~$f(X_1,X_2,X_3)$ достигает~~

$X_1^2+X_2X_3$, $X_2^2+X_1X_3$, $X_3^2+X_1X_2$ так же всё время возрас- ~~тают~~ тают (т.к. мощности электрогенераторов должны быть положительны) $\Rightarrow f(X_1,X_2,X_3)$ достигает минимального значения при минимальных значениях X_1, X_2 и X_3, т.е. $X_1=X_2=X_3$ (возможно, все три электрогенератора сломаны или выключены), т.е. $f_{min}=f(0;0;0)=0$

А максимального значения ф-ция достигает при максимальных X_1, X_2 и X_3, т.е. когда $X_1+X_2+X_3=2$ МВт

~~т.к. система симметрична, можно предположить, что $x_1 = 2$ МВт, $x_2 = x_3 = 0$~~

~~То $f_{max} = f(2, 0, 0) = \sqrt{\ }$~~

т.к. система симметрична, то максимума она достигнет при

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{2}{3} \text{ МВт}$$

т.о. $f_{max} = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} =$

$= 3 \cdot \sqrt{\frac{8}{9}} = 2\sqrt{2}$ МВт

Ответ: $f_{min} = 0$; $f_{max} = 2\sqrt{2}$ МВт

2.

$S = 2\pi R^2 + 2\pi R h = 2\pi R (R + h)$

$V = \pi R^2 h$

$\frac{V}{S} = \frac{\pi R^2 h}{2\pi R (R+h)} = \frac{Rh}{2(R+h)}$

Ответ: $Sh - V = 2\pi R h^2$

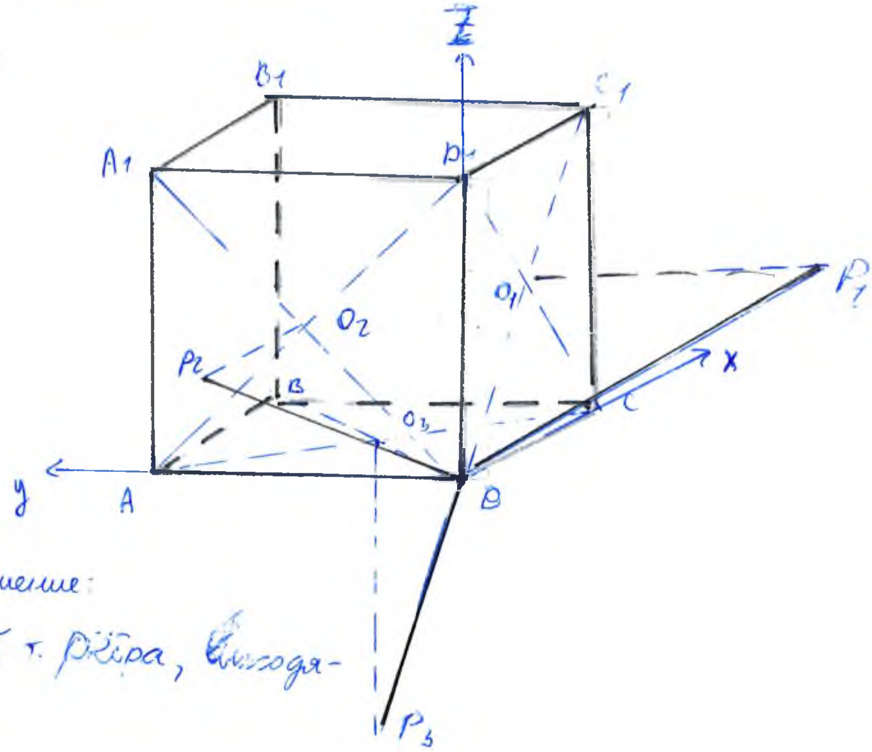
4. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб

$AB = a$

~~$ABCDP_1$~~ на боковых гранях прав. четырёхугольные пирам.

4A , 4B



Решение:

1) т. P_3, входящие и т. D.

поместим куб в систему координат с ц. в т. D (0; 0; 0)

Лист 03 из 04

2) координаты вершин пирамид

$P_1\left(\frac{a}{2}; y; \frac{a}{2}\right)$; $P_2\left(x; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$; $P_3\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; z\right)$

$$\begin{cases} A\cdot\frac{a}{2} + By + C\cdot\frac{a}{2} + D = 0 \\ Ax + B\cdot\frac{a}{2} + C\cdot\frac{a}{2} + D = 0 \\ A\cdot\frac{a}{2} + B\cdot\frac{a}{2} + C\cdot y + D = 0 \\ 0 + 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\cdot\frac{a}{2} + By + C\cdot\frac{a}{2} = 0 \\ Ax + B\cdot\frac{a}{2} + C\cdot\frac{a}{2} = 0 \\ A\cdot\frac{a}{2} + B\cdot\frac{a}{2} + C\cdot\frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

3) допустим, что пирамиды ~~a~~ и их высоты ~~рав~~ равны и проверим, возможно ли, что P_1, P_2, P_3 и D лежат в одной плоскости.

В таком случае $\vec{N}(A,B,C) \perp (P_1P_2P_3) \Rightarrow A = B = C = a\sqrt{3}$

Тогда $a\sqrt{3}\left(\frac{a}{2} + y + \frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow y = -a$

~~$By = -\frac{a}{2}(A+C)$~~

аналогично $x = z = -a$

согласно чертежу $y<0$, $z<0$ и $x<0$ – подходит, т.е. такое действительно возможно, при этом высоты пирамид будут равны $|\overrightarrow{O_1P_1}| = |\overrightarrow{O_2P_2}| = |\overrightarrow{O_3P_3}| = a$

~~4) т.к. система имеет все~~

4) т.к. все ~~т~~ три пирамиды равны между собой, то если на всех гранях куба так же расположены правильные пирамиды высотой a, то данное условие выполняется одновременно для всех вершин куба.

Ответ: 4А) да, могут. Высоты равны a

4Б) да, могут

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

СОШ N 11

Место проведения

Мј 30 - 70

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Игнатьев

ИМЯ Михаил

ОТЧЕСТВО Сергеевич

Дата рождения 17.12.2000

Класс: 11

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 01j 30-70

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Сумма $x_1+x_2+x_3 \le 2$ МВт

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{x_1^2+x_2x_3}+\sqrt{x_2^2+x_1x_3}+\sqrt{x_3^2+x_1x_2}$$

по неравенству Коши

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \ge \sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ при условии что это неравенство будет равенством, значение выражения будет максимальным, тогда

$\frac{2}{3}=\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ $\frac{8}{27}=x_1x_2x_3$ и $x_1+x_2+x_3=2$ отсюда

$x_1=x_2=x_3=\frac{2}{3}$ подставим в выражение

$$f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}+\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}+\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}=$$

$=\frac{3\sqrt{8}}{3}=2\sqrt{2}$ - это максимальное значение. Почему? нет!

Минимальное же значение будет стремиться к 0, т.к. если вместо x_1, x_2, x_3 брать числа $\frac{1}{144}$; $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{324}$... и так далее с каждым значением уменьшается значение $f(x_1,x_2,x_3) \Rightarrow f(x_1,x_2,x_3)\to 0$.

Ответ: максимальное значение $2\sqrt{2}$, минимальное стремится к 0.

∓

3. $P(x)=ax^n+bx^{n-1}...+c$.

$P(1)=a\cancel{1}^n+b\cdot 1^{n-1}...+c=2019$ или же $P(1)=a+b...+c=1$

$P(2019)=a\cdot 2019^n+b\cdot 2019^{n-1}+c\cancel{1}=1$

$P(k)=ak^n+bk^{n-1}...+c=k$.

Пусть $n=1$, тогда

$P(1)=a+c=2019$

$P(2019)=a\cdot 2019+c=1$

$P(k)=ak+c=k$.

$$\begin{cases} a+c=2019 \\ a\cdot 2019+c=1 \\ ak+c=k \end{cases}$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\begin{cases} c = 2019 - a \\ a \cdot 2019 + c = 1 \\ ak + c = k \end{cases}$ $\begin{cases} 2019a + 2019 - a = 1 \\ ak + c = k \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1. \\ ak + c = k \end{cases}$

$-k + c = k$

$2k = c.$ $c = 2019 - (-1) = 2020$

$2k = 2020$

$k = 1010.$

$P(x) = -x + 2020$

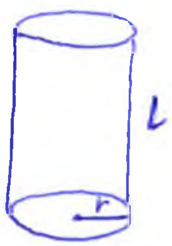
$P(k) = -k + 2020 = k = -1010 + 2020 = 1010$ верно $\Rightarrow$

$k = 1010$ и оно целое.

+

Ответ: $k = 1010.$

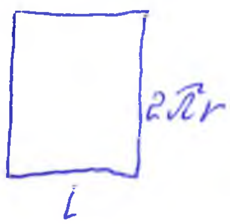
2.



Пусть L - высота цилиндра

r - радиус цилиндра

V и S даны



$S = 2S_{осн} + S_{бок}$

$S_{осн} = \pi r^2$ $S_{бок} = 2\pi r L$

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r L = 2\pi r (r + L)$

$V = S_{осн} \cdot h = \pi r^2 \cdot L$

$\frac{V}{S} = \frac{\pi r^2 L}{2\pi r (r+L)} = \frac{rL}{2(r+L)}$ $SrL = 2Vr + 2VL$

$L = \frac{2Vr}{Sr - 2V}$

$S = 2\pi r\left(r + \frac{2Vr}{Sr-2V}\right) = 2\pi r^2 \left(\frac{Sr - 2V + 2V}{Sr - 2V}\right) = \frac{2\pi r^2 \cdot Sr}{Sr - 2V}$

$1 = \frac{2\pi r^3}{Sr - 2V}$ $2\pi r^3 = Sr - 2V$ $r(2\pi r^2 - S) = -2V$

$r = \frac{2V}{S - 2S_{осн}}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$L=\frac{2V\cdot 2V}{(S-2S_{осн})\left(\frac{S\cdot 2V}{S-2S_{осн}}-2V\right)} \qquad S_{осн}=\frac{V}{L}$$

$$L=\frac{4V^2}{2V\left(S-\frac{2V}{L}\right)\left(\frac{2S}{S-\frac{2V}{L}}-1\right)}=\frac{2V}{\left(\frac{SL-2V}{L}\right)\left(\frac{2SL}{SL-2V}-1\right)}=\frac{2VL}{2SL-SL+2V}=$$

+

$$=\frac{2VL}{SL+2V}$$

~~$L\cdot SL+L\cdot 2V=2VL$~~

~~$SL+2V=2V$~~

5. $x^y+y^z=xyz$

$x=1\ \ y=1\ \ z=2$ $\qquad$ $x=2\ \ y=2\ \ z=3$

$1^1+1^2=1\cdot1\cdot2$ верно. $\qquad$ $2^2+2^3=2\cdot2\cdot3$ верно.

$x=2\ \ y=2\ \ z=2$ $\qquad$ $x=4\ \ y=2\ \ z=4$

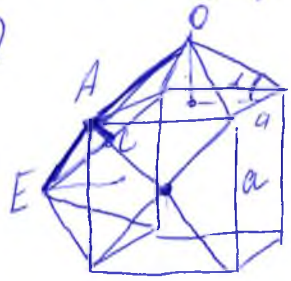
$2^2+2^2=2\cdot2\cdot2$ верно. $\qquad$ $4^2+2^4=4\cdot2\cdot4$ верно.

+

больше в натуральных парах нет.

Ответ: $(1;1;2),(2;2;3),(2;2;2),(4;2;4)$

4.



да, могут лежать в одной плоскости.

$\alpha=60°$

$tg\,\alpha=\frac{h}{\left(\frac{a}{2}\right)}=\frac{2h}{a} \qquad h=\frac{tg\,\alpha\, a}{2}$

$tg\,60=\sqrt{3} \qquad h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

−

Ответ: $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

РФ 60-46

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Исмаилов

ИМЯ Назар

ОТЧЕСТВО Азатович

Дата рождения 01.07.2004г.

Класс: 7А

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 4 листах

Дата выполнения работы: 10.02.2018.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ______

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ РФ 60-46

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Заметим, что подготовленных для работы на любом конкретном типе машины ≥ 4 человека, т.к. идём от противного допустим ∃ такая машина, что для работы на ней было подготовлено ≤ 3 человека, т.о. если будут отсутствовать эти ≤ 3 человека (и возможно ещё какие-то люди) то данный тип машины не будет никем ~~обслуж~~ обслуживаться.

⇓

Всего будет $\geq 4 \cdot 5 = \geq 20$ подготовок ⇒ ⇒ общая цена будет $\geq 20 \cdot 10000 = \geq 200000$

$\boxed{\text{Пример}}$ на 20 подготовок ("1" значит данный человек будет обучаться на данный тип машины):

тип машин \ люди	1-ый	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
1-й	1	1	1	1				
2-й		1	1	1	1			
3-й			1	1	1	1		
4-й				1	1	1	1	
5-й					1	1	1	1

Заметим, что данный пример подходит, т.к. при убирании любых 3 человек, для любого i типа машины останется ≥ 1 человека способного обслужить эту машину.

Ответ: 200000 – min ~~сумма~~ затрата на обучение; см. пример выше.

(+)

Лист 1 из 4

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

x - изначальное #биткоинов у Саши
y - изначальное # биткоинов у Паши
z - Изначальное #биткоинов у Аркаши

	Саша	Паша	Аркаша
изначально	x	y	z
1-я операция	$x-y$	$2y$	z
2-я операция	$x-y-z$	$2y$	$2z$
3-я операция	$2x-2y-2z$	$3y-x-z$	$4z$
4-я операция (последняя)	$4x-4y-4z$	$6y-2x-2z$	$7z-x-y$

$$\begin{cases} 4x-4y-4z=8 & :4 \\ 6y-2x-2z=8 & :2 \\ 7z-x-y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-z=2 \\ 3y-x-z=4 \\ 7z-x-y=8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2+y+z \\ 3y-2-y-z-z=4 \\ 7z-2-y-z-y=8 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 2y-2z=6 \\ 6z-2y=10 \end{cases}$$

$$4z=16$$

$$\boxed{z=4}$$

$$\begin{cases} x-y-4=2 \\ 3y-x-4=4 \\ 28-x-y=8 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x-y=6 \\ 3y-x=8 \end{cases}$$

$$2y=14$$

$$\boxed{y=7}$$

$$x-7=6$$

$$\boxed{x=13}$$

+

Ответ: изначально у Саши было 13 биткоинов, у Паши — 7 биткоинов, у Аркаши — 4 биткоина

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

Заметим, что т.к. номера домов шли по порядку ⇒ дома имеют все однозначные номера (это очевидно), двузначные (одних однозначных не хватит, т.к. их всего 9), трёхзначные (по 2 таблички) (т.к # однозначных + # двузначных = 189 табличек, что < 1917), а четырёхзначных не будет, т.к. # однознач. + # двузнач. (по 2 таблички) + # трёхзнач. (по три таблички) = 3189 табличек > 1917

Обозначим за x – # трёхзначных чисел.

⇓

$$9\cdot1+90\cdot2+x\cdot3=1917$$

$$3x=1728$$

$$x=576$$

⇓

домов на проспекте = $9+90+576=675$

min # равных стопок = min делителю числа 675, отличному от 1

min делитель числа $675=3$.

⇓

min # равных стопок $=3$ ⇒ max высота стопки $=\frac{675}{3}=225$

Ответ: # домов на проспекте = 675; да, кучки одинаковой высоты сложить можно; min # стопок = 3, max высота = 225.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RCP 60 - 46

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

x – сумма чисел в 1-ой строке

Тогда

$nx + \frac{1+(n-1)}{2} \cdot (n-1)$ – сумма всех чисел с одной стороны

с другой стороны сумма всех чисел $= \frac{1+n^2}{2} \cdot n^2$

$$\Downarrow$$

$$nx + \frac{1+(n-1)}{2} = \frac{1+n^2}{2} \cdot n^2 \quad | \cdot 2$$

$$2nx + n^2 - n = n^2 + n^4$$

$$n(2x-1) = n^4$$

$$2x - 1 = n^3$$

+

Т.к. x – натуральное $\Rightarrow 2x-1$ – нечётное $\Rightarrow n^3$ – нечётное $\Rightarrow n$ – нечётное.

Пример построения чисел в таблице:

~~Заполним~~ Пронумеровываем ~~чисел~~ столбцы в таблице с лева направо от 1 до n. ~~Начиная~~ Заполняем таблицу по столбикам, начиная с 1-ого: в первый столбик сверху вниз выставляем числа от 1 до n, во второй столбик снизу вверх выставляем числа от n+1 до 2n в третий столбик выставляем сверху вниз числа от 2n+1 до 3n и т.д.. Пример работает, т.к после заполнения нечётного столбца таблица подходит под условие, а после заполнения чётного столбца сумма во всех строках — одинакова т.к. # столбцов – нечётное, т.к. n – нечётное ⇒ таблица будет подходить под условие.

Ответ: ~~[illegible]~~; любое нечётное n.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МБОУ „СОШ №11"	VA 29-25
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Казаков

ИМЯ Максимилиан

ОТЧЕСТВО Эдуардович

Дата рождения 28.08.2002 **Класс:** 9

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ________________

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VA 29-25

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^4+4px^3=px^2-4x^2-4px+p$

$4x^4+4x^2=-4px^3+px^2-4px+p$

$4x^2(x^2+1)=-4px(x^2+1)+p(x^2+1)$

$4x^2(x^2+1)+4px(x^2+1)-p(x^2+1)=0$

$(x^2+1)(4x^2+4px-p)=0$

$x^2+1=0$ или $4x^2+4px-p=0$ - квадратное ур-ие отн. x

$x^2=-1$

$\varnothing$

Чтобы квадратное уравнение имело рациональные корни (при условии, что коэф. a, b - целые) дискриминант должен быть равен квадрату рационального числа

$D=b^2-4ac=(4p)^2-4\cdot4\cdot(-p)=16p^2+16p=$

$=16p(p+1)$

$16p(p+1)=n^2$, где n - рациональное число

$n=\sqrt{16p(p+1)}$

+

$n=4\sqrt{p(p+1)}$ т.к подкоренное выражение - произведение двух послед. целых чисел, то подкоренное выражение может быть равно только 0, чтобы n - было рационал. числом

$p(p+1)$ - подкор. выражение

$p(p+1)=0$

$p=0$ или $p+1=0$

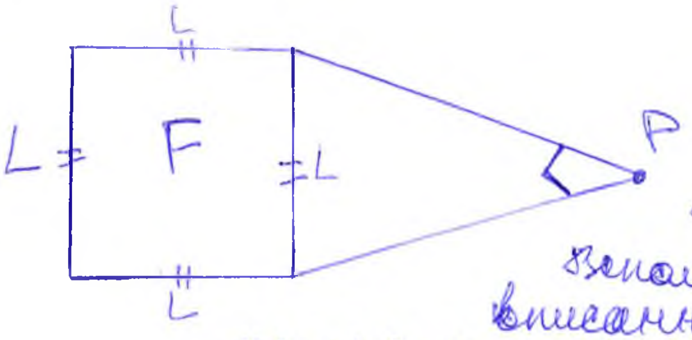
$p=-1$

Значит, чтобы корни ур-ия были рациональными числами p должен быть равен 0 или -1

Ответ: при $p=-1$, $p=0$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

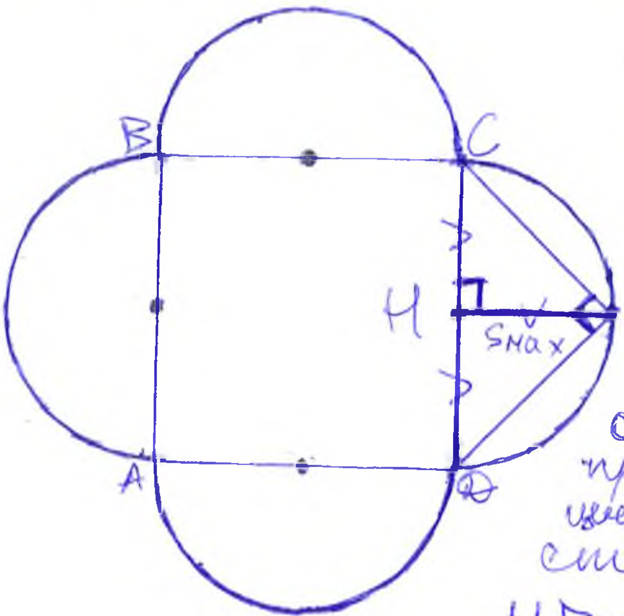


Схематично представим как выглядит данная ситуация.

$\angle P$ опирается на сторону L.

Вспомним, что в окружности вписанный угол, опирающийся на диаметр всегда равен $90°$. Это подходит по условию.

1) Значит, геометрическое место точек, из которых будет видна будка, — окружность с диаметром L, т.е с радиусом $\frac{L}{2}$



2) Касании будки (~~точки~~) (точки A, B, C, D) будет минимальное расстояние, с которого видна будка $\Rightarrow$ $S_{min} = 0$

3) Максимальное расстояние с которого видна будка будет между центром окружности и точкой на окружности, лежащей на прямой, кот. принадлежит центр, перпендикулярной стороне L

$HP = HC = HD = R = \frac{L}{2} \Rightarrow$

$S_{max} = \frac{L}{2}$

Ответ: ~~$S_{min}=0$~~ $S_{min} = 0$, $S_{max} = \frac{L}{2}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17031

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VA 29-25

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N4

$x[x[x[x]]]<2018$

$[x]=M,\ M\le x$

$x[x]=M,\ M\le x$

$x[x[x]]=M,\ M\le x$

$x[x[x[x]]]=M,\ M\le x$

Чтобы везде был один и тот же x, M должен быть равен x $\Rightarrow$ x – целое число (т.к. M – целое, и т.к надо найти все положит. вещественные числа x, что x – натуц. число

$M<2018 \Rightarrow$ ~~$x<2018$~~ $0<x<2018$

Ответ: x принадлежит множеству чисел $\{1,2\ldots 2017\}$

Это неверный вывод

F

Они не обяз-ны целые

N5

$x^2+y^2+z^2 \vdots 7$

Приведём ряд квадратов чисел множества $\{1,2\ldots,70\}$

число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
квадрат	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256

$1+4+9=14 \vdots 7$; $16+25+36=77 \vdots 7$; $49+64+81=194 \not\vdots 7$; $64+81+100=245 \vdots 7$; $121+144+169=434 \vdots 7$; $196+225+256=677 \not\vdots 7$ – складывали квадраты упорядоч. троек

Получим закономерность, что близстоящие тройки чисел образует сумму квадратов кратной 7, т.е числа 1-2-3, ~~4-5~~ 4-5-6, 8-9-10, но 7-ое число такое не образует $\Rightarrow$ из 7 чисел образуется 2 тройки удовл. условию. Воспользуемся методом математической индукции, и получим что из этого множества из 70 чисел получается $\frac{70}{7}\cdot 2=20$ упорядоченных троек

Ответ: 20 упорядоченных троек

неверно

F

Лист 03 из 03

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

город Красноярск

Место проведения

УЕ 76-67

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Казаков

ИМЯ Михаил

ОТЧЕСТВО Вячеславович

Дата рождения 21.07.2001

Класс: 10

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 6 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Каз

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЧЕ 76-67

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Заметим, что $997 = 990 + 7 = 9 \cdot 110 + 7 \cdot 1$. Значит, найдем количество пар $(n;m)$ таких, что

$9m + 7n = 997$; $n \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{N}$

$9m = 997 - 7n$, значит,

$(997 - 7n) \vdots 9$

Заметим, что $997 \bmod 9 = 7$. Постепенно отнимая от 997 семерку, заметим период:

$\{\underbrace{7; 0; 2; 4; 6; 8; 1; 3; 5}_{9\text{ чисел}}; 7; 0; \dots\}$ - остатки от деления $(997 - 7n)$ на 9

Тогда

$9m = 990 - 7 \cdot 9P$; $P \in \mathbb{N}$

Количество пар $(n;m)$ вычислим по формуле:

$$\left[\frac{990}{63}\right] = \left[\frac{110}{7}\right] = 15.$$

Таким образом пары $(n;m)$ будут выглядеть так:

$(1;110)$; $(10;103)$; ...

$(7+990)$; $(70+927)$; ...

Ответ: 15

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 4.

Заметим, что

$x = \sqrt[[x]]{N}$

$[x] \leq \sqrt[[x]]{N} < [x]+1$

$1 \leq N \leq 2018$

$[x]^{[x]} \leq N < ([x]+1)^{[x]}$

Пусть $[x]=m$, тогда найдем все N, удовлетворяющие вышепоставленному условию.

$m^m \leq N < (m+1)^m$. Так как $5^5 = 625\cdot 5 > 2018$, то $0 < m < 5$; $m \in \mathbb{Z}$.

$1^1 \leq N < 2^1$; $2^2 \leq N < 3^2$; $3^3 \leq N < 4^3$; $4^4 \leq N < 5^4$

$N=1$; $N \in \{4;5;\dots;8\}$; $N \in \{27;28;\dots;63\}$; $N \in \{256;257;\dots;624\}$

Найдем количество N.

$1 + (8-4+1) + (63-27+1) + (624-256+1) =$
$= 412$

Ответ: 412

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N1

Если $x_1=x_2=x_3=x$, то

$2\cdot 3x+4x^3=3\cdot 3x^2+1$

$4x^3-9x^2+6x-1=0$

Заметим, что $x=1$ является корнем уравнения:

$4\cdot 1^3-9\cdot 1^2+6\cdot 1-1=0$

$0=0$, верно.

Разделим уравнение на $x-1$.

$$\begin{array}{r|l} 4x^3-9x^2+6x-1 & x-1 \\ \underline{4x^3-4x^2} & \overline{4x^2-5x+1} \\ -5x^2+6x & \\ \underline{-5x^2+5x} & \\ x-1 & \end{array}$$

Тогда

$4x^3-9x^2+6x-1=(x-1)(4x^2-5x+1)$

Найдем остальные корни уравнения

$4x^2-5x+1=0$

$x=\frac{1}{4}$; $x=1$. Так как, по условию, $x<1$, то $x=\frac{1}{4}$.

~~Если $x_1=x_2=x,\ x_3=x+m,\ m\in R$, то~~

~~$6x+2m+4x^3+4x^2m=9x^2+6mx+1$. Так как из $6x+4x^2=9x^2+1$, то~~

~~$2m+4x^2m=6mx$~~

~~$4x^2-6x+2=0$~~

~~$D=9-4\cdot 4\cdot 2<0$;~~

Если $x_1=x+n;\ x_2=x+m;\ x_3=x+p,\ n\in R,\ m\in R,\ p\in R$, то

$6x+2(n+m+p)+4x^3+4mnp+4mnx+4mpx+4npx+$
$+4mx^2+4nx^2+4px^2=9x^2+6nx+6mx+6px+3mn+3pn+3pm$

Из $4x^3+6x=9x^2+1$, $x=\frac{1}{4}$, тогда

$2(n+m+p)+4mnp+mn+np+mp+\frac{1}{4}(m+n+p)=\frac{6}{4}(m+n+p)+3(mn+np+mp)$

$16nmp+3(n+m+p)=8(mn+pm+pn)$

Если $n=m=p$, то $n=m=p=\frac{3}{4}$; $x+n=1$ – ~~неверно~~ неудовлетворяет условию

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если какая-то из переменных будет уменьшаться, то
$n=m=a$; $p=a-b$, тогда.

$16a^3-16a^2b+3\cdot3a-3b=8\cdot3a^2-8\cdot2ab$

$16a^3+9a=24a^2$, тогда

$-16a^2b-3b=-16ab$; $b\neq0$, тогда

$16a^2-16a+3=0$

$D=16^2-4\cdot16\cdot3=256-(256-64)=64$

$a=\frac{16\pm8}{32}$

$a=\frac{3}{4}$; $a=\frac{1}{4}$. Заметим, что если $a\neq\frac{3}{4}$. $a=\frac{1}{4}$, то $x=\frac{1}{2}$, тогда

~~$b(16a^2-16a+3)$~~

$6x+4x^3=9x^2+1$

$3+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}+1$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, неверно. Тогда $x=\frac{1}{4}$; $x_1+x_2+x_3=\frac{3}{4}$

Ответ: $\frac{3}{4}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЧЕ 76-67

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Рассмотрим крайний случай, когда наименьшее m максимизировано. Также для максимизирования m $3b_1 = b_{21}$, где b_i – длина i-ого куска.

~~По формуле суммы геометрической прогрессии:~~

$\cancel{\frac{b_1(q^{n}-1)}{q-1}}$; ~~$b_{21}=3b_1$~~

По формуле n-ого члена геометрической прогрессии

$b_{21}=b_1q^{20}=3b_1$

$3b_1=b_1q^{20}$;

$q^{20}=3$;

$q=\sqrt[20]{3}$. Так как соседние члены прогрессии в q раз отличаются, то при любом наборе кусков найдутся два куска, длины которых отличаются не более, чем в q раз. Тогда $m=q=\sqrt[20]{3}$

Ответ: $\sqrt[20]{3}$

рассмотрен один частный случай

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Рассмотрим вид сверху.

Если из поперечного сечения фигура видна под углом 45°, то геометрическое место точек из которых видна фигура - овал (если $x=L$, то окружность). Рассмотрим вид сбоку.

Если $L < x$, то минимальное расстояние - L, иначе L - максимальное расстояние.

Ответ: L.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МБОУ „СОШ № 11"

Место проведения

VA 29-27

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Калинина КАЛИНИНА

ИМЯ Маргарита МАРГАРИТА

ОТЧЕСТВО Витальевна ВИТАЛЬЕВНА

Дата рождения 27.08.2002

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: 2(ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ)

Работа выполнена на 04 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: МКалинина

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1.

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^4+4px^3-px^2+4x^2+4px-p=0$

$(4x^4+4x^2)+(4px^3+4px)-(px^2+p)=0$

$4x^2(x^2+1)+4px(x^2+1)-p(x^2+1)=0$

$(x^2+1)(4x^2+4px-p)=0$

$\left[\begin{array}{l} x^2+1=0 \\ 4x^2+4px-p=0 \end{array}\right.$

I) $x^2+1=0$

$x^2=-1$

Уравнение не имеет корней, т.к. $x^2\geq 0$, а $-1<0$.

II) $4x^2+4px-p=0$

$k=2p$

$D_1=4p^2+4p=4p(p+1)$

Чтобы уравнение имело корни, $4p(p+1)$ должно быть неотрицательным числом: $4p(p+1)\geq 0$

1) $4p(p+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} p=0 \\ p+1=0 \end{array}\right.$

1. $p=0$

$4x^2+4\cdot 0x-0=0$

$4x^2=0$

$x=0$ - рациональное число

2. $p+1=0$

$p=-1$

$4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2=0$

$2x-1=0$

$2x=1$

$x=0{,}5$ - рациональное число

2) $4p(p+1)>0$

Чтобы корни уравнения были рациональными числами, число $\sqrt{D_1}=\sqrt{4p(p+1)}=2\sqrt{p(p+1)}$ должно быть целым. Но такое не-

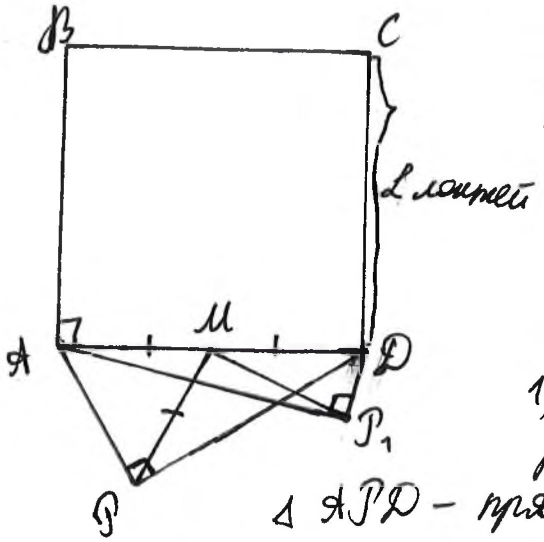
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

возможно, т.к. число $p(p+1)$ не может являться точным квадратом при таких p, что $4p(p+1)>0$.

Из I) и II) следует, что корни уравнения будут рациональными числами при $p=0$ и $p=-1$.

Ответ: $p=0$ и $p=-1$.

№2.



Рассмотрим плоскость поперечного сечения будки. ($ABCD$ будка квадрат в поперечном сечении). Возьмём произвольную т. P, из которой нам видна будка. Тогда по условию $\angle APD=90°$.

1) Построим медиану PM к стороне AD квадрата. Тогда, т.к $\triangle APD$ — прямоугольный, то медиана PM, проведённая к гипотенузе AD: $PM=AM=MD=\frac{AD}{2}=\frac{L}{2}$.

2) Если мы возьмём любую другую тP_1, из которой видна будка (квадрат $ABCD$), то $\angle AP_1D=90°$ (по условию) и аналогично 1) можно доказать, что $P_1M=\frac{L}{2}$.

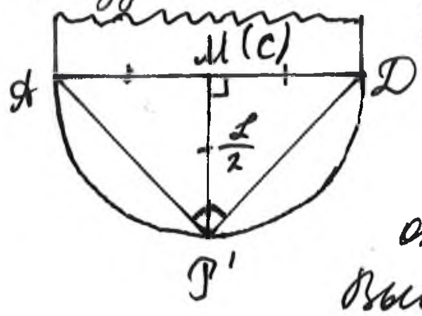
Значит, для т. P, P_1 и всех остальных, из которых видна будка: они будут равноудалены от середины той стороны будки, ~~нас~~ рядом с которой они расположены (например, для т. P и P_1 это сторона AD), на расстояние $\frac{L}{2}$, т.е. эти точки будут лежать на полуокружностях с центрами в серединах сторон будки (квадрата $ABCD$) и радиусом $\frac{L}{2}$ локтей, построенных на сторонах будки (квадрата $ABCD$), как на диаметрах.

Следовательно, геометрическое место всех точек на равнине, из которых будка видна — полуокружности.

построенные на сторонах будки как на диаметрах с центром в серединах сторон будки и радиусом $\frac{L}{2}$.

3) Будка будет видна из т. A, B, C и D, т.к. $ABCD$ — квадрат, и все его углы равны $90°$. Это и будет минимальным расстоянием, равным 0.

4) Найдём максимальное расстояние, с которого видна будка. Пусть оно будет равно $P'C$, т.е. $P'C$ — высота $\triangle P'AD$.



Рассмотрим $\triangle P'AD$. По условию он прямоугольный. Из т. P' видно будку, значит, т. P' лежит на окр $(M; \frac{L}{2})$. Тогда $P'M = \frac{L}{2}$. Высота $P'C$ принимает наибольшее значение, если т C и M совпадают, т.е. $P'C = \frac{L}{2} = P'M$.

Ответ: минимальное расстояние равно 0, максимальное $\frac{L}{2}$ локтей; геометрическое место точек: полуокружности, построенные на сторонах будки как на диаметрах.

№5.

Заметим, что если число x:

1) $x \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 7$
2) $x \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 7$
3) $x \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv \cancel{2 \pmod 7} \equiv 2 \pmod 7$
4) $x \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv \cancel{2 \pmod 7} \equiv 2 \pmod 7$
5) $x \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 7$
6) $x \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv \cancel{1 \pmod 7} \equiv 1 \pmod 7$
7) $x \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 7$.

Заметим, что число $x^2 + y^2 + z^2$ будет кратно 7 только в двух случаях:

1. квадрат одного числа сравним с двойкой по модулю семь, квадрат другого — с четвёркой по модулю семь, квадрат 3-го — с единицей по модулю 7.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VA 29-27

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. все три числа (x, y и z) будут кратны 7.

~~В 1-ом случае~~ Из чисел множества $\{1, 2 \ldots 70\}$ будет:

* 20 чисел, квадрати которых дают остаток два при делении на 7 (все числа, которые дают остаток ~~3 или~~ 3 или 4 при делении на 7)

* 20 чисел, квадраты которых дают остаток 1 при делении на 7 (все числа, которые дают остаток 1 или 6 при делении на 7)

* 20 чисел, квадраты которых дают остаток 4 при делении на 7 (все числа, которые дают остаток 2 или 5 при делении на 7)

* 10 чисел, кратных 7.

Значит, в 1ом случае будет $20 \cdot 20 \cdot 20 = 8000$ таких троек (x, y, z), а во 2-ом – $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ троек, т.е всего 8720 троек чисел

Ответ: 8720 троек.

± неверно

№4.

Заметим, что $x < 7$: $7^4 > 2018$ и $x < 6,8$:

$6,8[6.8[6,8[6,8]]] > 2018$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ-Москва

Место проведения

KS 12-88

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Кармазин

ИМЯ Павел

ОТЧЕСТВО Александрович

Дата рождения 13.07.2003 **Класс:** 8

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 04 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ____________

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Рассмотрим начало этой последовательности:

$2018 \quad 2018x \quad x \quad \frac{1}{2018} \quad \frac{1}{2018x} \quad \frac{1}{x} \quad 2018 \ldots$

Пусть 3 число равно x, тогда второе — $2018x$, а значит, 4 — $\frac{1}{2018}$, 5 — $\frac{1}{2018x}$, а 6 — $\frac{1}{x}$. Тогда 7 будет число 2018, а значит, цикл замкнулся! Длина цикла — 6.

+

$100 : 6 = 16$ (ост. 4)

4 число цикла — 100 число последовательности.

Ответ: последнее число равно $\frac{1}{2018}$.

№2.

Пусть из турнира выбыло n команд, тогда всего команд $2n$.

Выбывшие сыграли между собой $\frac{n(n-1)}{2}$ раз. (каждая из n команд сыграла с $n-1$, а каждая игра была посчитана 2 раза)

Оставшиеся тоже сыграли между собой $\frac{n(n-1)}{2}$ раз, т.к. турнир уже закончился.

Пусть между выбывшими и оставшимися было сыграно xn игр (каждая из n выбывших сыграла по x игр — по условию, все сыграли одинаковое кол-во). Запишем ур-ние:

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + xn = 77$$

$$n(n-1) + xn = 77$$

$$n(n-1+x) = 77$$

Поскольку n и x натуральны, а у 77 4 делителя — 1; 7; 11; 77, n равно:

$n=1$ $\quad n-1+x=77 \quad x=77$ — не подходит, т.к. между 2n=2 ком. не м.б. 77 игр.

$n=7$ $\quad n-1+x=11 \quad 6+x=11 \quad \underline{x=5}$ ✓

$n=11$ $\quad n-1+x=7 \quad 10+x=7, \quad x \notin \mathbb{N}$ ✗

$n=77$ $\quad n-1+x=1 \quad 76+x=1 \quad x \notin \mathbb{N}$ ✗

+

Итак, единственно возможный вариант — $n=7$, а команд было 14. Ответ: 14.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3.

Заметим, что $b=\frac{a+c}{2}$ (ср. арифм.).

Теперь рассмотрим 3 случая:

1)

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}=\frac{1}{b}$$

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}=\frac{\frac{a+c}{ac}}{2}=\frac{a+c}{2ac}$$

Подставляем знач. b:

$$\frac{1}{\frac{a+c}{2}}=\frac{a+c}{2ac}$$

$$\frac{2}{a+c}=\frac{a+c}{2ac}$$

$$(a+c)^2=4ac$$

$$a^2+2ac+c^2=4ac$$

$$a^2-2ac+c^2=0$$

$$(a-c)^2=0$$

$$a-c=0$$

$$a=c$$

$$b=\frac{a+c}{2}=a=c$$

Знaчит, подходят все тройки одинаковых чисел.

частичный ответ (+)

2)

$$\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}=\frac{1}{a}$$

$$\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}=\frac{\frac{b+c}{bc}}{2}=\frac{b+c}{2bc}=\frac{1}{a}$$

$$2bc=ab+ac$$

$$b(2c-a)=ac$$

$$b=\frac{ac}{2c-a}=\frac{a+c}{2}$$

$$2ac=(a+c)(2c-a)=$$

$$=\cancel{2ac}-a^2+2c^2-ac$$

Откуда $\boxed{a=\frac{2c^2}{1-c}}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ KS 12 - 88

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$b=\frac{a+c}{2}=\frac{\frac{2c^2}{1-c}+c}{2}=\frac{\frac{2c^2+c-c^2}{1-c}}{2}=\frac{c^2+c}{2-2c}$$

Значит, подходят числа вида:

$$\left\{\frac{2c^2}{1-c};\ \frac{c(c+1)}{2-2c};\ c\right\}$$

③ $$\frac{1}{c}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}=\frac{\frac{a+b}{ab}}{2}=\frac{a+b}{2ab}=\frac{a+\frac{a+c}{2}}{2a\frac{a+c}{2}}=\frac{\frac{3a+c}{2}}{a^2+ac}=$$

$$=\frac{3a+c}{2a^2+2ac}$$

$$\frac{1}{c}=\frac{3a+c}{2a^2+2ac}$$

$$2a^2+2ac=3ac+c^2=ac+c^2+2ac$$

$$2a(a+c)=c(a+c)+2ac$$

$$(2a-c)(a+c)=2ac$$

$$2a^2+\cancel{2ac}-ac-c^2=\cancel{2ac}$$

$$2a^2-ac-c^2=0$$

$$2a^2-ac=c^2$$

$$a(2a-c)=c^2$$

$$a=\frac{c^2}{2a-c}$$

$$c=\sqrt{a(2a-c)}$$

$$b=\frac{\frac{c^2}{2a-c}+\sqrt{a(2a-c)}}{2}$$

$$\left\{\frac{c^2}{2a-c};\ \frac{c^2+(2a-c)\sqrt{a(2a-c)}}{4a-2c};\ \sqrt{a(2a-c)}\right\}$$

(+)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

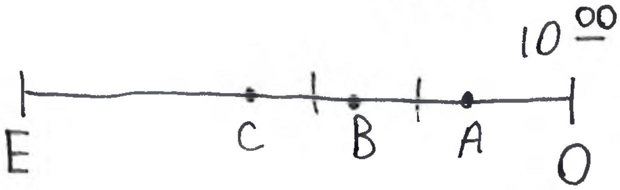


рис. 1а.

