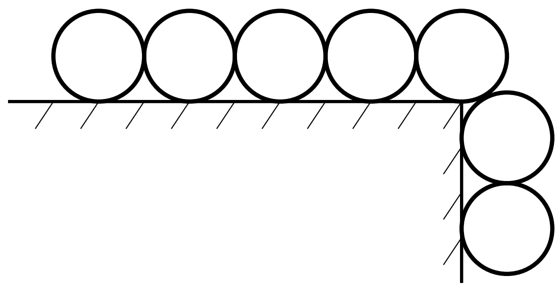
РЕШЕНИЕ (все классы)

1. Пусть цепочка состоит из M шариков (по условию $M = 50$). Рассмотрим ситуацию, в которой k шариков свисает вниз (соответственно, $M-k$ остается на горизонтальной поверхности). Пусть также в рассматриваемый момент времени правый шарик (см. рис.) горизонтальной части цепочки находится на самом краю.



Тогда на свешивающуюся часть действует сила тяжести $k\,m\,g$, а на горизонтальную часть в процессе движения действует сила трения $(M-k)\,\mu\,m\,g$.

2. Чтобы ответить на первый вопрос задачи, необходимо найти такое минимальное значение k, при котором

$$k\,m\,g > (M-k)F_{\text{тр}} = (M-k)\,\mu\,m\,g.$$

Приведем подобные слагаемые

$$k\,m\,g + k\,\mu\,m\,g > M\,\mu\,m\,g$$

и выразим k. Таким образом, необходимо найти минимальное натуральное k, удовлетворяющее неравнству

$$k > \frac{\mu\,M}{1+\mu}.$$

Подставляя заданные числовые значения величин, получаем отсюда величину k_0, являющуюся ответом на первый вопрос задачи.

3. Далее везде будем считать, что количество свисающих шариков k больше или равно найденному значению k_0.

Тогда сила, приводящая систему шариков в движение, будет равна

$$F_k = k\,m\,g - (M-k)F_{\text{тр}}$$

Эта сила будет придавать ускорение

$$a_k = \frac{F_k}{k\,m} = g - \frac{M-k}{k}\,\mu\,g,$$

с которым цепочка будет двигаться вниз. В тот момент, когда свисающая часть системы сместится вниз на расстояние D, с горизонтальной поверхности соскочит очередной шарик, и равнодействующая сила изменится.

4. Чтобы ответить на второй вопрос, нужно рассмотреть перемещение системы вниз из начального положения на расстояние D, а затем еще на такое же расстояние.

Начальная скорость $v_0 = 0$. Ускорение, приобретаемое на первом этапе, равно

$$a_1 = g - \frac{M - k_0}{k_0}\,\mu\, g,$$

поскольку на k_0 (эта величина найдена выше) свисающих шариков уже не действует сила трения. Следовательно, для прохождения пути D потребуется время

$$t_1 = \sqrt{\frac{2D}{a_1}}.$$

За это время будет приобретена скорость

$$v_1 = a_1 t_1 = \sqrt{2Da_1}.$$

5. По прошествии времени t_1 с горизонтальной поверхности соскочит следующий шарик. Теперь система будет иметь ускорение

$$a_2 = g - \frac{M - k_0 - 1}{k_0 + 1}\,\mu\, g.$$

На рассматриваемом этапе система имеет начальную скорость v_1, поэтому время, необходимое для смещения вниз на расстояние D, можно найти из квадратного уравнения

$$D = v_1 t + \frac{a_2 t^2}{2}.$$

Его корни равны $\dfrac{-v_1 \pm \sqrt{v_1^2 + 2a_2 D}}{a_2}$, и один из них отрицателен. Следовательно,

$$t_2 = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2a_2 D}}{a_2}.$$

За такое время будет приобретена скорость

$$v_2 = v_1 + a_2 t_2 = \sqrt{v_1^2 + 2a_2 D}.$$

6. При поиске величин t_2 и v_2 мы использовали только уже известные значения t_1 и v_1, величины же с индексом $k = 0$ не требовались. Поэтому

