

**ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ**  
**ВАРИАНТ 73101 для 10 класса**

Для заданий 1, 3, 5 требуется разработать алгоритм на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке

Век стоит Русь не шатается и века простоит не пошатнётся. Да приключилась новая напасть с землёй Русской. День рождения Князя приближался, а подарка ещё не было.

1. Пошли бояре в библиотеку за идеей, что такого оригинального подарить Князю любимому, а там Моисей систему поиска информации по четырём знакам придумал. Каждый знак состоит из нескольких одинаковых черт, которые располагаются по сторонам прямоугольного шаблона (см. рисунок). Да только ограничил его в финансах Юлий и нет возможности поставить полноценную систему анализа знаков. На каждую черту требуется один датчик, показывающий прочерчена или не прочерчена черта. Достать бояре обещали датчики, но только минимальное количество, необходимое для работы системы поиска информации, придуманной Моисеем. Сколько датчиков необходимо добыть боярам для работы системы?



**Схема решения.** Для распознавания четырёх объектов достаточно рассматривать две черты, т.к. будут существовать четыре комбинации прочерчена/не прочерчена. Но необходимо выбрать черты, которые различны в разных знаках. Поэтому левая и верхние не подходят для распознавания, т.к. они одинаковы во всех знаках. Также не подходят пары из нижней левой и правой черт и из двух нижних черт, т.к. они одинаковы в некоторых знаках. Остаётся одна пара: нижняя правая и правая.

2. Достали бояре в библиотеке книгу, где описано что они хотят, да и пример взвешивания материалов приведён был. «Существует система из четырёх гирь, таких, чтобы, используя их по одной, можно было взвешивать любой груз  $W$  (целое число кг) в диапазоне от 1 до  $W = 40$  кг. При этом гири могут быть помещены на обе чаши весов. Первая чаша содержит взвешиваемый груз  $W$ , вторая чаша свободна от груза». Посчитали, да и поняли, что масса у них другая будет, вот и решили найти решение аналогичной задачи. Помогите боярам решить аналогичную задачу для  $W = 90$  кг (укажите минимальное число гирь и их веса).

**Схема решения.** Для каждой гири существует три варианта использования – положить гирю на одну чашу весов, положить гирю на другую чашу весов, не использовать гирю. Поэтому для формирования значения, соответствующего весу груза, можно использовать троичную систему счисления. Тогда каждая гиря должна иметь вес, равный значению 3 в некоторой степени, аналогично тому, как в позиционной системе счисления цифра, находящаяся в  $k$ -ом разряде ( $k$  отсчитывается с 0 справа налево), имеет вес, равный основанию системы счисления в  $k$ -от степени. Таким образом, нужны гири весом  $3^0, 3^1, 3^2, 3^3$  и  $3^4$ , т.е. 1, 3, 9, 27 и 81. Для взвешивания груза весом до 90 кг их будет достаточно. Значения веса будут формироваться следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 3 - 1 \text{ (гири кладутся на разные чаши весов)} \\ 3 &= 3 \\ 4 &= 3 + 1 \\ 5 &= 9 - 3 - 1 \\ 6 &= 9 - 3 \\ 7 &= 9 - 3 + 1 \\ 8 &= 9 - 1 \\ 9 &= 9 \\ &\dots \\ 39 &= 27 + 9 + 3 \\ 40 &= 27 + 9 + 3 + 1 \\ 41 &= 81 - 27 - 9 - 3 - 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$89 = 81 + 9 - 1$$

$$90 = 81 + 9$$

3. По поручению Князя охотились богатыри за пиратом Потаней, да и угодили в ловушку. Предложил им Потаня сыграть в игру. Если богатыри выиграют, то он сдастся им, а если нет, то они оставят его в покое. Согласились богатыри и стали над задачей думать: «Есть квадратная таблица размером  $N \times N$ . В некоторых ячейках таблицы записаны целые числа. При этом движение по таблице возможно только в соответствии со схемой на рис. Найти номера строки и столбца ячейки таблицы, в которой находится первый по ходу движения элемент, значение которого принадлежит отрезку  $[d; s]$ ». Помогите богатырям разработать алгоритм поиска номеров, чтобы изловить пирата и выполнить задание Князя.