Покажем, почему невозможно такое:

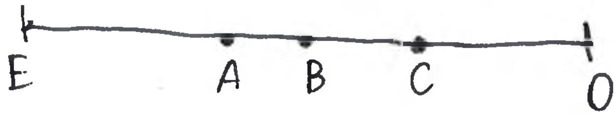
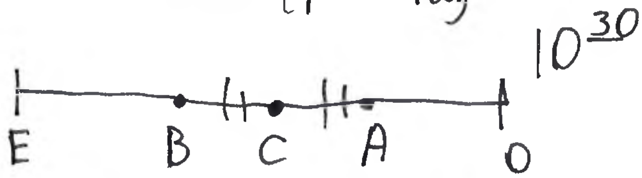
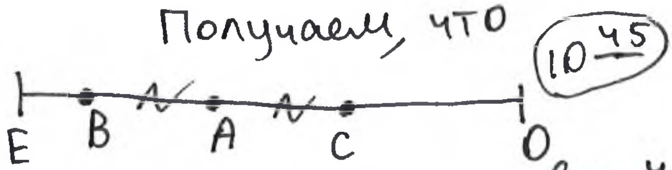


рис. 1б.

Если это так, то A быстрее B.
Тогда AB будет увеличиваться быстрее, чем BC, а значит, через 30 мин. BC ≠ AC. ※
Значит, B быстрее A, а в 10^{00} встречи не было (рис. 1а)



Получаем, что



Ответ: в 10^{45}.

−

№5.

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)=$$
$$=2017^2\cdot 2018^2=(2017\cdot 2018)^2$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\dots a_nb_n=2017\cdot 2018=\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+\dots b_n^2)}$$

?? ⇓ получаем, что
$$a_1/b_1+a_2/b_2+\dots a_n/b_n=0$$

Значит, $\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{2017^2}{2018}=\frac{a_2}{b_2}\dots\dots\frac{a_n}{b_n}$

неверно

−

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

EG 98-38

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Квардакова

ИМЯ Юлия

ОТЧЕСТВО Михайловна

Дата рождения 10.04.2001 **Класс:** 10

Предмет математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ______

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EG 98-38

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть 997 миллионов можно набрать $k \cdot 7$ миллонов и $n \cdot 9$ миллонов

$$997 = 7k + 9n$$

$$7 \cdot 1 + 110 \cdot 9 = 7k + 9n$$

$$9(n-110) = 7(1-k)$$

$$9(n-110) \vdots 9 \Rightarrow 7(1-k) \vdots 9 \Rightarrow (1-k) \vdots 9 \Rightarrow k = -9a+1, \ a \in Z$$

$$n = \frac{7(1-k)}{9} + 110 = \frac{7 \cdot 9a}{9} + 110 = +7a + 110, \ a \in Z$$

~~т.к. $7k \le 997$~~

~~$7(9a+1) \le 997$~~

~~$9 \cdot 7a + 7 \le 997$~~

~~$9 \cdot 7a \le 990$~~

~~$7a \le 110$~~

~~$a \le 15\frac{5}{7}$~~

~~$k = 9a+1, k \in N_0, a \in Z \Rightarrow a \in \{0, 1, 2, \dots, 15\}$~~

т.к. $0 \le 7k \le 997$

$$0 \le 7(-9a+1) \le 997$$

$$0 \le -63a + 7 \le 997$$

$$-7 \le -63a \le 990$$

$$-\frac{7}{9} \le -7a \le 110$$

$$+\frac{1}{9} \ge a \ge -15\frac{5}{7}$$

$k = 1-9a, k \in N_0, a \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \{-15; -14; \dots; -1; 0\}$

Всего вариантов выбрать k 16

Значит, вариантов представление 997 миллонов через 7 и 9 миллонов 16 все они:

k - кол-во монет в 7 миллонов

n - кол-во монет в 9 миллонов

$$\begin{cases} k = 1 - 9a \\ n = 7a + 110 \end{cases}, \ a \in \{0; -1; -2; \dots; -15\}$$

Ответ: 16 вариантов

кол-во 7 миллонов $k = 1 - 9a$

кол-во 9 миллонов $n = 7a + 110$, $a \in \{-15; -14; \dots; -1; 0\}$

№5

$\frac{1}{3} \le \frac{a_n}{a_k} \le 3 \Rightarrow \frac{1}{3}a_k \le a_n \le 3a_k$ для любых n и $k \le 21$, где a_i - кусок электрокабеля, имеющий номер i

т.к. $\frac{1}{3}a_k \le a_n \le 3a_k \Rightarrow m \ge \frac{1}{3}$ $\min m = \frac{1}{3}$

Ответ: $m = \frac{1}{3}$

Найдена оценка снизу

Лист 01 из 04

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

• Допустим, $x \geq 4 \Rightarrow [x] \geq 4$ $\quad x^{[x]} \geq 4^4 = 4096$,
но $N \in \{1; 2; \dots 2018\}$
значит, $x \geq 4$ не удовлетворяют условию.

• При $0 < x < 1$ $\quad [x] = 0$ $\quad x^{[x]} = x^0 = 1$ $\quad \underline{N=1}$

• При $x = 1$ $\quad x^{[x]} = 1^1 = 1$ $\quad \underline{N=1}$

• При $1 < x < 2$ $\quad [x] = 1$ $\quad x^{[x]} = x = \cancel{a}N$
~~$1 < a < 2$, $a \notin Z$~~
$1 < N < 2$, $N \notin Z$

• При $x = 2$ $\quad x^{[x]} = 2^2 = 4$ $\quad \underline{N=4}$

• При $2 < x < 3$ $\quad [x] = 2$ $\quad x^{[x]} = x^2$

$2^2 < x^{[x]} < 3^2$
$4 < x^{[x]} < 9$
$4 < N < 9$

значения $N = 5; 6; 7; 8$ достигаются при $x = \sqrt{N}$ $\quad \underline{N=5, N=6, N=7, N=8}$

+

• При $x = 3$ $\quad x^{[x]} = 3^3 = 27$ $\quad \underline{N=27}$

• При $3 < x < 4$ $\quad [x] = 3$ $\quad 3^3 < x^{[x]} < 4^3$
$27 < x^{[x]} < 64$
$27 < N < 64$

значение N от 28 до 63 достигаются при $x = \sqrt[3]{N}$ $\quad \underline{N=28 \dots N=63}$

Все x, удовлетворяющие условию рассмотрены,
$N \in \{1; 4; 5; 6; 7; 8; 27; 28; 29; \dots; 62; 63\}$

Всего вариантов N $\quad 1 + 5 + 37 = 43$ $\quad$ + … есть еще числа

Ответ: 43

№1

~~$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3\sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}$~~

Ответ: 2 $\quad$? $\quad$ –

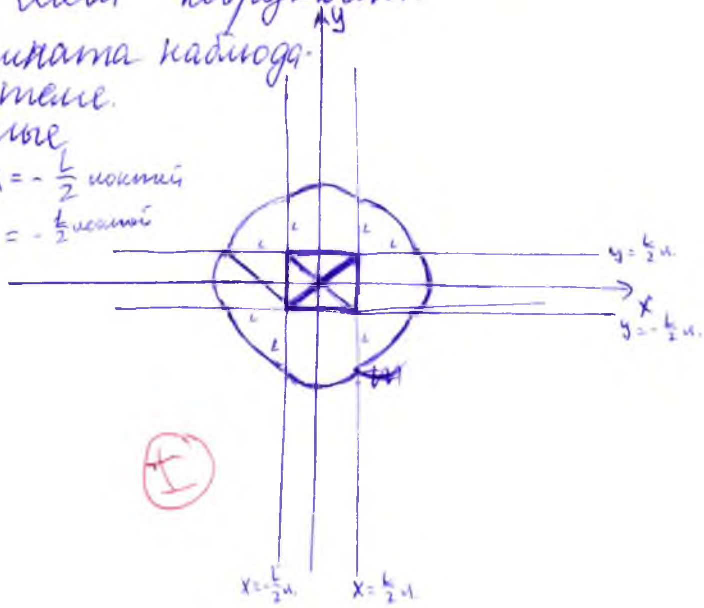
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Пусть точка пересечение диагоналей квадрата (сечение будки) - начало координат, а её стороны параллельны осям координат.

Пусть $(x;y)$ - координата наблюдателя.

Проведём прямые
$x = \frac{L}{2}$ локтей, $x = -\frac{L}{2}$ локтей
$y = \frac{L}{2}$ локтей, $y = -\frac{L}{2}$ локтей



+

• Если наблюдатель стоит между прямыми $x=\frac{L}{2}$л и $x=-\frac{L}{2}$л или между $y=\frac{L}{2}$л и $y=-\frac{L}{2}$л, то у будки он будет видеть (если видит) только одну сторону.

ГМТ - ~~точки~~ пересечение области между этими прямыми с окружностями, содержащими углы, из которых сторона видна под углом 45°

• кратчайшее расстояние - от точки пересечение окружности с прямой, равно L (из прямоугольного равнобедренного треугольника)

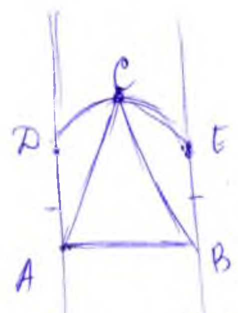
• максимальное расстояние - от середины образовавшейся дуги:

$= \rho(C;AB) = \sqrt{BC^2-(\frac{1}{2}AB)^2} = \sqrt{\frac{L^2}{2-\sqrt{2}} - \frac{L^2}{4}} =$

$= L\sqrt{\frac{4-2+\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}} = L\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}} =$

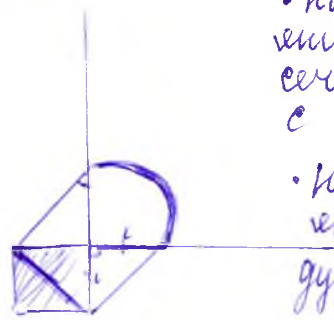
$= L\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})(8+4\sqrt{2})}{64-32}} = L\sqrt{\frac{24+16\sqrt{2}}{32}} =$

$= L\sqrt{\frac{12+8\sqrt{2}}{16}} = L\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{4}} = \frac{L\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2}$



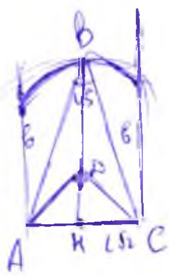
$\triangle CAB$ $AB=L$, $\angle C = 45°$
$AC=AB=a$
$AB^2 = AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C$ (по т. косинусов)
$L^2 = 2a^2 - a^2\sqrt{2}$ => $a = \frac{L}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{L\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

• Если наблюдатель стоит не в тех промежутках, то он будет видеть часть квадрата - треугольник, опирающийся на диагональ квадрата.



• наименьшее расстояние - от точки пересечение окружности с прямой $= L$

• наибольшее расстояние - от центра дуги до вершины квадрата



$\triangle ABC$ $2L^2 = 2b^2 - b^2\sqrt{2}$

$b^2 = \frac{2L^2}{2-\sqrt{2}}$ $b = L\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}$

$\rho(B; AC) = \sqrt{\frac{2L^2}{2-\sqrt{2}} - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{8L^2 - 2L^2 + L^2\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt{\frac{6L^2 + L^2\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}} = L^2\sqrt{\frac{6+\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}} = L^2\sqrt{\frac{(6+\sqrt{2})(8+4\sqrt{2})}{64-32}} = L^2\sqrt{\frac{80+32\sqrt{2}}{32}} = L^2\sqrt{\frac{10+4\sqrt{2}}{4}} =$

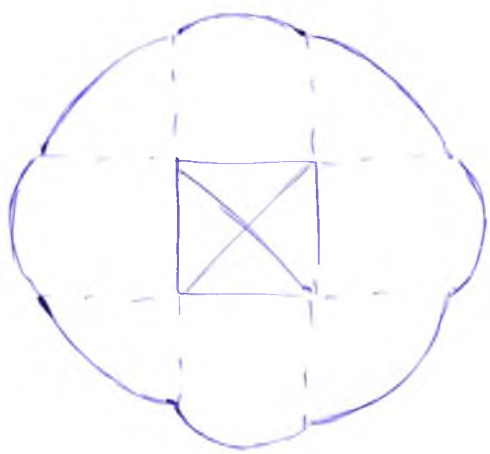
$= \frac{L\sqrt{10+4\sqrt{2}}}{2}$

$\rho(B; D) = \frac{L\sqrt{10+4\sqrt{2}}}{2} - \frac{L\sqrt{2}}{2} = \frac{L}{2}\left(\sqrt{10+4\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)$

Итого: наименьшее расстояние - L

наибольшее - $\frac{L}{2}(\sqrt{10+4\sqrt{2}} - \sqrt{2})$

ГМТ - пересечение окружностей с промежутками между прямыми.



Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

KS 12 - 33

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Клочкова

ИМЯ Анастасия

ОТЧЕСТВО Константиновна

Дата рождения 03.11.2002

Класс: 8

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: АК

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.
Пусть x – число команд в начале тура, тогда всего матчей должно было быть $x\cdot(x-1):2=0{,}5x^2-0{,}5x$. Дисквалифицировано 0,5x команд. Это 0,5x команд сыграли все матчи между собой, т.е. $0{,}5x\cdot(0{,}5x-1):2=(0{,}25x^2-0{,}5x):2=0{,}125x^2-0{,}25x$. Число матчей сыгранное каждой выбывшей командой одинаково, т.е. если одна из команд сыграла с невыбывшей командой, то и все остальные тоже это сделали. В результате оказалось сыграно 77 матчей, т.е. оставшиеся командой (их игры) + игры выбывших = 77.
~~Можно получить такое уравнение:~~

$\cancel{0{,}125x^2-0{,}25x+}\underbrace{0{,}5x\cdot(0{,}5x-1):2}_{\text{все игра между оставшимися}}=77$

$7700:25=308$

~~$0{,}125x^2-0{,}25x+0{,}125x^2-0{,}25x=77$~~
~~$0{,}25x^2-0{,}5x=77\ |:0{,}25$~~
$x^2-2x=308$

Разложим 77 на множители: $77=11\cdot7$, что можно представить как $77\cdot2=154$ (все игры по 2 раза)
~~Т.к. общее число матчей это $x\cdot(x-1):2$, то~~
~~11 команд сыгравших~~
$=11\cdot2\cdot7=11\cdot14$, т.е. 14 команд сыграло с 11, хотя должно было с 13.
или 77 с 2 или 22 с 7.

Можно попробовать подставить в уравнение, добавив игры выбывших с невыбывшими.

$0{,}125x^2-0{,}25x+0{,}125x^2-0{,}25x+0{,}5x:2=77$ (если 1 оставшаяся команда сыграла с выбывшими)

$0{,}25x^2-0{,}5x+\cancel{0{,}5x}=77$
$0{,}25x^2=77$
$x^2=\frac{77}{0{,}25}=308$
$x=\sqrt{308}=\sqrt{2^2\cdot11\cdot7}$ Не целое число x

$0{,}25x^2-0{,}5x+x=77$ (2 оставшихся со всеми несоставш.)
$0{,}25x^2+0{,}5x=77$
$0{,}25(x^2+2x)=77$
$x^2+2x=308$
$x(x+2)=308$ не целое x

Не зачеркнуто

$308=2^2\cdot11\cdot7$

$0{,}25x^2-0{,}5x+1{,}5x=77$ (3 оставшихся сыграли со всеми выбывшими)
$0{,}25(x^2+4x)=77$
$x^2+4x=308$
$x(x+4)=308$ не целое x

$0{,}25x^2-0{,}5x+2x=77$ (4 ост + все выб.)
$0{,}25x^2+1{,}5x=77$
$x(x+6)=308$ не целое число x

$0{,}25x^2-0{,}5x+2{,}5x=77$
$0{,}25x^2+2x=77$
$x^2+8x=308$
$x(x+8)=308$
$x=14$.

(+)

Ответ: 14 команд.

№4.
9 О →B →A
10 О →A →B ←C E
10.30 О →A ←C →B E
x О ←C →A →B E

$t_{встр.B,B}=\frac{S}{\vartheta_C+\vartheta_B}$

$t_{встр.A,C}=\frac{S}{\vartheta_A+\vartheta_C}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ KS 12-33

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Пусть скорость „Анина" – V_A; скорость „Санина" → V_C; скорость „Ванина" – V_B

Тогда ~~$1(V_B+V_C)=1(V_B-V_A)+S$~~ ~~$V_B+V_C=V_B-V_A$~~

~~$0,5$~~ $V_B-V_A = S_{весь} - V_B - V_C$

$S_{весь} - 1,5\cdot(V_A+V_C) = \cancel{S_{весь}-V_B\,1,5(V_B+V_C)}$ $\left(1,5-\frac{S}{V_C+V_B}\right)\cdot(V_C+V_B)$

$S_B - 1,5V_A - 1,5V_C = 1,5V_C + 1,5V_B - S_B$

$S_B - 3V_C - 1,5V_A - 1,5V_B = 0$

$2V_B + V_C - V_A - S_B = 0$

$S_B - 2V_C - 2,5V_A + 0,5V_B = 0$

$2S_B = 1,5(2V_C + V_A + V_B)$

$2V_B + V_C = V_A + S_B$

$S_B + 0,5V_B = 2V_C + 2,5V_A$

$S = 0,75(2V_C + V_A + V_B)$ 1

$S_B = 2V_B + V_C - V_A$ 2

$S = 2V_C + 2,5V_A - 0,5V_B$ 3

x - новое время от 9.00

$x(V_B - V_A) = \left(x - \frac{S}{V_A+V_C}\right)(V_A+V_C)$

$x(V_B - V_A) = x(V_A+V_C) - S$

$S = x(V_A+V_C) - x(V_B-V_A) = x(V_A+V_C-V_B+V_A) = x(2V_A+V_C-V_B)$

$x = \frac{S}{2V_A+V_C-V_B} = \frac{2V_B+V_C-V_A}{2V_A+V_C-V_B} = \frac{2V_B+2,5V_B-4,5V_A}{2V_A+2,5V_B-3,5V_A-V_B} = \frac{4,5V_B-4,5V_A}{1,5V_B-1,5V_A} = \frac{4,5(V_B-V_A)}{1,5(V_B-V_A)} = \frac{4,5}{1,5} = 3$ ч.

Попарно приравниваю S: $0,75(2V_C+V_A+V_B) =$ 1 и 2

$= 2V_B + V_C - V_A$

$1,5V_C + 0,75V_A + \cancel{0,75V_B} = 2V_B + \cancel{V_C} - V_A$

$0,5V_C + 1,75V_A = 1,25V_B$ 1 и 2

$V_C = \frac{1,25V_B - 1,75V_A}{0,5} = 2,5V_B - 3,5V_A$

$0,75(2V_C + V_A + V_B) = 2V_C + 2,5V_A - 0,5V_B$ 1 и 3

~~$1,25V_C + 0,75V_A$~~ $+ 0,75V_B = 2V_C + 2,5V_A - 0,5V_B$

$1,25V_B = 0,75V_C + 1,75V_A$

$V_C = \frac{1,25V_B - 1,75V_A}{0,75} = \frac{5}{3}V_B - \frac{7}{3}V_A$

$2V_B + V_C - V_A = 2V_C + 2,5V_A - 0,5V_B$ 2 и 3

$V_C = 2V_B + 0,5V_B - V_A - 2,5V_A$

$V_C = 2,5V_B - 3,5V_A$

Через 3 ч от начала пути „Анин" будет посередине между „Ваниным" и „Саниным"

Ответ: через 3 ч от начала пути или в 12.00

+ Через решение

№1. Если каждое число кроме первого и последнего равно произведению соседних чисел, то получается цепочка повторяющихся чисел. Пусть x - сосед соседа числа 2018.

2018 $2018\cdot x$ x a

~~Тогда~~ Теперь надо, чтобы $2018\cdot x\cdot a = x$, $a = \frac{1}{2018}$.

2018 $2018x$ x $\frac{1}{2018}$ a_2

Чтобы получить из x и a_2 $\frac{1}{2018}$: $a_2\cdot x = \frac{1}{2018}$

Продолжу цепочку

2018	$2018x$	x	$\frac{1}{2018}$	a	$2018a$	2018
1	2	3	4	5	6	7

~~Каждое седьмое число равно 2018~~ a $a\cdot x = \frac{1}{2018}$

1, 7, 13, 19 и т.д. позиции числа 2018

4, 10, 16, 22, 28 и т.д. позиции числа $\frac{1}{2018}$ (последнее число)

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ KS 12-33

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. Ответ: $\frac{1}{2018}$

№5.

$a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=2018^2$

$b_1^2+b_2^2\dots+b_n^2=2017^2$

$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n=2017\cdot2018$

$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)2017\cdot2018=2017^2\cdot2018^2$

$2017\cdot2018(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)=(a_1^2+a_2^2+\dots a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots b_n^2)$

$\frac{3+6+9+12}{1+2+3+4}=\frac{30}{10}=3 \Rightarrow \frac{3x+3(x+y)}{x+(x+y)\dots}=3$ → ?? (не соотв. общ. справа)

$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n}{b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2}=\frac{2017\cdot2018}{2017^2}$?

$a_1/b_1;\ a_2/b_2\dots\ a_n/b_n=\sqrt{\frac{2018}{2017}}$

Возьму цифры 1, 2, 1,5 и 2, 4, 3 (больше в 2 раза)

$2^2+4^2+3^2=29$ $\qquad \frac{29}{7{,}25}=4$ $\qquad 2=\sqrt{4}$

$1^2+2^2+1{,}5^2=7{,}25$

Ответ: $\sqrt{\frac{2018}{2017}}$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ	СУ 38-12	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Коваленко

ИМЯ Марина

ОТЧЕСТВО Аркадьевна

Дата рождения 19.08.2002 **Класс:** 9

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ СУ38-12

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$$

$$4x^4+4px^3-x^2p+4x^2+4px-p=0$$

$$4x^3(x+p)+4x(x+p)-p(x^2+1)=0$$

$$(x+p)(4x^3+4x)-p(x^2+1)=0$$

$$4x(x+p)(x^2+1)-p(x^2+1)=0$$

$$(x^2+1)(4x^2+4xp-p)=0$$

$x^2+1=0$ или $4x^2+4xp-p=0$

$x^2=-1$ нет корней

$D=16p^2+16p=16p(p+1)$

$$x_{1,2}=\frac{-4p\pm4\sqrt{p(p+1)}}{8}=0{,}5\left(-p\pm\sqrt{p(p+1)}\right)$$

Чтобы x было рациональным, надо, чтобы $\sqrt{p(p+1)}$ тоже было рациональным, потому что рац. + иррацион. = иррацион., и ~~p тоже должно быть рацион., т.к. иррац. + иррац. = иррац.~~

Тогда получаем, что $p(p+1)=a^2$. А $p(p+1)$ будет a^2 только тогда, когда одно из чисел (p или $p+1$) будет равно 0 $\Rightarrow$ $p=0$ или $p=-1$, т.к. p и $p+1$ – два подряд идущих числа и у них нет общих делителей и два идущих друг за другом квадратов не бывает $\Rightarrow$ это един. возм. случай

Ответ: $0; -1$.

+

№5

(x,y,z) – подряд идущие 3 числа.

$\{1,2,\dots 70\}$

$x^2+y^2+z^2\ \vdots\ 7$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

продолжение №5

Рассмотрим все остатки при от деления на 7: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Теперь рассмотрим ~~их~~ эти остатки в квадрате:

a	a^2
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

Получаем, возможные остатки квадратов при делении на 7: 0, 1, 2, 4.

Чтобы числа шли подряд и сумма их остатков ⋮ 7, у нас только 2 варианта: когда подряд идут остатки: 1, 4, 2 или когда подряд идут остатки: 2, 4, 1.

Тогда все возможные 3 подряд идущих числа (x, y, z) из множества $\{1, 2, \dots 70\}$ и чтобы $x^2+y^2+z^2 \vdots 7$ будут: когда идет 3 числа подряд ~~Ответ~~ у которых остатки при делении на 7: 1, 2, 3 или когда остатки при делении на 7: 4, 5, 6. Это будут тройки:

~~Ответ: все~~ (1, 2, 3); (4, 5, 6); (8, 9, 10); (11, 12, 13); (15, 16, 17); (18, 19, 20); (22, 23, 24); (25, 26, 27); (29, 30, 31); (32, 33, 34); (36, 37, 38); (39, 40, 41); (43, 44, 45)... таких троек будет: $70 : 7 \cdot 2 = 20$

Ответ: 20 –

это далеко не все варианты

∓

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$x[x[x[x]]] < 2018$

1) Пусть x - целое, тогда:

$x[x[x[x]]]$ ~~<2018~~ $= x^4$

$x^4 < 2018$

max $x^4 = 1296 \Rightarrow x = 6$ => получаем, что ~~при~~ при $x=7$ это будет уже невозможно, т.к. при $x=7$, $x^4 > 2018$.

Тогда получаем, что $0 \leq x \leq 6$, а т.к. используется только целая часть числа $\Rightarrow 0 \leq x < 7$.

2) рассмотрим диапазон $6 < x < 7$.

~~Пусть x~~ Тогда $[x[x]] = [6x]$, т.к. $[x] = 6$. Пусть $[6x] > 6^2 = 36$, возьмем min $\Rightarrow [6x] = 37$. Тогда далее будет: ~~x[8~~ $[37x] = [(6+6+6+6+6+6+1)x] =$
$= [6x+6x+6x+6x+6x+6x+x]$. Как нам уже известно, $[6x] = 37$, а $[x] = 6$, тогда min $[37x] = [37 \cdot 6 + 6] =$
$= 228$. Тогда последнее действие - $[228x] =$
$= [\underbrace{6x+6x+6x\ldots+6x+6x}_{38}]$. Тогда min $= [37 \cdot 38] = 1406 < 2018$.

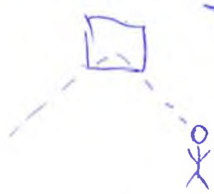
Теперь найдем max. возможное $[6x]$
При $[6x] = 38 \rightarrow_{min} [38x] = [6 \cdot 38 + 12] = 240 \rightarrow_{min} [240x] =$
$= [40 \cdot 38] = 1520$. Тогда получаем закономерность, если $[6x] = 36 + a$, тогда $x[x[x[x]]] = (36+a)(36+2a)$
Тогда последнее попадающее число будет 2016 - когда $[6x] = 42$. Но если $[6x] = 42$, то min $x = 7$, а по усл. $x < 7$, т.к. любые $[6x]$, даже при $x = 7$ входят в рамки $\Rightarrow 0 \leq x < 7$

Ответ: $0 \leq x < 7$

№2

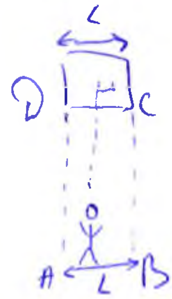
Т.к. будка при поперечном сечении квадрат =>

=> будка – куб?



Так невозможно увидеть будку, т.к. она не под углом в 90°.

Тогда получаем, что человек увидит будку т.т.т.к. она будет прямо перед ним (под углом 90°)



Тогда, т.к. длинна будки $= L$. Пусть D и C – угловые точки на равнине будки. Тогда, $AD \parallel BC$ и $AD = BC$, тогда человек может находиться в растоянии AB, где $AB = L$. Т.к. равнина плоская =>

=> на какое расстояние бы не отошел человек, он всегда одинаково видит будку:

Т.к. у будка – куб => человек может находиться таким образом с четырех разных сторон.

Ответ: min расстояние $= 0$, max $= \infty$. И можно стоять только внутри линий, параллельных ~~AB~~ линиям будки (на плоскости) и эта дорожка будет иметь длинну L.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$f(x-y) = f(x)\cdot f(y)$

~~Пусть~~ $f(x)$ и $f(y)$ – прямые, ~~Тогда~~ т.к. функции ?

Пусть ~~$f(y) = ay+b$~~ $f(x) = ax+b \Rightarrow y = ax+b$

Тогда $f(y) = x = \frac{y+b}{a}$

Тогда $f(x)\cdot f(y) = (ax+b)\left(\frac{y+b}{a}\right)$ – это получается парабола.

Но $f(x-y) = (ax+b) - \left(\frac{y+b}{a}\right)$ – не является параболой.

Тогда хотя бы одна из функций: $f(x)$ или $f(y)$ является прямой, параллельной оси абсцисс или координат соотв.

Пусть $f(x) = ax+b \Rightarrow y = ax+b$, А $f(y) = c$.

Но такого быть не может, т.к. из $f(x) \Rightarrow f(y) = \frac{y+b}{a}$.

Тогда получаем, что обе функции $f(x)$ и $f(y)$ – прямые параллельные оси абсцисс или координат соотв.

Пусть $f(x) = a$, а $f(y) = b$. Тогда $f(x-y) = a-b$

Получаем, что т.к. $f(x-y) = f(x)\cdot f(y) \Rightarrow ab = a-b$

Например, при $a=-2$, $b=+2$. $ab = -4 = a-b = (-2)\cdot 2 = -2-2$.

Ответ: при $f(x) = a$, $f(y) = b$, где $ab = a-b$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МБОУ СОШ №11	VA 29-69
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Коханов

ИМЯ Алексей

ОТЧЕСТВО Валерьевич

Дата рождения 15.04.2002 **Класс:** 9

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VA 29-69

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^4+4px^3-(p-4)x^2+4px-p=0$

$4x^4+4px^3-px^2+4x^2+4px-p=0$

$x^2(4x^2+4px-p)+(4x^2+4px-p)=0$

$(4x^2+4px-p)(x^2+1)=0$

$4x^2+4px-p=0$ или $x^2+1=0$

$x^2=-1$ - не верное, т.к. $x^2\geq0$

$D_1=4p^2+4p=4p(p+1)$

$x_{1/2}=\frac{-2p\pm\sqrt{4p(p+1)}}{4}=-0{,}5p\pm\frac{\sqrt{p(p+1)}}{2}$

+

Корни уравнения $x_{1/2}$ рациональные, при $\sqrt{p(p+1)}$ - рациональным.

Это возможно, только при $\sqrt{p(p+1)}=0$, т.к. произведение 2-ух последовательных чисел не может равняться квадрату числа не равного 0

$\sqrt{p(p+1)}=0$

$p(p+1)=0$

$p=0$ или $p+1=0$

$p=-1$

Ответ: при $p=-1$ или $p=0$

№4

Наименьшим натуральным числом x, при котором будет выполняться условие $x[x[x[x]]]<2018$ будет 6, т.к. $[6]=6$, то есть $6^4<2018$

$1296<2018$. => значения x должны быть меньше 6, иначе $x[x[x[x]]]\geq2018$

Найдём наибольшее значение числа x

$x[x[x[x]]]<2018$

т.к. $x<7$, то наибольшее $[x]=6$, то есть

$x[x[6x]]<2018$

При $x=7$, $6x=42$ => наибольшее $[6x]=41$, т.к. $x<7$

$x[41x]<2018$

При $x=7$, $41x=287$ => наибольшее $[41x]=286$, т.к. $x<7$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$286x < 2018$

$x < \frac{2018}{286}$

$x < 7\frac{16}{286}$

Получаем систему: $\begin{cases} x<7 \\ x<7\frac{16}{286} \end{cases} \Rightarrow x<7$

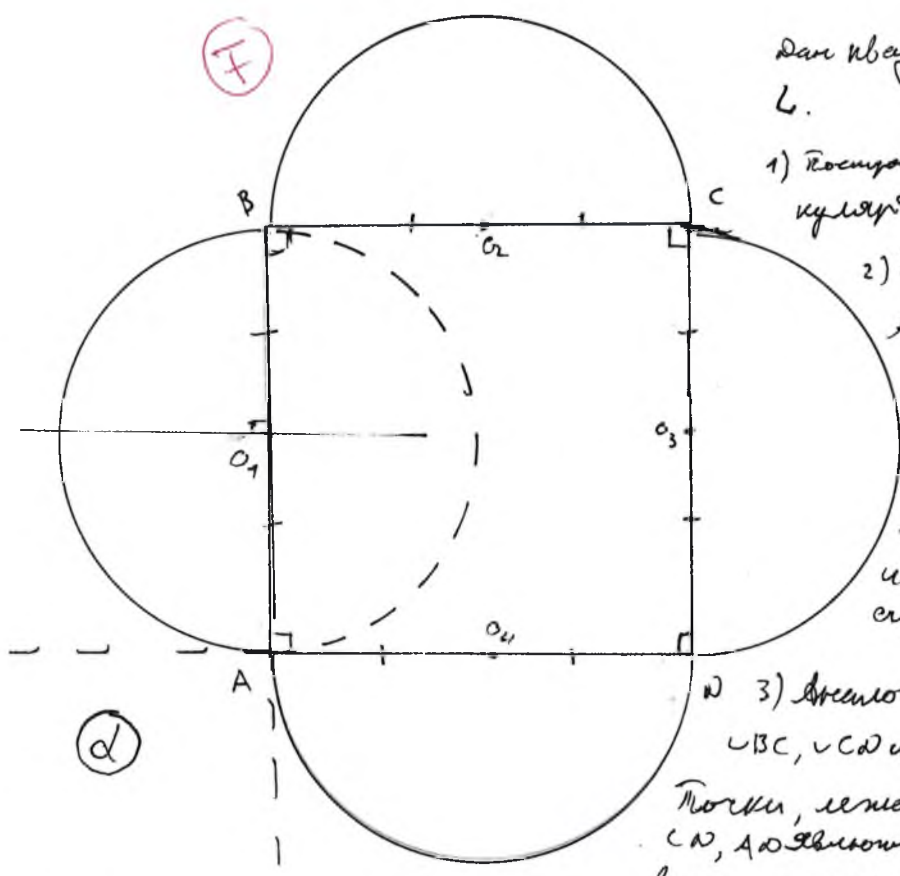
Т.к. x - положительное, то $x>0$, то есть $0<x<7$

Ответ: $x \in (0;7)$

(+)

№2

(F)



Дан квадрат ABCD со стороной L.

1) Построим серединный перпендикуляр к AB $a \cap AB = O_1$

2) Построим окр $(O_1; \frac{L}{2})$.

~~любая~~ Любая точка, лежащая на $\cup AB$ будет образовывать с т. A и т. B угол, равный $90°$, т.к. получается угол - вписанный и опирается на диаметр окружности

3) Аналогично построим $\cup BC$, $\cup CD$ и $\cup AD$.

Точки, лежащие на дугах AB, BC, CD, AD являются точками, с которых видна трансформаторная будка.

В секторе α невозможно найти такую точку x, чтобы $\angle BXD$ был равен $90°$, т.к. $\angle BAC = 90°$, а $\angle BXD$ лежит вне окружности описанной вокруг $\triangle ADB$.

Расстояние не указано!

№5

Найдем кол-во троек чисел, где x, y, z кратны семи.

Все такие числа в множестве $\{1, 2, .. 70\}$: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70.

Всего 10 чисел, то есть кол-во троек чисел: $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$

Попробуем найти тройку порядковых чисел:

$y=x+1$

$z=x+2$

$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=7a$, где $a \in N$

$x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=7a$ → упорядоченные — не значит соседние числа.

$3x^2+6x+5-7a=0$

$D_1=9-15+21a=21a-6$

$x_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{21a-6}}{3}=-1\pm\frac{\sqrt{21a-6}}{3}$

При $a=2$ $\quad x_{1/2}=-1\pm\frac{\sqrt{36}}{3}=-1\pm 2$

$x_1=-1-2=-3 \notin \{1,2,..,70\}$.

$x_2=-1+2=1 \in \{1,2..70\}$

$x=1$

$y=1+1=2$

$z=1+2=3$

Получим тройку 1, 2, 3. Всего троек: $45+1=46$

Ответ: 46.

Задача решена.

—

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

УГ 36-84

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № ________

ФАМИЛИЯ Красильников

ИМЯ Константин

ОТЧЕСТВО Алексеевич

Дата рождения 30.04.2003 **Класс:** 8

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 12 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ________

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №1

Пусть наши 100 ненулевых чисел это $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{100}$.

Рассмотрим четвёрку последовательных чисел $a_x, a_{x+1}, a_{x+2}, a_{x+3}$

$$\begin{cases} a_{x+1} = a_x \cdot a_{x+2} \\ a_{x+2} = a_{x+1} \cdot a_{x+3} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_{x+1} = a_x \cdot a_{x+1} \cdot a_{x+3}$, т.к $a_{x+1} \neq 0$,

то $1 = a_x \cdot a_{x+3}$

$$a_{x+3} = \frac{1}{a_x}.$$

Разобьём наш ряд чисел на такие четвёрки.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \ldots, a_{100}$

Это можно сделать, т.к $100 - 1 = 99 \vdots 3$

1) $a_1 = 2018$

2) $a_4 = \frac{1}{2018}$

3) $a_7 = 2018$

...

33) $a_{100} = \ldots$

Т.к это можно сделать, то $1 + 3x = 100$

$x = 33$, шаг

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ___________ ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ УГ 36-84

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Заметим, что на нечётном шаге число будет равно 2018, а на чётном шаге $\frac{1}{2018}$. Т.к число a_{100} стоит на нечётном шаге (33), то $a_{100} = 2018$

± запутался

Ответ: $a_{100} = 2018$

Задача №2 Пусть в футбольном турнире было x команд.

∟Команды, которые были дисквалифицированы сыграли по крайней мере $\frac{0,5x(0,5x-1)}{2}$ игр – это все игры между выбывшими командами ⌋

∟Команды, которые остались в турнире сыграли по крайней мере $\frac{0,5x(0,5x-1)}{2}$ игр – это все игры между оставшимися командами ⌋

Т.к все выбывшие команды сыграли одинаковое кол-во, то пусть каждая выбывшая команда сыграла y игр с оставшимися.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Тогда всего игр было:

$$\frac{0{,}5x(0{,}5x-1)}{2} + \frac{0{,}5x(0{,}5x-1)}{2} + y\cdot\frac{x}{2} =$$

$= 77$

$\cancel{\frac{x(2x-1)}{2}}$

$$\frac{x(x-2)}{2} + \frac{x(x-2)}{2} + 2xy = 308$$

$$x(x-2) + 2xy = 308$$

Причём: $\begin{cases} y \le 0{,}5x \\ y \ge 0 \end{cases}$ y - целое

1) Тогда $x(x-2) + 2xy \le x(x-2) +$

$+2x\cdot 0{,}5x = x(x-2) + x^2 = x(2x-2)$

т.к. $x(x-2) + 2xy = 308$, то

$x(2x-2) \ge 308$

Если $x = 12$, то $x(2x-2) = 12\cdot(24-2) =$

$= 12\cdot 22 = 264 < 308 \Rightarrow x > 12$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ____________ ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УГ 36-84

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~(2) Если)~~

2) $y \geqslant 0$.

Тогда $x(x-2)+2xy \geqslant x(x-2)$

т.е $x(x-2) \leq 308$

~~Если $x=18$, то $x(x-2)=18\cdot 16=$~~

Если $x=20$, то $x(x-2)=20\cdot 18=$

$=360>308 \Rightarrow x<20$

<u>В итоге:</u>

$\begin{cases} x>12 \\ x<20 \end{cases}$ Также, т.к сказано, что половина команд выбыло, то $x \vdots 2$.

