ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17111 для 11 класса

1. Каждый из шести домов, стоящих на одной стороне улицы, соединен кабельными воздушными линиями с каждым из восьми домов на противоположной стороне. Сколько попарных пересечений образуют тени этих кабелей на поверхности улицы, если никакие три из них не пересекаются в одной точке? Считайте, что свет, порождающий эти тени, падает вертикально вниз.

Решение

Возьмем произвольную пару домов на одной стороне улицы и произвольную пару на другой. Они являются вершинами выпуклого четурехугольника (поскольку две стороны черырехугольника, идущие от каждой выбранной пары, лежат по одну сторону прямой, т.е. углы не превосходят $180°$), следовательно его диагонали пересекаются.

Каждое попарное пресечение теней (кабелей) является точкой пересечения диагоналей такого четырехугольника. Таким образом, осталось найти их количество, которое равно произведению способов выбрать упорядоченную пару домов на каждой стороне улицы.

Ответ: $C_6^2 \cdot C_8^2 = 420$.

2. Найдите максимальное значение величины $x^2 + y^2 + z^2$, если известно, что

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3x + 8y + z.$$

Решение

1 способ

Введем декартову систему координат и рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a}$ с координатами (x, y, z) и фиксированный вектор $\mathbf{c}$ с координатами $(3, 8, 1)$. Тогда левая часть условия представляет собой квадрат длины вектора $\mathbf{a}$, а правая – скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$:

$$|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Оценивая скалярное произведение через длины сомножителей, получаем

$$|\mathbf{a}|^2 \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{c}| \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{a}| \leq |\mathbf{c}|.$$

Как известно, равенство возможно, и достигается при векторах, лежащих на одной прямой. Поэтому максимальное значение будет достигаться, например, при $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.

Подставляя значения, получаем $3^2 + 8^2 + 1^1 = 74$.

2 способ

Преобразуем условие, выделив полные квадраты.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3x + 8y + z \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + (y-4)^2 + \left(z - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{74}{4}.$$

Таким образом, точки заданного множества лежат на сфере с центром в точке $\left(\frac{3}{2}, 4, \frac{1}{2}\right)$. Точки с фиксированным значением величины $x^2+y^2+z^2$ также лежат на сфере (с центром в начале координат), поэтому искомая точка будет точкой касания полученной сферы внутренним образом со сферой $x^2 + y^2 = \text{Const}$. Эта точка касания, в свою очередь, лежит на диаметре, соединяющем центры сфер, поэтому остается подставить $y = \frac{8}{3}x$, $z = \frac{1}{3}x$ в условие.

$$\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{8}{3}x - 4\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{74}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{74}{9}\left(x - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{74}{4},$$

откуда $x = 0$ или $x = 3$.

Первое значение дает нулевую сумму квадратов. Для второго значения получается $y = \frac{8}{3} \cdot 3 = 8$, $z = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$, откуда $x^2 + y^2 + z^2 = 9 + 64 + 1 = 74$.

Ответ: 74.

3. В уравнении

$$x^{2022} - 2\,x^{2021} - 3\,x^{2020} - \ldots - 2022\,x - 2023 = 0$$

можно как угодно переставлять коэффициенты при всех степенях x, кроме самой старшей. Можно ли такой перестановкой добиться, чтобы уравнение имело хотя бы два положительных корня?

Решение 1

Докажем, что это невозможно.

От исходного уравнения перейдем к уравнению, в котором коэффициенты многочлена образуют произвольную перестановку $(a_2, a_3, \ldots, a_{2023})$ из чисел $\{2, 3, \ldots, 2023\}$:

$$x^{2022} - a_2\,x^{2021} - a_3\,x^{2020} - \ldots - a_{2022}\,x - a_{2023} = 0$$

Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения, т.к. при его подстановке в уравнение получим:

$$-a_{2023} = 0,$$

что неверно.