**Схема решения.** Для обхода матрицы в указанном порядке можно использовать три способа. Первый способ – в цикле по  $i$  от 1 до  $N$  обрабатываем строки матрицы, если  $i$  нечётно, используем прямой порядок проходя по строке, если  $i$  чётно, используем обратный порядок проходя по строке. Способ не очень удачный, т.к. необходимо вычислять остаток от деления. Второй способ – в цикле по  $i$  от 1 до  $N \div 2$  обрабатываем по две строки матрицы, при этом строку с номером  $2 \times i - 1$  проходим в прямом порядке, а строку с номером  $2 \times i$  – в обратном порядке; если  $N$  нечётно, последнюю строку обрабатываем отдельно, проходя в прямом порядке. Здесь также используется не самая эффективная операция умножения. Третий способ аналогичен второму, но организуем цикл по  $i$  от 1 до  $N$  с шагом 2 и обрабатываем строку с номером  $i$  и строку с номером  $(i + 1)$ .

Организуем обход матрицы и будем проверять, что ячейка заполнена (в незаполненных ячейках стоят нули), и искать значение, которое принадлежит отрезку  $[d; s]$ . При нахождении такого элемента запоминаем номер строки и столбца и выходим из цикла.

4. Подумав, что бояре задумали заговор, Юлий решил, что для спасения Князя надо откупиться от бояр. Взять деньги можно у Дуба, если обыграть его. Юлий не мог идти к дубу сам, поэтому решил отправить верблюда Васю, предварительно научив его играть. Он загадал Васе задачу: «Сумма  $S(x)$  определяется выражением  $S(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{4} + \dots$ . Число  $x$  по модулю меньше 1. 1) Какова общая формула слагаемого с номером  $N$ ? 2) Расчёт последующих слагаемых можно провести по формуле  $\frac{S_{N+1}}{S_N} = -x^2 \cdot \frac{N}{N+1}$  или по формуле из пункта 1. Сравните обе формулы с точки зрения количества затрачиваемых арифметических операций». Помогите Васе решить задачу, чтобы потренироваться перед игрой с Дубом.

**Схема решения.** Общая формула  $N$ -го члена ряда:  $\frac{(-1)^{N-1} \cdot x^{2N-1}}{N}$ . При использовании этой формулы

для вычисления каждого слагаемого потребуется  $(N - 1) + (2N - 1)$  операций умножения и одна операция деления, т.е. всего  $3N - 1$  операций. Для вычисления  $N$  слагаемых потребуется всего  $(3N - 1) \cdot N$  операций. При использовании другой формулы для получения  $(N + 1)$ -го слагаемого из  $N$ -го потребует операция смены знака, три операции умножения, одна операции сложения и одна операция деления, т.е. всего 6 операций (надо сказать, что операции смены знака и сложения выполняются быстрее, чем операции умножения и деления). Для вычисления  $N$  слагаемых потребуется всего  $6N$  операций. Таким образом, соотношение получается равным  $\frac{3N-1}{6}$ . Это соотношение становится большим 1 при  $N = 3$  и линейно увеличивается с ростом  $N$ .

5. Узнав о затее Юлия, Тихон решил проучить его, чтобы было неповадно играть в азартные игры с Дубом, а потому привязал Васю в стойле и замок кодированный на двери повесил. Довольный Тихон присел было отдохнуть да расстроил его Юлий. Рассказал Юлий Тихону, что код, который запирает замок на двери стойла, состоит из трёх целых чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и четвёртого натурального числа  $m$ . Но надёжным этот код будет только если  $a$ ,  $b$  и  $c$  являются коэффициентами уравнения  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ , у которого есть решение в множестве  $Z_m$  всех остатков от деления натуральных

чисел на фиксированное натуральное число  $m$ . В  $Z_m$  определены операции сложения и умножения по модулю  $m$ : два числа складываются (умножаются) и берётся остаток от деления суммы (произведения) на  $m$  (например, в  $Z_5$  имеем:  $2 + 4 = 1$ ,  $2 * 4 = 3$  и т.п.). Призадумался Тихон, вспомнил, что от последней встречи с цыганами осталась у него чудо-машина, что программируется и ответ сама выдаёт. Решил он её использовать. Помогите Тихону составить алгоритм для чудо-машины, проверяющий есть ли решения для квадратного уравнения  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$  в множестве  $Z_m$ , чтобы выяснить надёжный ли код ввёл Тихон, запирая Васю в стойле.

**Схема решения – 1 способ.** Можно решать квадратное уравнение обычным способом (выполняя при этом сложение и умножение по правилам, указанным в задании), только проверять, чтобы дискриминант был целым числом, корень из него также был целым числом и результат деления был целым числом. Также надо проверить, что корень попал в диапазон от 0 до  $m - 1$ .

**Схема решения – 2 способ.** Можно перебрать все целые числа из диапазона от 0 до  $m - 1$  и проверить, является ли какое-либо число корнем квадратного уравнения. Сложение и умножение при этом выполняются по правилам, указанным в задании.