Значит $\left[\begin{array}{l} x=14 \\ x=16 \\ x=18 \end{array}\right.$

1) Если $x=14$

$x(x-2)+2xy=14\cdot 12+28y=168+28y=$

$=308$

$28y=140$

$y=5$ – целое

<u>Подходит</u>

Лист 013 из 119

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2) Если $x=16$

$x(x-2)+2xy=16\cdot 14+32y=$

$=224+32y=308$

$32y=84$

$y=\frac{84}{32}$ – не целое

Не подходит

3) Если $x=18$

$x(x-2)+2xy=18\cdot 16+36y=308$

$36y=20$

$y=\frac{20}{36}$ – не целое

Не подходит

Значит $x=14$

+

Ответ: 14.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ___________ ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VГ 36-84

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(№3) Задача №3

1 вариант: $\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}$

$$\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{\frac{a+c}{2}}+\frac{1}{c} \qquad \frac{2}{a} = \frac{2}{a+c}+\frac{1}{c}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{2c+a+c}{c(a+c)}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{3c+a}{c(a+c)}$$

$$2c(a+c) = a(3c+a)$$

$$2ac+2c^2 = 3ac+a^2$$

$$2c^2 = a^2+ac$$

$$c^2+c^2 = a^2+ac$$

$$c^2-ac = a^2-c^2$$

$$c(c-a) = (a-c)(a+c)$$

$$\cancel{-c(c-a) = c}$$

$$-c(a-c) = (a-c)(a+c)$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Значит $\left[\begin{array}{l} a-c=0 \\ -c=a+c \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a=c \\ a+2c=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a=c \\ a=-2c \end{array}\right.$

2 вариант:

$$\frac{1}{b}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}$$

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

$$\frac{2}{\frac{a+c}{2}}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

$$\frac{4}{a+c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

$$\frac{4}{a+c}=\frac{a+c}{ac}$$

$$4ac=(a+c)^2$$

$$2ac=a^2+c^2$$

$$a^2-2ac+c^2=0$$

$$(a-c)^2=0$$

$$a-c=0,\ a=c$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3 вариант:

$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$\cancel{\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{a+b}{2}} = \frac{1}{a} + \frac{2}{a+b}}$$

$$\cancel{\frac{2}{c} = \frac{2a+a+b}{}}$$

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\frac{a+c}{2}} = \frac{1}{a}+\frac{2}{a+c}$$

$$\frac{2}{c} = \frac{2a+a+c}{a(a+c)} = \frac{3a+c}{a(a+c)}$$

$$2a(a+c) = c(3a+c)$$

$$2a^2+2ac = 3ac+c^2$$

$$2a^2 = c^2+ac$$

$$a^2+a^2 = c^2+ac$$

$$a^2-ac = c^2-a^2$$

$$a(a-c) = (c-a)(c+a)$$

$$-a(c-a) = (c-a)(c+a)$$

значит $\left[\begin{array}{l} c-a=0 \\ c+a=-a \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} c=a \\ c+2a=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} c=a \\ c=-2a \end{array}\right.$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

В итоге из 3 вариантов получаем:

$$\left[\begin{array}{l} a=c \\ a=-2c \\ c=-2a \end{array}\right.$$

1) $a=c=k$, $b=\frac{a+c}{2}=\frac{2k}{2}=k$.

$\boxed{a=b=c=k}$, где k – любое, кроме 0.

2) $a=-2c=k \Rightarrow c=-\frac{a}{2}=-\frac{k}{2}$.

тогда $b=\frac{a+c}{2}=\frac{k+(-\frac{k}{2})}{2}=\frac{k}{4}$

$$\begin{array}{l} a=k \\ c=-\frac{k}{2} \\ b=\frac{k}{4} \end{array}$$ где k любое, кроме 0

3) $c=-2a$

$a=k$, $c=-2k$, $b=\frac{a+c}{2}=-\frac{k}{2}$

$$\begin{array}{l} a=k \\ b=-\frac{k}{2} \\ c=-2k \end{array}$$ где k – любое, кроме 0

+

Ответ: $\cancel{(k;k;k)}$ $\cancel{(k;-\frac{k}{2};\frac{k}{4})}$ $\cancel{(k}$

$(k;k;k)$

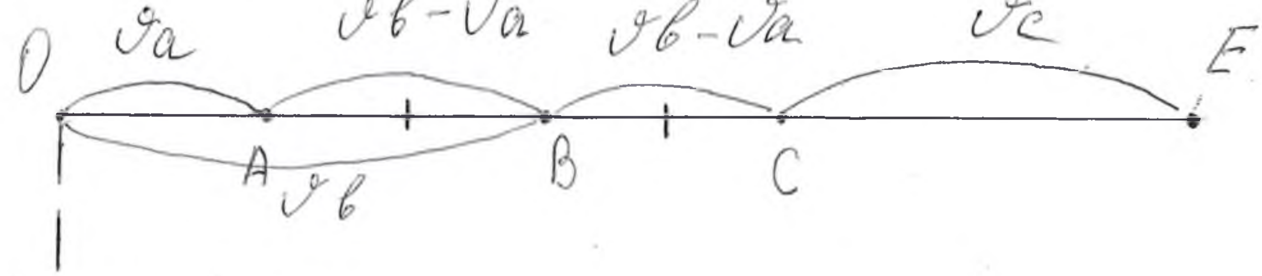
$(k;\frac{k}{4};-\frac{k}{2})$, где $k\neq 0$.

$(k;-\frac{k}{2};-2k)$

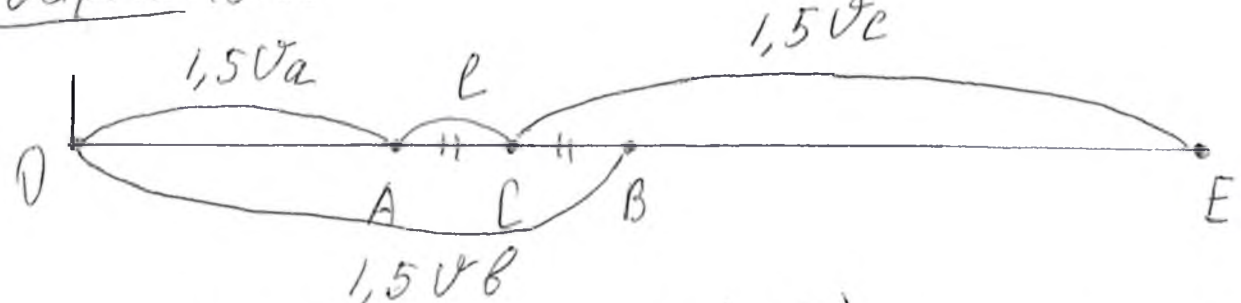
Задача №4.

$\vartheta_a, \vartheta_b, \vartheta_c$ – км/ч.

1 встреча: 10:00



2 встреча: 10:30



$$l = \frac{1{,}5\vartheta_b - 1{,}5\vartheta_a}{2} = \frac{1{,}5(\vartheta_b - \vartheta_a)}{2} = 0{,}75(\vartheta_b - \vartheta_a)$$

Весь путь: 1) $\vartheta_a + (\vartheta_b - \vartheta_a) + (\vartheta_b - \vartheta_a) + \vartheta_c =$

$= 2\vartheta_b + \vartheta_c - \vartheta_a$

Весь путь: 2) $1{,}5\vartheta_a + l + 1{,}5\vartheta_c =$

$= 1{,}5\vartheta_a + 0{,}75(\vartheta_b - \vartheta_a) + 1{,}5\vartheta_c =$

$= 0{,}75\vartheta_b + 0{,}75\vartheta_a + 1{,}5\vartheta_c$

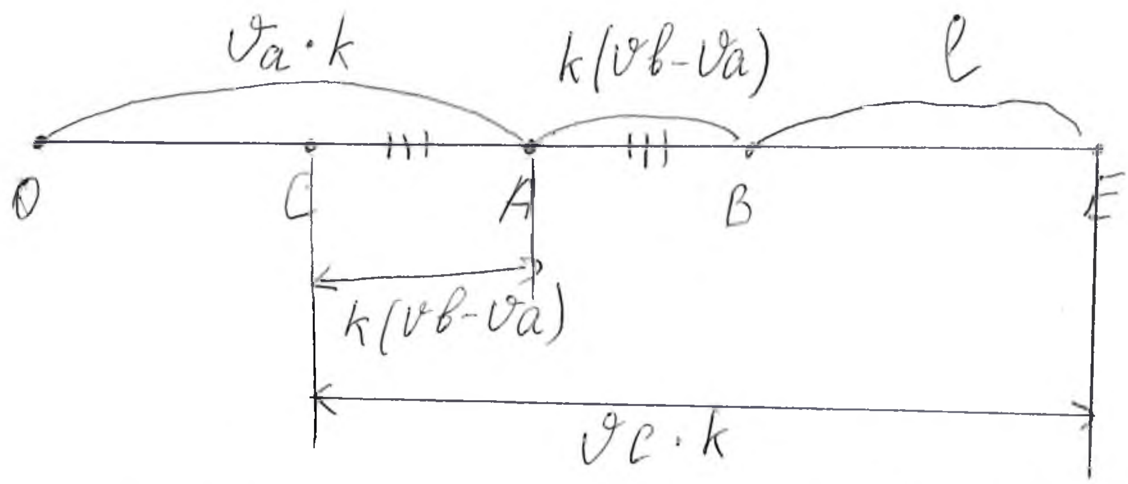
Приравниваем пути:

$$2v_b + v_c - v_a = 0{,}75v_b + 0{,}75v_a + 1{,}5v_c$$

$$1{,}25v_b = 1{,}75v_a + 2{,}5v_c \quad (:0{,}25)$$

$$\boxed{5v_b = 7v_a + 10v_c}$$

3 встреча: встреча через k часов



$$l = v_c \cdot k - 2k(v_b - v_a) = k(v_c - 2(v_b - v_a))$$

Весь путь:

$$v_a k + k(v_b - v_a) + k(v_c - 2(v_b - v_a)) =$$

$$= k(v_a + v_b - v_a + v_c - 2v_b + 2v_a) =$$

$$= k(v_c + 2v_a - v_b) =$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: ____________

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УГ 36-84

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$= k\left(v_c + 2v_a - \frac{7v_a + 10v_c}{5}\right) =$$

$$= k(v_c + 2v_a - 1{,}4v_a - 2v_c) =$$

$$= k(0{,}6v_a - v_c) = 2v_b + v_c - v_a =$$

$$= \cancel{(0{,}4v_a)}\ 0{,}4v_a + 5v_c$$

$$v_a(3k+2) = v_c(5k+25)$$

$$\frac{5k+25}{3k+2} = \frac{v_c}{v_a} = \frac{11}{4}$$

Значит $k = 6$

Ответ: в ~~(14:00)~~. ~~15:00~~.

±

Задача не решена

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВР МЭИ

Место проведения

МТ 75-52

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ЛЕВИН

ИМЯ ДАНИЛ

ОТЧЕСТВО ВАЛЕРЬЕВИЧ

Дата рождения 07.01.2000 **Класс:** 11

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ MT 75-52

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 $f(x_1;x_2;x_3)=\sqrt{x_1^2+x_2x_3}+\sqrt{x_2^2+x_1x_3}+\sqrt{x_3^2+x_1x_2}$ (1)

(*) Заметим, что если мы получим значение при $f(x_1;x_2;x_3)$, то аналогичное значение мы сможем получить при $f(x_3;x_2;x_1)$, $f(x_1;x_3;x_2)$, $(x_3;x_1;x_2)$, $(x_2;x_3;x_1)$ $(x_2;x_1;x_3)$

$f(x_3;x_2;x_1)=\sqrt{x_3^2+x_2x_1}+\sqrt{x_2^2+x_3x_1}+\sqrt{x_1^2+x_3x_2}$ (2)

Как мы видим 1 и 2ое полностью одинаковы ⇒ если есть наибольшее значение такой функции и оно единственное для всех x, x_2, x_3, то в нем $x_1=x_2=x_3$

$f'(x_1;x_2;x_3)=\frac{1}{2}\left(\frac{2x_1+x_2+x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2x_3}}+\frac{2x_2+x_1+x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2x_3}}+\frac{2x_3+x_1+x_2}{\sqrt{x_3^2+x_1x_2}}\right)$ ⇒

⇒ Для всех значений x_1, x_2 и $x_3>0$ ~~функция~~ производная функции >0 ⇒ функция монотонно возрастает, следовательно наибольшее значение будет достигаться ~~в которой то при наибольших значениях переменных~~ в единственной точке, следовательно из замечания (*), $x_1=x_2=x_3=a$.

По условию $3a\leq 2$. ⇒ $a\leq\frac{2}{3}$

$f(a;a;a)=\sqrt{2a^2}+\sqrt{2a^2}+\sqrt{2a^2}=3\sqrt{2}a$, соответственно максимальное значение такой функции достигается при наиб. a ⇒ $f_{max}(a;a;a)=3\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}=2\sqrt{2}$, соответственно минимальное при $a=0$ $f_{min}(a;a;a)=3\sqrt{2}\cdot 0=0$.

Ответ: $max=2\sqrt{2}$; $min=0$.

⊖

№3 Рассмотрим многочлен $P(x)=a_1x^n+a_2x^{n-1}\ldots+a_{n+1}x^{n-n}$, где $a_1, a_2, a_3\ldots a_{n+1}\in\mathbb{Z}$.

Пусть $y\neq x$, тогда $P(y)=a_1y^n+a_2y^{n-1}\ldots+a_{n+1}y^{n-n}$, тогда

$P(x)-P(y)=a_1(x^n-y^n)+a_2(x^{n-1}-y^{n-1})\ldots a_n(x^1-y^1)=$

$=a_1(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y^1\ldots+y^{n-1})+a_2(x-y)(x^{n-2}+x^{n-3}y^1\ldots+y^{n-2})\ldots+a_n(x-y)=$

$=(x-y)\left(a_1(x^{n-1}+x^{n-2}y^1\ldots+y^{n-1})+a_2(x^{n-2}+x^{n-3}y^1\ldots+y^{n-2})\ldots+a_n\right)$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ МТ 45-52

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Тогда если $P(x)\in Z$ и $P(y)\in Z$, ~~причем~~ $x\in Z$ и $y\in Z$, то

$P(x)-P(y) \vdots x-y$. Заметим, что $k\in Z$, тогда

$P(2019)-P(k) \vdots 2019-k \Rightarrow 1-k \vdots 2019-k$

~~$P(k)-P(2019)$~~ ~~$P(1)-P(k) \vdots 2019-k$~~

$P(1)-P(k) \vdots 1-k \Rightarrow 2019-k \vdots 1-k$

Т.к. $1-k \vdots 2019-k$, то $1-k = l(2019-k)$, где $l\in Z$

Также $2019-k \vdots 1-k$, то $2019-k = p(1-k)$, где $p\in Z$

Получим систему:

$$\begin{cases} 1-k = l(2019-k) \\ 2019-k = p(1-k) \end{cases}, \text{ где } p, l \in Z$$

$$\begin{cases} l = \frac{1-k}{2019-k} \quad (3) \\ 2019-k = p(1-k) \quad (4) \end{cases} \qquad (4) \text{ в } (3) \quad l = \frac{1-k}{p(1-k)}$$

$l\cdot p = 1$, где $l, p\in Z \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} l=p=-1 \\ l=p=1 \end{array}\right.$$

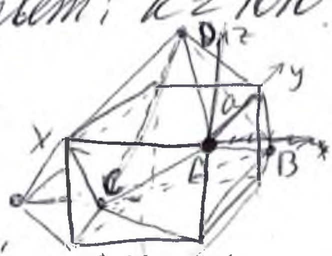
(+)

Пусть $p=l=1$, тогда $\begin{cases} 1-k = 2019-k \\ 2019-k = 1-k \end{cases}$ $\begin{cases} 1=2019 \\ 2019=1 \end{cases}$ О.Н.Р.

Пусть $p=l=-1$, тогда $\begin{cases} 1-k = k-2019 \\ 2019-k = k-1 \end{cases}$ $\begin{cases} k=1010 \\ k=1010 \end{cases}$

Ответ: $k=1010$

№4 а)



Введем ортонормированную систему координат с центром в точке A. Положим, что высота пирамиды h, тогда точки A, B, C, D должны принадлежать одной плоскости для выполнения условия, координаты

$A(0;0;0)$ $B(-h;\frac{a}{2};-\frac{a}{2})$ $C(\frac{a}{2};-h;-\frac{a}{2})$ $D(\frac{a}{2};\frac{a}{2};h)$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Запишем ур-ние плоскости для каждой точки и получим систему: $(Ax+By+Cz+d=0)$ $(A, B, C$ – коэф. не связанные с точками$)$

$$\begin{cases} A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+d=0 \\ -h\cdot A+\frac{a}{2}B-\frac{a}{2}C+d=0 \\ \frac{a}{2}A-hB-\frac{a}{2}C+d=0 \\ \frac{a}{2}A+\frac{a}{2}B+hC+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=0 \\ -hA+\frac{a}{2}B-\frac{a}{2}C=0 \quad (1) \\ \frac{a}{2}A-hB-\frac{a}{2}C=0 \quad (2) \\ \frac{a}{2}A+\frac{a}{2}B+hC=0 \quad (3) \end{cases}$$

$(3)-(1)$ $\left(\frac{a}{2}+h\right)A+\left(h+\frac{a}{2}\right)C=0$

$(A+C)\left(\frac{a}{2}+h\right)=0$, т.к. $a>0 \Rightarrow \frac{a}{2}>0$, h – высота $h>0 \Rightarrow \left(\frac{a}{2}+h\right)>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A=-C$, подставим в систему

$$\begin{cases} d=0 \\ hC+\frac{a}{2}B-\frac{a}{2}C=0 \quad (4) \\ -\frac{a}{2}C-hB-\frac{a}{2}C=0. \quad (5) \\ -\frac{a}{2}C+\frac{a}{2}B+hC=0 \quad (6) \end{cases}$$

$(6)-(5)$ $\left(\frac{a}{2}+h\right)B+\left(h+\frac{a}{2}\right)C=0$

$\left(\frac{a}{2}+h\right)(B+C)=0$

$\frac{a}{2}+h>0$ док. выше $\Rightarrow$

$\Rightarrow B=-C$, подставим в систему.

$$\begin{cases} d=0 \\ hC-\frac{a}{2}C-\frac{a}{2}C=0 \quad (*) \\ -\frac{a}{2}C+hC-\frac{a}{2}C=0 \quad (**) \\ -\frac{a}{2}C-\frac{a}{2}C+hC=0 \quad (***) \end{cases}$$

заметим, что $(*)$, $(**)$, $(***)$ одинаковые, поэтому при $hC=aC$, где $C\neq 0$ $h=a$ 4 точки будут лежать в одной ~~пл~~ плоскости, т.к. при $C=0$ плоскость совпадет с плоскостью ~~Oy~~, чего не может быть $(h\neq 0)$. $\Rightarrow$ возможно при $h=a$

б) Т.к. при $h=a$ выполняется условие а, то через $\angle CDB$ можно проходит плоскость в которой лежит ~~три~~ ребр., соответствующие им для каждой ~~~~ тех пирамид с общ. точкой, соответственно $(PDC)\cap(DBC)$, а не совпадает с ней, для совпадения P, B и C должны либо лежать на одной прямой либо $P=B$, но это против. условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow (PDC)\cap(DBC) \Rightarrow$ аналогично рассуждая каждая из плоскостей пересекает другую $\Rightarrow$ каждые 3 ребра лежат в своей пл-сти.

Ответ: а) да б) да.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ МТ 75-52

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\boxed{№5}$ $x^y + y^z = xyz$, $x,y,z \in N$

$x^y = xyz - y^z$

$x^y = y(xz - y^{z-1}) \Rightarrow x^y \vdots y$, т.к. $x,y \in N$, то $x = y \Rightarrow$

Почему?

$\Rightarrow x^x + x^z = x^2 z$

$z = x^{x-2} + x^{z-2}$ при $x > 2$. $p + x^{z-2} = z$, где $p \in N$, т.к.

~~$x^{z-2} \geq z - z$, где $x, z \in N$, $x>2$, т.к. x^{z+2}~~ $> z$, $p, z, x \in N \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $x > 2$ решений нет.

Пусть $x = 1; y = 1$ $z = 1^{-1} + 1^{z-2}$

$z = 1 + 1 = 2$. $\Rightarrow (1;1;2)$

Пусть $x = 2; y = 2$ $z = 1 + 2^{z-2} = 2$. $\Rightarrow (2;2;2)$

Ŧ

$x^{z-2} > z - 2$, при $x, z \in N$ и $x > 2 \Rightarrow x^{z-2} + 2 > z$,

но при $x > 2$, как минимум $x = 3$, тогда $3^{3-2} = 3 \Rightarrow x^{z-2} + 3 > x^{z-2} + 2 > z \Rightarrow$ решений нет

Ответ: $(1;1;2)$; $(2;2;2)$.

N2 нет

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Место проведения:

шифр: Й044-20 ← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Лохкин

ИМЯ Иван

ОТЧЕСТВО Данилович

Дата рождения 23.11.2001 **Класс:** 10

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ Й044-20

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1. $0 \le x_1, x_2, x_3 < 1$, мощность, т.к. мощность

$x_1+x_2+x_3 \ge 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ - Коши, т.е. наибольшая сумма будет $3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ и достигается она при $x_1=x_2=x_3=x$, получим:

$2(x_1+x_2+x_3)+4x_1x_2x_3 = 3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+1$:

$6x+4x^3=9x^2+1$,

$4x^3-9x^2+6x-1=0$,

$(x-1)^2(4x-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=1 \text{ - не уд. условию} \\ x=\frac{1}{4} \end{array}\right.$

Следовательно $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{4}$ и значит наибольшая сумма $\frac{3}{4}$.

Ответ: $x_1+x_2+x_3=\frac{3}{4}$ - наибольшая суммарная мощность (НВт)

(+)

№2.

$7x+9y=997$, $x,y \in \mathbb{Z}$, $x,y \ge 0$

Рассмотрим остатки по mod 9, тогда:

$7x \equiv 7 \pmod 9 \Leftrightarrow x \equiv 1 \pmod 9$.

~~$x \in [0; 142]$, т.к. при $x > 142$: $7x \ge 1001$ - что быть не может.~~

~~11 $x=1$, тогда y - не уд.~~ ~~$x=9k+1$, $k \in [0;12]$~~

~~$x=10$: $y=105$ уд.~~ $x \in [0;142]$, т.к. при $x>142$: $7x \ge 1001$ - не уд.

$x=9k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \in [0;15]$, т.к. при $k>15$: $9k+1 \ge 145$ - не уд.

$7(9k+1)+9y=997$;

$63k+9y=990$;

$7k+y=110$, для любого целого k: $k \in [0;15]$ будет только один y, удовлетворяющий, а для k, соответственно один x, т.е. всего пар решений 16.

~~Ответ~~: $k \in [0;15]$; $x=9k+1$, $y=110-7k$.

Ответ: 16 способов

(±)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ Й044-20

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$x=[x]+\{x\}$ $\quad [x]^{[x]} \leq ([x]+\{x\})^{[x]} < ([x]+1)^{[x]}$

~~$x-1 < [x] \leq x$~~

~~$[x]^{x} \leq x^{[x]} \leq ...$, $x \geq 2$, т.к. ... ...~~

Т.к. $f(x)=x^{[x]}$ опр. на промежутке положительных чисел, то понятно отсюда, что если функция принимает целые значения для двух соседних значений x, то функция принимает все целые значения м/у a и b.

$x=1$ - ~~неприг.~~ $1^1=1$.

~~4) $x=1$: $1 \leq x^{[x]} < ...$, $x=1$, - ... кол-во решений у уравн.~~

1) $x=2$: $4 \leq x^{[x]} < 8$ лев. значение при $x=2$, правое $x=\sqrt{8}$

2) $x=3$ $27 \leq x^{[x]} < 64$, лев: $x=3$, правое: $x=\sqrt[3]{64}$

3) $x=4$ $256 \leq x^{[x]} \leq 624$, лев: $\sqrt[4]{256}$, правое: $x=\sqrt[4]{624}$

~~4) $x=5$: $624 \leq x^{[x]} \leq 3125$, лев: $\sqrt[5]{...}$, правое: $x=5$~~

~~Т.е. кол-во решений: $(4-1+1)+(27-8+1)+(256-65+1)+(2018-624+1)=1613$~~

~~Ответ: 1613 решений.~~ 4) $x=5$: $5^5=3125>2018$

Т.е. кол-во решений:

$1+(8-4+1)+(65-27+1)+(624-256+1)=408$

Ответ: 408 решений.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЮО 44-20

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Ответ: $m=\frac{1}{5}$, т.к. меньше быть не может, потому

если $m<\frac{1}{5}$, то $m=\frac{1}{5+k}$, где $k>0$

Допустим найдутся два куска, чьи длины относятся как $\frac{1}{5+k}$, то их длины относятся как $\frac{5+k}{1}$, т.е. длины более, чем в 5 раз, чего быть не может.

Пример для $m=\frac{1}{5}$: 10 кусков $\frac{65}{41}$ и $11\cdot\frac{21}{41}$,

$\frac{10\cdot 65+11\cdot 21}{41}=21$, их длины относятся: 1:1, 5:1 и 1:5.

Если ~~мы рассмотрим~~ $m\geq 1$, т.е. всего отношение длин наибольшего из пары к меньш., то $m=1$, и все кусочки по 1 м.

Найдена оценка снизу.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

КГЭУ

Место проведения

JV44-42

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ МАРЧЕНКО

ИМЯ Егор

ОТЧЕСТВО АНДРЕЕВИЧ

Дата рождения 08.08.2003 **Класс:** 8

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JV 44-42

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Известно, что первое число 2018, все остальные - условно неизвестные, однако дано, что „каждое число, кроме первого и последнего, равно произведению двух соседних с ним" (слова, относящиеся к „кроме", обособляются)

тогда можно выразить такую цепь:

$x_1 : x_2$

2018, x, x_1, x_2, x_3 ... x_{98}

$2018 \cdot x_1$ $x_1 \cdot x_3$

Самым простым вариантом будет взять x равным 1

$\Rightarrow 2018, 1, \frac{1}{2018}, \frac{1}{2018}, 1, 2018, 2018, 1, \frac{1}{2018}$ ...

$\boxed{\left(\frac{1}{2018} \cdot \frac{2018}{1} = 1\right)}$

достаточно сделать уникальность; достигается уже после 7 числа

$\boxed{2018, 1, \frac{1}{2018}, \frac{1}{2018}, 1, 2018}$ - основной компонент

1 число, 2 число, 3 число, 4 число, 5 число, 6 число

7 число, 8 ч, 9 ч, 10 ч, 11 ч, 12 ч

13

19

25

31

37

43

49

55

61

67

73

79

85

91

97 число 98 число 99 число 100, т.е. последнее число

Есть недочет, который мешает решить задачу: не указано, могут ли числа повторяться, и могут ли быть ~~0 1~~ $0 < x \neq 1$

Ответ: последним числом будет число, обратное 2018, т.е $\frac{1}{2018}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JV 44-42

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2. Начать стоит с того, что команд строго четное количество, ведь нельзя дисквалифицировать из 11 или из команд половину.

К тому же, команды, когда не выиграли, сыграли на 1 матч больше, ведь они по итогу сыграли еще 1 игру.

Следует, что матчей меньше у выбывших

Составим уравнение

$K(x) + K(x+1) = 77$

x – кол-во матчей выбывших

K – везде ровный, ведь это кол-во команд

т.к. команд поровну, то будет сумма игр выбывших и остальной команды вин

если выбыли сыграли 1 игру, то оставшиеся – 2

$\Rightarrow 1+2=3$ $\quad 77 : 3 = 25$, ост. 2

если выб. сыграли 2 игры, то ост – 3

$= 2+3=5$ $\quad 77 : 5 = 15$, ост. 2

если выб сыграли 3 игры, то ост – 4

$\Rightarrow 3+4=7$ $\quad 77 : 7 = 11$ ~~что ...~~ это первый вариант

Лист 02 из 06

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JV44-42

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если все строго 4 игр, то осн - 5

4+5=9 77 ⁄: 9

если все строго 5 игр, то осн - 6

5+6=11

$$\begin{array}{r|l} 77 & 11 \\ \underline{77} & 7 \\ 0 & \end{array}$$

Это самый лучший вариант, ведь:

1. число команд вышло $K \cdot 2 = 14$, где $K=7$
14 команд для турнира - средний вариант, нежели 22 (11·2).

2. 2 и 3 мало соответствует - игроков вообще мало для квалификационного турнира, тогда же 5 и 6 - много для турнира

Ответ: с точки зрения осн - 14 команд (7·2)

С точки зрения команды - 22 команды (11·2) и 14 команд (7·2)

3. Среди организованных команд средних групп: при числе - 1, 4, 7. их среднее арифм. команды вод: $(1+4+7):3=4$

для чет 4 и 7: $(4+7):2=5,5$

Однако, если смотреть на задачу, то есть пробел: „Упорядоченные" тройки - что значит упорядоченные?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ IV 44-42

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если „упорядоченная" тройка обозначает равно „разное" между числами, т.е, между 1 и 3 разница в 3-1=2, значит третьим числом будет 3+2=5.

Или же „упорядочена" тройка, значит, что числа на числовой прямой, стоят рядом, т.е 1,2 и 3

Допустим, что упорядоченная тройка — равно разн

~~тогда можно взять числа 1, 0,5, 1~~

~~1~~

~~-1~~

~~1~~

Можно взять числа $0<x<1$

тогда $a=0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}7$

$b=0{,}2;\ 0{,}5;\ 0{,}8$

$c=0{,}3;\ 0{,}6;\ 0{,}9$

где $a=0{,}1;\ b=0{,}2;\ c=0{,}3$.

$b=0{,}2$ будет средн. А. чисел a и c

во всех выше приведенных случаях, b среднее А.

К тому же, второе число в „линии" также будет — среднее А. двух других

И будет легко, что Аня вошла в середину в 10:45, ведь ею можно сопоставить, проведя её до неё лишь за 13:45 г

Задача не решена. Требовалось найти все тройки чисел.

Лист 04 из 06

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JV44-42

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.

9 часов утра:

D E

A

B C

10 часов утра

D E

A B C

10,5 часов утра

A C B

Примерно так это выглядит.
Можно сделать следующий вывод:
Скорость Семен - самый большой
Вани - средн
Анны - меньш

За 1 час он проходит свою x км/ч скорости
У Антона она меньше
Значит, они шли по 0,5 ч, когда поезд проходил каждый скорость

Задача не решена

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17051

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ JV 44-42

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5. т.к $a_1^2 \neq a_2^2$, то чет одной модели

однако $a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2 = 2018^2$

$b_1^2 + b_2^2 = 2017^2$

~~$2017^2 =$~~

$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} > 0$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{2018^2 \cdot a^2}{(2017+1)(2017+1) \cdot b^2}$

к тому же, в условии задачи есть ошибки

$a_1^2 + a_2^2 \dots = 2018^2$ и $b_1^2 + b_2^2 \dots = 2017$

следует, что $a_1 b_1 + b_2 b_2 \dots = 2018(!) \cdot 2017(!)$, ответ $\dots = 2017 \cdot 2018$

это неверно

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{(2018 - a_2 \dots a_n)}{(2017 - b_2 \dots b_n)}$

$\frac{a_2}{b_2} = \frac{(2018 - a_1 \dots a_n)}{(2017 - b_1 \dots b_n)}$

ответ не получен

—

Лист 06 из 06

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

СГТ Липецк

Место проведения

Kj 39-24

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Мельник

ИМЯ Всеволод

ОТЧЕСТВО Константинович

Дата рождения 03.06.2002

Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^4+4px^3-(p-4)x^2+4px-p=0$

$4x^4+4px^3-px^2+4x^2+4px-p=0$

$4x^4+4x^2+4px^3+4px-(px^2+p)=0$

$4x^2(x^2+1)+4px(x^2+1)-p(x^2+1)=0$

$(x^2+1)(4x^2+4px-p)=0$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq 1 \Rightarrow x^2+1$ не может равняться $0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x^2+4px-p=0$

$D=(4p)^2-4(4\cdot(-p))=16p^2+16p=16p(p+1)$

$x=\frac{-4p\pm\sqrt{D}}{2\cdot 4}=\frac{-4p\pm\sqrt{16p(p+1)}}{2\cdot 4}=\frac{-4p\pm 4\sqrt{p(p+1)}}{2\cdot 4}=\frac{-p\pm\sqrt{p(p+1)}}{2}$

Чтобы корни были рациональные $\sqrt{p(p+1)}$ должен быть рациональным $\Rightarrow p(p+1)$ должен быть квадратом целого числа.

Если $p=0$, то $p(p+1)=0$, 0 - рациональное число.

Если $p\neq 0$, то $p(p+1)$ должен иметь вид a^2, но есть $a\cdot a$
$p+1>p$, значит чтобы получить равные множители нужно уменьшить $(p+1)$. $p+1-1=p$, тогда второй множитель равен $p+1$, $p+1\neq p$. Если мы будем ещё уменьшать этот множитель, то он будет $<p \Rightarrow$ второй множитель будет $>p+1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ они не будут равны $\Rightarrow$ число $p(p+1)$ не может быть квадратом целого числа.

Значит p может равняться только 0.

Ответ: ~~$p=0$~~ это верно при $p=0$.

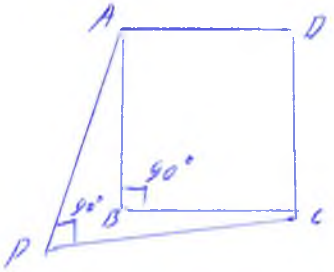
Найдены не все p

$\mp$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

Наблюдатель не может видеть более 2 сторон ~~3 углов~~ будки, и менее 1 стороны ~~2 углов~~, т.к. она квадратная в поперечном сечении. Допустим он видит 2 стороны ~~3 угла~~: Наблюдателю будка видна под углом 90°

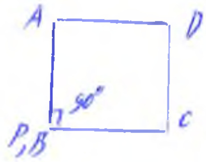


ABCD - квадрат => ∠ABC = 90° => внешний угол ABC = 360° - 90° = 270°

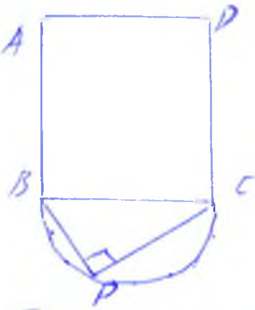
ABCP - четырёхугольник => сумма его углов равна 360° =>

=> ∠PAB + ∠PCB ~~PBC~~ + ∠APC + ∠ABC = 360°; ∠PAB + ∠PCB ~~PBC~~ + 90° + 270° = 360° =>

=> ∠PAB + ∠PCB ~~PBC~~ = 0 => точка P совпадает с точкой B



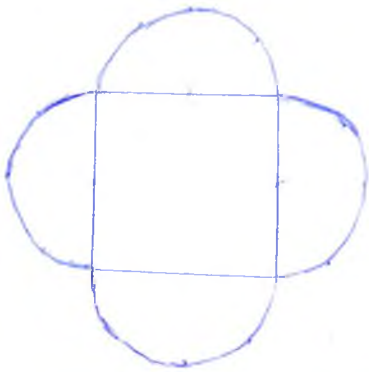
Если наблюдатель видит одну сторону ~~два угла~~ будки, то



Геометрическое место точек P, таких, что ∠BPC = 90° это окружность с диаметром BC, по свойству окружности. Наблюдатель не находится в будке => геометрическое место точек P будет полуокружность с диаметром BC. BC = L => это будет полуокружность с диаметром, равным L.

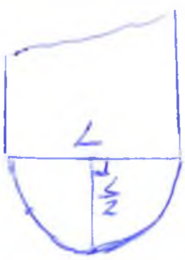
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2 (продолжение).



Геометрическое место точек на равнине, из которых будка видна это полуокружности с диаметрами на сторонах будки.

Минимальное расстояние, с которого видна будка будет 0, если наблюдатель стоит на углу будки. Найдём максимальное расстояние:



Максимальное расстояние, на котором может находиться точка на окружности от диаметра, это радиус, т.к. в окружности все точки находятся на расстоянии радиуса от её центра. Диаметр равен $L \Rightarrow$ радиус равен $\frac{L}{2}$.

Ответ: Геометрическое место точек на равнине, из которых будка видна - это полуокружности с диаметрами на сторонах будки. Минимальное расстояние, с которого видна будка $=0$, а максимальное равно $\frac{L}{2}$ локтей.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 4.

$x[x[x[x]]] < 2018$

Если $x = 7$, то $x[x[x[x]]] = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 49 \cdot 49 =$
$= 2401$, $2401 > 2018$, значит $x < 7$, значит

$[x[x[x]]] < \frac{2018}{7}$

$[x[x[x]]] \leq 288 \Rightarrow x[x[x]] < 289$

$x < 7 \Rightarrow [x] \leq 6 \Rightarrow [x[x]] < 76 \Rightarrow [x[x]] < 42$

$x[x[x]] \leq 288$
$[x[x]] < 42$ $\Rightarrow x < \frac{288}{42} \Rightarrow x < \frac{144}{21} \Rightarrow x < \frac{48}{7}$

$\times 49$
49
441
196
2401

$2018 \mid 7$
$14 \quad 288$
61
56
58
56
2

~~289 | 42 = 6,88095238 0…~~

~~288 | 42 = 6,857142 7 1~~

~~$x < 6,8(809523)$~~ ~~$x < 6,857(1401 7)$~~

Ответ: ~~$x < 6,8(1809523)$~~. ~~$x < 6,857(14047)$~~. $x < \frac{48}{7}$.

?

(7)

№ 3. (7)

$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

$f(x)$ не может содержать отрицательной степени, так как она определена на всей числовой оси, а при отрицательной степени в знаменателе может быть 0, и тогда функция не имеет смысла. Если $f(x)$ не всегда равна 0 или 1, то она может содержать неотрицательную степень, умножение или сложение.

$f(x) = (x \cdot a + b)^n \cdot c + d$, где a, b, c, d - любые числа, а n - неотрицательное.

?

~~$(ax+b)^n \cdot c + d$~~ $= (a(x \cdot y)+b)^n \cdot c + d = (ax+b)^n \cdot c + d + (ay+b)^n \cdot c + d$

это уравнение верно не при всех x и $y \Rightarrow f(x)$ всегда равна 0 или 1, тогда $0 = 0 \cdot 0$ или $1 = 1 \cdot 1$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ Kj 39-24

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3 (продолжение)

$f(x)=0$, если $f(x)=x\cdot 0$, или $f(x)=$ ~~$nx^m \cdot nx^n$, где n любое число, а m - натуральные~~

$f(x)=1$, если $f(x)=x^0$, или $f(x)=$ ~~$(1+x \ (1+x \ \ldots$~~

Ответ: $f(x)=0$ или $f(x)=1$, или $f(x)=x\cdot 0$, или $f(x)=x^0$

№5

$x, y, z \in \{1, 2 \ldots, 70\}$

$x^2+y^2+z^2 \vdots 7$

Чтобы $x^2+y^2+z^2$ было кратно 7, сумма остатков от деления на 7 чисел x^2, y^2 и z^2 была кратна 7.

Докажем, что при делении квадрата какого-то числа остаток так же будет квадратом.

$a=7n+q$

$a^2=(7n+q)^2=49n^2+14nq+q^2$, $(49n^2+14nq) \vdots 7$, т.к. $49n^2+14nq=7(7n^2+2nq) \Rightarrow q^2$ - остаток.

Значит остатками от деления на 7 чисел x^2, y^2 и z^2 могут быть только 0, 1 и 4, т.к. это 0^2, 1^2 и 2^2, числа больше или равные $3^2=9$ не могут быть остатками от деления на 7. Все возможные комбинации из 0, 1 и 4: $0+0+0=0$, $0+0+1=1$, $0+1+1=2$, $1+1+1=3$ $0+0+4=4$, $0+1+4=5$, $0+4+4=8$, $1+1+4=6$, $1+4+4=9$. Из них получаем число кратное 7, только при $0+0+0=0$. Значит ~~$x^2+y^2+z^2$~~ x^2, y^2 и z^2 кратны $7 \Rightarrow x, y$ и z кратны 7.

Таких чисел в множестве $\{1, 2, \ldots, 70\}$ десять (7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70). ~~Тогда всего комбинаций из 10 3 чисел, каждое из которых может принимать 10 значений от 10·10·10 = 1000~~ ~~Тогда всего получится~~

$C_3^{10}=\frac{10!}{(10-3)!3!}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=10\cdot 3\cdot 4=120$ ~~упорядоченных троек~~

Тогда всего будет $C_3^{10}=\frac{10!}{(10-3)!3!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{6}=120$ ~~упорядоченных~~ троек (x, y, z) из разных чисел, $\frac{10\cdot 9}{2}$ упорядоченных троек, где 2 числа одинаковы, и 10 троек, где все числа равны. $120+45+10=175$

Ответ: 175 упорядоченных троек (x, y, z).

(+)

гораздо больше!

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ (Москва)
Место проведения

RN 21 - 52
шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Михайлов

ИМЯ Михаил

ОТЧЕСТВО Михайлович

Дата рождения 13.10.2000 **Класс:** 11

Предмет мат **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 04 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Михайл

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№5.