можно написать формулы для k-го момента через предыдущий:

$$a_{k+1} = g - \frac{M - k_0 - k}{k_0 + k}\,\mu\,g,$$

$$v_{k+1} = \sqrt{v_k^2 + 2a_{k+1}D},$$

$$t_{k+1} = \frac{-v_k + \sqrt{v_k^2 + 2a_{k+1}D}}{a_{k+1}} = \frac{-v_k + v_{k+1}}{a_{k+1}}.$$

В полученных формулах индекс k означает количество шариков, соскочивших с горизонтальной плоскости от начала движения до текущего момента времени (соответственно, вертикальная часть системы состоит из $(k_0 + k)$ шариков).

Заметим, что если предыдущее значение скорости равно нулю ($v_0 = 0$ при $k = 0$), то полученные общие формулы совпадают с формулами первого шага (поиск v_1 и т.д.)

6. Теперь можно сформулировать алгоритм расчета момента соскакивания прозвольного шарика.

Алгоритм "Шарик M"
Вход: M (номер последнего соскочившего шарика)
Выход: U, T (скорость на выходе и время от начала движения)
начало алгоритма
положить $T := 0; \quad k := 0; \quad v_0 := 0$
ПОКА $k < M - k_0$
- Вычислить ускорение $a_{k+1} = g - \dfrac{M - k_0 - k}{k_0 + k}\,\mu\,g$
- Вычислить скорость $v_{k+1} = \sqrt{v_k^2 + 2a_{k+1}D}$
- Вычислить время $t_{k+1} = \dfrac{-v_k + v_{k+1}}{a_{k+1}}$
- Увеличить общее время $T = T + t_{k+1}$
- Увеличить счетчик $k := k + 1$

КОНЕЦ_ПОКА
Сохранить скорость на выходе $U = v_k$
Вывести U
Вывести T
конец алгоритма

6. Для ответа на 3 вопрос теперь достаточно выполнить описанный алгоритм для $M = 50$.

7. После того, как последний шарик лишится опоры, движение всей системы будет определяться только силой тяжести.

Обозначим через U скорость, которую приобретет связка к моменту полного соскальзывания. Тогда ее смещение вниз (т.е. свободное падение) на растояние X будет описываться уравнением

$$X = U\,t + \frac{g\,t^2}{2}.$$

Отсюда можно найти время падения (аналогично тому, как это делалось выше)

$$t_X = \frac{-U + \sqrt{U^2 + 2gX}}{g}$$

и приобретенную за это время скорость

$$V = U + g\,t_X = \sqrt{U^2 + 2gX}.$$

Точно так же, как выше, можно сначала рассчитать скорость, а затем время по более простой формуле

$$t_X = \frac{-U + V}{g}.$$

Поскольку к началу свободного падения нижний шарик находился на расстоянии $(M-1)\,D$ от нижнего края пластин (т.к. в момент лишения опоры последний шарик еще находится на уровне горизонтальной поверхности), то в полученную формулу следует подставить $X = H - (M-1)\,D$.

8. (9 класс) Для ответа на последний вопрос достаточно проанализировать выведенные формулы движения и увидеть, что они не содержат величину m. Поэтому время не будет зависеть от массы каждого шарика (и всей цепочки в целом).

9. (10, 11 классы) Для ответа на последний вопрос необходимо провести вычислительный эксперимент, выполняя составленный алгоритм при различных значениях диаметра D. Сначала легко убедиться, что увеличесние D приводит к увеличению времени T (впрочем, это соотношение можно увидеть и из формул). Затем простым перебором (с шагом, соответствующим указанной точности) или применив какую-либо переборную стратегию (например, бисекцию) можно подобрать подходящее значение диаметра D.