Перенесём все отрицательные члены направо, а затем поделим уравнение на x^{2022} (при условии $x \neq 0$):

$$x^{2022} = a_2\, x^{2021} + a_3\, x^{2020} + \ldots + a_{2022}\, x + a_{2023}$$

$$1 = \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \ldots + \frac{a_{2022}}{x^{2021}} + \frac{a_{2023}}{x^{2022}}$$

В правой части уравнения получили строго монотонно убывающую на положительной полуоси функцию:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{2022} \frac{a_{k+1}}{x^k}$$

Доказательство строгой монотонности: пусть $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 < x_2$. Тогда для любого $k \in \{1, 2, \ldots, 2022\}$ выполнено:

$$\frac{a_{k+1}}{x_2^k} < \frac{a_{k+1}}{x_1^k} \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Строгое монотонное убывание $f(x)$ на положительной полуоси означает, что она пересекает горизонтальную прямую $y = 1$ в единственной точке, которая и будет единственным положительным корнем исходного уравнения.

Решение 2

От исходного уравнения перейдем к уравнению, в котором коэффициенты многочлена образуют произвольную перестановку $(a_2, a_3, \ldots, a_{2023})$ из чисел $\{2, 3, \ldots, 2023\}$:

$$x^{2022} - a_2\, x^{2021} - a_3\, x^{2020} - \ldots - a_{2022}\, x - a_{2023} = 0$$

Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения, т.к. при его подстановке в уравнение получим:

$$-a_{2023} = 0,$$

что неверно.

Свободный член $-a_{2023}$ выражает произведение всех корней многочлена. По следствию из основной теоремы алгебры знаем, что у многочлена 2022-ой степени 2022 корня, то есть четное число. Произведение четного числа отрицательных корней было бы положительным числом. Значит, хотя бы один корень положительный. Покажем, что больше одного положительного корня у многочлена быть не может.

Перенесём все отрицательные члены направо, а затем поделим уравнение на x^{2022} (при условии $x \neq 0$):

$$x^{2022} = a_2\, x^{2021} + a_3\, x^{2020} + \ldots + a_{2022}\, x + a_{2023}$$

$$1 = \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \ldots + \frac{a_{2022}}{x^{2021}} + \frac{a_{2023}}{x^{2022}}$$

Обзначим $y = \dfrac{1}{x}$. Перепишем уравнение в виде:

$$a_2\, y + a_3\, y^2 + \ldots + a_{2022}\, y^{2021} + a_{2023}\, y^{2022} = 1$$

Пусть у исходного многочлена имеются по крайней мере 2 различных положительных корня: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Пусть, для определенности, $x_2 < x_1$.

Тогда у многочлена относительно y тоже имеются 2 различных положительных корня: $y_1 = \dfrac{1}{x_1}$, $y_2 = \dfrac{1}{x_2}$

$$x_2 < x_1 \Rightarrow y_1 < y_2 \Rightarrow y_2 = y_1 + r,\ r > 0$$

Подставим корни y_1, y_2 в уравнение:

$$\begin{cases} a_2\, y_1 + a_3\, y_1^2 + \ldots + a_{2022}\, y_1^{2021} + a_{2023}\, y_1^{2022} = 1 \\ a_2\, y_2 + a_3\, y_2^2 + \ldots + a_{2022}\, y_2^{2021} + a_{2023}\, y_2^{2022} = 1 \end{cases}$$

Раскроем $y_2 = y_1 + r$ во втором уравнении:

$$\begin{cases} a_2\, y_1 + a_3\, y_1^2 + \ldots + a_{2023}\, y_1^{2022} = 1 \\ a_2\, (y_1 + r) + a_3\, (y_1 + r)^2 + \ldots + a_{2023}\, (y_1 + r)^{2022} = 1 \end{cases}$$