$x^y + y^z = xyz$.

I. Пусть $z>3$ ~~$z\neq 1 \Rightarrow x^y + y = xy \Rightarrow y = \frac{x^y}{x-1} \Rightarrow x=2$~~

Докажем, что x и y не имеют простых делителей:

Пусть ~~это~~ не так, ~~тогда~~ и ~~xy~~ $x \vdots p^k$, где p – простое; $k \in \mathbb{N}$

Заметим, что x^y и $xyz \vdots p^k \Rightarrow y^z \vdots p^k$. Взглянем на степени p в уравн.:

почему $x = y = p^k$?

(1) $p^{yk} + p^{zk} = p^{zk}\cdot z \Rightarrow z = p^{k(y-2)} + p^{k(z-2)}$ ①.

Заметим, что при $z>4$, $p^{k(z-2)} \geq z$ и $p^{k(y-2)} \geq 1 \Rightarrow z \neq p^{k(y-2)} + p^{k(z-2)}$ *

[Также заметим, что при $z=3$ имеется решение ① при $y=2$, $k=1$, $p=2$, это единственное, т.к. $p^{k(3-2)} \geq 2$ (т.к. $p \geq 2$ как простое) и $p^{k(y-2)} \geq 1$, причём ($p^{k(y-2)}=1$ при $p^k=2$) при $p=2$; $k=1$ и $y=2 \Rightarrow x^2+2^3=6x \Rightarrow x^2-6x+8=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$ т. Виета]

Итак, при $z \geq 4$, x и y не имеют простых $\Rightarrow x=y=1 \Rightarrow 1+1=z \Rightarrow z=2<4 \Rightarrow$
$\Rightarrow z \leq 3$

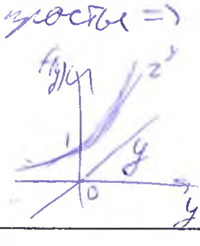
*. Для y доказывается аналогично: Пусть $y \vdots p^k \Rightarrow y^z$ и $yxz \vdots p^k \Rightarrow x^y \vdots p^k$

$p^{yk}+p^{zk}=p^{zk}\cdot z \ldots$

$\mp$

II. $z=1 \Rightarrow x^y + y = xy \Rightarrow y = \frac{x^y}{x-1}$; заметим, что x и $x-1$ – взаимно просты $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^y$ и $x-1$ тоже $\Rightarrow$ при $x \neq 2$, $y \notin \mathbb{Z} \Rightarrow x=2 \Rightarrow 2^y = y \Rightarrow y \in \varnothing$



III. $z=2$

$x^2+y^2=2xy$. 1) $x=1 \Rightarrow y^2-2y+1^2=(y-1)^2=0 \Rightarrow y=1$

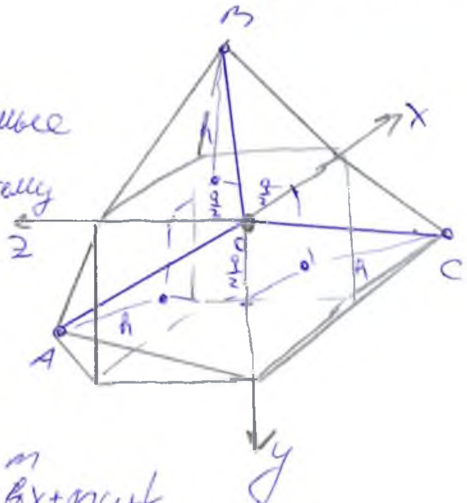
2) $x\neq 1 \Rightarrow y^2-2xy+x^2=0$

$D_1 = x^2-x^2 \geq 0 \Rightarrow \left[y \leq 2 \right.$ (при $y=1; x=1$) $\Rightarrow$ при $y=2$

$x^2+4=4x \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2$

Ответ: $(2;2;3)$, $(4;2;3)$, $(1;1;2)$, $(2;2;2)$ ← Есть еще одно решение

№4.



A) Пусть одна из вершин куба O и искомые отрезки: OA; OB и OC (см. рис.) введём систему координат, связанную с рёбрами куба при O.

Найдём такое h, при котором точки A, B, C и O лежат в одной плоскости.

Пусть эта плоскость описывается $z=mx+ny+k$, т.к. $O(0;0;0)$ лежит там $\Rightarrow k=0$. $A(-h; \frac{a}{2}; \frac{a}{2})$, $B(\frac{a}{2}; -h; \frac{a}{2})$ и $C(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -h)$

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \begin{cases} \frac{a}{2} = -hm + n\frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} = \frac{a}{2}m - hn \\ -h = \frac{a}{2}m + \frac{a}{2}n = \frac{a}{2}(m+n) \end{cases} \Rightarrow -h = \frac{a}{2}\frac{(1-n)}{m} = \frac{a}{2}\frac{(1-m)}{n} \Rightarrow n-n^2 = m-m^2 \Rightarrow m^2-n^2 = m-n \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=n \\ m+n=1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -h = \frac{a}{2}\frac{1-m}{m} \\ -h = am \end{cases} \Rightarrow 2m^2 = 1-m \xRightarrow{\text{т. Виета}} \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -h=-a \\ -h=\frac{1}{2}a \end{array}\right. \Rightarrow h=a \\ -h = \frac{a}{2}, \text{ но } h>0 \end{array}\right.$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4В. Заметим, что в 4А, ~~…~~ вершину O мы выбрали произвольно, и, т.к. все пирамиды равные, то это условие выполняется для всех вершин.

+

Ответ: 4А: $h=a$
4В: ~~из 4А~~ в примере 4А, условие выполнено для всех вершин.

№2.

Пусть r - радиус основания и h - высота цилиндра $(r;h>0)$
Заметим, что если мы сможем однозначно определить r и h по S и V, то условие выполнено:

$$\begin{cases} S=2\pi r(r+h) \\ V=\pi r^2 h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi r^2} \end{cases} \Rightarrow S=2\pi r\left(r+\frac{V}{\pi r^2}\right) \Big| \cdot r \Rightarrow 2\pi r^3-Sr+2V=0$$

~~Итак, если уравнение~~ ~~Зависимо~~ Из $h=\frac{V}{\pi r^2}$ мы можем однозначно определить h от r $\Rightarrow$ нам достаточно, чтобы уравнение $2\pi r^3-Sr+2V=0$ имело единственный ~~один~~ корень из ОДЗ $(r>0)$

−

Ответ: Это возможно, при условии, что уравнение $2\pi x^3-Sx+2V=0$ имело ровно 1 положительный корень.

№1.

$x_1+x_2+x_3 \leq 2$ МВт. Так как $x_1;x_2;x_3$ - мощности, то $x_1;x_2;x_3 \geq 0$

$\Rightarrow f_{min}(x_1;x_2;x_3)=f(0;0;0)=0$ (меньше 0 не может быть как сумма трёх ~~положительных~~ неотрицательных (~~как~~ корня)).

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Заметим, что $f(x_1;x_2;x_3)$ симметрична относительно $x_1;x_2$ и x_3 (любую переменную можно заменить другой) $\Rightarrow f_{max}$ достигается при $x_1=x_2=x_3$;

т.к. $x_1+x_2+x_3 \le 2$ МВт $\Rightarrow x_1=x_2=x_3\le\frac{2}{3}$ МВт $\Rightarrow f_{max}=f\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)=3\sqrt{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2}=2\sqrt{2}$ (МВт)

Ответ: $f_{min}=0$; $f_{max}=2\sqrt{2}$ МВт.

0

По т. Коши:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x_2}+(x_1^2x_2+x_2^2x_3)\ge 2\sqrt{x_1^2+x_2x_3}\\ \frac{1}{x_3}+(x_2^2x_3+x_3^2x_1)\ge 2\sqrt{x_2^2+x_1x_3}\\ \frac{1}{x_1}+(x_3^2x_1+x_1^2x_2)\ge 2\sqrt{x_3^2+x_1x_2}\end{array}\right| \Rightarrow 2f\le\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+2(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1)$$

№3.

Пусть $P(x)=a_ix^i+a_{i-1}x^{i-1}\dots+a_1x+a_0$

$P(1)=a_i+a_{i-1}+\dots+a_1+a_0=2019$

$P(2019)=a_i2019^i+a_{i-1}2019^{i-1}\dots+2019a_1+a_0=1\Rightarrow a_0\underset{2019}{\equiv}1$

$P(k)=a_ik^i+a_{i-1}k^{i-1}\dots+ka_1+a_0=k\Rightarrow a_0\underset{k}{\equiv}k\Rightarrow a_0\,\vdots\,k$

~~$P(2019)+2019=P(2019)+P(1)=a_i($~~

$P(k)-P(1)=k-2019=a_i(k^i-1)+a_{i-1}(k^{i-1}-1)\dots+a_1(k-1)\Rightarrow k-2019\,\vdots\,k-1\Rightarrow$ ✓

$\Rightarrow k-2019=n(k-1)\Rightarrow k=\frac{n-2019}{n-1}$ ($n\in\mathbb{Z}$) ~~Подходят:~~ ~~Заметим, что $n>0$ не подхо-~~ ~~дят, т.к. $\frac{n-2019}{n-1}<0$,~~

Подходят $\begin{cases}n=2\Rightarrow k=-2017\\ n=3\Rightarrow k=-1008\\ \vdots\\ n=1010\Rightarrow k=-1\end{cases}$

подходят ли они под другие условия?

∓

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

РЮ 98-57

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Наумова

ИМЯ Надежда

ОТЧЕСТВО Александровна

Дата рождения 21.09.2000

Класс: 11

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 2 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Наум

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 3

$P(1)=2019$
$P(2019)=1$
$P(k)=k$

Составим уравнение прямой $y=P(x)$

$x_1=1$ $x_2=2019$
$y_1=2019$ $y_2=1$

по 2м точкам: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$\frac{x-1}{2019-1}=\frac{y-2019}{1-2019}$

$2018(y-2019)=-2018(x-1)$

$y-2019=-x+1$

$y=2020-x$

$P(x)=2020-x$

$P(k)=2020-k=k$

$2k=2020$; $\underline{k=1010}$ +

Ответ: 1010.

N 5

$x^y+y^z=xyz$

$\underline{x=1,\ y=1,\ z=2}$: $1^1+1^2=1\cdot1\cdot2$
$2=2$ – верно.

∓

Ответ: $(1;1;2)$.

N 1.

$f(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{x_1^2+x_2x_3}+\sqrt{x_2^2+x_1x_3}+\sqrt{x_3^2+x_1x_2}$

$x_1+x_2+x_3\le 2$ МВт

$f_{наиб}=f(1,1,0)=\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}+\sqrt{0+1}=3$; $1+1+0\le2$ мВт

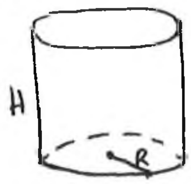
$f_{наим}=f(0,0,0)=\sqrt{0}+\sqrt{0}+\sqrt{0}=0$

$0+0+0\le2$ мВт,

∓

Ответ: 3 ; 0. ответы правильные, но не обоснованные

N 2



$V_{цил}=V$

$S_{п.п\ цил}=S$

Пусть R – радиус цилиндра,
H – высота цилиндра

$V=\pi R^2H\to H=\frac{V}{\pi R^2}$

$S=2\pi RH+2\pi R^2$

$S=\frac{2\pi RV}{\pi R^2}+2\pi R^2=\frac{2V}{R}+2\pi R^2$

2 цилиндра являются равными, если их высоты и радиусы равны.

⊖

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

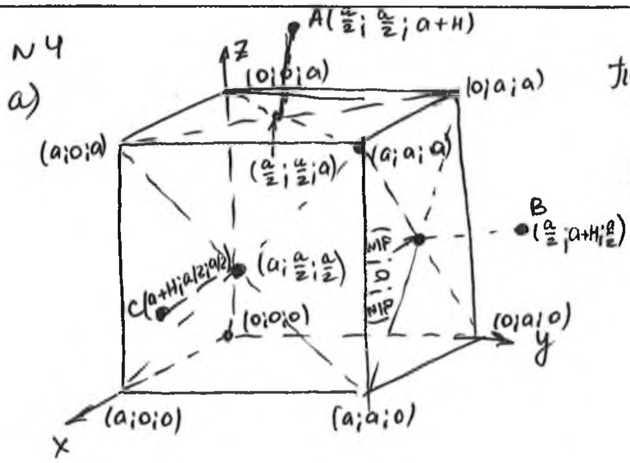
Вариант: 17 III

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ РЮ 98-57

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

а)



Пусть a – сторона куба, H – высота в прав. пирамиде

Введем прямоугольную декартову систему координат (см. рис.)

Тогда координаты вершин пирамид A, B, C

$A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a+H\right)$

$B\left(\frac{a}{2}; a+H; \frac{a}{2}\right)$

$C\left(a+H; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$

$\alpha: \ Ax+By+Cz+D=0$

$$\begin{array}{l} A\in\alpha \\ B\in\alpha \\ C\in\alpha \end{array} \begin{cases} A\cdot\frac{a}{2}+B\cdot\frac{a}{2}+C(a+H)+D=0 \ (1) \\ A\cdot\frac{a}{2}+B(a+H)+C\cdot\frac{a}{2}+D=0 \ (2) \\ A(a+H)+B\cdot\frac{a}{2}+C\cdot\frac{a}{2}+D=0 \ (3) \end{cases}$$

Вычтем из (1) (2)

$B\left(\frac{a}{2}-a-H\right)+C\left(a+H-\frac{a}{2}\right)=0$

$C\left(\frac{a}{2}+H\right)=B\left(a-\frac{a}{2}+H\right)$

$\underline{B=C}$

Вычтем из (1) (3)

$A\left(\frac{a}{2}-a-H\right)+C\left(a+H-\frac{a}{2}\right)=0$

$C\left(\frac{a}{2}+H\right)=A\left(\frac{a}{2}+H\right)$

$\underline{A=C}$

Вычтем (3) из (2): $A\left(\frac{a}{2}-a-H\right)+B\left(a+H-\frac{a}{2}\right)=0$

$\underline{A=B}$

Значит $A=B=C$

Подставим в (1):

$A\cdot\frac{a}{2}+A\cdot\frac{a}{2}+A(a+H)+D=0$

$Aa+A(a+H)=-D; \ \underline{D=-Aa-A(a+H)}$

$\alpha: \ Ax+Ay+Az-Aa-A(a+H)=0$

$x+y+z-a-a-H=0$

$\underline{x+y+z=2a+H}$.

Проверим, удовл. ли уравнению плоскости точка – общая вершина куба, т.е. $(a;a;a)$:

$a+a+a=2a+H$

$2a+a=2a+H$

$a=H$, значит, если ~~высоты~~ ~~пирамиды~~ равна a, то боковые ребра 3 пирамид, исходящих из 1 вершины будут лежать в 1 ой плоскости.

в) да, если высота пирамид равна a; док-во каждого случая аналогично п. а)

+

Лист 02 из 02

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Сош 11	ЕВ 31-23	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Никитин

ИМЯ Кирилл

ОТЧЕСТВО Александрович

Дата рождения 14.03.2004. **Класс:** 8 Б

Предмет Математика **Этап:** ______

Работа выполнена на 04 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ______

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

2018 ; $2018n$; n ; $\frac{1}{2018}$; n_1 ; $\frac{1}{n}$; 2018 ; $\frac{1}{n_1}$; n ; $\frac{1}{2018}$ ...

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X

и т.д.

IV $nn_1 = \frac{1}{2018}$

V $\frac{nn_1}{1} = \frac{1}{2018} \Rightarrow n_1 = \frac{1}{2018 \cdot n}$

VI [illegible] $\frac{1}{nn_1} = 2018 \Rightarrow \frac{1}{n} = 2018 : \frac{1}{n_1} = 2018n_1$

VII $2018 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n_1}$

VIII $\frac{1}{n_1} = 2018 \cdot n$

IX $\frac{\frac{1}{n_1}}{n} = 2018 \Rightarrow \frac{1}{n} = 2018n_1 \Rightarrow n = \frac{1}{2018} \cdot \frac{1}{n_1}$

X $\frac{1}{2018} = nn_1$.

Всё это повторяется до 100

в одном периоде 6 ~~7~~ чисел, чисел 100 $\Rightarrow$

$\frac{100}{6} = 16$ ост 4., четвёртым ~~до~~ числом является $\frac{1}{2018}$, значит, ~~что~~ в конце будет $\frac{1}{2018}$

+

Ответ: последнее число $\frac{1}{2018}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EB 31-23

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Т.к сыграно 77 матчей, выбывшие команды сыграли все матчи друг с другом и кол-во матчей, сыгранных каждой выбывшей командой одинаково, то игроки выбывших команд не только друг с другом. => число матчей сыгранных выбывшими командами равно $\frac{x}{2}$, т.к сыграно 77 матчей, а число 77 - нечётное, то $\frac{x}{2}$ - нечётное и играли они друг с другом нечётное кол-во раз (1;3;5 и т.д)

Т.к выбыла половина команд, то выбывшие сыграли друг с другом $\frac{0,5x-1}{2} \cdot 0,5x$ и столько же оставшиеся между собой.

Составим ур-ие.

$$\frac{0,5x-1}{2} \cdot 0,5x + \frac{0,5x-1}{2} \cdot 0,5x + \frac{x}{2} \cdot 5 = 77$$

$$\frac{0,5x^2 - x}{2} + \frac{5x}{2} = 77 \quad | \cdot 4$$

$$x^2 - 2x + 10x = 77 \cdot 4$$

$$x^2 + 8x - 308 = 0$$

$$D = 8^2 + 4 \cdot 308 = 1296$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{1296}}{2} = \frac{-8 \pm 36}{2} = -4 \pm 18$$

$x_1 = 14$

$x_2 = -22$ – не уд.

Ответ: в начале турнира было 14 команд.

(+)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

$$\begin{cases} \dfrac{a+c}{2} = b \\ \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2} = \dfrac{1}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+c = 2b \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+c = 2b \\ \dfrac{a+c}{ac} = \dfrac{2}{b} \end{cases}$$

$$\frac{2b}{ac} = \frac{2}{b}$$

$$2b^2 = 2ac$$

$$b^2 = ac$$

$$b = \sqrt{ac}$$

$$\begin{cases} a+c = 2b \\ ac = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+c = 2b \\ 2\sqrt{ac} = 2b \end{cases}$$

$$2\sqrt{ac} = (a+c)$$

$$4ac = a^2 + 2ac + c^2$$

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0$$

$$(a-c)^2 = 0$$

$$a - c = 0.$$

$$a = c.$$

$$b = \sqrt{a^2} = |a|$$

±

Ответ: [illegible] ; $b = c = a$.

частичный ответ. есть ещё варианты!

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

9ч №4.

1) A, B → ← C

2) 10ч

A S_1 B S_1 C

3) 10ч 30мин

A S_2 C S_2 B

4) x

C S_3 A S_3 B

$\Delta t_0 = 1ч$

$\Delta t_1 = 0{,}5ч$

$\Delta t_{01} = 1{,}5ч$

$\Delta t_3 = 1{,}5ч - 1ч$

$\Delta t_x = x - 10{,}5ч$

$v_B > v_A$

$\Delta t_0(v_B - v_A) = S_1$

$\Delta t_{01}(v_B - v_A) = 2S_2$

$\Delta t_2(v_B + v_C) = S_1 + S_2$

$\Delta t_3(v_C + v_A) = S_1 + 2S_2 + S_3$

$$\frac{\Delta t_0(v_B - v_A)}{\Delta t_{01}(v_B - v_A)} = \frac{S_1}{2S_2}$$

$$\frac{1}{1{,}5} = \frac{S_1}{2S_2}.$$

$$S_1 = \frac{2S_2}{1{,}5} = \frac{4}{3}S_2$$

$$S_2 = \frac{3}{4}S_1.$$

$$\begin{cases} \Delta t_x(v_B - v_A) = S_3 - 3\frac{1}{3}S_2 \\ \Delta t_x(v_B + v_C) = 2S_3 - S_2 \\ \Delta t_x(v_A + v_C) = S_3 + S_2 \end{cases}$$

$\Delta t_x(v_B - \cancel{v_A} + v_B + v_C + \cancel{v_A} + v_C) = 4S_3 - 3\frac{1}{3}S_2$

$$\Delta t_x = \frac{4S_3 - 3\frac{1}{3}S_2}{2(v_B + v_C)}$$

—

Задача не решена

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

СОШ 11	ЕВ 31-46
Место проведения	шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Николаева

ИМЯ Софья

ОТЧЕСТВО Владиславовна

Дата рождения 18.02.2003 **Класс:** 8 А

Предмет Математика **Этап:** ______

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Софья

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ EB 31-46

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Рассмотрим закономерность последовательности чисел в ряду, в котором каждое число, исключая первое и последнее, равно произведению своих соседей.

И так, если первое число x, а второе y, то 3-е должно быть $\frac{y}{x}$

4-е $\frac{1}{x}$; 5-е — $\frac{1}{y}$, 6-е — $\frac{x}{y}$: (*цикл закончился, т.к. 7-е — x)

$x \; y \; \frac{y}{x} \; \frac{1}{x} \; \frac{1}{y} \; \frac{x}{y}$

$y = \frac{y}{x} \cdot x$; $\frac{y}{x} = y \cdot \frac{1}{x}$ $\quad \frac{1}{x} = \frac{y \cdot 1}{x \cdot y}$ $\quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{y}$ $\quad \frac{x}{y} = \frac{1}{y} \cdot x$

+

т.к. в последовательности 6 элементов, то таких "кругов" в цепочке из 100 чисел будет:

$100 : 6 = 16\frac{2}{3}$ ступени => последнее число будет четвертым из данного цикла, т.е. $\frac{1}{x}$ => ~~на~~ если $x = 2018$, то последнее число — $\frac{1}{2018}$

Ответ: последнее число $\frac{1}{2018}$.

2.

~~x — первоначальное число команд.~~
~~т.к. команда играть сама с собой не может, и в игре участие сразу 2 команды, то общее кол-во игр без выбывших команд равно:~~
~~$\frac{(x-1)x}{2}$, но т.к. половина команд выбыла, то кол-во игр умень~~

3.

$b = \frac{a+c}{2}$ (1) (из усл-я), рассмотрим 3 варианта значений прогр:

Если $\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2}$

$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) 1ое подставим в уравнение:

$$\frac{2}{\frac{a+c}{2}}=\frac{a+c}{ac}$$

$$\frac{4}{a+c}=\frac{a+c}{ac}$$

$$(a+c)^2=4ac$$

$$a^2+2ac+c^2-4ac=0$$

$$a^2-2ac+c^2=0$$

$$(a-c)^2=0 \Rightarrow b=a=c$$

$$a-c=0 \Rightarrow a=c \Rightarrow \frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a},\ \text{при } b\in\forall, a=c\ ?$$

Если $\frac{1}{c}=\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{2}$

подставим (1) в уравнение:

$$\frac{1}{c}=\frac{\frac{1}{\frac{a+c}{2}}+\frac{1}{a}}{2}$$

$$\frac{1}{c}=\frac{\frac{2}{a+c}+\frac{1}{a}}{2}$$

$$\frac{1}{c}=\frac{\frac{2a+a+c}{(a+c)(a)}}{2}$$

$$\frac{1}{c}=\frac{3a+c}{2a(a+c)}$$

$$2a^2+2ac-3ac-c^2=0$$

$$2a^2-ac-c^2=0$$

$$(a^2-c^2)-ac+a^2=0$$

$$(a-c)(a+c)+a(a-c)=0$$

$$(a-c)(a+c+a)=0 \Rightarrow \text{или } a=c, \text{ или } \cancel{2a=c}\ 2a=-c \Rightarrow$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{2}$, т.е. $\frac{1}{c}$ – сред. арифм. $\frac{1}{b}+\frac{1}{a}$, при $b \in \forall$, $a=c$, или $2a=-c$.

аналогично для $\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}$, т.е. $\frac{1}{a}$ – ср.арифм. при $b \in \forall$, $a=c$ или $2c=-a$

Ответ: $b \in \forall$; $a=c$ и $2a=-c$, если $\frac{1}{c}$ – сред.арифм. чисел $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{a}$
$2c=-a$, если $\frac{1}{a}$ – сред. арифм. чисел $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$.

№2

x – кол-во команд,

т.к. ~~кол-во~~ команды не могут играть сами с собой и в игре участвуют 2 команды, то первоначальное число ~~колич~~ игр должно быть: $\frac{(x-1)\cdot x}{2}$, но половина команд выбыла, поэтому кол-во игр уменьшилось на $\frac{(\frac{1}{2}x-1)\frac{1}{2}x}{2}$:

$$\frac{(x-1)\cdot x}{2} - \frac{(\frac{1}{2}x-1)\frac{1}{2}x}{2} = 77$$

$$\frac{x^2-x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-154}{2} = 0, \text{ т.к. } 2 \neq 0, \text{ то}$$

$\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 154 = 0$ – умножим на 4, чтобы избав. от знаменателей.

$3x^2-2x-616=0$

$\frac{D}{4} = 1+1848 = 1849 = 43^2$

$x = \frac{1+43}{3} = 14$ команд участвовало в турнире, т.к. $x \not< 0$.

Ответ: 14 команд.

±

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Место проведения	шифр
ЧРИО	VE 91-92

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Петров

ИМЯ Илья

ОТЧЕСТВО Родионович

Дата рождения 29.01.2002

Класс: 9

Предмет ~~Ма~~ МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: [signature]

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VE 91-92

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^4+4px^3+4x^2-px^2+4px-p=0$

$4x^2(x^2+1)+4px(x^2+1)-(x^2+1)p=0$

$(x^2+1)(4x^2+4px-p)=0$

x^2+1 всегда больше нуля, поэтому $4x^2+4px-p=0$

$D=16p^2+16p\geq0$, т.к. корни есть (по условию).

Тогда корни равны $x=\frac{-4p\pm\sqrt{16p^2+16p}}{8}=\frac{-4p\pm4\sqrt{p^2+p}}{8}=$

$=\frac{-p\pm\sqrt{p^2+p}}{2}=\frac{-p\pm\sqrt{p(p+1)}}{2}$ – должно быть рациональным числом. Тогда число $(-p\pm\sqrt{p(p+1)})$ должно быть рациональным. Если $\sqrt{p(p+1)}$ – иррациональное число, ~~то чтобы~~ $\cancel{(-p\pm\sqrt{p(p+1)})}$ ~~было рациональным нужно чтобы -p „скомпенсировало" иррац~~ то и p – иррационально, т.к. иначе $(-p\pm\sqrt{p(p+1)})$ будет иррациональны, что противоречит условию.

Если $\sqrt{p(p+1)}$ – рациональное число, то и $(-p)$ – рациональное. Тогда $p(p+1)$ – квадрат некоторого ~~рац-го~~ целого числа (т.к. p целое), что возможно только при $p=0$ или $p=-1$. Значит $p\in\{0;-1\}$.

Если $\sqrt{p(p+1)}$ – иррациональное число, то и p – иррационально, чего быть не может (из условия).

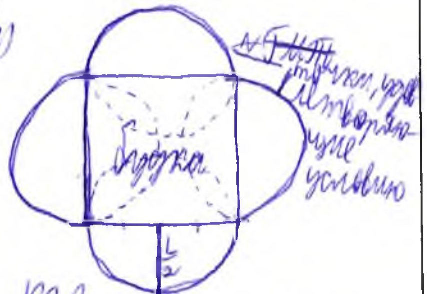
Значит, $\sqrt{p(p+1)}$ – рациональное число.

Ответ: $p\in\{-1;0\}$.

Задача 2.

Рассмотрим два случая: 1 - наблюдатель видит только одну стену и 2 - наблюдатель одновременно видит две стены. Большее кол-во стен он одновременно видеть не может. (+)

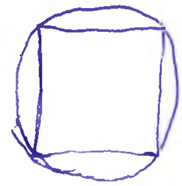
1. Нужно найти ГМТ таких, что если соединить их с ~~углами~~ концами (краями) видимой стены, то угол будет 90°. Тогда все эти точки будут лежать на окружности, диаметром которой будет стена. Однако наблюдатель находится вне будки, поэтому имеет смысл рассматривать только полуокружности. (рис. справа)



2. Если же наблюдатель видит одновременно две стены, то ~~угол~~ эти стены являются смежными, то есть имеют общее ребро. Тогда угол ~~между~~ образуемый противоположными концами стен и наблюдателем должен быть 90°, то есть наблюдатель ~~до~~ должен лежать на окр-ти, ~~описанной~~ диаметром которой является диагональ в сечении будки между рассматриваемыми углами. Однако, сечение будки - квадрат, поэтому остальные две ~~точки~~ вершины сечения будут

Задача 2 (продолжение)

~~все~~ лежать на этой окр-ти. Однако, из точек на противоположные вершины не все видны, значит ~~их~~ в случае 2 точек соответствующих условию нет.



Тогда ответом к данной задаче будут точки лежащие вне будки и удаленные от середины одной из сторон на $\frac{L}{2}$. При этом минимальное расстояние от стены, удовлетвор. усл. 3, это 0, и максимальное $\frac{L}{2}$.

Ответ: точки, лежащие вне будки и удаленные ~~на~~ от середины одной из сторон на $\frac{L}{2}$ локтей. минимальное расстояние равно 0, а максимальное $\frac{L}{2}$.

Задача 4.

~~Расс~~ Пусть $f(x) = x[x[x[x]]]$. Докажем, что функция возрастающая на $[0;+\infty)$. Пусть $x_1 > x_2$. Тогда $[x_1] \geq [x_2]$, откуда $x_1[x_1] > x_2[x_2]$. Аналогично рассуждая, получим, что $x_1[x_1[x_1[x_1]]] > x_2[x_2[x_2[x_2]]]$, то есть функция возрастает. Тогда, если для какого-то x выполняется условие $x[x[x[x]]] < 2018$, то и для меньших x оно выполняется.

Рассмотрим $x=7$: $7[7[7[7]]] = 2401 > 2018 \Rightarrow$ условие не выполняется. Теперь рассмотрим x такой, что $x > 6$, $x < 7$. Тогда $[x] = 6$. $x[x] < 7 \cdot 6 = 42 \Rightarrow [x[x]] \leq 41$. $x[x[x]] < 7 \cdot 41 = 287$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4 (продолжение)

Отсюда получим, что $[x[x[x]]] \le 286$.
Далее, $x[x[x[x]]] < 7 \cdot 286 = 2002$. То есть для любого ~~x<6~~ $x<7$ ~~x≤~~ $f(x) < 2002$, а значит и меньше 2018. При этом для $x=7$ условие уже не выполняется. x - положительное вещественное число, поэтому $x \in (0; 7)$ ~~для в~~ - условие выполняется.

Ответ: $x \in (0; 7)$.

+

Задача 5.

Рассмотрим всевозможные остатки, которые может давать квадрат нат. числа при делении на 7: $(7k)^2 = 49 \overset{mod 7}{\equiv} 0$; $(7k+1)^2 = 49k^2 + 14k + 1 \overset{mod 7}{\equiv} 1$; $(7k+2)^2 = 49k^2 + 28k + 4 \overset{mod 7}{\equiv} 4$; $(7k+3)^2 \overset{mod 7}{\equiv} 2$; $(7k+4)^2 \overset{mod 7}{\equiv} 2$; $(7k+5)^2 \overset{mod 7}{\equiv} 4$; $(7k+6)^2 \overset{mod 7}{\equiv} 1$, ~~где~~ где $k \in N$. То есть квадраты чисел при делении на 7 могут давать остатки 0, 1, 4, 2. ~~Сумма трёх квадратов даёт в остатке 1.~~ ~~Сумма трёх ква~~

$x^2 + y^2 + z^2 \vdots 7$ (из условия), значит, сумма их остатков (чисел x^2, y^2, z^2) при делении на 7 кратна 7. Это возможно в двух случаях: 1) все числа кратны 7; 2) они дают остатки 1, 2 и 4.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5 (продолжение).

1) Посчитаем случаи, когда все числа кратны 7. ~~Всего~~ Получить $x^2 \vdots 7$ можно только если сам $x \vdots 7$. В данном в условии множестве чисел кратных 7 всего 10. Тогда упорядоченных троек, соответствующих условию 10^3 (10 вар-ов для x, 10 для y и 10 для z).

2) Теперь рассмотрим второй случай. Если $x^2 \overset{mod 7}{\equiv} 1$, то $x \overset{mod 7}{\equiv} 1$ или $x \overset{mod 7}{\equiv} 6$; если $x^2 \overset{mod 7}{\equiv} 2$, то $\left[\begin{array}{l} x \overset{mod 7}{\equiv} 3 \\ x \overset{mod 7}{\equiv} 4 \end{array}\right.$; если $x^2 \overset{mod 7}{\equiv} 4$, то $\left[\begin{array}{l} x \overset{mod 7}{\equiv} 2 \\ x \overset{mod 7}{\equiv} 5 \end{array}\right.$. Чисел каждого вида в данном в условии множестве по 20. Пусть ~~перв~~ $x^2 \overset{mod 7}{\equiv} 1$, $y^2 \overset{mod 7}{\equiv} 4$, $z^2 \overset{mod 7}{\equiv} 2$, кол-во упорядоченных троек, соот~~вс~~ветствующих данному условию 20^3 (20 вар-ов для x, 20 для y, 20 для z). Аналогично рассуждая для других случаев, получим, что всего вариантов в данном случае ~~(2)~~ (где остатки 2, 4 и 1) $6 \cdot 20^3$.

Тогда всего упорядоченных троек, подходящих условию $10^3 + 6 \cdot 20^3 = 1000 + 6 \cdot 8\,000 = 49000$

Ответ: 49000. – перебор !

∓

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

2724	CF21-S2	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Петрова

ИМЯ Анна

ОТЧЕСТВО Алексеевна

Дата рождения 25.03.2001 **Класс:** 10

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Петрова

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ CF21-52

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.

$7x+9y=997$ (Нам нужно решить это ур-е в натур. числах, тогда суммы будут такие:

$\underbrace{7+\ldots+7}_{x}+\underbrace{9+\ldots+9}_{y}=997$)

$9y<999$

$y<111$

рассмотрим остатки ~~от~~ от деления y на 7:

y	$9y$
0	0
1	2
2	4
3	6
4	1
5	3
6	5

$\left.\begin{array}{l} 997\equiv 3 \pmod 7 \\ 7x+9y\equiv 9y \pmod 7 \end{array}\right\} \Rightarrow y=7k+5,\ k\in\mathbb{N}_0\ (k\in\{0\}\cup\mathbb{N})$

$7k+5=y<111 \Rightarrow 7k<106 \Rightarrow k<16$

(+)

$7x+9(7k+5)=997$

$7(x+k)=997-45=952$

$x+k=136 \Rightarrow x=136-k$

для каждого k, $x\in\mathbb{N}$. Каждое k дает решение ур-я $k\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=7k+5 \\ x=136-k \end{array}\right.$, они все разные и $x,y\in\mathbb{N}$. $k\in(0;1;\ldots;15)$

~~[illegible]~~

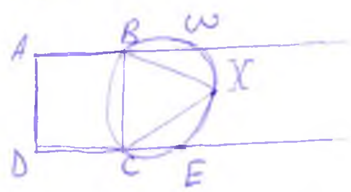
Всего решений 16.

№4.

~~[illegible]~~

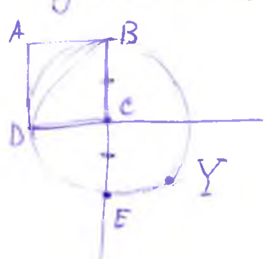
$\cancel{\left.\begin{array}{l} b\in\mathbb{Z} \\ a^b=N \end{array}\right\} \Rightarrow a\in\mathbb{Z}}$

№3.



ABCD - будка

2) рассматриваем область ограниченую лучами BC и DC.



Ищем ~~E~~ ГМТ:

$\angle BYD = 45°$ (в выбранной нами области у будки будут видны отрезки BC и CD) ~~значит~~ (если C совпад. с D или с B ($Y \in DC$ или BC) то $\angle BYD$ превращ в $\angle BYC$ или $\angle DYC$)

⇓

$Y \in \omega'$

$E = \omega' \cap BC$, $\angle BED = 45°$ ⇒ $CE = 1$

$B, D, E \in \omega'$ ⇒ C - центр ω'

⇓

CY - расстояние до будки $= 1$

1) рассматриваем область правее BC огран. ~~лучами~~ прямыми AB и CD ~~справа~~

Ищем ГМТ:

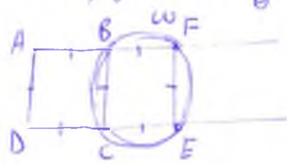
$\angle BXC = 45°$ (в выбранной нами области ~~видна именно~~ у будки будет виден именно отрезок BC)

⇓

$X \in$ окр. ω

$E = \omega \cap DC$, $\angle BEC = 45°$ ⇒ $CE = 1$

~~значит~~ значит, если мы отразим ABCD отн BC, то ω будет описана вокруг получившегося квадрата.



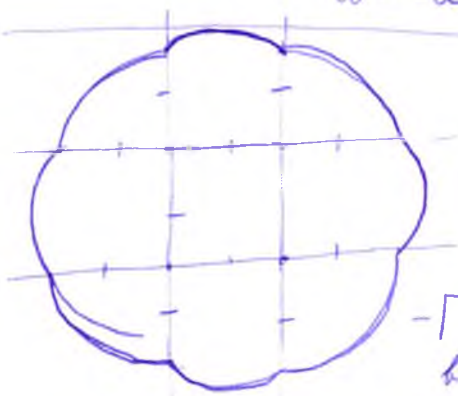
~~#~~ ГМТ - дуга FE окр. ω

~~т~~ пусть x - длина хорды прох. через X и перпендикулярная BC, тогда расстояние a от точки X до будки -

$$a = \frac{x-1}{2} + 1 = \frac{x+1}{2}$$

$$1 \le x \le d = (d \text{ - диаметр } \omega) = CF = 1 \cdot \sqrt{2}$$

$$1 \le a \le 1\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$$



- ГМТ точек из которых видна будка

min $= 1$

max $= \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) 1$

(минимальное и максимальное расстояние до будки)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ CF21-52

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

пусть $x \geq 5$:

$x^{[x]} \geq 5^5 = 3125 > 2018$

противоречие

1) $[x] = 1$, $1 \leq x < 2$

$x^1 = N$

$x = N$

значения N ~~решения~~: $\{1\}$

2) $[x] = 2$, $2 \leq x < 3$

$x^2 = N$

$4 \leq x^2 < 9$

значения N ~~решение~~: $\{4; 5; 6; 7; 8\}$

3) $[x] = 3$, $3 \leq x < 4$

$x^3 = N$

$27 \leq x^3 < 64$

значения N: $\{27; \ldots; 63\}$

4) $[x] = 4$, $4 \leq x < 5$

$x^4 = N$

$256 \leq x^4 < 625$

значения N: $\{256; \ldots; 624\}$

5) $[x] = 0$, $0 \leq x < 1$

$x^0 = 1 = N$

значения N: $\{1\}$.

во вариантах 1 и 5 кол-во значений $N = 1$

во варианте 2:

$9 - 4 = 5$

во вар-те 3:

$64 - 27 = 37$

во вар-те 4:

$625 - 256 = 369$

всего значений $1 + 5 + 37 + 369 =$

$= 412$

Ответ: 412.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ Москва

Место проведения

RN 61-72

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ САВКИН

ИМЯ ЕГОР

ОТЧЕСТВО АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 27.06.2000

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

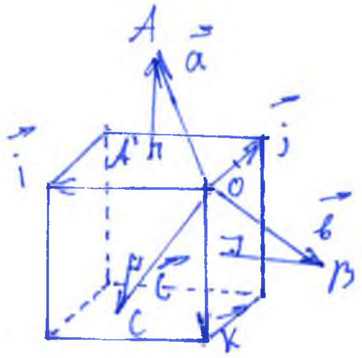
Работа выполнена на 03 **листах**

Дата выполнения работы: 10 февраля 2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: [подпись]

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа



№4

Решение.

Введём базис, как показано на рисунке, причём $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=a$.

Покажем, что векторы $\vec{a}(0,5;0,5;-1)$, $\vec{b}(-1;0,5;0,5)$, $\vec{c}(0,5;-1;0,5)$ удовлетворяют условиям задач 4А и 4В.

Пусть $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ имеют вершину в $O(0;0;0)$, тогда вершины пирамид имеют координаты $A(0,5;0,5;-1)$; $B(-1;0,5;0,5)$, $C(0,5;-1;0,5)$.

При этом, точки O, A, B, C лежат в плоскости, заданной уравнением $x+y+z=0$:

$O: 0+0+0=0$; $A: 0,5+0,5-1=0$; $B: -1+0,5+0,5=0$;

$C: 0,5-1+0,5=0$. А значит, боковые ребра трех пирамид могут лежать в одной плоскости.

