Тренировочный этап. Решения

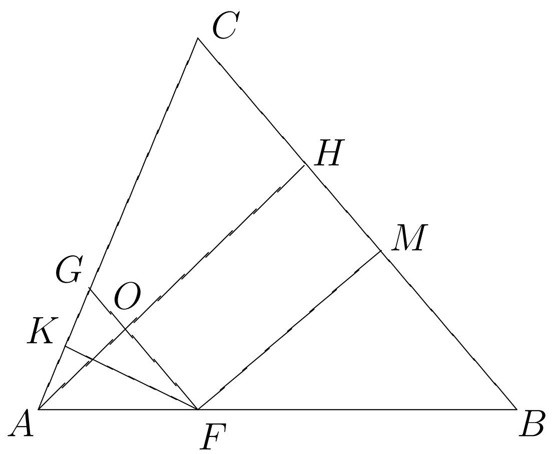
9 класс, задача 1

Проектировщик опоры ЛЭП инженер Пенжинский имеет чертеж треугольника ABC, в котором $\angle A = 65°$, $\angle B = 75°$. Ему необходимо отметить на стороне AB такую точку, чтобы сумма длин перпендикуляров, опущенных из этой точки на две другие стороны была бы максимальной. Сколько таких точек можно найти? В каком отношении они будут делить сторону AB?

Решение.

Изобразим треугольник ABC, произвольную точку F на стороне AB и опущенные из нее перпендикуляры FK и FM.

Выполним дополнительные построения: опустим высоту AH из вершины A и построим отрезок FG параллельный стороне BC (обозначим через O точку их пересечения).



$OFMH$ – прямоугольник по построению. Его сторона OH равна перпендикуляру FM. Сравним FK и AO. Эти отрезки являются высотами в треугольнике AGF, который подобен исходному треугольнику ACB. Поскольку против меньшего угла лежит меньшая сторона, то из меньшего угла опускается большая высота.

Величины углов A и B (и равного ему $\angle AFG$) даны в условии.

Следовательно, если $\angle A > \angle B$, то высота, опущенная из угла A, короче, чем сумма длин FK и FM, а высота, опущенная из угла B, длиннее. Это соотношение длин сохраняется независимо от местоположения точки F на стороне AB.

Значит, искомой точкой является один из концов стороны AB. Эта точка не отделяет от стороны никакую часть.

Ответ. Такая точка одна, она лежит на конце стороны AB.

9 класс, задача 2

Исследуя прочность опоры ЛЭП, инженер Пенжинский получил выражение

$$P = \left(1 - \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{10}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{2019 \cdot 2020/2}\right).$$

Найдите значение P с тремя знаками в дробной части.

Решение.

Выполним преобразования

$$1 - \frac{1}{\frac{(n-1)n}{2}} = \frac{n^2 - n - 2}{(n-1)n} = \frac{(n-2)\cdot(n+1)}{(n-1)\cdot n}.$$

Теперь

$$P = \frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdot\frac{4\cdot 7}{5\cdot 6}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-2)\cdot(n+1)}{(n-1)\cdot n} = \frac{2}{4}\cdot\frac{n+1}{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}.$$

При $n = 2020$ имеем $\dfrac{1}{2020-1} < \dfrac{1}{1000}$, поэтому с точностью до трех знаков после запятой $P(2020) = 0{,}5$.

Ответ. $P(2020) = 0{,}500 \pm 0{,}001$.

9 класс, задача 3

В пятиугольнике $ABCDE$ стороны BC, CD и DE имеют длины $2 - \sqrt{2}$, $3 + \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$. Можно ли в такой пятиугольник вписать окружность?

Решение.

Пусть $AB = 2 - \sqrt{2}$, $BC = 3 + \sqrt{2}$, $CD = 1 + \sqrt{2}$, A_1, B_1, C_1 точки кас. вписанной окр. и этих сторон, тогда $A_1B = BB_1 = x$, $B_1C = CC_1 = y$, $C_1D = z$, $AA_1 = t$,

$$\begin{cases} x & & & +t & = 2 - \sqrt{2}, \\ x & +y & & & = 3 + \sqrt{2}, \\ & y & +z & & = 1 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Складывая, получаем

$$2(x+y) + z + t = 6 + \sqrt{2},$$
$$x + y + (1/2)(z+t) = 3 + \sqrt{2}/2 = x + y - \sqrt{2}/2,$$

откуда $z + t < 0$, что невозможно, так как $z > 0$ и $t > 0$.

Ответ: нет.

9 класс, задача 4. Пусть $E = \{c_1, c_2, c_3\}$, где c_1, c_2, c_3, $c_1 < c_2 < c_3$. Найдите все функции вида $f(x) = a - \sqrt{b} \cdot x$, удовлетворяющие условию: если $x \in E$, то и $f(x) \in E$.

Решение.

1. Если $b = 0$ то $f(x) = a \in E$, в этом случае получаем 3 постоянные функции $f(x) = c_1, c_2, c_3$.

2. Если $b > 0$, то $-\sqrt{b} < 0$, функция f убывает,

$$a - \sqrt{b} \cdot c_1 = c_3, \ a - \sqrt{b} \cdot c_2 = c_2, \ \ a - \sqrt{b} \cdot c_3 = c_1,$$

$$\sqrt{b} \cdot (c_1 - c_3) = c_1 - c_3, \ b = 1, \ a = 2c_2 = c_1 + c_3, \ f(x) = c_1 + c_3 - x.$$

Ответ. Всего 3 или 4 функции. $f(x) = c_1, c_2, c_3$ при всех $b \geq 0$.
При $b > 0$, $c_1 + c_3 = 2c_2$ еще и функция $f(x) = c_1 + c_3 - x$.

9 класс, задача 5

Решите уравнение в целых числах $22x + 19y = 820$.

Решение. В общем виде

Требуется найти все решения уравнения

$$ax + by = k(a+b), \ a > 0, b > 0, \text{НОД}(a, b) = 1, k > 0,$$

в целых числах.

Легко проверить, что решением является $x = y = k$.

Перепишем уравнение в виде

$$a(k + mb) + b(k - ma) = k(a + b)$$

Пусть $ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2 = k(a + b)$, где $x_1 = y_1 = k$.

Тогда $a(k - x_2) + b(k - y_2) = 0$ или $a(k - x_2) = b(y_2 - k)$, откуда $k - x_2$ должно быть кратно b и $y_2 - k$ должно быть кратно a.

Таким образом, решением являются $x = k - mb, \ y = k + ma, \ m \in \mathbb{Z}$.

Ответ. $x = 20 - 21m, \ y = 20 + 19m, \ m \in \mathbb{Z}$.