Раскроем биномы во втором уравнении:

$$\begin{cases} a_2\, y_1 + a_3\, y_1^2 + \ldots + a_{2023}\, y_1^{2022} = 1 \\ a_2\, y_1 + a_2\, r + a_3\, y_1^2 + a_3\, (2y_1 r + r^2) + \ldots + a_{2023}\, y_1^{2022} + a_{2023}\, \sum_{k=1}^{2022} C_{2022}^k y_1^{2022-k} r^k = 1 \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$a_2\, r + a_3\, (2y_1 r + r^2) + \ldots + a_{2023} \sum_{k=1}^{2022} C_{2022}^k y_1^{2022-k} r^k = 0$$

Заметим, $y_1 > 0$, $a_k > 0$, множитель r входит в каждое слагаемое, значит:

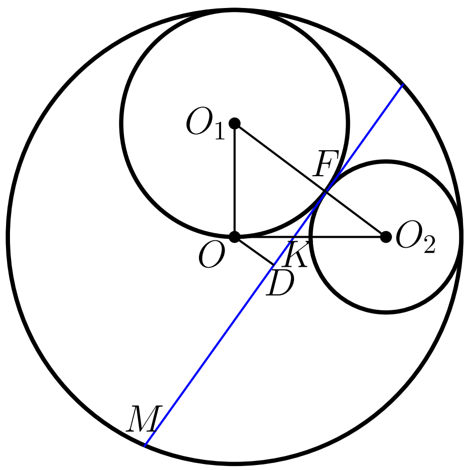
$$r = 0 \Rightarrow y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

То есть исходный многочлен имеет единственный положительный корень.

4. Две сферы касаются друг друга внешним образом и каждая из них касается внутренним образом большей сферы. Радиус одной в два раза, а другой – в три раза меньше радиуса наибольшей сферы. В точке касания малых сфер друг с другом построена касательная плоскость к ним. Найдите расстояние от этой плоскости до центра наибольшей сферы, если ее радиус равен R.

Решение

Проведем сечение описанной композиции плоскостью, проходящей через центры трех сфер. Искомое расстояние будет длиной отрезка OD на этой плоскости.



Пусть радиусы малых окружностей равны $2r$ и $3r$. Тогда радиус наибольшей (внешней) равен $6r$ (дано: $6r = R$). Рассмотрим $\triangle O_1OO_2$. Его стороны равны $3r$, $4r$ и $5r$, следовательно, он прямоугольный.

Обозначим точку пересечения искомой хорды (на рис. обозначена синим) с отрезком O_1O_2 через F, а с отрезком OO_2 через K. Опустим из центра наибольшей окружности перпендикуляр OD на искомую хорду (отрезок общей касательной). Тогда искомая хорда делится точкой D пополам и перпендикулярна отрезкам OD и O_1O_2.

Прямоугольные треугольники O_1OO_2, KFO_2, KDO подобны. Поэтому $\dfrac{KO_2}{FO_2} = \dfrac{O_1O_2}{OO_2}$, откуда $KO_2 = \frac{5}{2}r$ и $KO = \frac{3}{2}r$.

Далее, $\dfrac{OD}{KO} = \dfrac{OO_2}{O_1O_2}$, откуда $OD = \frac{6}{5}r = \frac{1}{5}R$.

Ответ: $\frac{1}{5}R$.

5. Какое число больше: 2023^{2023} или 2022^{2024}?

Решение

Рассмотрим отношение чисел

$$\frac{2023^{2023}}{2022^{2024}} = \frac{2023}{2022^2} \cdot \left(\frac{2023}{2022}\right)^{2022} = \frac{2023}{2022^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2022}\right)^{2022}.$$

Воспользуемся тем, что

$$2 < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} < 3 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad k > 1. \tag{$*$}$$

Тогда

$$\frac{2023}{2022^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2022}\right)^{2022} < \frac{2023 \cdot 3}{2022 \cdot 2022} < 1.$$

Формула $(*)$ принималась без док-ва, но любые корректные попытки ее обоснования поощрялись.

Ответ: $2023^{2023} < 2022^{2024}$.