Отсюда высоты этих пирамид равны a.

Заметим, что проекции вершин таких пирамид ~~лежат~~ на плоскость основания находятся в центре основания: $A'(0,5;0,5;0)$, и т.д. А значит, такие ~~данные~~ пирамиды имеют осевую симметрию, а и значит, все тройки данных рёбер лежат в плоскостях для каждой вершины куба.

№1.

$f(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{x_1^2+x_2x_3}+\sqrt{x_2^2+x_1x_3}+\sqrt{x_3^2+x_1x_2}$,

~~при~~. $x_1+x_2+x_3\le 2$

Очевидно, что f будет минимальным, если все 3 подкоренные выражения будут равны нулю: $f_{min}=f(0;0;0)=0$

С помощью метода научного тыка, заметим закономерности:

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$f(0;0;2)=2$; $f(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3})=3\cdot\sqrt{2\cdot(\frac{2}{3})^2}=2\sqrt{2}\approx 2{,}8$

$f(1;1;0)=3\sqrt{1+0}=3$; $f(1{,}5;0{,}25;0{,}25)\approx 1{,}5+2\cdot\sqrt{0{,}0625+0{,}0625}\approx 2{,}05$

Заметим, что наибольшее значение достигается в точке $(1;1;0)$, поэтому $f(1;1;0)=3=f_{max}$ +

Ответ: $f_{min}=0$; $f_{max}=3$

№5

$x^y+y^2=xyz$, $x,y,z\in N$

Очевидным решением является $(2;2;2)$:

$2^2+2^2=2\cdot2\cdot2$

$4+4=8$

$8=8$ (и)

Больше решений для $x=y=z$ нету:

$x^x+x^x=x^3$

$2x^x=x^3$

+ А если $x\neq y\neq z$?

Ответ: $\{(2;2;2)\}$

№3

$P(1)=2019$, $P(2019)=1$, $P(k)=k$, $k-?$

Решение.

Для простоты вычислений положим, что

$P(x)=2020-x$; $P(1)=2020-1=2019$, $P(2019)=2020-2019=1$

$P(k)=k$; $2020-k=k$; $k=1010$, т.к. $P(x)$ должен быть симметричным относительно $y=x$;

+

Ответ: $k=1010$

Решено с упрощением

см следующий лист

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RN 61-72

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Пусть h - высота цилиндра, r - его радиус.
Тогда $V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi(r^2 + rh) =$
$= 2\pi r(r+h)$

Для того, чтобы любые два цилиндра с параметрами V и S были равны, r должно быть равно h. Тогда $V = \pi r^3$; $S = 4\pi r^2$; =>

?

$$\Rightarrow \frac{V^2}{\pi^2} = \frac{S^3}{64\pi^3} \Rightarrow S^3 = 64\pi V^2$$

±

Ответ: если выполняется $S^3 = 64\pi V^2$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Место проведения

PJ 18-10

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Сафин

ИМЯ Артем

ОТЧЕСТВО Дамирович

Дата рождения 19.08.2004.

Класс: 7Т

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: ~~02.10.~~ 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Саф

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ PJ 18-10

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Для того чтобы пользоваться всеми машинами нужно выполнить сл. ~~условия~~ условия. Минимум четверо водителей должны быть обучены определенному типу машины. То есть на каждом типе машины могут кататься 4 водителя. Экономнее это сделать вот так.

1 вод. – I тип маш., II тип маш., III тип маш.

2 вод. – I, II, III

3 вод. – I, II, III

4 вод. – I, II, III

5 вод. – IV тип маш., V тип. маш.

6 вод. – IV, V

7 вод. – IV, V

8 вод. – IV, V

Есть множество вариантов обучения водителей, однако затраты на обучение всегда будут (минимум) 200 000 рублей.

$5 \cdot 4 \cdot 10000 = 200000$

5 машин (типов)

4 водителя

10000 – стоимость обучения одного водителя

Ответ: 200000 рублей

+

2) Пусть Саша $= x$, Паша $= y$, Аркаша $= z$.

1) $C = x - y$

$П = y + y = 2y$

$А = z$

2) $C = x - y - z$

$П = 2y$

$А = 2z$

3) $C = 2(x - y - z) = 2x - 2y - 2z$

$П = 2y - (x - y - z) - 2z = 3y - x - z$

$А = 4z$

4) $C = 2(2x - 2y - 2z)$

$П = 2(3y - x - z)$

$А = 4z - (2x - 2y - 2z) - (3y - x - z)$

5) $C = 4x - 4y - 4z$

$П = 6y - 2x - 2z$

$А = 7z - x - y$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Под цифрами 1, 2, 3, 4, 8 я расписал операции, которые были даны в условиях. Под цифрой 5 конечный результат всех операций. В условии сказано, что в конце у всех осталось 8 биткоинов. Решим систему уравнений.

1) $4x-4y-4z=8$

$6y-2x-2z=8$

$7z-x-y=8$

2) $x-y-z=2$

$3y-x-z=4$

$7z-x-y=8$

3) $x=2+y+z$

$3y-(2+y+z)-z=4$

$2y-2z-2=4$

$2y-2z=6$

$y-z=3$

$y=3+z$

$x=2+(3+z)+z$

$x=5+2z$

4) $7z-(5+2z)-(3+z)=8$

$7z-5-2z-3-z=8$

$4z-8=8$

$4z=16$

$z=4$

$x=5+2\cdot4=13$

$y=3+4=7$

(+)

Решение системы уравнений я для удобства разделил на этапы.

Ответ: У Саши было 13 б., у Паши – 7 б., у Аркаши – 4 б.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ PJ18-10

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) Для нумерации с I по IX дом нам понадобится 9 табл. с 10 по 99 – 180 табл. ⇒ с 1 по 99 дом мы потратим 189 табл. (180+9). Всего у нас в запасе 1917 табл. С 100-го дома, на каждый дом мы будем тратить 3 табл.

$1917 - 189 = 1728$

$\frac{1728}{3} = 576$ ⇒ Оставшихся 1728 табл. хватит на 576 домов. С 100 по 675 как раз 576 домов.

$576 + ~~100~~ 99 = 675$. Всего 675 домов. Если я правильно понял второй вопрос, то мы с легкостью сложим табл. в несколько стопок. Минимальное кол-во стопок 3. Максимальная высота каждой стопки 225 табл. $675 : 3 = 225$

4) Если я правильно понял условие второй задачи, то n – все нечетные числа. Тогда сумма чисел в каждой строке будет больше предыдущей на 1.

1	10	11	20	21
2	9	12	19	22
3	8	13	18	23
4	7	14	17	24
5	6	15	16	25

I число в строке всегда больше I числа в предыдущей строке, II меньше, III больше и т.д. ⇒ если число столбцов нечётное ~~то сумма~~ сумма каждая след. строка будет больше на один. Выше я привел пример таблицы с n=5. Ответ: ~~n=2n+1~~ n – любое нечетное число

5)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

НИУ МЭИ

Место проведения

УГ 36-69

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Севастьянов

ИМЯ Семён

ОТЧЕСТВО Алексеевич

Дата рождения 23.09.2003г

Класс: 8

Предмет ~~Мах~~ математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 7 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: С

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Пусть выписаны числа

$x_1; x_2 \ldots ; x_{100}$

Тогда из условия $x_1 = 2018$, также

$x_1 \cdot x_3 = x_2$

$2018 \cdot x_3 = x_2$

$x_3 = \frac{x_2}{2018}$

$x_2 x_4 = x_3$

$x_2 \cdot x_4 = \frac{x_2}{2018}$

$x_4 = \frac{1}{2018}$

$x_3 \cdot x_5 = x_4$

$\frac{x_2}{2018} \cdot x_5 = \frac{1}{2018}$

$x_2 \cdot x_5 = 1$

$x_5 = \frac{1}{x_2}$

$x_4 \cdot x_6 = x_5$

$\frac{1}{2018} \cdot x_6 = \frac{1}{x_2}$

$x_6 = \frac{2018}{x_2}$

$x_5 \cdot x_7 = x_6$

$\frac{1}{x_2} \cdot x_7 = \frac{2018}{x_2}$

$x_7 = 2018$

$\cancel{x_6 \cdot x_8 =}$

$x_6 \cdot x_8 = x_7$

$\frac{2018}{x_2} \cdot x_8 = 2018$

$x_8 = x_2$

~~Отка~~

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Откуда видим ~~что~~ по первым членам

$2018; X_2; \frac{X_2}{2018}; \frac{1}{2018}; \frac{1}{X_2}; \frac{2018}{X_2}; 2018; X_2$

что числа зацикливаются, а значит ряд будет таким

$$\left.\begin{matrix} 2018; X_2; \frac{X_2}{2018}; \frac{1}{2018}; \frac{1}{X_2}; \frac{2018}{X_2}; \\ 2018 \ldots \\ \vdots \end{matrix}\right\} 16 \text{ раз}$$

+

$2018; X_2; \frac{X_2}{2018}; \frac{1}{2018}$

Ну, а $\frac{1}{2018}$ последнее число т.к. $16 \cdot 6 + 4 = 100$

Ответ: $\frac{1}{2018}$

N 2

Пусть всего $2n$ команд ~~тогда~~. Так же заметим, что каждая дисквалифицированная команда сыграла с дисквалифицированными $n-1$ раз, т.к. дисквалифицированных $\frac{2n}{2} = n$.

Значит ~~каждая~~ дисквалифицированные коман-

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УГ 36-69

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

ды, сыграли с ~~..~~ не дисквалифицированными одинаковое кол-во игр, вить с дисквалифицированными они все сыграли $n-1$ раз, а также они все сыграли одинаковое кол-во игр.

Пусть это кол-во равно x, тогда всего игр было $C_n^2 + C_n^2 + xn = 77$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + xn = 77$$

$$n(n-1) + xn = 77$$

$$n(n-1+x) = 77$$

Причём $x<n$ Заметим, что $n>1$, что очевидно, также $x \neq 0$ иначе

$n(n-1) = 77$ тоесть $77 \vdots 2$!!!

Тоесть $n-1+x \geq n$, т.к. 77 это либо $7 \cdot 11$, либо $1 \cdot 77$ ~~но 1·77 быть~~ и $n>1$ и $n-1+x \geq n$, то

$n=7$ и $n-1+x=11$

тогда $2n = 14$

Ответ: 14

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УГ 36-69

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Пусть
$$S_1 = a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2 = 2018^2$$
$$S_2 = b_1^2 + \dots + b_n^2 = 2017^2$$
$$S_3 = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 2017 \cdot 2018$$

Тогда
$$S_1 \cdot S_2 = \sum_{i,j} a_i^2 b_j^2 = S_3^2 = \sum_{i>j} 2 a_i a_j b_i b_j$$

+

Заметим $a_i^2 b_j^2 + b_i^2 a_j^2 \geqslant 2 a_i a_j b_i b_j$

Поэтому $\sum_{i,j} a_i^2 b_j^2 \geqslant \sum_{i>j} 2 a_i a_j b_i b_j$

и значит $a_i^2 b_j^2 + b_i^2 a_j^2 = 2 a_i a_j b_i b_j$
$$a_i^2 b_j^2 + b_i^2 a_j^2 - 2 a_i a_j b_i b_j = 0$$
$$(a_i b_j - b_i a_j)^2 = 0$$
$$a_i b_j = b_i a_j$$
$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j} = x$$

То есть $\frac{a_1}{b_1} = x$; $\frac{a_2}{b_2} = x \dots$
$$b_1 = \frac{a_1}{x} \quad b_2 = a_2 x \dots$$

Тогда $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = \frac{a_1^2}{x^2} + \dots + \frac{a_n^2}{x^2} =$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ УГ-36-69

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{x^2} = \frac{2018^2}{x^2} = 2017$$

$$\frac{2018}{x} = 2017$$

$$x = \frac{2018}{2017}$$

Тогда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{2018}{2017}$

№4

Пусть V_1, V_2, V_3 км/ч. Это скорости "Анина", "Ванина" и "Санина" соответственно, тогда

Пусть ~~чел~~ ~~в 10:00~~ $П_1$, $П_2$, $П_3$ это ~~си~~ ситуации в 10:00; 10:30; x часов соответственно. Пусть растояние от А до В в $П_1$ равно 1, тогда расстояние ~~А~~ от В до С равно 1 ~~в~~ в $П_1$, ~~рас~~ а расстояние от А до С равно 2.

Заметим, что в $П_2$ расстояние от А до В равно $1 \cdot 1{,}5 = 1{,}5$. Значи~~т~~т растояние от А до С в $П_2$ = растоянию от С до В в $П_2 = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$. Значит за пол часа А и С ~~сблизились~~ прошли в сумме ~~на~~ 1,25, а В и С 1,75

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 14081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЧГ 36 69.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Примеч. П3 это когда A посередине

Тоесть A и C за час в сумме проходят 2,5, а B и C 3,5.

Заметим что в П3 расстояние между B и A равно $x-9$, а расстояние от B до C равно ~~$2,5\cdot(x-10,5)-0,75$~~ ~~соответственно~~ $\frac{0,75+3,5(x-10,5)}{2}=x-9$

~~$x-9=2,5\cdot(x-10,5)$~~

~~$x-9=2,5x-25-1,25$~~

~~$26,25-9=1,5x$~~

~~$17,25=1,5x$~~

$0,75+3,5x-36,75=2x-18$

$-18=-1,5x$

$x=12$

Ответ: в 12:00

№ 3

ОДЗ $b\neq0$ $c\neq0$ $a\neq0$

Заметим, что $\frac{1}{b}$ среднее в тройке $\left(\frac{1}{ac};\frac{1}{b};\frac{1}{a}\right)$

т.к. $b=\frac{a+c}{2}$, значит

$\frac{1}{b}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}$

$\frac{1}{b}=\frac{(a+c)}{2ac}$ $2ac=(a+c)b$

$2ac=\frac{(a+c)^2}{2}$ $\boxed{4ac=a^2+c^2+2ac}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$2ac = a^2 + c^2$

$a^2 - 2ac + c^2 = 0$

$(a - c)^2 = 0$

$a = c$

$b = \frac{a+c}{2} = \frac{a+a}{2} = a$

$a = b = c$

Ну а ~~эти~~ такие очевидно ~~не~~ подходят

Ответ: $a = b = c$; $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$ +

потерял 2-ой ответ.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

город Красноярск

Место проведения

L1049-48

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17081

ФАМИЛИЯ Сёмушкина

ИМЯ Екатерина

ОТЧЕСТВО Ивановна

Дата рождения 28.11.2002 **Класс:** 8

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Катюта

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

1

2018 ...

100 ненулевых чисел

рассмотрим этот ряд

1 число – 2018 (по условию)

1	2	3	4	5	6	7	8
2018	$2018x$	x	$\frac{1}{2018}$	$\frac{1}{2018x}$	$\frac{1}{x}$	2018	$2018x$ ...

2 – произведение 2018 и любого другого (x)

далее таким образом достраиваем ряд и видна закономерность: 2018 повторяется каждое седьмое число и весь ряд состоит из этого повторяющегося периода в 6 чисел.

+

Для того чтобы узнать, какое будет последним

$$\begin{array}{r|l} 100 & 6 \\ \underline{-6} & 16 \\ 40 & \\ \underline{-36} & \\ 4 & \end{array}$$

Остаток 4, значит последнее число будет четвертым из нашего периода, это $\frac{1}{2018}$

100 – кол-во всех чисел
6 – кол-во чисел в периоде

Ответ: $\frac{1}{2018}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(3) $b=\frac{a+c}{2}$

$\frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}$ или $\frac{1}{b}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}$ или $\frac{1}{c}=\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{2}$

1 вариант

$\frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}$ $\quad b=\frac{a+c}{2}=2b=a+c=a=2b-c$

$\frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}=\frac{\frac{c+b}{bc}}{2}=a=\frac{2bc}{c+b}$

приравниваем

$2b-c=\frac{2bc}{b+c}$

$(2b-c)(b+c)=2bc$

$2b^2+\cancel{2bc}-bc-c^2=\cancel{2bc}$

$2b^2-bc-c^2=0$

$b^2+b^2-bc-c^2=0$

$b(b-c)+(b-c)(b+c)=0$

$(b-c)(b+b+c)=0$

$b-c=0$ или $b+b+c=0$

$\boxed{b=c}$ $\quad \boxed{c=-2b}$

$\frac{a+c}{c}=c$

$a+c=2c$

$a+c-c=c$

$\boxed{a=c}$

все числа равны

в этих случаях могут быть числа

$(x;x;x)$ - любые равные

или

$(-2x;4x;x)$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2 вариант)

$$\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2} =$$

$$b = \frac{2ac}{a+c}$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$$\frac{a+c}{2} - \frac{2ac}{a+c} = 0$$

$$(a+c)^2 - 4ac = 0$$

$$a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = 0$$

$$a^2 + c^2 - ac - ac = 0$$

$$a(a-c) - c(a-c) = 0$$

$$(a-c)^2 = 0$$

$$a - c = 0$$

$$\boxed{a = c}$$

из ~~этого~~ снова следует, что все числа равны

$$\begin{cases} a = c \\ 2b - c = c \\ b = c \end{cases}$$

3 вариант

$$\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

$$c = \frac{2ab}{a+b}$$

$$b = \frac{a+c}{2} \qquad 2b = a+c$$

$$c = 2b - a$$

$$\frac{2ab}{a+b} = 2b - a$$

$$(2b-a)(a+b) = 2ab$$

$$\cancel{2ba} + 2b^2 - a^2 - ab = \cancel{2ab}$$

$$2b^2 - a^2 - ab = 0$$

(тоже самое, что в варианте 1)

$$(a-b)(a+a+b) = 0$$

$$\boxed{a = b} \qquad \boxed{b = -2a}$$

Ответ: $(x; x; x)$ или $(-2x; 4x; x)$.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5

$a_1^2 + a_2^2 \dots a_n^2 = 2018^2$

$b_1^2 + b_2^2 \dots b_n^2 = 2017^2$

$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots a_n b_n = 2018 \cdot 2017$

объединим

$$2017^2 \underbrace{(a_1^2 + a_2^2 \dots a_n^2)}_{2018^2} - 2018^2 \underbrace{(b_1^2 + b_2^2 + \dots b_n^2)}_{2017^2} = 0$$

можем выбрать из этого формулы типа

$2017 a_x - 2018 b_x = 0$ — это слагаемые

±

т.к. a и b не могут быть равны нулю, то остается единственный вариант, когда

$a = 2018$, а $b = 2017$

⇓

$$\frac{a_1}{b_1} \dots \frac{a_n}{b_n} = \frac{2018}{2017}$$

2

пусть $2x$ — количество команд, тогда x — выбывшие и оставшиеся

$X(X-1)$ — все матчи у выбывших

y — матчи, сыгранные оставшимися (о них ничего неизвестно, кроме $77 - X(X-1) = y$)

$X(X-1) + y = 77$ $\quad x \leq 9 \; (y > 0)$

$X^2 - X + y = 77$ $\quad$ рассмотрим все варианты

Задача не решена.

⊖

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

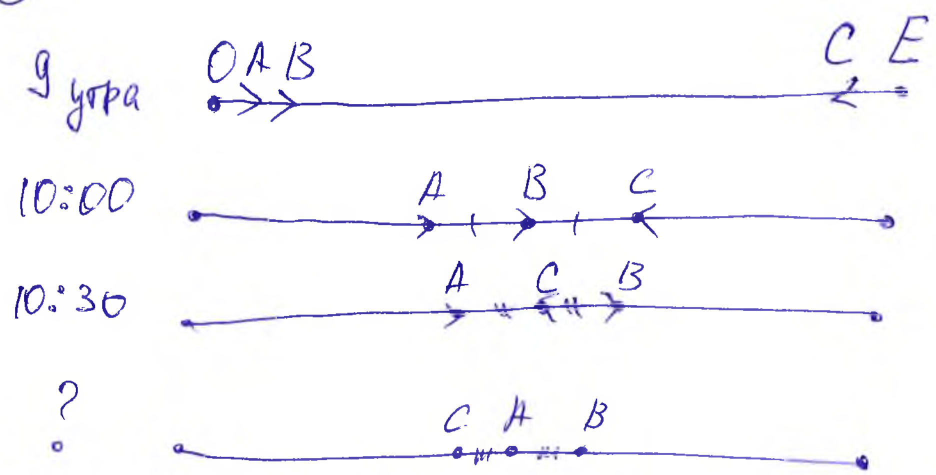
Вариант: 17081

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ L1049-48

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

④

постоянные, но различные скорости



?

обоснование?

примем скорости за 1; 2 и 3, тогда Аня будет на одном расстоянии от Сани и от Вани в 12:00

продолжение к ② варианта

$x = 9$ $\quad x^2 - x + y = 77$

$81 - 9 + 5 = 77$

$x = 8$ $\quad 64 - 8 + 21 = 77$

$x = 7$ $\quad 49 - 7 + 35 = 77$

$x = 6$ $\quad 36 - 6 + 47 = 77$

$x = 5$ $\quad 25 - 5 + 57$

$x = 4$ $\quad 16 - 4 + 55$

$x = 3$

$x = 2$

$x = 1$

+k быть не может

рассматривать дальше бессмысленно,

$y < 2x$

оставшиеся команды не могут сыграть в большем кол-ве матчей, чем всего может быть

возможные 18; 16; 14; 12.

Ответ:

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

СУ 38-53

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Слепухин

ИМЯ Максим

ОТЧЕСТВО Юрьевич

Дата рождения 27.03.2002

Класс: 9

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Сл

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^4+4px^3-(p-4)x^2+4px-p=0$

1) при $x=0$ $p=0$

2) при $x\neq 0$ поделим всё на x^2

$4x^2+4px-(p-4)+\frac{4p}{x}-\frac{p}{x^2}=0$

Рациональные корни могут быть, только если это биквадратное уравнение, тогда $p=-4$, тогда

почему?

$4(x^2+\frac{1}{x^2})+4p(x+\frac{1}{x})+8=0$

$4(x^2+\frac{1}{x^2})-16(x+\frac{1}{x})+8=0$

$4((x+\frac{1}{x})^2-2x\cdot\frac{1}{x})-16(x+\frac{1}{x})+8=0$

Пусть $t=x+\frac{1}{x}$, тогда

$4t^2-8-16t+8=0$

$4t^2-16t=0$

$t^2-4t=0$

$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x}=0 \\ x+\frac{1}{x}=4 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x^2+1=0 \\ x^2-4x+1=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \text{решений нет} \\ x^2-4x+1=0 \end{array}\right.$

$x^2-4x+1=0$

$D=16-4=12$

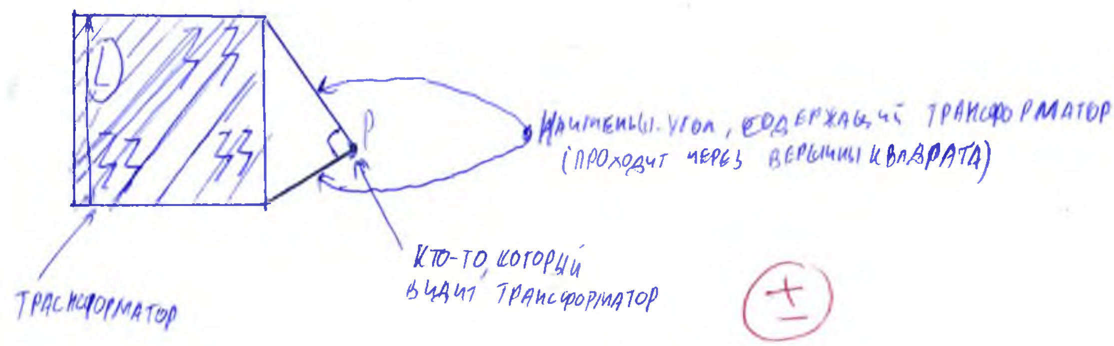
$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}$

не рац. => Ответ: при $p=0$

∓

№2

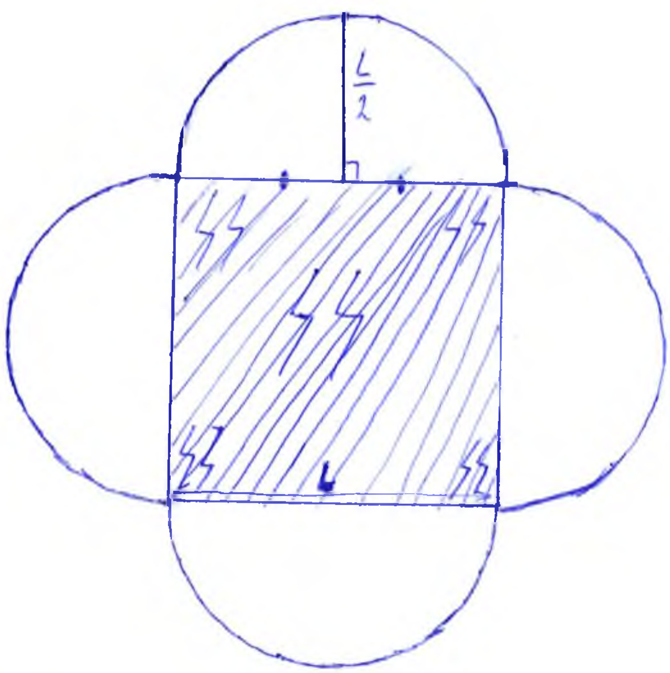
Рассмотрим это поле сверху:



±

Заметим, что этот кто-то стоит на окружности с центром в середине стороны трансформатора (т.к. равнина плоская, а наблюдатель постоянного роста, то можно перейти из трёх измерений на плоскость, проходящую через поперечное сечение трансформатора и глаза наблюдателя). Тогда ГМТ точек, откуда видно трансформатор - дуги окружностей с центрами в серединах соотв. сторон трансформатора:

Почему?



Максимальное расстояние - $\frac{L}{2}$ (пересечение дуги и серединного $\perp$ к стороне)

Минимальное расстояние - 0 (если упереться лбом в один из углов трансформатора)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ СУ 38-53

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Рассмотрим варианты остатков от a и a^2 при делении на 7

a	a^2
0	0
1	1
2	4
3	2
4	2
5	4
6	1

то же самое работает и для x, y, z

Заметим, что $x^2+y^2+z^2 \vdots 7$ когда 1) $x^2, y^2, z^2 \vdots 7$ 2) x^2, y^2, z^2 дают разные остатки $(1+2+4=7 \vdots 7)$ $\neq 0$ остатки

1) от 1 до 70 есть 10 чисел $\vdots 7$, тогда вариантов упоряд. троек $= 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

2) Заметим, что на каждый вариант остатка a^2 есть по 2 варианта остатка ~~а2~~ a => троек, смотря лишь на остатки, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (не упоряд). Тройки упорядочены из начальных.

На каждый вариант остатка a есть по 10 чисел от 1 до 70, тогда вариантов сформировать тройки из доступных чисел $2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10 = 8000$ (не упоряд)

В каждой тройке по 6 вариантов расстановки

$8000 \cdot 6 = 48000$

$(1)+(2) = 48000 + 720 = 48\,720$ троек

Ответ: 48720

(+)

№4

Заметим, что $[x] < \sqrt[4]{2018}$, т.е. $[x] < 6,\ldots \Rightarrow [x] \le 6 \Rightarrow x < 7$

(Если x хотя бы равен 7, то $x[x[x[x]]] = 2401 > 2018$, что не по условию.

Если $x < 7$, то $[x[x[x]]]$ максимум $= 256$, тогда, если даже $x = 6,(9)$, то $x[x[x[x]]]$ будет меньше 2018, т.к. $6,(9)] < \frac{2018}{256} = 7,\ldots$

Ответ: $x \in (0; 7)$

(+)

Лист 3 из 4

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Заметим, что если при аргументе $f(x)$ будет стоять не нулевой коэффициент, то в $f(x-y)$ не будет членов, содержащих (xy), а в $(f(x)\cdot f(y))$ - будут, =>

$\Rightarrow f(x)=0\cdot x+k$ { ?

+

$f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$

$(x-y)\cdot 0+k=(x\cdot 0+k)\cdot(y\cdot 0+k)$

$k=k^2$

$k=0$ или $k=1$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} f(x)=0\cdot x+1 \\ f(x)=0\cdot x+0 \end{array}\right.$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

LV 21-61

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ СУПРУНЕЦ

ИМЯ ВАДИМ

ОТЧЕСТВО ВАСИЛЬЕВИЧ

Дата рождения 14.03.2002 **Класс:** 9

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 2 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^4+4px^3-x^2p+4x^2+4px-p=0$

$4x^4+4x^2+4px^3+4px-x^2p-p=0$

$4x^2(x^2+1)+4px(x^2+1)-p(x^2+1)=0$

$(x^2+1)(4x^2+4px-p)=0$

$x^2+1\neq0$, т.к $x^2\geq0 \Rightarrow 4x^2+4px-p=0$

$D=16p^2+16p$ – является точным квадратом, т.к $x\in Q$ (+)

$16p^2+16p=16p(p+1)$, т.к $16=4^2$, и $16p^2+16p$ точный квадрат $\Rightarrow p(p+1)$ – точный квадрат. Но т.к это 2 последовательных числа и $p\neq p+1 \Rightarrow p(p+1)=0 \Rightarrow p=0$; $p=-1$

при $p=0$: $4x^2=0$, $x=0$; при $p=-1$: $4x^2-4x+1=0$, $D=16-4\cdot4\cdot1=0$, $x=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Ответ: $p=0$; $p=-1$;

№3

Возьмем точку такую, что $x=y \Rightarrow f(x-x)=f(x)\cdot f(x) \Rightarrow f(0)=f^2(x)$ (+)

Рассмотрим 2 случая: $f(0)=0 \Rightarrow f^2(x)=0$ и $f(x)\equiv0$

$f(0)\neq0$, возьмем точку $x=0$ и $y=0 \Rightarrow f(0)=f(0)\cdot f(0) \Rightarrow f(0)=f^2(0)$

$f(0)-f^2(0)=0 \Rightarrow f(0)(1-f(0))=0 \Rightarrow f(0)=0$, но это невозможно т.к мы рассматриваем случай, когда $f(0)\neq0 \Rightarrow f(0)=1$, подставим это в равенство $f(0)=f^2(x) \Rightarrow f^2(x)=1$ и $f(x)\equiv1$ и $f(x)\equiv-1$.

Подставим это в первоначальное равенство: $f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$

$1=1\cdot1 \Rightarrow f(x)\equiv1$ подходит, $-1=(-1)\cdot(-1) \Rightarrow$ т.к. $1\neq1$, то $f(x)\equiv-1$ не подходит $\Rightarrow f(x)\equiv0$ и $f(x)\equiv1$

Ответ: $f(x)\equiv0$ и $f(x)\equiv1$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЛV 21-61

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Пусть $x=7 \Rightarrow x[x[x[x]]]=7^4=2401>2018 \Rightarrow x=7$ не подходит $\Rightarrow$ если $x>7$, то $x[x[x[x]]]>2401>2018$, $\Rightarrow$ $x<7$, но $x>0$, т.е:

$0<x<7$ и $0<[x]\leq 6$, т.к x строго больше 7, домножим это на $x \Rightarrow 0<x[x]<42$, т.к $x<7$ и $0<[x[x]]\leq 41$. Продолжаем аналогично: $0<x[x[x]]<287$ и $0<[x[x[x]]]\leq 286$; $0<x[x[x[x]]]<2002$, что в свою очередь меньше 2018 $\Rightarrow x<7$ и $x>0$.

Ответ: $0<x<7$

+

№5

Рассмотрим какие остатки дают квадраты чисел от деления на 7:

$7k \to 49k^2 \vdots 7$ ост - 0

$7k+1 \to 49k^2+14k+1$ остаток - 1

$7k+2 \to 49k^2+28k+4$ остаток - 4

$7k+3 \to 49k^2+42k+9$ остаток - 2

$7k+4 \to 49k^2+56k+16$ остаток - 2

$7k+5 \to 49k^2+70k+25$ остаток - 4

$7k+6 \to 49k^2+84k+36$ остаток - 1

$\Rightarrow$ они имеют остатки: 0; 1; 4; 2, заметим также, что последовательность квадратов последовательных чисел имеет остатки 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0 $\Rightarrow$ все 70 чисел разбиваются на 10 кучек по 7 чисел в которых 2 числа имеют остаток 4, 2 числа остаток 2 и 2 числа остаток 1 и 1 число остаток 0. Сумма трех чисел делится на 7 если каждое из них делится на 7 или сумма их остатков кратна 7 $\Rightarrow$ имеем 2 варианта: $0+0+0$ и $4+2+1$ (остатки). Т.к нам нужны упорядоченные тройки, то троек вида $0+0+0$, будет $10^3=1000$, т.к $70:7=10$ кучек в каждой по одному такому числу $\Rightarrow$ всего чисел 10. Количество троек с остатками 4, 2, 1 равно $20^3\cdot 6$, т.к 6 вариантов расстановки чисел: $4+2+1$; $4+1+2$; $1+4+2$; $1+2+4$; $2+4+1$; $2+1+4$. И т.к у нас по 20 каждого из чисел: $(2\cdot 10)$, то $20^3\cdot 6=48000 \Rightarrow$ кол-во упорядоченных троек равно $48000+1000=49000$.

Ответ: 49000 кол-во троек (x, y, z)

270 неверно

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

КГЭУ	CF21-57
Место проведения	шифр

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Суслов

ИМЯ Алексей

ОТЧЕСТВО Витальевич

Дата рождения 26.09.2001 **Класс:** 10

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Асуз

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ CF21-57

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №2

a – количество ~~лимонов~~ купюр в 7 лимонов

b – количество купюр достоинством в 9 лимонов

$7a+9b=997$ $\quad a,b\geq 0 \quad a,b\in\mathbb{Z}$

$7a+7b+2b=997$

$7(a+b)+2b=997$

(+)

Посмотрим по модулю 7

$7(a+b)\underset{7}{\equiv}0$

$2b\underset{7}{\equiv}997\underset{7}{\equiv}3 \quad \left(997=\underset{994}{\underbrace{142\cdot 7}}+3\right)$

$2b\underset{7}{\equiv}3$

Заметим, что $2b\underset{7}{\equiv}3$ только при $b\underset{7}{\equiv}5$

$b \bmod 7$	$2b \bmod 7$
1	2
2	4
3	6
4	1
5	3
6	5
0	0

остатки b при делении на 7

остатки при делении $2b$ ~~$2b$ тех же~~ и тем же b

$b\underset{7}{\equiv}5$

Тогда $b=7k+5$ $\quad k\geq 0,\ k\in\mathbb{Z}$

$7a+9(7k+5)=997$

$7a+9\cdot 7k+9\cdot 5=997$

$7(a+9k)=997-9\cdot 5=997-45$

$7(a+9k)=952$

$a+9k=136$

Посмотрим по модулю 9

$9k\underset{9}{\equiv}0$

$a\underset{9}{\equiv}136\equiv 1 \quad (136=\underset{135}{\underbrace{15\cdot 9}}+1)$

$a\underset{9}{\equiv}1$ $\qquad$ Значит $a=9m+1$ $\quad m\geq 0,\ m\in\mathbb{Z}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$9m+1+9k=136$

$9m+9k=135$

$9(m+k)=135$

$m+k=15$

$m=15-k$

$m,k\geq 0$

Значит всего 16 пар таких m и k (k от 0 до 15)

И 997 представляется в виде

$997 = 7a+9b = 7(9m+1)+9(7k+5) =$

$= 7(9(15-k)+1)+9(7k+5)$

Ответ: 16 способов представления

Задача N4

Заметим, что $[x]\leq 4$ т.к. $N=x^{[x]}\geq [x]^{[x]}$ т.к. $x\geq [x]$

$N\in\{1,2\ldots 2018\}$

$2018\geq [x]^{[x]}$ Если $[x]\geq 5$

$[x]^{[x]}\geq 5^5 = 3125 > 2018$

а $[x]\leq 4$

$[x]^{[x]}\leq 4^4 = 256 < 2018$

Значит $0\leq [x]\leq 4$

Давайте переберем все возможные варианты $[x]$

$[x]=0$

$x^0=1$ ~~(непрерывно)~~ значит мы можем получить 1 (например $0{,}5^0=1$)

$[x]=1$

$x^1=N$

$[x]\leq x<[x]+1$ (Дальше опять будет использоваться это неравенство. Доказывается оно очевидно)

$[x] \le x$ по определению, а если $[x]+1 \le x$ то $[x] < [x]+1$ и $[x]$ не наибольшее целое число, $\le x$

$x^1 = N$

$1 \le N < 2$

и $N \in \{1, 2 .. 2018\}$

$N = 1$

$1^1 = 1$

$[x] = 2$

$x^2 = N$

$2 \le x < 3$

$2 \le \sqrt[2]{N} < 3$

$4 \le N < 9$

значит мы можем получить любое ~~…~~ $4 \le N \le 8$ взяв $x = \sqrt[2]{N}$

$[x] = 2$ т.к. $2 \le x < 3$

и ~~все числа~~ любое N, чей $[x] = 2$ будут лежать в этом промежутке

$4 \le N \le 8$

таких N 5 штук

$[x] = 3$

$x^3 = N$

$3 \le x < 4$

$3 \le \sqrt[3]{N} < 4$

$27 \le N < 64$

$27 \le N \le 63$

Аналогично получаем любое N из промежутка $x = \sqrt[3]{N}$

таких N $63 - 27 + 1 = 37$

$[x] = 4$

$x^4 = N$

$4 \le x < 5$

$4 \le \sqrt[4]{N} < 5$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ CF21-57

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$4^4 \le N < 5^4$$

$$256 \le N < 625$$

таких N $625-256+1=370$

Аналогично получаем любое N из промеж. $x=\sqrt[4]{N}$

+.

Значит всего таких N $1+5+37+370=413$

Ответ: 413

Задача N5

Обозначим длины кусков кабеля и отсортируем их по длинне

$a_1 \le a_2 \le a_3 \ldots \le a_{21}$

Возьмем такое максимальное q, что любые a_i и a_j отличаются хотябы в q раз. (что эквивалентно минимуму из всех отношений a_i и a_j $i \ne j$)

Тогда

$$\begin{array}{ccccc} a_1 \le & a_2 \le & a_3 & \ldots & \le a_{21} \\ & \vee\!\!| & \vee\!\!| & & \vee\!\!| \\ & a_1 q & a_1 q^2 & & a_1 q^{20} \end{array}$$

$a_1 q^{i-1} \le a_i \le a_{21}$

$a_{i+1} \ge a_i q \ge a_1 q^i$

$a_{21} \le 3a_1$ (иначе $a_{21} > 3a_1$ что противоречит условию)

$a_1 q^{20} \le a_{21} \le 3a_1$

$q^{20} \le 3$

$q \le \sqrt[20]{3}$

Значит в любом ~~таком~~ наборе есть два куска отличающиеся ~~в $\sqrt[20]{3}$ раз~~ не более чем в $\sqrt[20]{3}$ раз

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ CF21-57

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Заметим, что m не может быть $> \sqrt[20]{3}$

т.к. если взять $q = \sqrt[20]{3}$ и отрезки

$a_1 \quad a_1 q \quad \ldots \quad a_1 q^{20}$ $\qquad a_1 = \dfrac{21}{\left(\dfrac{3\cdot\sqrt[20]{3}-1}{\sqrt[20]{3}-1}\right)}$

$\sum a_i = a_1(1+q+\ldots q^{20}) =$

$= a_1\left(\dfrac{q^{21}-1}{q-1}\right) = \dfrac{21}{\left(\dfrac{3\cdot\sqrt[20]{3}-1}{\sqrt[20]{3}-1}\right)} \cdot \left(\dfrac{(\sqrt[20]{3})^{21}-1}{\sqrt[20]{3}-1}\right) = 21$

Длинна любых двух отрезков будет отличаться хотябы в $\sqrt[20]{3}$ раз. (между соседними ровнов $\sqrt[20]{3}$ раз, ~~между остальными~~

$a_i \le a_{i+1} \le a_j$

$i < j$

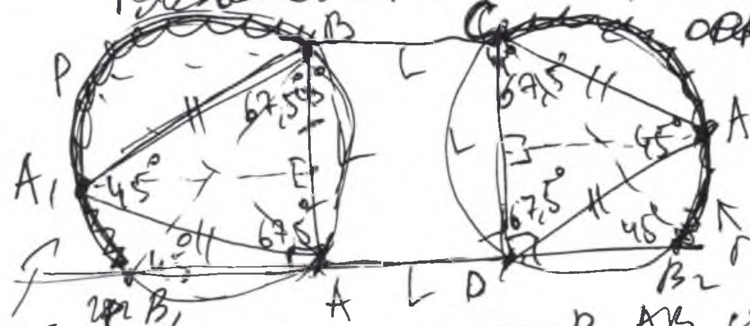
рассмотрен частный случай (геом. прогр.)

