Тренировочный этап. Решения

7 класс, задача 1

В 1820 г. русская экспедиция открыла шестой континент, Антарктиду. Экспедиция помимо прочего везла с собой 410 пудов пороха. Порох был распределен поровну между всеми кораблями и уложен в одинаковые бочки. Число кораблей меньше числа бочек на каждом корабле, а вместимость бочки выражается целым числом пудов, она больше числа бочек на корабле. Какова вместимость одной бочки пороха в экспедиции, открывшей Антарктиду 200 лет назад?

Решение

Если x — число кораблей, y — число бочек на корабле, z — число пудов в бочке, то числа x, y, z натуральные, $x < y < z$, $xyz = 410$. Разлагая на простые множители $410 = 2 \cdot 5 \cdot 41$, получаем однозначно $z = 41$.

Проверим, что число 41 простое. Во первых, оно не кратно 2 и не кратно нечетным 3,5,7. Рассмотрим делимость 41 на остальные нечетные, меньшие 41. Можно не проверять делимость на кратные 3 числа 9,15,21. Далее, 41 не делится на 7, так как $41 = 42-1$, а 42 кратно 7. Таким же образом выясняем, что 41 не делится на 11, 13, 17, 19. Остальные нечетные числа больше 21, делимость на них не требуется проверять, так как $41 < 21 \cdot 2$.

Ответ. Бочка вмещает 41 пуд пороха.

7 класс, задача 2

Два игрока ведут довольно странную игру. Каждый из них поочередно выбирает по одной карте из 14 с числами -19, -13, -12, -11, -6, 1, 2, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12 (и не возвращает ее). Выигрывает тот, у кого окажется больше сумма модулей 7 выбранных чисел. Может ли выиграть тот, кто делает первый ход?

Решение

Выигрышная стратегия достаточно очевидна – брать наибольшее по модулю число среди оставшихся. Представим ее в виде таблицы.

раунд	1 игрок	2 игрок
1	-19	-13
2	-12	12
3	-11	11
4	10	9
5	8	-6
6	5	3
7	2	1
сумма модулей	67	55

Ответ. Может

7 класс, задача 3

Найдите все возможные значения коэффициентов a, b, c функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, принимающей в различных заданных точках $x = d$ и $x = e$ одинаковые значения. Для каждой такой функции найдите значение $y = f(d) = f(e)$.

Решение

Имеем $f(d) = ad^2 + bd + c$, $f(e) = ae^2 + be + c$, $f(d) - f(e) = a(d^2 - e^2) + b(d - e) = 0$. Сократим на $d - e \neq 0$, получим

$$b = -a(d + e), \quad f(x) = ax^2 - a(d + e) + c, \quad a, c \in (-\infty;\ \infty),$$

$$y = f(d) = f(e) = c - ade.$$

Ответ: $b = -a(d + e)$, $a, c \in (-\infty;\ \infty)$, $f(x) = ax^2 - a(d + e)x + c$, $y = c - ade$.

7 класс, задача 4

Велосипедист и мотоциклист выезжают одновременно по одному маршруту из пункта S в пункт F и движутся с постоянными скоростями. Скорость мотоцикла в 3 раза больше скорости велосипеда. Когда мотоциклу осталось проехать 1/3 пути до F, он вышел из строя, и мотоциклист повел его пешком со скоростью в 3 раза меньше скорости велосипеда. Велосипед же продолжил путь с прежней скоростью. Кто быстрее прибыл в F?

Решение

Примем весь путь за 3 у.е. длины. Пусть скорость велосипедиста равна v. Тогда на весь путь он затратил $3/v$ единиц времени.

Мотоциклист сначала проехал 2 у.е. длины со скоростью $3v$, на что ушло $2/(3v)$ единиц времени. Затем он преодолел 1 у.е. длины со скоростью $v/3$. На это ушло еще $1/(v/3) = 3/v$ единиц времени.

Таким образом, мотоциклист затратил времени

$$\frac{2}{3v} + \frac{3}{v},$$

что, очевидно, больше, чем $\dfrac{3}{v}$.

Ответ. Быстрее прибыл в F велосипедист.

7 класс, задача 5

Стороны треугольника имеют длины 5, 7 и 9 см. Можно ли преобразовать такой треугольник в прямоугольный, увеличив (или уменьшив) каждую сторону исходного треугольника на одно и то же число
а) сантиметров, б) процентов.
(Треугольник со сторонами a, b, c прямоугольный тогда и только тогда, когда $a^2 + b^2 = c^2$).

Решение

а) Рассмотрим соотношение

$$(5 + k)^2 + (7 + k)^2 = (9 + k)^2,$$

где k – число произвольного знака.

Оно преобразуется к уравнению

$$k^2 + 6k - 7 = 0,$$

которое имеет корни -7 и 1. Первый корень не подходит, т.к. приводит к отрицательным длинам сторон. Второй дает треугольник со сторонами 6, 8 и 10, который является прямоугольным.

б) Увеличение (уменьшение) длины на $p\%$ равносильно ее умножению на коэффициент $a = (1 + p/100)$ ($a = (1 - p/100)$). Умножение длин всех сторон на одно и то же число – это преобразование подобия. Оно не изменяет углы треугольника. Поскольку исходный треугольник не имеет прямых углов ($5^2 + 7^2 \neq 9^2$), то измененный также не будет прямоугольным.

Ответ. а) да; б) нет.