(+)

Ответ: $m = \sqrt[20]{3}$

№3

~~Возьмем~~ Построим равнобедренный треугольник ~~с~~ основанием на стороне ~~трап~~ буквы и углом 45° при вершине.



(−)

Если ~~точки~~ из точки P AB сторона видна под углом в 45° она лежит на описанной окружности $\triangle AA_1B$ т.к. $\angle BPA = 45° = \angle BA_1A$ и они опираются на ~~дугу~~ $\cup AB$.

Аналогично если $\angle DPC = 45°$ $P \in$ опис. окр. $\triangle CA_2D$

Дуги B_1AB и CDB_2 не подходят

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ЧРИО

Место проведения

VE 91-85

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Трофимов

ИМЯ Евгений

ОТЧЕСТВО Эдуардович

Дата рождения 03.02.2002

Класс: 9

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 6 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1) Дано:
$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$ (1)
$p\in Z$; $x\in R$
Найти: p.
Решение. 1) Составим $4x^4+4px^3=px^2-4x^2-4px+p \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x^4+4x^2=-4px^3+px^2-4px+p \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x^2(x^2+1)=-p(4x^3-x^2+4x-1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x^2(x^2+1)=-p(x^2(4x-1)+(4x-1)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x^2(x^2+1)=-p\cdot(4x-1)(x^2+1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x^2(x^2+1)+p(4x-1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^2+1)(4x^2+4xp-p)=0$. Заметим, что
$x^2+1\neq 0$, т.к. $\cancel{x\in R}$, $x^2\neq -1$ тогда
$4x^2+4xp-p=0$.
$D=16p^2+16p$
$$x_{1,2}=\frac{-4p\pm\sqrt{16p^2+16p}}{8}=\frac{-4p\pm 4\sqrt{p^2+p}}{8}=$$
$$=\frac{-p\pm\sqrt{p^2+p}}{8}.$$
т.к. корни (1) – рациональные числа, то $\sqrt{p^2+p}$ – рациональное число,

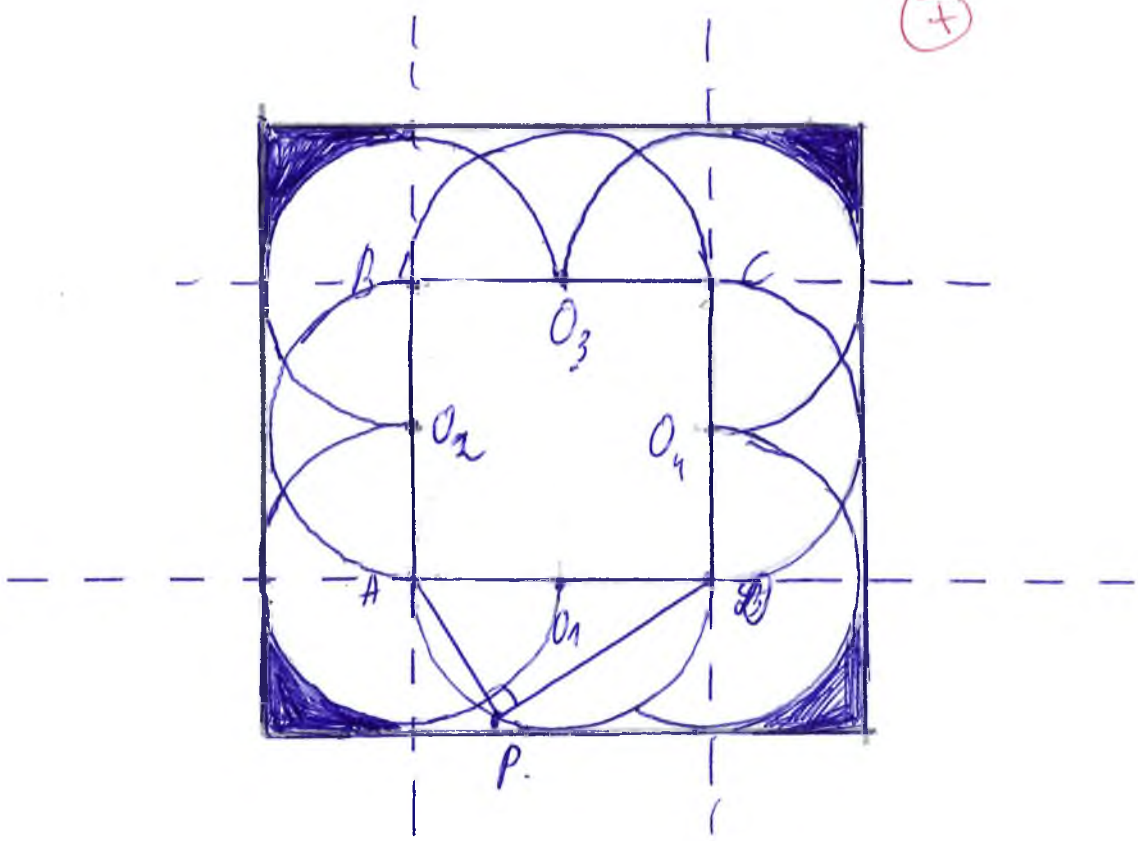
Следовательно, p^2+p можно представить в виде $p^2+p=K^2$, где $K, K^2 \in Z$, т.к. $p \in Z$, тогда $p(p+1)=K^2$. Заметим, что ~~$p^2+p=$~~ $p(p+1)$ – произведение двух последовательных чисел. Такое произведение является квадратом целого числа только в том случае, если оно равно 0. Следовательно, $p(p+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p_1=0 \\ p_2=-1 \end{array}\right.$

+

Ответ: $\{-1;0\}$.

2) Построим чертеж. $ABCD$ – будка
$AB=BC=CD=AD=L$ лок.

+



1) Построим окружность радиусом L/2 локтей, тогда диаметр данной окружности будет являться стороной будки.
AD = L. Достроим AD до квадрата ABCD.

2) Построим окружности в точках O_2, O_3, O_4 - серединах сторон AB, BC, CD соответственно радиусом L/2

3) Построим окружности с центром в точках A, B, C и D радиусом L/2.

?

4) Заметим, что можно провести огромное количество окружностей с центрами на сторонах квадрата ABCD, при этом из каждой точки данных окружностей будка будет видна, т.о. получаем квадрат со ~~стороной~~ 2L. Построим его.

т.к сторона (или её продолжение) будут являться диаметрами, а вписанный угол опирающийся на диаметр равен 90°

т.о получаем: квадрат со стороной 2L локтей. Построим его.

Данный квадрат — геометрическое место точек на равнине, из которых видна будка. ~~Также~~ Кроме закругленных уголков! Из них будка не видна

Максимальное расстояние – радиус окружностей, т.е. L/2.
Минимальное расстояние – очень мало и стремится к 0.

5) Рассмотрим остатки от деления на 7 чисел множества и квадратов чисел множества:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ост	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
ост	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2

...

Заметим закономерность: 1-4-2-2-4-1-0.
В данном множестве 10 ~~таких~~ групп по 7 чисел. Не будем рассматривать числа кратные семи, тогда в каждой шестерке остатков по 2 „2"; по 2 „1"; по 2 „4".
Всего – 20 „2"; 20 „1"; 20 „4".

Заметим, что $x^2+y^2+z^2$ кратно 7 только в том случае, если сумма остатков кратна 7. Но 7 ~~на~~ с помощью имеющихся чисел можно получить только таким образом: $7=1+2+4$. Пусть S – искомое количество троек, тогда $S=20\cdot20\cdot20+K$, где K – тройки чисел, кратных 7.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~Найдем К~~ ~~Найдем~~ Заметим, что $K=8$, тогда

$S=8000+8=8008$.

Ответ: 8008. комментарий немного оголен!

4) Пусть $x=\sqrt{a}$.

Заметим, что $6^4<2078<7^4$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1296<2078<2401$. Следовательно, все числа $0\leq x<\sqrt{49}$ удовлетворяют условию. Следовательно, $x\in(0;7)$

Ответ: $x\in\{0;7\}$.

±

3) Дано:

$f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$ ОДЗ: R.

Найти: $f(x)$

Решение. Заметим, что данному условию удовлетворяют лишь функции с постоянным значением. ~~тогда~~ Заметим, что

$\left[\begin{array}{l}1=1\cdot1 \quad (1)\\ 0=0\cdot0 \quad (2).\end{array}\right.$

(?)

(1) В данном случае $f(x)$ имеет вид: ∓

$C_1x^n\pm C_2x^{n-1}\pm\ldots\pm C_{n-1}x^1+x^0$, где

$C_1\ldots C_n=0$

(2) В данном случае $f(x)$ имеет вид:

$C_1x^n\pm C_2x^{n-1}\pm\ldots\pm C_nx^1$, где $C_1\ldots C_n=0$.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Следовательно $f(x)$ может иметь вид:
$f(x) = C_1 x^n \pm C_2 x^{n-1} \pm \ldots \pm C_n x^1 + x^0$,
где $C_1 \ldots C_n = 0$ или
$f(x) = C_1 x^n \pm C_2 x^{n-1} \pm \ldots \pm C_n x^1$, где
$C_1 \ldots C_n = 0$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Место проведения

Йо44-29

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Тухватуллина

ИМЯ Рената

ОТЧЕСТВО Маратовна

Дата рождения 12.09.2001 **Класс:** 10

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №2.

$\boxed{7}$ и $\boxed{9}$; в сумме 997

Заметим, что $997 = 110\cdot 9+7$ и $997 = 142\cdot 7+3$, т.е число 997 не делится ни на 9, ни на 7 => в сумме будут содержаться денежные знаки номиналом и 7, и 9 жетонов

Первое такое представление суммы мы уже имеем: $110\boxed{9}+1\boxed{7}=997$

пусть 110 в данном случае равно m, а 1 – n, где $m,n\in N$:

$9m+7n=997$;

$9m+7n+63-63=997$;

$9(m-7)+7(n+9)=997$; => следующая подходящая пара будет:

$9(110-7)+7(9+1) = \boxed{9}\cdot 103+\boxed{7}\cdot 10 = 997$

Аналогичным образом найдем подходящие пары:

$\boxed{9}\cdot 96+\boxed{7}\cdot 19=997$

$\boxed{9}\cdot 89+\boxed{7}\cdot 28=997$

$\boxed{9}\cdot 82+\boxed{7}\cdot 37=997$

$\boxed{9}\cdot 75+\boxed{7}\cdot 46=997$

$\boxed{9}\cdot 68+\boxed{7}\cdot 55=997$

$\boxed{9}\cdot 61+\boxed{7}\cdot 64=997$

$\boxed{9}\cdot 54+\boxed{7}\cdot 73=997$

$\boxed{9}\cdot 47+\boxed{7}\cdot 82=997$

$\boxed{9}\cdot 40+\boxed{7}\cdot 91=997$

$\boxed{9}\cdot 33+\boxed{7}\cdot 100=997$

$\boxed{9}\cdot 26+\boxed{7}\cdot 109=997$

$\boxed{9}\cdot 19+\boxed{7}\cdot 118=997$

$\boxed{9}\cdot 12+\boxed{7}\cdot 127=997$

$\boxed{9}\cdot 5+\boxed{7}\cdot 136=997$

} 14 пар + 2 найденные в начале: $\boxed{9}\,110+\boxed{7}\cdot 1=997$; $\boxed{9}\,103+\boxed{7}\cdot 10=997$

(+)

Ответ. Всего будет 16 способов.

Задача №4.

$A=\{1,2,\dots,2018\}$, $N\in A$, $x>0$

$x^{[x]}=N$ => $x=\sqrt[[x]]{N}$

1 случай) $x\in(0;1)$ => $[x]=0$

$0<x<1$ => $0<\sqrt[[x]]{N}<1$ => $0<\sqrt[0]{N}<1$ => $1<N<1$ $\varnothing$

2 случай) $x\in[1;2)$ => $[x]=1$

$1\le x<2$ => $1\le\sqrt[1]{N}<2$ => $1\le N<2$ => $N=1$ – 1 число

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3 случай) $x \in [2;3) \Rightarrow [x]=2$

$2 \le x < 3 \Rightarrow 2 \le \sqrt[2]{N} < 3 \Rightarrow 4 \le N < 9 \Rightarrow N \in [4;9)$

$N=4, N=5, N=6, N=7, N=8$ — 5 чисел

4 случай) $x \in [3;4) \Rightarrow [x]=3$

$3 \le x < 4 \Rightarrow 3 \le \sqrt[3]{N} < 4 \Rightarrow 27 \le N < 64 \Rightarrow N \in [27;64)$ ⇓ 37 чисел

5 случай) $x \in [4;5) \Rightarrow [x]=4$

$4 \le x < 5 \Rightarrow 4 \le \sqrt[4]{N} < 5 \Rightarrow 256 \le N < 625 \Rightarrow N \in [256;625)$ ⇓ 369 чисел

6 случай) $x \in [5;6) \Rightarrow [x]=5$

$5 \le x < 6 \Rightarrow 5 \le \sqrt[5]{N} < 6 \Rightarrow 3125 \le N < 7776$ — $\varnothing$, т.к. $N \le 2018$

+

Заметим, что если $x \ge 5$, то $N \ge 3125$, что не подходит условию. Следовательно всего нужных нам чисел: $1+5+37+369=412$

Ответ. 412 чисел

Задача №5.

Пусть длина I куска – x м, тогда длина следующего – $(x \cdot m_1)$ м, $(x \cdot m_2)$ м и т.д. до $(x \cdot m_{20})$ м

$x + x\cdot m_1 + x \cdot m_2 + \ldots + x \cdot m_{20} = \underset{>0}{x}(\underbrace{m_1 + \ldots + m_{20}}_{\ge 21}) = 21$ (по условию, длина всего электрокабеля 21 м)

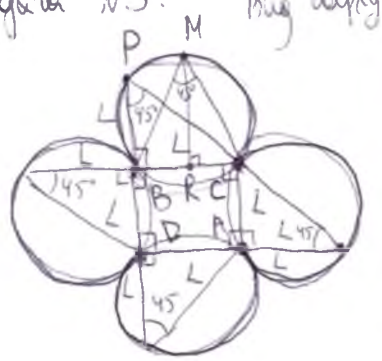
m_1 может быть равен 1, $x=1 \Rightarrow m_1 = m_2 = \ldots = m_{20} = 1$

всегда ли?

Ответ $m=1$.

$\mp$

Задача №3. Вид сверху



$\mp$

Наименьшее расстояние, с которого видна будка: расстояние L, т.к. $BC = PB$, т.к. $\angle = 45° \Rightarrow$ в треуг. $\Rightarrow PB = L$

Наибольшее расстояние будет равно MR

Пусть $ML = MB = a \Rightarrow$ по теореме косинусов:

$L^2 = a^2 + a^2 + 2a^2 \cdot \cos 45° = 2a^2 - 2a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = a^2(2-\sqrt{2})$

$\Rightarrow a^2 = \frac{L^2}{2-\sqrt{2}}$

По формуле медианы (MR - медиана, высота и биссектриса $\triangle BMC$, т.к. он р/б).

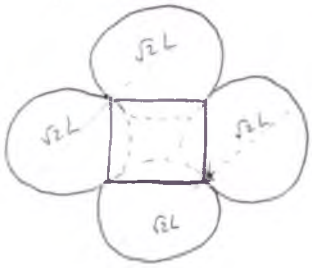
$MR = \sqrt{\frac{2a^2+2a^2-L^2}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{2L^2}{2-\sqrt{2}} + \frac{2L^2}{2-\sqrt{2}} - L^2}{4}} = \sqrt{\frac{2L^2+\sqrt{2}L^2}{4(2-\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{L^2(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{4(2-\sqrt{2})^2}} = \sqrt{\frac{L^2 \cdot 2}{4(6-2\sqrt{2})}} =$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$MR=\sqrt{\frac{L^2}{4(3-\sqrt{2})}}=\frac{L}{2\sqrt{3-\sqrt{2}}}$$

Наибольшее расстояние будет: $\frac{L}{2\sqrt{3-\sqrt{2}}}$

А геометрическое место точек, из которых будет видна будка это есть точки 4-х окружностей радиуса $\sqrt{2}\cdot L$ не входящие в квадрат и содержащие его сторону, как хорду:



Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ	РЮ 98-48
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ФЕДЯКОВ

ИМЯ АНДРЕЙ

ОТЧЕСТВО АЛЕКСАНДРОВИЧ

Дата рождения 01.01.2001 **Класс:** 11

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ РЮ 98-48

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

$$X^y + y^z = XYZ$$

$\{x; y; z\} \in N.$

Из уравнения видно что $x; y; z$ не должны быть большими, иначе бы $x^y + y^z$ будет больше, чем произведение этих чисел. Эти числа можно найти методом перебора.

Так, числа $x=4$, $y=2$, $z=3$ подходят под решение этого уравнения.

Проверка:

$4^2 + 2^3 = 4 \cdot 2 \cdot 3$

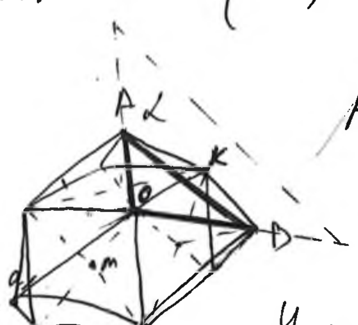
$16 + 8 = 8 \cdot 3$

$24 = 24.$

+

Ответ: $(4; 2; 3)$

№4

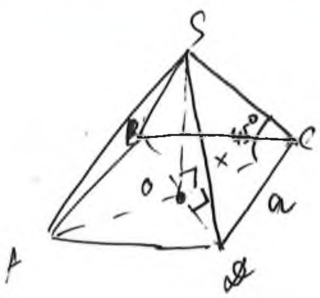


A) Две пересекающиеся прямые могут задавать плоскость. Пусть AO и OB ($AO \cap OB = O$) задают плоскость α

Угол между KO (прямой) и плоскостью α должен быть 45°, значит угол между диагональю основания пирамиды и ребром 45°, а так как все пирамиды равна, то $\angle COM = 45°$; угол между прямой KO и прямой CO тоже 45°, поэтому

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

CO лежит в плоскости α, значит боковые ребра трех пирамид, исходящие из вершины куба могут лежать в одной плоскости, если угол ~~при~~ между диагональю основания и ребром пирамиды будет 45°.



Т.к все пирамида равны, то и высоты пирамид равны

$CO \cap DO = O$, $\angle COD = 90^\circ$ ($BCDA$ - квадрат)

$x^2 + x^2 = a^2$

$2x^2 = a^2$

$x^2 = \frac{a^2}{2}$

$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = a\sqrt{0{,}5}$

$\frac{SO}{CO} = \frac{SO}{x} = tg\, 45^\circ$

$SO = x \cdot 1 = a\sqrt{0{,}5}$

B) все пирамиды равны, ~~для~~ поэтому для всех пирамид условия одинаковы, поэтому для любой тройки ребер существует плоскость в которой они лежат и таких 6 плоскостей для ~~все~~ всех вершин куба, и ~~они~~ условие выполняется для всех одновременно.

+

№1.

$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2 x_3} + \sqrt{x_2^2 + x_1 x_3} + \sqrt{x_3^2 + x_1 x_2}$

$x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \cdot 10^6$ Вт.

Чтобы достигался минимум функции, нужно, чтобы один из электрогенераторов имел мощность 2МВт. Пусть $x_1 = 2$ МВт, Тогда $x_2 = x_3 = 0$ МВт.

а если все $= 0$?

?

$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{2^2 + 0} + \sqrt{0} + \sqrt{0} = 2$ МВт

~~Чтобы достигался максимум функции, нужно, чтобы все генераторы имели одинаковую наименьшую мощность~~

$\cancel{x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2}{3} \text{ МВт}.}$

$\cancel{f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \cdot 3 = \left(\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}}\right) \cdot 3 =}$

$\cancel{= \sqrt{\frac{8}{9}} \cdot 3 = \frac{1}{3}\sqrt{8} \cdot 3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ МВт}}$

Чтобы достигалась максимум ф-и, нужно, чтобы два генератора имели мощность 1 МВт а третий 0МВт

$x_1 = 1$ МВт $\quad x_2 = 1$ МВт $\quad x_3 = 0$ МВт

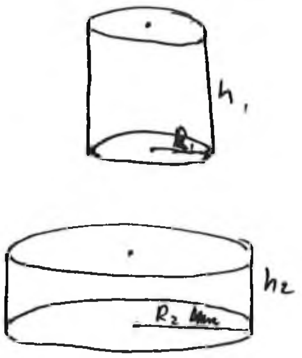
$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + 1 \cdot 0} + \sqrt{1 + 1 \cdot 0} + \sqrt{0 + 1 \cdot 1} = 3$ МВт.

ответ угадан, но не обоснован

−

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2.



$S_{пп} = 2\pi r (r+h)$.

$S_1 = 2\pi R_1 (R_1+h_1)$

$S_2 = 2\pi R_2 (R_2+h_2)$

$V = \pi r^2 h$.

$V_1 = \pi R_1^2 h_1$

$V_2 = \pi R_2^2 h_2$.

По условию $S_1 = S_2$, $V_1 = V_2$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2\pi R_1 (R_1+h_1) = 2\pi R_2 (R_2+h_2) \\ \pi R_1^2 h_1 = \pi R_2^2 h_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_1 (R_1+h_1) = R_2 (R_2+h_2) \\ R_1^2 h_1 = R_2^2 h_2. \end{cases}$$

⊖

№3.

$P(x)$ – многочлен.

$P(1) = 2019$

$P(2019) = 1$.

$P(k)$ – ? $(k \in Z.)$

$P(x_n) = P(x_{n-1}) - 1$

$\boxed{P(x) = 2020 - x}$

$P(k) = k$ тогда, когда k будет равно

$k = \frac{2019+1}{2} = 1010$

+

Ответ: 1010

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

LV 21-27

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Философ

ИМЯ Владимир

ОТЧЕСТВО Дмитриевич

Дата рождения 15.02.2003 **Класс:** 9

Предмет Математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Философ

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

$4x^4 + 4px^3 = (p-4)x^2 - 4px + p$

$4x^4 + 4px^3 - px^2 + 4x^2 + 4px - p = 0$

$4x^2(x^2+1) + 4px(x^2+1) - p(x^2+1) = 0$

$(x^2+1)(4x^2+4px-p) = 0$

$x^2+1=0$ или $4x^2+4px-p=0$

$x^2 = -1$, такого быть не может, квадрат числа всегда ≥ 0 $\Rightarrow$ только $4x^2+4px-p=0$

$D = 16p^2 + 16p = 16p(p+1) = 4^2p(p+1)$

Т.к корни должны быть рациональными, то D должен быть точным квадратом.

$4^2p(p+1)$ — точный квадрат тогда, когда $p(p+1)$ — точный квадрат. p и $p+1$ — ~~...~~ послед. числа $\Rightarrow$ их произведение является точным квадратом только когда оно равно 0 = иначе $p = p+1$, а такое невозможно.

+

$p(p+1) = 0$

$p = 0$ или $p+1=0$
$p=-1$

Ответ: $0; -1$

№ 4

Предположим, что $x = 7$, тогда $7[7[7[7]]] = 7^4 = 2401 > 2016$.

если $x \geq 7$, то выражение будет > 2401, т.к ~~...~~ целая часть ≥ 7, а случай когда $x = 7$ рассмотрен, а при увеличении x значение выражения только возрастет.

Т.к x положительный, ~~...~~ докажем, что $0 < x < 7$.

$0 < [x] \leq 6$ т.к $x < 7$, а 6 ближайшая целая часть

$0 < x[x] < 42$ т.к $x < 7$

$0 < [x[x]] \leq 41$ т.к $x < 7$, а 41 ближ. целая часть.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ 2V 21-27

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$0 < x[x[x]] < 28?$ т.к $x < 7$

$0 < [x[x[x]]] \leqslant 28^6$ т.к. $x < 7$, а 28^6 ближ. целая часть.

$0 < x[x[x[x]]] < 2002$ т.к $x < 7$.

$2002 < 2018 \Rightarrow x[x[x[x]]] < 2018 \Rightarrow 0 < x < 7$

$x \in (0; 7)$.

+

№5

$(x^2+y^2+z^2) \vdots 7$, когда сумма остатков от деления на 7 чисел x^2, y^2 и $z^2 = 0$ (или 7).

Остатки от деления на 7: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Когда число возводят в квадрат, ~~его~~ его остаток так же возводится. ⇒ выписанным выше остатки и соответствуют ~~его квадрата от~~ такие остатки от квадратов: 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1.

различные остатки (от деления на 7): 0, 1, 2, 4.

остаток 0 ~~но~~ при сложении трех квадратов можем получить, когда все числа дают остаток 0, при делении на 7.

И когда в тройке есть остатки 1, 2, 4.

Множество $\{1, 2, ..., 70\}$ можно разбить на ~~7~~ 10 7ок чисел, так, чтобы в каждой же был каждый из остатков от деления на 7. ⇒ ~~Кол-во чисел делящихся на каждый остаток~~ каждого остатка по 10.

Когда рассматриваем остатки от деления на 7 квадратов чисел, остатков 1, 2, 4 будет по 20, остатков 0 будет 10

Тогда кол-во всех троек $= 10^3 + 20^3 \cdot 6 = 49000$

это совершенно кол-во перестановок

Ответ: 49 000

(+)

Лист 02 из 04

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№3

Т.к $f(x-y) = f(x)\cdot f(y)^{(*)}$ выполняется при всех x и y, то пусть $x=y$, тогда $f(x-y) = f(0)$, $f(x)\cdot f(y) = f^2(x)$

$f(0) = f^2(x)$

если $f(0) = 0$, то

$0 = f^2(x)$

$f(x) = 0$

если $f(0) \neq 0$, то пусть $x = y = 0$.

$f(0) = f^2(0)$

$f(0) - f^2(0) = 0$

+

$f(0)(1 - f(0)) = 0$

$f(0) = 0$, противоречит условию $\Rightarrow 1 - f(0) = 0$

$f(0) = 1$

$1 = f^2(x)$

$f(x) = 1$

$f(x) = -1$

при $f(x) = 1$ и $y=0$ в (*)

$f(x) = f(x)\cdot f(0)$

$1 = 1\cdot 1$

при $f(x) = -1$ и $y = 0$ в (*)

$fx = f(x)\cdot f(0)$

$1 = -1\cdot 1$

$1 = -1$ Т.к такого быть не может, то $f(x) \neq -1$.

Ответ. $f(x) = 1$ и $f(x) = 0$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 1 ~~0~~ 091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ LV 21-27

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Для каждой стороны квадратного сечения можно построить ~~на~~ дугу, для которой сторона будет являться диаметром, тогда ~~будка~~ будка будет видна с любой точки каждой дуги т.к ~~так~~ угол который образуется с вершиной, где стоит наблюдатель будет вписанным и опирается на диаметр. => равен 90°. (+)

наибольшее расстояние = радиусу т.е. $\frac{L}{2}$, а наименьшее бесконечно мало или = 0, если наблюдатель уперся в край будки под углом 90°.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

КГЭУ	ТЦ92-57
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ ХАМИДУЛЛИН

ИМЯ БУЛАТ

ОТЧЕСТВО РИНАТОВИЧ

Дата рождения 26.12.2001 **Класс:** 9

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Хамид

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ TL 92-57

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Перенесём всё влево, получим

$4x^4+4x^2+4px^3+4px-px^2-p=0$ (1)

$(x^2+1)(4x^2+4px-p)=0$

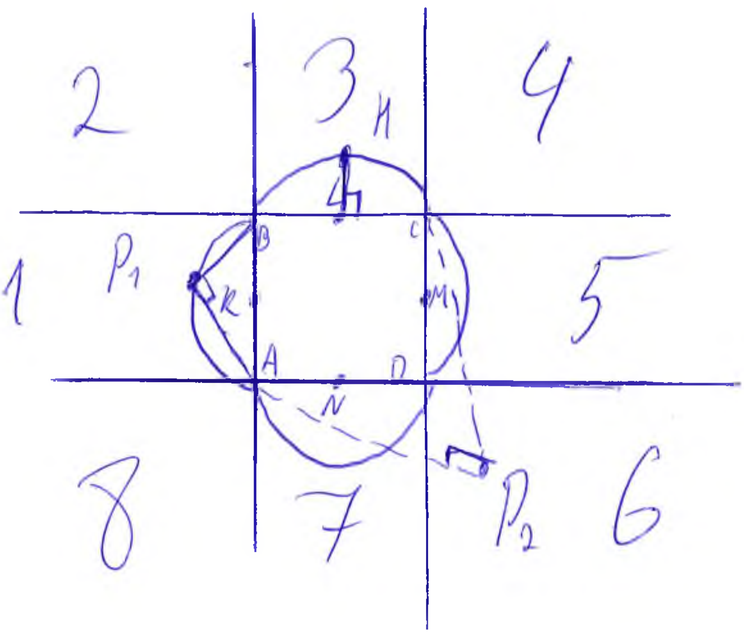
Т.к. $x^2+1>0$, то корнями уравнения (1) являются корни уравнения $4x^2+4px-p=0$, но т.к. корни, равные $\frac{-4p+\sqrt{16p^2+16p}}{8}$ и $\frac{-4p-\sqrt{16p^2+16p}}{8}$, рациональны, то $4\cdot\sqrt{p^2+p}$ - целые, т.к. p - целое, значит (p^2+p) точный квадрат, пусть $a^2=p^2+p \Rightarrow 4a^2+1=4p^2+4p+1 \Rightarrow (2p+1)^2-(2a)^2=1$ но разность точных квадратов равна 1 только тогда, когда эти квадраты равны 1 и 0, значит $(2p+1)^2=1$,

$p_1=0$

$p_2=-1$

Ответ при $p=0$ и $p=-1$

2. Вид сверху.



Лист 1 из 3

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Назовём вершины квадрата A,B,C,D; K,L,M,N середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 обозначены плоскости. Пусть точка P_1 лежит в 1 плоскости, тогда $\angle AP_1B = 90°$ (точки C и D не видно), значит P_1 лежит на окружности с центром в точке K и радиусом $\frac{L}{2}$ локтей. Аналогично для плоскостей 3, 5, 7. Если P лежит в плоскости 6, то $\angle AP_2C = 90°$ (т.к. он видит точки A, D, C), значит точка P_2 лежит на окружности, построенной на AC, как на диаметре, но единственная такая точка - это точка D. Значит ГМТ есть полуокружности на сторонах AB, BC, CD, AD. Наименьшее расстояние до будки 0 (например, точка D), а наибольшее $\frac{L}{2}$ локтей (например точка H, которая лежит на окр. с центром L).

3. Как известно, функция $f(x)$ принимает значение 0 в бесконечном количестве точек только в том случае если $f(x)=0$, для любого x, заметим, что функция $f_1(x)=0$ подходит под условие. Допустим функция принимает значение 0 лишь в конечном числе точек, тогда рассмотрим такое x, что $f(x)\neq 0$, тогда $f(x-0) = f(x)\cdot f(0) \Rightarrow f(0)=1$, значит $1 = f(x-x) = f(x)\cdot f(x)$ для любого x, тогда $f_1(x)=1$; $f_2(x)=-1$ для любого x, но $f_2(x)$ не подходит, т.к. $-1 = f(x-y) = f(x)\cdot f(y) = (-1)^2 = 1$, где $x\neq y$, противоречие, значит $f(x)=-1$ не подходит, тогда подходит только $f(x)=0$; $f(x)=1$.

4. Если $x \geq 7$, то $x[x[x[x]]] \geq x[x[7\cdot 7]] \geq x[7\cdot 7\cdot 7] \geq 7^4 = 2401 > 2018$, противоречие. Рассмотрим число $x = 7-k$, где $k>0$, получим

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$(7-k)[(7-k)[(7-k)[7-k]]] \le (7-k)[(7-k)[(7-k)\cdot 6]] =$

$=(7-k)[(7-k)[42-6k]] \le (7-k)[(7-k)\cdot 41] = (7-k)[287-41k] <$

$< (7-k)\cdot 286 = 2002-286k < 2018$. Значит под условие подходят только числа $0<x<7$. +

5) Если $a\equiv 1 \pmod 7$ или $a \equiv 6 \pmod 7$, то $a^2 \equiv 1 \pmod 7$;

если $a \equiv 2 \pmod 7$ или $a \equiv 5 \pmod 7$, то $a^2 \equiv 4 \pmod 7$;

если $a \equiv 3 \pmod 7$ или $a \equiv 4 \pmod 7$, то $a^2 \equiv 2 \pmod 7$;

если $a \equiv 0 \pmod 7$, то $a^2 \equiv 0 \pmod 7$.

$x^2+y^2+z^2 \equiv 0 \pmod 7$, только для набора $\{0,0,0\}$ и $\{1,2,4\}$. Найдем сколько чисел в квадрате дают остатки 0, 1, 2, 4.

Остаток квадрата	Количество чисел
0	10
1	20
2	20
4	20.

Тогда если тройка имеет набор $\{0,0,0\}$, то их количество $10\cdot 9\cdot 8$, если тройка дает набор $\{1,2,4\}$ то количество троек равно $20\cdot 20\cdot 20\cdot 3!$, тогда всего троек

Тройки упорядочены

$10\cdot 9\cdot 8 + 20^3\cdot 3! = 720+48000=48720$

Ответ: 48720 троек

задача частично решена ±

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

АИ 35-65

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Хвастунов

ИМЯ Алексей

ОТЧЕСТВО Алексеевич

Дата рождения 27.06.2004 **Класс:** 7

Предмет математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Ак

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Для того что бы при отсутствии трех любых водителей, все машины использовались бы, то надо чтобы одной машиной могли работать 4 водителя $5 \cdot 4 = 20$, значит минимальная стоимость обучения $20 \cdot 10000 = 200\,000$

Ответ: 200 000 рублей

±

[illegible]

№2

Пусть кол-во биткойнов у Саши – x, у Паши – y, у Аркаши – z, то составим таблицу операций

Саша	Паша	Аркаша
x	y	z
$x-y$	$2y$	z
$x-y-z$	$2y$	$2z$
$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z)-2z$	$4z$
$2(2(x-y-z)$	$2(2y-(x-y-z)-2z)$	$4z-(2(x-y-z))-(2y-(x-y-z)-2z)$

1) $2(2(x-y-z) = 4x-4y-4z = 8$

2) $2(2y-(x-y-z)-2z) = 2(2y-x+y+z-2z) = 2(3y-x-z) = 6y-2x-2z = 8$

3) $4z-(2(x-y-z))-(2y-(x-y-z)-2z) = 4z-2x+2y+2z-(2y-x+y+z-2z) = 6z-2x+2y-2y+x-y-z+2z = 4z-x-y = 8$

4) $4x-4y-4z+6y-2x-2z+4z-x-y = 24$

$x+y+z = 24$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ НИ 35-65

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) $x = 24 - y - z$

6) $4(24-y-z) - 4y - 4z = 8$

$96 - 8y - 8z = 8$

$-8(y+z) = -88$

$y + z = 11$

Значит $x = 24 - 11 = 13$

7) $y = 11 - z$

8) $7z - 13 - 11 + z = 8$

$8z - 24 = 8$

$8z = 32$

$z = 4$

9) $y = 24 - 4 - 13 = 7$

Значит у Саши было 13 биткойнов, у Паши 4, а у Аркаши 7.

+

Ответ: Саша - 13; Паша - 4; Аркаша - 7.

№3

Всего использовалось 1917 табличек, по одной цифре, значит однозначные из одной, двузначные из двух и т.д.

Посчитаем кол-во домов: 9 домов по одной табличке, 90 по две, 900 по 3. $1917 - 9 \cdot 1 = 1908$

$1908 - 90 \cdot 2 = 1728$, а т.к. 1728 меньше $900 \cdot 3$, то 1728 разделим на 3, $1728 : 3 = 576$ стало быть всего домов $576 + 90 + 9 = 675$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ АЧ 35-65

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Для того что бы узнать мин кол-во сторон одной висюльки (больше 1) разложим 675 на множители

$$\begin{array}{r|l} 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Т.к. мин число 3, то значит надо 3 стороны

+

Ответ: 3

№4

Возьмём число в начале любой строки кроме последней, пусть это будет x, тогда в конце этой же строки число будет $x+n-1$, значит в следующей строке начнётся с $x+n$ и заканчится с $x+2n-1$, т.к. во второй строке сумма больше на n^2, но такое возможно только при $n=1;0$, но это противоречит условию.

Значит таких строк нет

Ответ: Таких строк нет

№5

0

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Г. Екатеринбург

Место проведения

ЮТ31-55

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Худяков

ИМЯ Андрей

ОТЧЕСТВО Димитриевич

Дата рождения 27.09.2004

Класс: 7

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 4 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Выдан доп. лист – 1

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЮТ31-55

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №2.

Для удобства решения этой задачи сократим имена детей: Саша – С; Паша – П; Аркадий – А.

Будем решать задачу с конца.

После всех проделанных операций у каждого осталось по 8 биткоинов. Последнее действие заключалось в том, что Аркаша перевёл Саше и Паше столько биткоинов, сколько было у них до этого, то есть увеличивал их бюджет в 2 раза, а свой уменьшал на отданое кол-во биткоинов => у П и С было по 4 биткоина у каждого ~~(8:2)~~ $(\frac{8}{2}=4)$, а у Аркадия $8+4+4=16$ биткоинов.

Прошла 4-я операция.

3-я операция: $П \to С\ 2y=4$; $z-y-x=4$, $П \to А\ 2x=16$, где x – денег у Аркаши, y – денег у Саши, z – денег у Паши, после первой и второй операции =>

$=> y=2;\ x=8;\ z=14$

~~1-я и 2-я операция: С → А $2x=1$, П~~

1-я и 2-я операция: $С \to П\ 2x=14$, $С \to А\ 2y=8$, где x – денег изначально у Паши; y – денег изначально у Аркаши

$=> y=4;\ x=7.$

Денег у Саши изначально $= 24$ (все монеты) $- 7 - 4 =$
$= 13$

Ответ: первоначально у Саши было ~~24~~ 13 биткоинов, у Паши – 7 биткоинов, а у Аркаши – 4 биткоина.

+

Задача №3.

Всего есть 1917 табличек с цифрами.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЮТ31-55

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1. Всего есть 9 однозначных чисел. (1–9)

(10–99) = ~~180~~ 90 чисел, которые включают в себя 180 цифр.

От 100 до 199 имеется 100 трёхзначных чисел, которые включают в себя 300 цифр. =>

=> ~~1–10~~ ~~1+2~~ + сумма цифр от 1 до 199 = 489. =>

от 1 до 699 = 1989

1989 – 1917 = 72 – лишних цифры. ~~$\frac{72}{3} = 24$~~ Так как эти лишние цифры находятся в трёхзначных цифрах => $\frac{72}{3} = 24$ числа.

699 – 24 = 675 домов находится на проспекте.

Т.к. 675 : 3 => как минимум на 3 стопки ~~можно~~ разложить эти номера.

~~Максимальное число~~ стопок = 225 => в каждой стопке будет по 3 номера.

~~Ответ: 675 домов, max число стопок = 225,~~

Если всего 3 стопки => max высота каждой стопки = = 225 номеров.

Ответ: 675 домов, min стопок = 3; max высота 1-й стопки = 225 номеров

Задача № 5.

$$x_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{\frac{1}{2}}{2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}+1} = \frac{1\cdot 1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}$$

$$x_3 = \frac{\frac{1}{6}}{2\cdot 3\cdot \frac{1}{6}+1} = \frac{1}{6\cdot 2} = \frac{1}{12}$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$x_4 = \frac{\frac{1}{12}}{2\cdot 4\cdot \frac{1}{12}+1} = \frac{1\cdot 3}{12\cdot 5} = \frac{1}{20}$$

$$x_5 = \frac{\frac{1}{20}}{2\cdot 5\cdot \frac{1}{20}+1} = \frac{1\cdot 2}{20\cdot 3} = \frac{1}{30}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} =$$

$$= \frac{30}{60} + \frac{10}{60} + \frac{5}{60} + \frac{3}{60} + \frac{2}{60} = \frac{50}{60} = \frac{5}{6}$$

Если продолжить ряд числами от x_6 до x_{2018} и сложить их, то в сумме получится число 1. ? почему ?

Ответ: 1.

(+)

Задача №1.

Чтобы все машины можно было использовать даже при отсутствии 3-х человек, нужно обучить 6-х из восьми водителей водить по 2 машины каждый, а ещё одного научить водить 3 машины, а 8-й — все 5 машин. Изобразим это на таблице:

	8	8	8	8	8
	6	6	7	7	1
	3	4	4	5	5
	1	1	2	2	3
номер машины	1	2	3	4	5

} цифра обозначает номер водителя.

Всего нам понадобиться обучить водителей 20 раз => понадобиться $10000\cdot 20 = 200000$ рублей

Ответ: 200000 рублей

(±) не доказано, что это минимальная оценка

Доп. лист.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ЮТ31-55

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №4.

n может равняться 3.

Таблица:

7	3	4
2	8	5
1	6	9

7 + 3 + 4 = 14

2 + 8 + 5 = 15

1 + 6 + 9 = 16

—

Ответ: n = 3.

другие n?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

КО 76 - 23

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 1711

ФАМИЛИЯ ЦЯНЧЕНКО

ИМЯ ЯНА

ОТЧЕСТВО МИХАЙЛОВНА

Дата рождения 23.11.2000 **Класс:** 11

Предмет математика **Этап:** заключительный

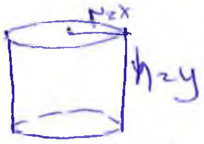
Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Цян

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2.



Пусть x – радиус оснований цилиндра, а y – высота

Тогда $V_y = \pi x^2 \cdot y$, а $S_y = 2\pi x y + 2\pi x^2$

Пусть $a = \frac{V}{\pi} = x^2 y$, а $b = \frac{S}{2\pi} = xy + x^2$

Составим систему

система имеет единственное решение при $a > 0$ и $b > 0$

$$\begin{cases} x^2 y = a \\ xy + x^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{x^2} \\ \frac{x \cdot a}{x^2} + x^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{a}{x^2} \\ \frac{a}{x} + x^2 = b \quad (I) \end{cases}$$

Уравнение (I) должно иметь 1 решение

$\frac{a}{x} + x^2 = b \;/ \cdot x$ Рассмотрим функцию

$x^3 - bx + a = 0$ $\qquad f(x) = x^3 - bx + a$

Найдем min и max

$f'(x) = 3x^2 - b \Rightarrow 3x^2 - b = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{3}}$

max значение в точке $x = -\sqrt{\frac{b}{3}}$:

$f(-\sqrt{\frac{b}{3}}) = -\frac{b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3}} + a = a + \frac{2b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}}$

min значение в точке $x = \sqrt{\frac{b}{3}}$:

$f(\sqrt{\frac{b}{3}}) = \frac{b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}} - \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3}} + a = a - \frac{2b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}}$

Чтобы иметь одно решение $\Rightarrow a - \frac{2b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}} = 0$

$a - \frac{2b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}} = 0$ $\qquad a^2 = \frac{4b^3}{27} \;/ \cdot \frac{27}{4}$

$a = \frac{2b\sqrt{b}}{3 \cdot \sqrt{3}}$ $\qquad a^2 \cdot \frac{27}{4} = b^3$ (подставим a и b)

$a^2 = \frac{4 \cdot b^2 \cdot b}{9 \cdot 3}$ $\qquad \frac{V^2}{\pi^2} \cdot \frac{27}{4} = \frac{S^3}{8\pi^3} \;/ \cdot 8\pi^3$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ КО 76-28

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\frac{V^2 \cdot 27 \cdot \cancel{8}^{2}\pi^3}{\pi^3 \cancel{4}} = \beta^3$$

$\beta^3 = 54V^2$ ~~Ответ: $\beta^3 = 54V^2$~~

Замечание:

1) Если $a - \frac{2b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}} > 0$, то $\delta_{min} > 0$ функция все время возрастает $\Rightarrow$ значит не пересекает ось $OX \Rightarrow$ решений нет

2) Если $a - \frac{2b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}} < 0$, то будет 2 корня.

Ответ: $\beta^3 = 54V^2$

3.

$P(1) = 2019 \quad P(2019) = 1 \quad P(k) = k \quad k - ?$

$P(x)$ - многочлен $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n x + a_n$

$(P(a) - P(b)) \vdots a - b$ (для многочлена с целыми коэф. значениями и целых a и b)

Докажем

$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n x + a_n$

$P(a) = a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \ldots + a_n a + a_n$

$P(b) = a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n b + a_n$

$P(a) - P(b) = (a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \ldots + a_n a + a_n) - (a_0 b^n + a_1 b^{n-1} + \ldots + a_n b + a_n)$

$= a_0 \underbrace{(a^n - b^n)}_{\vdots a-b} + a_1 \underbrace{(a^{n-1} + b^{n-1})}_{\vdots a-b} + \ldots + a_n \underbrace{(a-b)}_{\vdots a-b}$ чтд

Следовательно мы имеем

$P(2019) - P(k) = 1 - k$

$(1-k) \vdots (2019-k)$

$P(1) - P(k) = 2019 - k$

$(2019-k) \vdots (1-k) \Rightarrow$

$|1-k| = |2019-k|$

$|k-1| = |k-2019|$

Лист 2 из 4

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Рассмотрим 3 промежутка

1) $k\in(-\infty;2019)$: $-k+2019=1-k$ – решений нет

2) $k\in[1;2019]$: $-k+2019=k-1 \Rightarrow k=1010$

3) $k\in(2019;+\infty)$: $k-2019=k-1$ – решений нет

Ответ: $k=1010$

+

5.

$x^y+y^z=xyz \quad x,y,z\in N$

Рассмотрим несколько решений удовлетворяющих условию

1) $y=1 \Rightarrow x+1=xz \quad 1=x(z-1) \Rightarrow \begin{matrix}x=1\\z=2\end{matrix}$ $(1;1;2)$

2) $y=2 \Rightarrow x^2+2^z=2xz$

Если $z=1$, то $x^2+2=2x \quad x^2-2x+2=(x-1)^2+1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)^2=-1$ – решений нет

Если $z=2$, то $x^2+4=2x \quad x^2-2x+4=0 \quad (x-2)^2=0$
$x=2$
$(2;2;2)$

Если $z=3$, то $x^2+8=6x \quad x^2-6x+8=0$
$x_1=3+\sqrt{9-8}=4 \quad x=2$
$x_2=3-1=2 \quad x=4$
$(2;2;3)$
$(4;2;3)$

+

Если $z=4$, то $x^2+16=8x \quad x^2-8x+16=0$
$(x-4)^2=0 \quad x=4$
$(4;2;4)$

Докажем, что при $z>4$ решений нет

$z>4 \quad x^2+2^z=2xz$

$x^2-2xz+2^z=0 \quad D=4z^2-4\cdot 2^z<0$ т.к. $2^z>z^2$ при $z>4$ показательная функция растет быстрее $\Rightarrow$ решений нет.

Ответ: $(1;1;2);(2;2;2);(2;2;3);(4;2;3);(4;2;4)$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

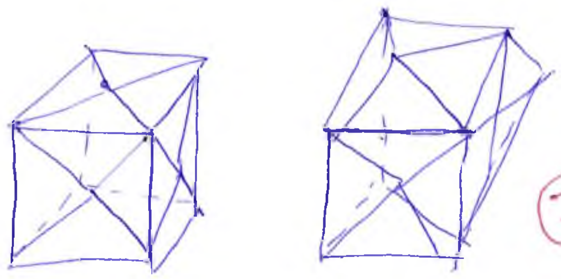
Вариант: 1711

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ КО 76 - 28

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.

а.



Да могут. Если представить, что три пересекающиеся ~~пр.~~ в одной точке прямые лежат в одной плоскости. Достраивая к ним куб, ребра которого должны проходить как биссектрисы для образованных из трех прямых углов. И при этом две грани боковых пирамид должны лежать на одной прямой.

4b

Да могут. У каждой боковой пирамиды будут равные ребра. И для каждой вершины возможно 4а.

1.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2 x_3} + \sqrt{x_2^2 + x_1 x_3} + \sqrt{x_3^2 + x_1 x_2}$$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

допустим $x_1 \geq x_2 \geq x_3$

min при $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

$f(0,0,0) = 0$

max при $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$

$f(1;1;0) = 3$

Ответ: min=0; max=3 ?

Лист 4 из 4

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Красноярск

Место проведения

КО 76-91

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Черепанова

ИМЯ Софья

ОТЧЕСТВО Львовна

Дата рождения 18.07.2000 **Класс:** 11

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1.

$f(x_1;x_2;x_3)=\sqrt{x_1^2+x_2x_3}+\sqrt{x_2^2+x_1x_3}+\sqrt{x_3^2+x_1x_2}$

Известно, что $x_1+x_2+x_3\le 2$ и $x_1\ge 0;\ x_2\ge 0;\ x_3\ge 0$

т.к. x_1, x_2, x_3 – мощности генератора

Очевидно, что $f_{min}=f(0;0;0)=0$

Для определенности будем считать, что $x_1\ge x_2\ge x_3$.

Докажем, что $f_{max}=3$.

$$\sqrt{x_1^2+x_2\cdot x_3}\le\sqrt{x_1^2+x_1x_3}=\sqrt{x_1(x_1+x_3)}\le\frac{x_1+(x_1+x_3)}{2}=x_1+\frac{x_3}{2}.$$

(это верно т.к. $x_1\ge x_3$)

(неравенство Коши)

$$\left(1\cdot\sqrt{x_2^2+x_1x_3}+1\cdot\sqrt{x_3^2+x_2x_1}\right)^2\le(x_2^2+x_1x_3+x_3^2+x_2x_1)(1+1)$$ – неравенство Коши-Буняковского

$$\sqrt{x_2^2+x_1x_3}+\sqrt{x_3^2+x_2x_1}\le\sqrt{2}\sqrt{x_2^2+x_1x_3+x_3^2+x_2x_1}$$

Выше мы получили, что $\sqrt{x_1^2+x_2x_3}\le x_1+\frac{x_3}{2}$ (1).

Докажем что:

$$\sqrt{x_2^2+x_1x_3}+\sqrt{x_3^2+x_1x_2}\le\sqrt{2}\sqrt{(x_2^2+x_1x_3+x_3^2+x_2x_1)}\le\frac{x_1}{2}+\frac{3x_2}{2}+x_3.\quad(2)$$

$$2(x_2^2+x_1x_3+x_3^2+x_2x_1)\le\frac{(x_1+3x_2+2x_3)^2}{4}$$

$$8x_2^2+8x_1x_3+8x_3^2+8x_2x_1\le x_1^2+3x_1x_2+2x_3x_1+9x_2^2+3x_2x_1+6x_2x_3+2x_1x_3+6x_2x_3+4x_3^2$$

$$x_1^2+x_2^2-4x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3+12x_2x_3\ge 0.$$

$$x_1^2+x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3-8x_3^2+8x_3x_2\ge 0$$

$$(x_1-x_2-2x_3)^2+8x_3(x_2-x_3)\ge 0$$

≥ 0 (т.к. в квадрате) $\quad \ge 0$ (по усл) $\quad \ge 0$ (т.к. $x_2\ge x_3$)

⇓

неравенство верно

Тогда сложив ① и ② получим, что

$f(x_1; x_2; x_3) \le \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3$

$f(x_1; x_2; x_3) \le \frac{3}{2}(x_1 + x_2; x_3) \Rightarrow$

$f(x_1; x_2; x_3) \le 3$ т.к.

$x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \Rightarrow f_{max} =$

$= f(1;1;0) = 3.$

Ответ: $f_{min} = 0$; $f_{max} = 3$

N2

$V = \pi r^2 h$ r – радиус цилиндра

$S = 2\pi r(r+h)$ h – высота цилиндра

Пусть $\frac{V}{\pi} = a > 0$

$\frac{S}{2\pi} = b > 0$

Необходимо, чтобы система $\begin{cases} r^2h = a \\ r^2 + rh = b \end{cases}$ имела единств. решение.

$\begin{cases} h = \frac{a}{r^2} \\ r^2 + r \cdot \frac{a}{r^2} = b \end{cases} \Rightarrow b = r^2 + \frac{a}{r} = r^2 + \frac{a}{2r} + \frac{a}{2r} \ge 3\sqrt[3]{r^2 \cdot \frac{a}{2r} \cdot \frac{a}{2r}} =$

$= 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}$

(неравенство Коши).

Решим II ур-системы.

$r^3 - br + a = 0$

$f(r) = r^3 - br + a$

$f'(r) = 3r^2 - b$

$f'(r) = 0$ при $r = \pm\sqrt{\frac{b}{3}}$

y': $+$ | $-$ | $+$; точка max при $-\sqrt{\frac{b}{3}}$, точка min при $\sqrt{\frac{b}{3}}$

y: $\nearrow$ $-\sqrt{\frac{b}{3}}$ 0 $\searrow$ $\sqrt{\frac{b}{3}}$ $\nearrow$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Необходимо чтобы $f(\sqrt{\frac{b}{3}})=0$

$$f\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)=\left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right)^3-b\sqrt{\frac{b}{3}}+a=a-\frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3}}=0.$$

Т.к. $a=\frac{2b\sqrt{b}}{3\sqrt{3}}$

$$3a\sqrt{3}=2b\sqrt{b}.$$
$$27a^2=4b^3$$
$$\frac{27}{4}a^2=b^3.$$

$$\frac{27}{4}\cdot\frac{V^2}{h^2}=\frac{S^3}{8h^3}$$

$$S=\frac{27\cdot 8\cdot h^3}{4\cdot h^2}\cdot V^2$$

$$S^3=54hV^2$$

+

Ответ: $S^3=54hV^2$

N3

Пусть $P(x)$ – данный многочлен

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n.$

Рассмотрим разность $P(k)-P(1)$:

$P(k)-P(1)=k-2019=(a_0k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+\ldots+a_{n-1}k+a_n)-$
$-(a_0+a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n)=a_0(k^n-1^n)+a_1(k^{n-1}-1^{n-1})+a_2(k^{n-2}-1^{n-2})+\ldots$
$+a_{n-1}(k-1).$

$P(k)-P(1)\,\vdots\,(k-1)$ т.к. $(a^n-b^n)\,\vdots\,(a-b)\Rightarrow\frac{k-2019}{k-1}\in\mathbb{Z}.$

$1-\frac{2018}{k-1}\in\mathbb{Z}.$

Аналогично рассмотрев для $P(k)-P(2019)$ получим, что $\frac{k-1}{k-2019}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 1+\frac{2018}{k-2019}\in\mathbb{Z}.$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Найдем все значения k, при которых $\frac{2018}{k-1} \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что $2018 = 2 \cdot 1009$, а 1009 – простое число.

Тогда
$k-1=1$ $\quad k=2$
$k-1=2$ $\quad k=3$
$k-1=1009$ $\quad k=1010$
$k-1=2018$ $\quad k=2019$
$k-1=-1$ $\quad k=0$
$k-1=-2$ $\quad k=-1$
$k-1=-1009$ $\quad k=-1008$
$k-1=-2018$ $\quad k=-2018$

+

Подставим полученные значения в $\frac{2018}{k-2019}$ и найдем при каких k это выражение является целым.

$\frac{2018}{-2017} \notin \mathbb{Z}$ $\quad \boxed{\frac{2018}{-1009} = -2 \in \mathbb{Z}}$ $\quad \frac{2018}{-2019} \notin \mathbb{Z}$ $\quad \frac{2018}{3028} \notin \mathbb{Z}$

$\frac{2018}{-2016} \notin \mathbb{Z}$ $\quad \frac{2018}{0}$ – неопр. $\quad \frac{2018}{-2020} \notin \mathbb{Z}$ $\quad \frac{2018}{4036} \notin \mathbb{Z}$

Ответ: $k=1010$.

N5.

$x^y + y^z = xyz$.

$\{x; y; z\} \in N$

Для $y=1$: $\quad x+1 = xz$
$1 = x(z-1)$ в нат. числах: $\begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases}$

Для $y=2$:
$x^2+2^z = 2xz$
$z=1$: $x^2+2=2x$
$x^2-2x+2=0$.
$D<0 \Rightarrow$ действ. корней нет.
$z=2$: $x^2+4=4x$
$x^2-4x+4=0$. $\Rightarrow x=2$.

$z=3$: $x^2+8=6x$

$x^2-6x+8=0$.

$(x-2)(x-4)=0 \Rightarrow x=2$, $x=4$.

$z=4$: $x^2+16=8x$.

$x^2-8x+16=0. \Rightarrow x=4$.

Для $z>4$ y^z растет быстрее, чем $z^2 \Rightarrow$ при $z>4$ ~~корней~~ решений нет.

Докажем, что это все решения и других при $y \geq 3$ не существует:

$x=1$.

$1+y^z=yz \,|:y$

$\frac{1}{y}+y^{z-1}=z$

$\underbrace{\frac{1}{y}}_{\notin Z}=\underbrace{z-y^{z-1}}_{\in Z} \Rightarrow$ решений нет.

При $x \geq 2$:

$3x^2 \leq 2x^2y$

Данное неравенство верно т.к. $3 \leq 2y$ (для $y \geq 3$).

$x^2 \leq \frac{2}{3}x^2y$.

$3y^z \leq 2z^2y$

$y^z \leq \frac{2}{3}z^2y$ — если, это верно, то:

$x^2+y^z = \frac{2}{3}x^2y+\frac{2}{3}z^2y = \frac{4}{3}\frac{x^2y+z^2y}{2} \leq \frac{4}{3}\sqrt{x^2y\cdot z^2y} =$

$=\frac{4}{3}\sqrt{x^2y^2z^2} = \frac{4}{3}xyz > xyz \Rightarrow$ противоречие, т.к.

$x^2+y^z=xyz$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ КО 76 - 91

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Осталось доказать, что неравенство $3y^z \geq 2z^2y$ (для $y\geq3$) верно.

$z=1$: $3y \geq 2y$

$y>0$ – верно

$z=2$: $3y^2 \geq 8y$

$3y^2-8y \geq 0$

$D=64$

$y_1=\frac{16}{6}<3$

$y_2=0$

— верно

$z=3$: $3y^3 \geq 18y$

$3y^3-18y \geq 0$

$y^3-6y \geq 0$

$y(y^2-6)\geq 0$

$y(y-\sqrt6)(y+\sqrt6)\geq 0$

верно

+3

$z=4$: $3y^4 \geq 32y$

$y(3y-32)\geq 0$

$y>\sqrt{\frac{32}{3}}<3$ — верно

далее $z>4$ верно т.к. y^z растет быстрее чем z^2 как показательная функция.

Ответ: $(1;1;2)$; $(2;2;2)$; $(2;2;3)$; $(4;2;3)$; $(4;2;4)$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

РЮ 98 - 74

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Чуприн

ИМЯ Илья

ОТЧЕСТВО Сергеевич

Дата рождения 02.03.2001 г.

Класс: 11

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018 г.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Чуп-

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1

Дано:
$x_1; x_2; x_3$ - мощности генераторов
$x_1 + x_2 + x_3 \le 2\cdot10^6$ Вт
$f(x_1;x_2;x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2\cdot x_3} + \sqrt{x_2^2 + x_1\cdot x_3} + \sqrt{x_3^2 + x_1\cdot x_2}$
Найти: f_{min} - ? ; f_{max} - ?

Решение:
1) Т.к. значение мощности не может быть меньше 0, то $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$; $x_3 \ge 0$
2) Исходя из того, что $x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$ и $x_3 \ge 0$ и в записи функции нет вычитания, то делаем вывод, что $f(x_1;x_2;x_3)$ принимает наименьшее значение при $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$, тогда
$f_{min} = \sqrt{0^2+0\cdot0} + \sqrt{0^2+0\cdot0} + \sqrt{0^2+0\cdot0} = 0$
3) Мы видим, что подкоренные выражения функции аналогичны и отличаются только индексами элементов, тогда f_{max} достигает свое значение при $x_1 = x_2 = x_3$ и их суммарной мощности $2\cdot10^6$ Вт
$x_1 + x_2 + x_3 = 2\cdot10^6$ — Но это не значит, что при таком рав-ве достигается max
$3x_1 = 2\cdot10^6$
$x_1 = \frac{2\cdot10^6}{3}$ Вт.
4) $f_{max} = \sqrt{\frac{4\cdot10^{12}}{9} + \frac{4\cdot10^{12}}{9}} + \sqrt{\frac{4\cdot10^{12}}{9} + \frac{4\cdot10^{12}}{9}} + \sqrt{\frac{4\cdot10^{12}}{9} + \frac{4\cdot10^{12}}{9}} =$
$= 3\sqrt{\frac{8\cdot10^{12}}{9}} = \sqrt{8\cdot10^{12}} = 2\sqrt{2}\cdot10^6$ Вт

∓

Ответ: $f_{min} = 0$ Вт
$f_{max} = 2\sqrt{2}$ МВт

№2

Дано: цилиндр
V - объем
S - площадь полной поверхности
Найти: условие на V и S, при котором два любых цилиндра равны

Решение:
$V = \pi r^2 h$
$S = 2\pi r(h+r)$
Мы знаем, что при $V_1 = V_2$ и $S_1 = S_2$ цилиндры будут равновеликими, т.е. они могут оказаться не равны.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

равные цилиндры получаются только в том случае, если $r_1 = r_2$ и $h_1 = h_2$.
Таким образом, делаем вывод, что 2 любые цилиндры будут равны при $V_1 = V_2$; $S_1 = S_2$; $r_1 = r_2$ и $h_1 = h_2$
Ответ: $V_1 = V_2$ и $S_1 = S_2$; $r_1 = r_2$ и $h_1 = h_2$. ⊖

№3

Дано:
$P(1) = 2015$
$P(2015) = 1$
$P(k) = k$
$k \in Z$
Найти: k

Решение:
Исходя из того $P(1)$ и $P(2015)$ взаимнообратны, то делаем вывод, что $P(k) = k$ возможно, где k - среднее число между 1 и 2015, т.к. при увеличении аргумента $P(x)$ на n, его значение будет уменьшаться на n.

$k = \frac{1+2015}{2} = 1010$ +

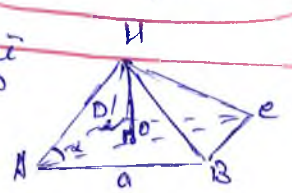
Ответ: $P(1010) = 1010$, $k = 1010$

№4

Дано: куб; правильная пирамида
основание пирамиды — грань куба
ребро = a
Найти: а) Могут ли боковые ребра 3 пирамид, исходящие из 1 вершины куба лежать в одной плоскости? h - ?
б) Могут ли такие 3 ребра лежать в плоскости одновременно для всех вершин куба?

Решение:
а) Да, могут, при условии, что угол между ребром пирамиды и плоскостью куба равен 45^0, тогда:

Т.к. пирамида правильная и в ее основании квадрат со стороной a, то h падает на AC, причем $AO = OC$



$AC = AB \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}$
$AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

В $\triangle AOH$: $\angle HAO = 45^\circ$ и $\angle HOA = 90^\circ$, то $HO = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} = h$

б) Могут, т.к. пирамиды правильные, то для всех ребер угол с плоскостью стороны куба будет 45°.

То, что такие тройки будут иметь одновременно, можно доказать тем, что кол-во ребер пирамид будет нацело делится на кол-во вершин куба

Кол-во ребер пирамид: 6 граней куба · 4 ребра = 24

24 ребра : 8 вершин = 3.

Ответ: а) Да, $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

б) Да.

+

№5

$x^y + y^2 = xyz$, где $x, y, z \in N$

Пусть $x = y = z$, то уравнени можно записать в виде:

$x^x + x^x = x^3$

$2x^x = x^3$

Данное равенство истинно при $x = 2$

$2 \cdot 2^2 = 2^3$

$8 = 8$ истина

Тогда значения $x = 2$, $y = 2$ и $z = 2$ удовлетворяют равенство

$x^y + y^2 = xyz$.

Ответ: $x = 2$

$y = 2$

$z = 2$

+

Есть другие решения

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВЭФ

Место проведения

СУ 38-99

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17091

ФАМИЛИЯ Шерстюгиной

ИМЯ Анастасии

ОТЧЕСТВО Андреевны

Дата рождения 14.01.2003 **Класс:** 9

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$4x^4+4px^3=(p-4)x^2-4px+p$

$4x^3(x+p)=px^2-4x^2-4px+p$

$4x^3(x+p)=p(x^2+1)-4x(x+p)$

$4x^3(x+p)+4x(x+p)=p(x^2+1)$

$(4x^3+4x)(x+p)=p(x^2+1)$

$4x(x^2+1)(x+p)=p(x^2+1)$

Т.к. $x^2 \geq 0$, то $x^2+1>0$ => поделим обе стороны равенства на x^2+1:

$4x(x+p)=p$

$4x^2+4px-p=0$

$D=(4p)^2-4\cdot4(-p)=16p^2+16p$

$x=\dfrac{-4p\pm\sqrt{16p^2+16p}}{8}=\dfrac{-4p\pm4\sqrt{p^2+p}}{8}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2+p}}{2}$

Т.к. x - рациональное число, то

$x=\dfrac{-p}{2}\pm\dfrac{\sqrt{p^2+p}}{2}$, $\cancel{\dfrac{\sqrt{p^2+p}}{2}}$ $\sqrt{p^2+p}$ - также рациональное число

$\sqrt{p^2+p}=\dfrac{m}{n}$, где $m\in Z$, $n\in N$

$m=\sqrt{p^2+p}\cdot n$ => $\sqrt{p}\cdot\sqrt{p+1}\cdot n\in Z$

Т.к. p - целочисленное и $p \geq 0$, чтобы существовал это корень, то единственное возможное значение $p=0$.

??

Ответ: при $p=0$

№2

$\{x\}$ - дробная часть, т.е. $x=[x]+\{x\}$ => $[x]=x-\{x\}$

$x[x[x[x]]]=x[x[x(x-\{x\})]]=x[x[x^2-x\{x\}]]$

Заметим, что $[x^2-x\{x\}]=x^2-x\{x\}-\{x^2-x\{x\}\}=x^2-x\{x\}-\{x^2\}+\{x\{x\}\}=$

$=x^2-x\{x\}-\{x^2\}+\{x^2\}=x^2-x\{x\}$

Тогда $x[x[x[x]]] = x[x(x^2 - x\{x\})] = x[x^3 - x^2\{x\}]$

$[x^3 - x^2\{x\}] = x^3 - x^2\{x\} - \{x^3 - x^2\{x\}\} = x^3 - x^2\{x\} - \{x^3\} + \{x^2\{x\}\} =$

$= x^3 - x^2\{x\} - \{x^3\} + \{x^3\} = x^3 - x^2\{x\}$

$x[x[x[x]]] = x(x^3 - x^2\{x\}) = x^4 - x^3\{x\} = x^3(x - \{x\}) = x^3[x] =$

$= ([x^3] + \{x^3\}) \cdot [x] = [x^4] + [x]\{x^3\}$

По условию $x[x[x[x]]] < 2018 \Rightarrow$

$\Rightarrow [x^4] + [x]\{x^3\} < 2018$

Заметим, что ~~x~~ $7^4 = 2401 \Rightarrow x < 7$, т.к. $2401 + \cancel{7\{\}} < 2018$ – неверно

Тогда проверим, для всех ли $x < 7$ верно неравенство

$0 < [x^4] \le 6^4 \Rightarrow 0 < [x^4] \le 1296$

~~Рассмотр. [x]{x^3} <~~

Рассмотрим $[x]\{x^3\}$. Т.к. $x < 7$, а $\{x^3\} < 1$ по определению, то $[x]\{x^3\} < 7$

Тогда $\underbrace{[x^4]}_{\le 1296} + \underbrace{[x]\{x^3\}}_{< 7} < 2018$ – верно ⇒ неравенство верно для всех положительных вещественных $x < 7$

Ответ: $x < 7$

0

±

№5

Остатки при делении a на 7: ~~0, 1, 2, 3, 4, 5, 6~~ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Остатки при делении a^2 на 7: ~~0, 1, 2, 4~~ 0, 1, 2, 4.

Чтобы сумма трех квадратов была ⋮ 7, то сумма остатков при делении на 7 ~~каждого из~~ трех квадратов должна быть ⋮ 7.

Тогда возможные суммы остатков ⋮ 7: 0+0+0, 4+2+1

Остаток 0 дает ~~только~~ a^2 при делении на 7, если $a \underset{7}{\equiv} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ числа x, y, z – все кратны 7.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Разобьем числа множества на ~~тем~~ группы по 7 чисел в каждой: 1-7, 8-14, 15-21, 22-28, 29-35, 36-42, ~~43-50~~, 43-49, 50-56, 57-63, 64-70. (10 групп)

Заметим, что в каждой из групп ровно 1 число $\vdots 7 \Rightarrow$ всего имеем 10 чисел $\vdots 7$. Тогда выбрать x, y и z мы можем $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ способами. ? числа по усл выб. упорядочены.

Теперь рассмотрим вариант суммы остатков $4+2+1=7 \vdots 7$.

Число a^2 дает в остатке 4 при делении на 7, если $\left[\begin{array}{l} a \underset{7}{\equiv} 5 \\ a \underset{7}{\equiv} 2 \end{array}\right.$

В каждой ~~семерке~~ группе есть ровно одно число вида $a \underset{7}{\equiv} 5$ и ровно одно вида $a \underset{7}{\equiv} 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ всего 20 чисел ~~дающих в о~~

Число a^2 дает в остатке 2 при делении на 7, если $\left[\begin{array}{l} a \underset{7}{\equiv} 3 \\ a \underset{7}{\equiv} 4 \end{array}\right.$

В каждой группе есть ровно одно число вида $a \underset{7}{\equiv} 3$ и ровно одно вида $a \underset{7}{\equiv} 4 \Rightarrow$ всего 20 чисел.

Число a^2 дает в остатке 1 при делении на 7, если $\left[\begin{array}{l} a \underset{7}{\equiv} 6 \\ a \underset{7}{\equiv} 1 \end{array}\right.$

В каждой группе есть ровно одно число вида $a \underset{7}{\equiv} 6$ и ровно одно вида $a \underset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow$ всего 20 чисел

Тогда выбрать x, y и z мы можем $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$ способами

Считая, что тройки (a, b, c), где ~~a~~ $x=a$, $y=b$, $z=c$, и (b, c, a), где $x=b$, $y=c$, $z=a$ — разными тройками, то всего имеем $720 + 6840 = 7560$ троек

Ответ: 7560

+

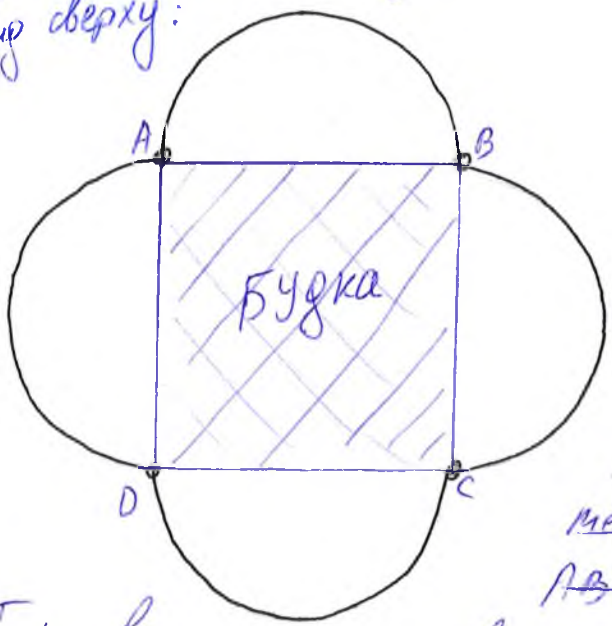
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Наблюдатель может видеть только стену будки под углом 90° от одного её края и до другого. Наблюдатель не может видеть ~~её и~~ угол будки и две стены одновременно, т.к. тогда угол его зрения будет содержать в себе будку от одного её угла до диаметрально противоположного угла. В таком случае угол, под которым наблюдатель будет видеть башню, может быть = 90° только если наблюдатель непосредственно ~~является~~ стоит на месте ~~угла~~ одного из углов будки, что физически невозможно.

Тогда наблюдатель видит только одну стену ~~башни~~ будки под углом 90°. Рассмотрим ГМТ из которого будка будет видна наблюдателю под углом 90°:

Вид сверху:

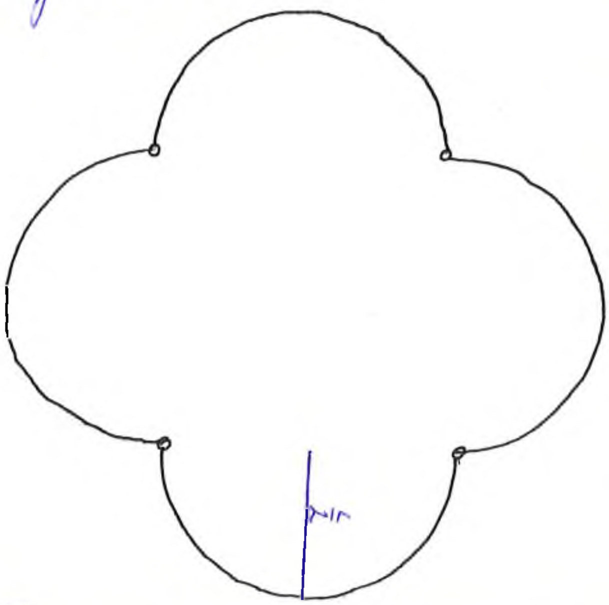


Обозначим углы будки A, B, C и D. Чтобы сторону AB было видно под углом 90°, построим полуокружность ~~с диамет~~, где AB - диаметр. ~~Тогда из любого угла, вершина которого расположена на полуокружности, сторона AB будет видна под углом~~

Т.к. вписанные углы в окружности, опирающиеся на диаметр, равны 90°, то ~~из~~ полуокружность, которую мы построили - ГМТ, из которых сторона AB видна под углом 90°. Аналогично для сторон BC, CD и AD. Получаем ГМТ наблюдателя, для которого будка будет видна под углом 90° (причем точки A, B, C, D в это ГМТ не входят)

(+)

Полученное ГМТ:



Четыре полуокружности с диаметрами $= L$ ~~(а также четыре выколотые точки)~~ но точки их соприкосновения (углы будки), в ГМТ не входят.

Тогда минимальное расстояние, с которого видна будка стремится к 0 (~~очень очень близко подойти~~ точка возле выколотой точки)

А максимальное $=$ ~~$r \Rightarrow \frac{1}{2}$~~ радиусу $\Rightarrow$ половине диаметра $\Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{L}{2}$ (показано на рисунке)

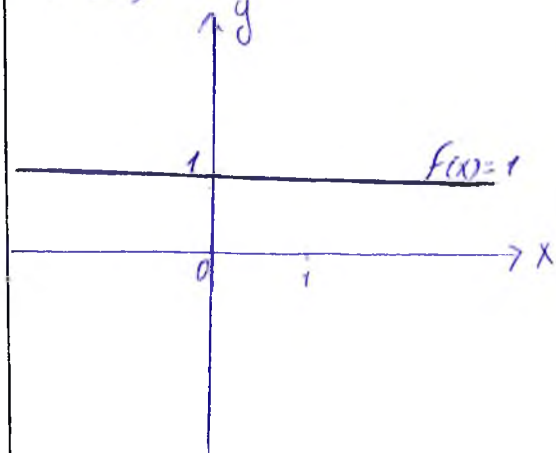
Ответ: Четыре полуокружности, каждая построена на стороне квадрата (поперечного сечения будки) ~~ди~~ как на диаметре $= L$, точки соприкосновения ~~их~~ полуокружностей (углы квадрата - поперечного сечения будки) выколоты и в ГМТ не входят.

Минимальное расстояние бесконечно мало

Максимальное расстояние $= \frac{L}{2}$.

№3

$f(x) = 1$



(+)

$$\left.\begin{array}{l} f(x-y)=1 \\ f(x)=1 \\ f(y)=1 \end{array}\right\} \text{при любых } x, y$$

$$\Downarrow$$

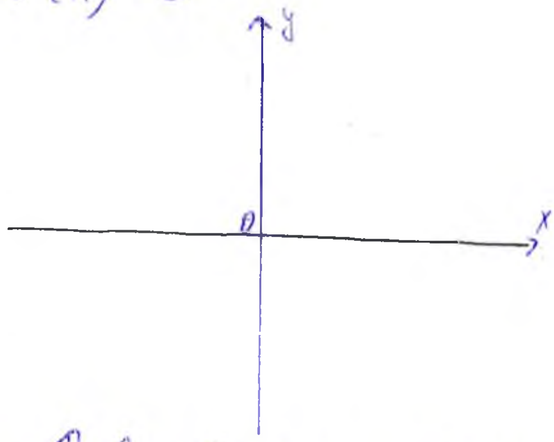
$$f(x-y) = f(x)\cdot f(y)$$
$$1 = 1 \cdot 1 \quad \text{- верно}$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17091 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ СУ 38-94

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$f(x)=0$



$\left.\begin{array}{l} f(x-y)=0 \\ f(x)=0 \\ f(y)=0 \end{array}\right\}$ при любых x, y

$\Downarrow$

$f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$

$0=0\cdot 0$ - верно

Ответ: $f(x)=0$ и $f(x)=1$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ Г-300	RN 14-56
Место проведения	шифр

← **Не заполнять** **Заполняется ответственным работником**

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Шмыголь ~~Дмитрий~~

ИМЯ Дмитрий

ОТЧЕСТВО Ильич

Дата рождения 06. 06. 2000 **Класс:** 11

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Шмыголь.

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RN 14-56

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

1) Т.к. x_1, x_2, x_3 – мощности, то $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ $x_3 \geq 0$. $\Rightarrow$ $x_1+x_2+x_3 = 0$ – min.

По неравенству Коши: $\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leq 0$. $\Rightarrow x_1 x_2 x_3 \leq 0$, то учитывая, что x_1, x_2, x_3 – положительны следует, что $x_1 x_2 x_3 = 0$

В функции:

$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2 x_3} + \sqrt{x_2^2 + x_1 x_3} + \sqrt{x_3^2 + x_1 x_2}$ очевидно, что при наибольших $x_1\ x_2\ x_3$ значение наибольшее, при наименьших наименьшее

$x_1^2 + x_2 x_3 = x_1^2 + \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1} = x_1^2 + \frac{0}{x_1} = x_1^2 \Rightarrow$

$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} + \sqrt{x_3^2} = x_1 + x_2 + x_3 = 0$. – это минимальное значение функции

2) При максимальном значении функции сумма членов равна максимальной, а значит 2, тогда

$\frac{2}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \Rightarrow x_1 x_2 x_3 = \frac{8}{27}$ – при максимальном значениях, ~~тогда~~ $x_1\ x_2\ x_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2 x_3 = \frac{x_1^2 + x_2 x_3 x_1}{x_1} = x_1^2 + \frac{8}{27 x_1} = \frac{27 x_1^3 + 8}{27 x_1}$. Получим:

$f_{max} = \sqrt{\frac{27 x_1^3 + 8}{27 x_1}} + \sqrt{\frac{27 x_2^3 + 8}{27 x_2}} + \sqrt{\frac{27 x_3^3 + 8}{27 x_3}}$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111.

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RN 14-56

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Из соображений симметрии $x_1 = x_2 = x_3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2}{3}$, отсюда

$$h_{max} = \sqrt{\frac{27 \cdot \frac{2}{27} + 8}{27 \cdot \frac{2}{3}}} \cdot 3 = \sqrt{\frac{16}{9 \cdot 2}} \cdot 3 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Ответ: максимальное значение $2\sqrt{2}$
минимальное $- 0$.

Это не max значение

$\mp$

№3.

$P(1) = 2019 \quad P(2019) = 1 \quad P(k) = k$

⇓

Если $P(x)$ - многочлен: $a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots a_n x^0$, то $P(1) = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$ - сумма коэффициентов.

Т.к. что $P(k) = k$, похоже на уравнение прямой. Пусть $P(x) = kx + b$, тогда

$k + b = 2019 \quad \Rightarrow \quad k = -1 \quad b = 2020.$

$k\,2019 + b = 1$

Тогда $P(k) = k \Rightarrow k\,k + b = k$

$-k + 2020 = k \Rightarrow k = 1010$

+

Ответ: 1010.

№5.

$x^y + y^z = XYZ$

Рассмотрим случай если $x = y = z = a$.

$a^a + a^a = a^3$

$2a^a = a^3 \Rightarrow a = 2$, тогда если X, Y, Z больше 2, то $x^y + y^z > xyz$, например:

$2^3 + 3^2 > 3 \cdot 2 \cdot 2$

Это надо обосновывать. Это не верно

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Получается, что т. к. $x, y, z \in N$, то они равны либо 1, либо 2, осталось рассмотреть все возможные комбинации

$1^1+1^1=1$ X

$2^1+1^1=2\cdot1\cdot1$ X

$1^2+2^2=2\cdot2\cdot1$ X

$1^2+2^1=1\cdot2\cdot1$ X

+

$2^1+1^2=2\cdot2\cdot1$ X

$1^1+1^2=1\cdot2\cdot1$ V

$2^2+2^1=2\cdot2\cdot1$ X

Следовательно подходит только $x=1$ $y=1$ $z=2$

Ответ: $x=2;\ y=2;\ z=2$ и $x=1;\ y=1;\ z=2$

№2.

Переформулируем условие задачи: нужно найти такие условия на V и S, чтобы можно было создать цилиндр только одних установленных размеров.

$$\begin{cases} V=\pi r^2 h, \text{ где } r \text{ радиус } h \text{ - высота.} \\ S=2\pi r(h+r) \end{cases}$$

$h=\dfrac{V}{\pi r^2}$

~~$S=2\pi r h+2\pi r^2=\dfrac{V}{2r}+2\pi r^2.$~~

чтобы можно было создать такой цилиндр с установленными единственными возможными размерами его площадь или объём должна быть минимальными.

$h=\dfrac{V}{\pi r^2}$

$S=\dfrac{2\pi r V}{\pi r^2}+2\pi r^2=\dfrac{2V}{r}+2\pi r^2$

$S'=-\dfrac{2V}{r^2}+4\pi r=0 \Rightarrow \pi V = \dfrac{V}{\pi}=r^3 \Rightarrow r_3=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$ -

это минимальный радиус, тогда.

$S=\dfrac{2V}{\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}}+2\pi\left(\frac{V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RN 14-56

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~$S = 2\pi^{\frac{1}{3}}V^{\frac{2}{3}} + 2\pi$~~

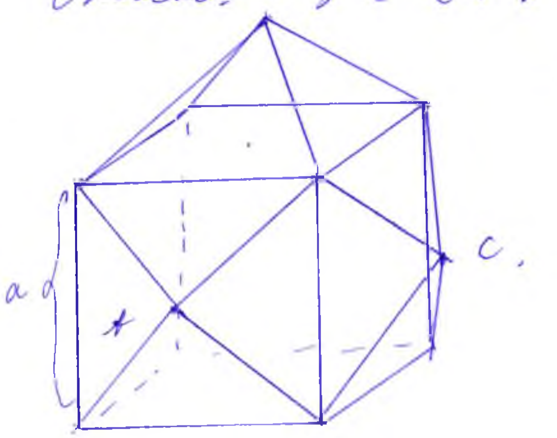
$$S = 2V^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{1}{3}} + \frac{2\pi V^{\frac{2}{3}}}{\pi^{\frac{2}{3}}} = 2V^{\frac{2}{3}}\left(\pi^{\frac{1}{3}} + \pi^{\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= 4V^{\frac{2}{3}}\pi^{\frac{1}{3}}.$$

$S^3 = 64V\pi^2$ — при таком соотношении любые два цилиндра с параметрами S и V равные.

1

Ответ: $S^3 = 64V\pi^2$



№4.

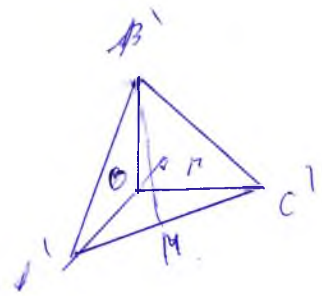
1) ABC — вершины пирамиды. Рассмотрим точки $A'B'$ и C', лежащие на вершинах оснований пирамид. Они образуют тетраэдр как на рисунке.

$OB' = \frac{a}{2}$; $A'B' = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Высота OM от O до плоскости $A'B'C' = \frac{2}{3}B'M$

$B'M^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{3}{8}a^2$

$B'M = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}a \Rightarrow B'M^2 = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}a^2 = \frac{1}{6}a^2$



−

$OM^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{1}{36}a^2 = \frac{8a^2}{36} \Rightarrow$

$\Rightarrow OM = a\frac{2}{6}\sqrt{2} = a\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

Рассмотрим ABC если они лежат на одной плоскости образуется треугольник подобный $A'B'C'$ с высотой от точки O равной $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, тогда

$$\frac{BO}{B'O} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow BO = \frac{1}{2}a\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

Высота пирамиды $= BO - B'O = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)a$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}a$, могут лежать в одной плоскости

2) могут одновременно лежать для трёх вершин куба по прямым

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

RA – 56-96

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ ШУЛЬГА

ИМЯ БОГДАН

ОТЧЕСТВО ГЕННАДЬЕВИЧ

Дата рождения 01.03.2001 **Класс:** 10

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Шульга

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RA 56-96

ВНИМАНИЕ! Прозеряется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$2(x_1+x_2+x_3)+4x_1x_2x_3=3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+1$

Предположим, что $x_1=x_2=x_3$ и ? возьмем их за x.

Тогда выражение примет вид:

$2(x+x+x)+4x\cdot x\cdot x=3(x^2+x^2+x^2)+1$

$2(3x)+4x^3=3(3x^2)+1$

$6x+4x^3=9x^2+1$

$6x+4x^3-9x^2-1=0$

$4x^3-9x^2+6x-1=0$

$4x^3-4x^2-5x^2+5x+x-1=0$

$4x^2(x-1)-5x(x-1)+1(x-1)=0$

$(x-1)(4x^2-5x+1)=0$

Произведение равняется „0", значит один из множителей равен „0".

$(x-1)=0$ или $4x^2-5x+1=0$

$x-1=0$

$x=1$

x не может равняться „1" по условию.

$D=25-16=\sqrt{9}=3$

$x=\frac{5\pm3}{8}$

$x_1=\frac{5+3}{8}=1$ (не может быть по условию)

$\boxed{x_2=\frac{5-3}{8}=\frac{1}{4}}$

Подставив $\frac{1}{4}$ в первоначальное равенство x_1,x_2,x_3 мы получим равенство, что означает, что наше предположение было верным.

Ответ: $\frac{3}{4}$ МВт

−/+

Лист 01 из 05

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Нам надо представить 997 через числа 7 и 9.

Варианты с представлением только через 7 и 9 отпадают, т.к. 997 не делится нацело на эти числа.

Есть признак делимости числа на 9:
если сумма цифр в разрядах числа делится на 9, то и само число делится на 9.

Начнем считать варианты:

- Пусть есть купюра в 7 шиллов.
  990 : 9, значит этот вариант может быть.
- Когда у нас будет 2 купюры по 7, то 983 не делится на 9, значит этот вариант не подходит.
- Следующий вариант, который нам подходит 4 купюры по 7 шиллов.
- Увеличивая кол-во купюр по 7 шиллов мы доходим до 10 купюр и этот вариант подходит.
- В дальнейшем подходящие для нас варианты будут увеличиваться на 9 купюр по 7 купюров.

(Эту закономерность, если просчитать несколько вариантов).

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RA 56-96

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

- Чтобы просчитать до спальни нам просчитывать варианты, прибавляя к ним 9 купюр разделим 991 на 7 и получим целую часть равную 142.
- Выпишем подходящие варианты через купюры по 1:

1 купюра
4 купюры
10 купюр
19 купюр
28 купюр
37 купюр
46 купюр
55 купюр
64 купюр
73 купюр
82 купюр
91 купюр
100 купюр
109 купюр
118 купюр
127 купюр.

(135 < 142, но при подсчете не подходит)

Всего 16 вариантов, которые нам подходят.

не выписали ответы

Ответ: 16.

±

Лист 03 из 05

№4.

$x^{[x]} = N$.

• x - может быть целым числом.
Тогда, нам подходят варианты
$x=1;\ x=2;\ x=3;\ x=4;\ x=5$.
5 - решений.

• x может быть корнем числа.
Если x - это корень числа, то $[x]$ - должно быть четным.
Нам подходят варианты $\sqrt{5} \le x \le \sqrt{8}$ и $\sqrt{15} \le x \le \sqrt{24}$.
Следующее подходящее число это $\sqrt{31}$, но это выражение будет равняться 31^3, что больше 2018.
Всего вариантов 12

+

• x может быть кубическим корнем числа
$3^3=27$ $\sqrt[3]{27}=3$
$4^3=64$. $\sqrt[3]{64}$

~~неверно~~

В этом случае нам подойдут все числа от 27 и до 64, не включая 27 и 64, т.к. мы уже были числа 3 и 4. в первом пункте.
$63-28=35$ вариантов.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 11101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RA 56-96

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

• x может быть корнем четвертой степени числа.

$4^4 = 256$, $\sqrt[4]{256} = 4$

~~$5^4 = 5?6$.~~ $\sqrt[4]{625} = 5$.

$5^4 = 625$

В этом случае нам будут подходить числа от 256 до 625, не включая их, т.к. мы рассмотрели их ранее.

$624 - 257 = 367$ вариантов.

• числа у которых корень степени >4 мы не рассматриваем, так как рассмотрели их ранее.

• Так же мы взяли еще один вариант для любого числа больше 0, но меньше 1.

Всего вариантов $367 + 35 + 1 + 12 = 415$. Неверно ошибки в подсчёте

Ответ: 415.

№5.

Так как пусть, любые два, различаются меньше, чем в 3 раза, то они могут различаться в 1 раз, ~~часть~~ шесть быть равными по 1 между, и это будет нашим минимальным т.

не обосновано

Ответ: 1.

∓

Лист 05 из 05

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

EG 98 - 13

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Шумарин

ИМЯ Валерий

ОТЧЕСТВО Дмитриевич

Дата рождения 31.01.2002 **Класс:** 10

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№2.

Пусть в сумме 997 лимонов n купюр по 7 лимонов и k купюр по 9 лимонов. Тогда верно равенство $997=7n+9k$. Подберем одно решение: $\begin{cases} n=1 \\ k=110. \end{cases}$ Значит, верно равенство $7n+9k=7\cdot 1+9\cdot 110$. Значит, $7(n-1)=9(110-k)$.

Т.к. $7(n-1)\vdots 7$, а $9\not\vdots 7$, то $(110-k)\vdots 7$, т.е. $k=110-7s$, $s\in\mathbb{Z}$.

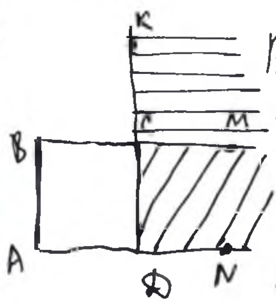
Т.к. $9(110-k)\vdots 9$, а $7\not\vdots 9$, то $(n-1)\vdots 9$, т.е. $n=9s+1$, $s\in\mathbb{Z}$.

Но, числа n и k – неотрицательные целые числа, и $n\leq\frac{997}{7}$, а $k\leq\frac{997}{9}$. Значит, $n\leq 142$, а $k\leq 110$. Т.е. $\begin{cases} 0\leq 9s+1\leq 142 \\ 0\leq 110-7s\leq 110 \end{cases}$ ±

Значит, $0\leq s\leq\frac{141}{9}$; $0\leq s\leq 15\frac{2}{3}$. Тогда $s\in\{0;1;2;3;\dots;14;15\}$.

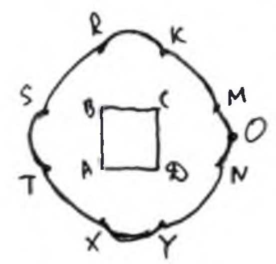
Значит, всего 16 вариантов. Вот они (сначала число n, потом число k): (1;110); (10;103); (19;96); (28;89); (37;82); (46;75); (55;68); (64;61); (73;54); (82;47); (91;40); (100;33); (109;26); (118;19); (127;12); (136;5). – 16 вариантов.

№3.



Вот наша будка ABCD. Рассмотрим часть плоскости между прямыми BC, CD и AD (закрашена вот так (////)). В любой точке на этой части плоскости будка видна как сторона CD. На прямых BC и AD находим точки M и N соответственно, т.к. $CM=DN=CD=l$ и $\angle CMD=\angle CND=45°$. MCDN – квадрат со стороной l. Опишем вокруг него окружность. Рассмотрим малую дугу $\smile MN$. Все вписанные углы с вершиной в этой дуге и опирающиеся на CD равны 45°. Значит, в данной части плоскости $\smile MN$ – искомое ГМТ.

Теперь рассмотрим часть плоскости, выше первой (закрашена вот так: (≡)). В каждой точке здесь будка видна как отрезок BD (т.е. видны стороны DC и CD). Отметим точку K на прямой CD так, что $CK = CD = l$ и $\angle BKD = \angle BMD = 45°$. Значит, BDMK – квадрат. Опишем вокруг него окружность. Рассмотрим малую дугу $\smile MK$. Все вписанные углы с вершиной на этой дуге и опирающиеся на BD равны 45°. Значит, в данной части плоскости $\smile MK$ – искомая. При повороте квадрата ABCD на 90° трижды мы получим все ГМТ полностью;



Дуги $\smile RK$; $\smile ST$, $\smile MN$ и $\smile XY$ равны и дуги $\smile SR$, $\smile KM$, $\smile YN$ и $\smile TX$ равны. Но дуги $\smile RK$ и $\smile SR$ не равны.

Т.к. Мы описывали окружности вокруг квадратов BKMD, CRSA, DTXD, YACN, то C, B, A и D – их центры соответственно. Расстояние от этих дуг до будки – расстояние от дуг до этих вершин, т.е. l. Для дуг $\smile MN$, $\smile XY$, $\smile ST$ и $\smile RK$ расстояние больше или равно l. Оно максимально из середин этих дуг. (Расстояние – перпендикуляр к стороне. Подсчитаем это расстояние. (Например в $\triangle COD$). $CO = OD$, $\angle OCD = \angle ODC = 67{,}5°$. Подсчитаем его тангенс. $\sin\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$.

Т.к. $\sin\alpha = \sin 135° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $tg^2\frac{\alpha}{2} - 2\sqrt{2}\,tg\frac{\alpha}{2} + 1 = 0$; $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} \pm 1$.

$\frac{\alpha}{2}$ – в 1 четверти. Значит, $tg\frac{\alpha}{2} > 0$. $67{,}5° > 45°$, значит, $tg\,67{,}5° > 1$. Значит, $tg\,67{,}5° = \sqrt{2}+1$.

Значит, $\rho(O; CD) = \frac{1}{2}CD \cdot tg\,67{,}5° = \frac{1}{2} \cdot l \cdot (\sqrt{2}+1) = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}l$.

Значит, $\rho_{max} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}l$, а $\rho_{min} = l$.

№4.

Заметим, что число x - это не дробь. Ведь дробь в любой натуральной степени - число не натуральное. Так же x - это не корень из дроби по той же причине. Также x - не корень из суммы или разности чисел, из которых хоть одно - либо дробь, либо иррациональное. Значит, x - ~~целое число~~ натуральное число или иррациональное вида $\sqrt[m]{N}$, где m - натуральное и N - натуральное.

Если число x - натуральное, то $\left[\begin{array}{l} N = 1^1 = 1 \\ N = 2^2 = 4 \\ N = 3^3 = 27 \\ N = 4^4 = 256. \end{array}\right.$

Если число x - вида $\sqrt[m]{N}$, то переберем все возможные m: $m=2$: $2 < \sqrt{N} < 3$ - это неравенство ищет такие x, что целая часть равна 2.

$4 < N < 9$.

Значит, $N \in \{5; 6; 7; 8\}$. N - натуральное.

$m = 3$: $3 < \sqrt[3]{N} < 4$.

$27 < N < 64$

Значит, $N \in \{28; 29; 30; \ldots; 62; 63\}$.

Есть ошибки в переборе

$m = 4$: $4 < \sqrt[4]{N} < 5$

$256 < N < 625$

Значит, $N \in \{257; 258; 259; 260; \ldots; 623; 624\}$.

При $m \geq 5$ $N > 2018$.

Значит, $N = 1$; $N = 4$; $N = 27$; $N = 256$; $N \in \{5; \ldots; 8\}$; $N \in \{28; \ldots; 63\}$, $N \in \{257; \ldots; 624\}$, N - натуральное.

Подсчитаем количество: $1+1+1+1+(8-5+1)+(63-28+1)+(624-257+1) = 4+4+36+368 = 412$.

Ответ: 412 чисел.

№5. m' – ~~возьмём такие два отрезка, что [illegible]~~ ~~минимальное~~ наименьшее из всех возможных при данном разрезе.

Из 21 куска отберём такие 2, что они отличаются ровно в m' раз. Тогда меньшее из них это число x, а большее $m'x$. Третий отрезок должен быть либо больше или равен m'^2x, или меньше или равен $\frac{x}{m'}$. Так же отбираем четвертый: он либо больше или равен ~~m'^3x, если предыдущий был m'^2x, либо~~ произведение большего отрезка на m', либо меньше или равен меньшего отрезка, уменьшенного в m' раз. Так находим все. Заметим, что отношение длин большего отрезка к меньшему всегда больше или равно m'^{20}. Это отношение по условию не больше числа 3. Значит, $m'^{20} \le 3$. Значит, $m' \le \sqrt[20]{3}$. Значит, отношение отрезков, чьи длины отличаются в наименьшее число раз всегда не больше $\sqrt[20]{3}$. ~~До~~ Докажем, что $m = \sqrt[20]{3}$ всегда существует. Предположим, что $m > \sqrt[20]{3}$. Тогда отношение наибольшего к наименьшему m^{20} (или больше) > 3. Это противоречит условиям. Значит, m всегда не больше $\sqrt[20]{3}$. Если мы предположим, что число m может быть меньше, чем $\sqrt[20]{3}$, то получим контр пример: когда каждый отрезок отличается на $\sqrt[20]{3}$. Значит, число m не меньше $\sqrt[20]{3}$. Значит, число $\sqrt[20]{3}$ – наименьшее такое, что найдутся 2 куска, длины которых отличаются друг от друга не более, чем в $\sqrt[20]{3}$ раз.

Ответ: $\sqrt[20]{3}$.

Рассмотрены только отношения большего к меньшему

±

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ

Место проведения

RA 56-94

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Юрова

ИМЯ Полина

ОТЧЕСТВО Михайловна

Дата рождения 16.05.2001.

Класс: 10

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Юр

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

$2(x_1+x_2+x_3)+4x_1x_2x_3=3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+1$

$2(x_1+x_2+x_3)+4x_1x_2x_3-3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-1=0$

$2(x_1+x_2+x_3)+4x_1x_2x_3-3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-1=$

$=(3x_1x_2x_3-3\cdot x_1x_2)+(x_1x_2x_3-x_1x_3)+(-2x_1x_3+2x_1)+(-2x_2x_3+2x_3)+(-x_2x_3+x_2)+(x_2-1)$

$=3x_1x_2(x_3-1)+x_1x_3(x_2-1)+-2x_1(x_3-1)-2x_3(x_2-1)-x_2(x_3-1)+1(x_2-1)=$

$=(x_3-1)(3x_1x_2-2x_1-x_2)+(x_2-1)(x_1x_3-2x_3+1)=0$

Рассмотрим варианты решения уравнения

$(x_3-1)(3x_1x_2-2x_1-x_2)+(x_2-1)(x_1x_3-2x_3+1)=0.$

(1) $(x_3-1)=0$ и $(x_2-1)=0$ – не подходит, т.к. $x_3<1$, $x_2<1$.

(2) $\begin{cases}3x_1x_2-2x_1-x_2=0\\ x_1x_3-2x_3+1=0\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=\dfrac{x_2}{3x_2-2}\\ x_1=\dfrac{2x_3+1}{x_3}\end{cases}$

Но тогда, $x_1<1$ (по условию) $\Rightarrow$ $\dfrac{2x_3+1}{x_3}<1\Rightarrow$ ~~2x3+1~~

$\Rightarrow 2+\dfrac{1}{x_3}<1\Rightarrow\dfrac{1}{x_3}<-1\Rightarrow$ x_3 – отрицательное – не может быть

(3) Пусть ~~x~~. $x_3-1=x_2-1$, тогда $(3x_1x_2-2x_1-x_2)=-(x_1x_3-2x_3+1)$

$\begin{cases}x_2=x_3,\\ 3x_1x_2-2x_1-x_2=2x_3-x_1x_3-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=x_3, \text{ заменим } x_2 \text{ на } x_3\\ 3x_1x_3-2x_1-x_3=2x_3-x_1x_3-1\end{cases}$

$\begin{cases}x_2=x_3\\ 4x_1x_3-2x_1-3x_3+1=0,\end{cases}$ Наибольшее решение при $x_1=0$, $x_3=\frac{1}{3}$, $x_2=x_3=\frac{1}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Совместная мощность: $\frac{2}{3}$ МВт.

Ответ: $\frac{2}{3}$ МВт.

№2

Пусть было „a" знаков по 7 лимонов и „в" знаков по 9 лимонов.

Тогда

$7a+9b=997.$

Найдём два крайних варианта – когда максимально „a" и по минимуму „в", и наоборот, когда больше всего „в" и меньше всего „a".

Эти варианты: (1) $136\cdot 7+5\cdot 9=997$, (2) $1\cdot 7+110\cdot 9=997$

Значит, а и в принимает значения:

$$\begin{cases} 1 \le a \le 136, \\ 5 \le b \le 110; \end{cases}$$

Осталось найти количество промежуточных вариантов между ними.
Найдём, через какие промежутки уравнение $(7a+9b=997)$ имеет ~~решение~~ решение в целых числах.

Пусть мы уменьшили число a на m, а число b увеличили на n, и решение снова появилось. Тогда

$$7a+9b = 7(a-m)+9(b+n)$$
$$7a+9b = 7a-7m+9b+9n \Rightarrow$$
$$7m = 9n$$

Т.к. 7 и 9 взаимно простые, то наименьшие числа: $m=9$ и $n=7$, т.е. мы можем увеличить a на 9 и уменьшить b на 7, и вся сумма снова станет 997. Тогда кол-во вариантов равно:

$$\frac{136-1}{9}+1 = \frac{135}{9}+1 = 15+1 = 16$$ (т.к. $1 \le a \le 136$, и меняется каждые 9 раз)

Проверка: (для b)

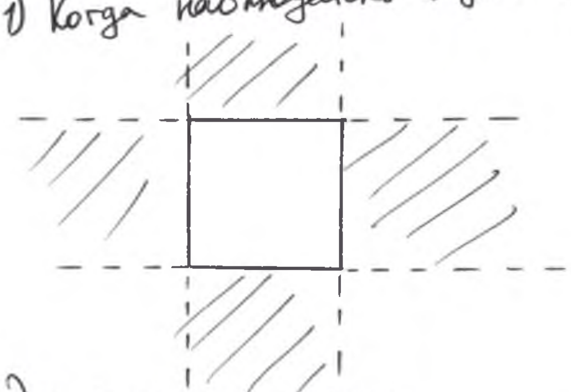
$$\frac{110-5}{7}+1 = \frac{105}{7}+1 = 15+1 = 16. -$$ вариантов.

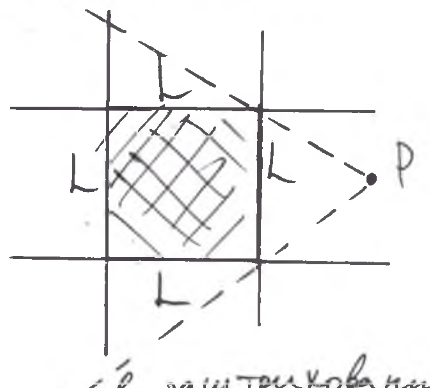
Ответ: 16 способов

№3.

Заметим, что угол с вершиной P может содержать фигуру F (в конкретном случае — квадрат) двумя способами:

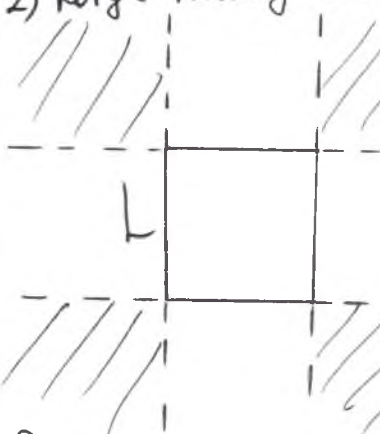
1) Когда наблюдатель видит только одну сторону:

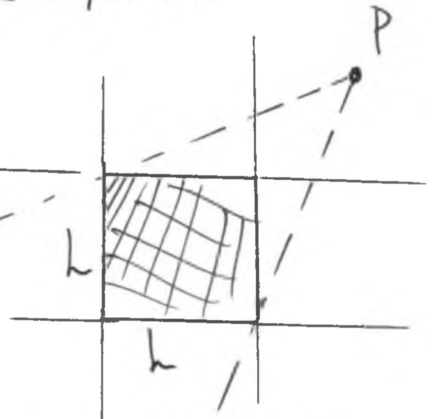




Это происходит, когда он находится в заштрихованных областях, т.к. линии, проведённые из них к вершинам других сторон, проходят через будку ⇒ видит он только одну сторону.

2) Когда наблюдатель видит 2 стороны:

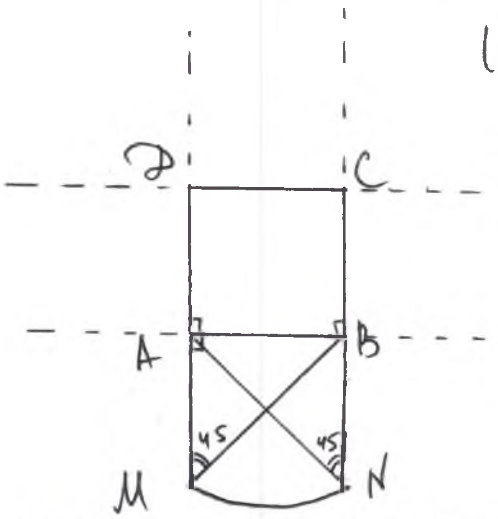




Это происходит уже из других областей.

Найдём ГМТ для каждого случая.

1)



Т.к. мы видим только одну сторону (назовём её AB), под углом 45°, то ГМТ будет являться дугой окружности, такой, что все углы, опирающиеся на дугу AB, будут равны 45°.

Продолжим стороны квадрата AD и BC, так что $AM=AD=BN=CB$.

$\triangle AMB$ - прямоугольный, $AM=AB \Rightarrow$ углы по 45°.

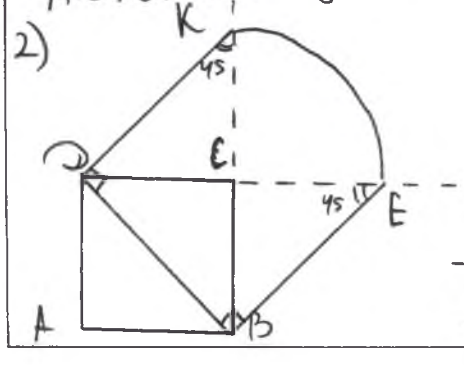
$\triangle ABN$ - тоже прямоугольный, углы по 45°.

Тогда, центр окружности должен лежать на середине MB и на середине NB (т.к. в прямоугольном треугольнике - O, на середине гипотенузы)

Т.к. ABMN - квадрат, то AN пересечёт BM в точке центра окружности. Проводим дугу MN, всё, что за точками M и N, уже не входит в область ограничения.

Аналогично делаем для каждой стороны квадрата.

2)



Для (2) случая углы 45° так же будут лежать на дуге окружности, но точками дуги уже будут являться не стороны, а диагонали.

Поставим такие точки K и E, что $DK=DB=BE$, и $DK \perp DB$, $DB \perp KE$

Тогда $\angle DKB=\angle DEB=45°$, DKEB - квадрат $\Rightarrow$

$\Rightarrow DE=BK$ и пересекаются в центре окружности

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

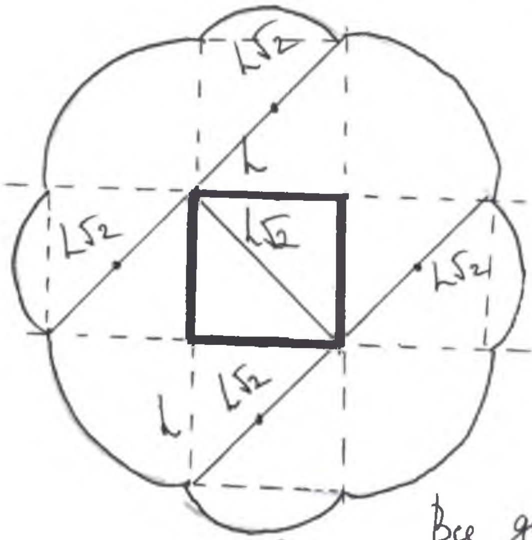
Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RA 56-94

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Проведём дугу KE, т.к. дальше не входит в область ограничения. Аналогично делаем для каждых двух рядом стоящих сторон.

3) Совместим ГМТ (1) и (2).



Сторона квадрата — L, диагональ — $L\sqrt{2}$.

Таким образом, ГМТ - это 4 дуги окружности радиусом $R=L$ из каждой вершины квадрата и 4 дуги окружности радиусом $r=\frac{L\sqrt{2}}{2}$, с центром на серединах диагоналей четырёх квадратов, расположенных по сторонам первого.

±

рассеяно

Все дуги ограничены областями, показанными в начале решения.

№4.

$N \{1,2,\dots,2018\}$

$x^{|x|}=N$

Заметим, что x не может быть дробным числом.

Пусть $x=\frac{a}{b}$ (НОД$(a,b)=1$), тогда $x^n=\frac{a^n}{b^n}$.

Т.к. НОД$(a,b)=1$, то и НОД$(a^n,b^n)=1 \Rightarrow$ дробь несократимая

N - натуральное число $\Rightarrow \frac{a^n}{b^n}\neq N$.

Отрицательным числом x не может быть по условию $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x - только целое, натуральное числа.

$\Rightarrow |x|=x \Rightarrow x^x=N$

Рассмотрим натуральные x по порядку.

⊖

$1^1=1$

$2^2=4$

$3^3=27$

$4^4=256$

$5^5=3125$. $3125>2018 \Rightarrow$ дальше можно не рассматривать, т.к. следующие числа будут ещё больше. Значит, всего 4 числа x - 1, 2, 3 и 4. И для них есть 4 N - 1, 4, 27 и 256

Ответ: 4 числа. Есть ещё числа

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N 5.

Дано:
$L = 21$ м
$n = 21$ кусок
$\frac{a_1}{a_2} \leq 3$
$m = ?$

Решение:
Пусть наименьший кусок — a, а наибольший — b.
Тогда $\frac{a}{b} \leq 3 \Rightarrow b \leq 3a$.
$b_{max} = 3a$
1) m точно не может быть равно 1, т.к. тогда условие будет выполняться только в частном случае, когда все куски равны.
2) Расположим все числа от a до b на числовой линии в порядке возрастания.

a c d e f h ...... b

Т.к. m — это число, при котором такие числа должны найтись, но не обязательно все будут такие, то m — это наименьшее отношение двух чисел, при варианте, когда это отношение наибольшее.

$m = \sqrt[20]{3}$. Докажем это. Разобьём прямую между a и b на участки $\sqrt[20]{3}a, a(\sqrt[20]{3})^2, a(\sqrt[20]{3})^2$ и т.д.

a ... b
$a\sqrt[20]{3}$ $a(\sqrt[20]{3})^2$ $a(\sqrt[20]{3})^3$ $a(\sqrt[20]{3})^4$ .... $a(\sqrt[20]{3})^{20}$

Тогда b либо совпадёт с $a(\sqrt[20]{3})^{20} = 3a$, либо будет меньше его, т.к. $b \leq 3a$.
При этом, $m = \sqrt[20]{3}$, только когда остальные числа, кроме a, ~~стоят~~ стоят в этих точках. Т.к. $\frac{a\sqrt[20]{3}}{a} = \sqrt[20]{3}$; $\frac{a(\sqrt[20]{3})^2}{a\sqrt[20]{3}} = \sqrt[20]{3}$ и т.д.
В другом случае, ~~так~~ найдётся $m < \sqrt[20]{3}$, т.к. если мы сместим какое-то число со своей точки, то оно будет ближе к какому-то из соседних чисел, и $\frac{a(\sqrt[20]{3})^{k+1}}{a(\sqrt[20]{3})^k} > m$.

a c d e f .... b

Значит, при таком m найдутся числа, которые отличаются не ~~менее~~ более, т.е. больше или равно m раз.
Ответ: $m = \sqrt[20]{3}$ (корень в 20 степени из 3)

рассмотрено только отношение большего к меньшему

±

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Место проведения

PJ18-15

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17071

ФАМИЛИЯ Юсупов

ИМЯ Егор

ОТЧЕСТВО Игоревич

Дата рождения 28.10.04 **Класс:** 7

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.18
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: ЕЮсуп

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17071

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ PJ18-15

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1.

Чтобы любых трёх водителей можно было заменить. Нужны водители со такими же специальностями (вождение определенного вида машины). Одинаковых специальностей должно быть не менее четырёх, т.к. если специальности три, то могут заболеть трое водителей с этими специальностями и их нельзя будет заменить. Также специальности должны быть у разных людей и обучать одного человека одной и той же бесполезно. Тогда наименьшее кол-во специальностей $4 \cdot 5 = 20$. А значит кол-во денег будет $20 \cdot 10000 = 200000$.

Пример: 0 - водитель
1 - может водить эту машину.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	1	2	3	2	3	3
2	4	5	1	4	5	1	2
4	5	4	5				

— Каждая цифра повторяется четыре раза в разных столбцах.

Ответ: 20

(+)

№2.

z б. - Саша
x б. - Паша
y б. Аркаша. или $8 \cdot 3 - z - x$

Тогда после операций получится

С.	П.	А.
$z-x-y$	$2x$	$2y$ - после Саши
$2(z-x-y)$	$3x-z-y$	$4y$ - после Паши
$4(z-x-y)$	$2(3x-z-y)$	$4y-3x+y+z-2z+2x+2y$ - после Аркаши

$4(z-x-y)=8$
$z-x-y=2;$
$z-x-24+z+x=2$
$2z=26$
$z=13.$

$2(3x-z-y)=8$
$3x-z-y=4$
$3x-13-11+x=4$
$4x=28$
$x=7$

$y=24-z-x;$
$y=24-20;$
$y=4.$

+

Ответ: Саша - 13 батончиков, Паша - 7, и Аркаша - 4

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

От 1 дома до 9 дома – 9 домов и 9 табличек.
От 10 дома до 99 дома – 90 домов и 180 табличек.
От 100 дома до 999 дома – 900 домов и 2700 табличек.

$$\begin{array}{r} 1917 \\ -\ 189 \\ \hline 1428 \end{array}$$ (т.) от 100 дома и т.д.

$$\begin{array}{r} 2700 \\ -\ 1428 \\ \hline 972 \end{array}$$ (т.) – лишние.

$972 : 3 = 324$ (д.) – лишние.

$9+90+900-324=999-324=675$ (домов)

Разложим 675 на простые множители:

$675=5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3$

Т.к. 675 домов то и номеров 675, а значит получится 675 стандартных табличек. Их нельзя разложить на 2 стопки, т.к. $675 \not\vdots\, 2$, а значит минимальное кол-во стопок – 3. Соответственно чем меньше стопок, тем больше высота столбцов, а значит самые высокие столбцы будут, когда разложим на 3 стопки. Высота табличек будет 225 табличек.

Ответ: 675 домов, столбцов минимум 3, а табличек в нем максимум 225.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4.

Для того, чтобы в каждой строке получалось на 1 больше n - должно быть четным? числом, иначе хотя бы в одной строке будет отличаться не на 1. Чтобы у нас получалось отличие на 1 - мы должны первые n цифр в поставить в средний столбик а затем брать первую и последнюю из остальных и ставить по бокам у нас будет получаться:

4	1	9
5	2	8
6	3	7

.

Такую операцию можно проделывать с любым n, где $n \in Z$, $n > 1$, и n - нечет.

Тогда получится $3 \leq n < \infty$, $n \in Z$ и нечёт.

Ответ: $3 \leq n < \infty$, $n \in Z$, и нечёт. не обосновано

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ	RA 56-28	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ ЯСАФОВ

ИМЯ АЛЕКСАНДР

ОТЧЕСТВО ВЛАДИМИРОВИЧ

Дата рождения 06.09.2001 **Класс:** 10

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.02.2018
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: [signature]

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RA 56-28

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1 Заметим, что при $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ~~соотношение~~ равенство выполняется, значит если значения мощности незначительно снизить, то равенство сохранится а мощности будет меньше 1 МВт. Значит суммарная мощность чуть менее 3 МВт

Ответ: 3 МВт

№2 Пусть кол-во монет 7 мм - x, а монет 9 мм - y, тогда

$7x + 9y = 997$

$9y = 997 - 7x \Rightarrow 997 - 7x \,\vdots\, 9$

997 - имеет остаток 7 при дел на 9, значит $7x$ - тоже должен иметь остаток 7 при дел на 9

$7x = 9k + 7$

$7(x-1) = 9k \Rightarrow x - 1 \,\vdots\, 9$

переберем все x, которые $x-1 \,\vdots\, 9$

x может принимать значения 1; 10; 19; 28; 37; 46; 55; 64; 73; 82; 91; 100; 109; 118; 127; 136.

Лист 01 из 04

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RA 56-28

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

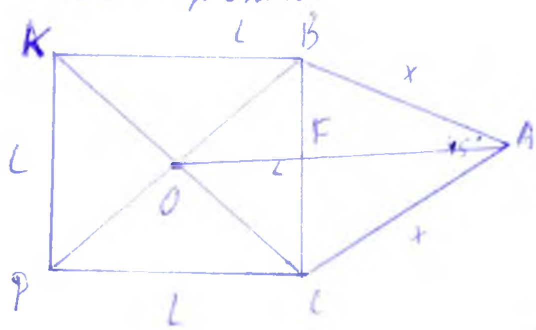
145 уже не подходит, т.к. $7\cdot 145 = 1115$, а это больше 999.

Зная и мы лаконично вычислить у

Всего вариантов - 16

Ответ: 16

№ 3 Т.к. 2 варианта



по т. косинусов

$$L^2 = x^2 + x^2 - 2x^2\cdot\cos 45°$$

$$x = \frac{L}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

AF по т. Пифагора

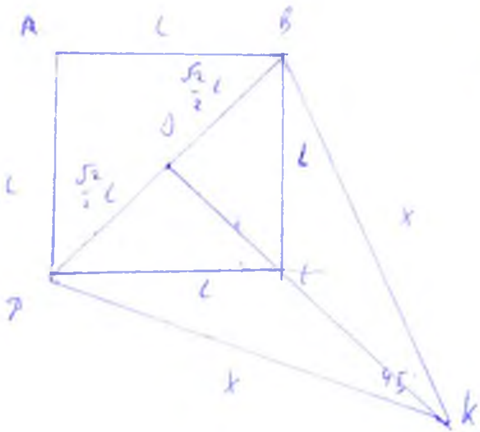
$$AF^2 = x^2 - \frac{L^2}{4}$$

$$AF = L\sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{4}}$$

~~OF по т. Пифагора~~

~~$OF = OB^2$~~ $OF = FB = \frac{L}{2}$

$$OA = OF + FA = L\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{4}}\right) = L\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{4}}\right)$$



BP по т. Пиф. $= \sqrt{2L^2} = \sqrt{2}L$

по т. косинусов $2L^2 = x^2 + x^2 - 2x\cdot\cos 45°$

$$x = L\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}$$

По т. Пифагора $OK = \sqrt{x^2 - \frac{2}{4}L^2} =$

$$= \sqrt{L^2\frac{2}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2}L^2} = L\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2}} =$$

$$= L\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}$$

Ответ: $\cancel{L\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{4}}\right)}$; $\cancel{L\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}}}$

Чем меньше?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RA 56-28

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4 ~~Если x не целое, то $x^{[x]}$ тоже не целое, т.к [x] - целое число~~

1-й вариант, когда x - целое, тогда x может принимать значения

$1^1=1$

$2^2=4$

$3^3=27$

$4^4=256$

$5^5=3125$ ∅ т.к это больше 2018

2-й, когда x - нецелое, тогда $x=\sqrt[k]{N}$, чтобы при возведении в степень получить N, примем $k=[x]$

Таким образом мы можем получить числа от при $k=1$, только 1

при $k=2$ можем получить числа от $[2^2$ до $3^2)$, т.к корни этих чисел находятся на промежутке от $[2;3)$ и целая часть равна 2

Аналогично при $k=3$ можем получить $[3^3;4^3)$

$k=4$ $[4^4;5^4)$

$k=5$ быть не может, т.к $5^5>2018$

Найдем кол-во чисел $[4, 9-1]$; $[27; 64-1]$; $[256; 625-1]$

Чисел $1+5+37+369=411$

Ответ: 411.

±

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ RA 56-28

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5) Рассмотрим самый маленький и самый большой кусок, а остальные разложим в порядке возрастания. Максимальное отличие самого маленького и самого большого - в 3 раза, ~~значит максимально больше~~ т.к мы разложили куски в порядке возрастания, то куски различающиеся в m раз находятся рядом, значит максимальное m достигается тогда, когда длины канатов образуют геометрическую прогрессию и m - максимально, когда разница между самым большим и самым маленьким кусками в 3 раза. Пусть длина самого маленького куска - L, а самого большого $3L$, т.к в прогрессии 21 член, то

$$3L = L q^{20}$$

$$q = \sqrt[20]{3} = m.$$

Если бы ~~разница за~~ отличие было всех канатов между собой было более чем в $\sqrt[20]{3}$ раз, то длина самого большого отличалась бы от длины самого маленького более чем $L(\sqrt[20]{3})^{20}$ раз, а это противоречит условию, при этом пример, когда $m = \sqrt[20]{3}$ мы привели.

Ответ: $\sqrt[20]{3}$

±

Рассмотрен част. случай геом. прогр.