Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17991 для 9 класса

1. Найдите все корни уравнения

$$a^2 \cdot \frac{x-b}{a-b} \cdot \frac{x-c}{a-c} + b^2 \cdot \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{x-c}{b-c} + c^2 \cdot \frac{x-a}{c-a} \cdot \frac{x-b}{c-b} = x^2,$$

в котором $a \neq b \neq c$ — произвольные заданные значения.

Решение

Заметим, что степень уравнения не выше двух.

Легко проверить, что a, b, c - корни уравнения:

$$a^2 \cdot \frac{a-b}{a-b} \cdot \frac{a-c}{a-c} + b^2 \cdot \frac{a-a}{b-a} \cdot \frac{a-c}{b-c} + c^2 \cdot \frac{a-a}{c-a} \cdot \frac{a-b}{c-b} = a^2$$

$$a^2 \cdot \frac{b-b}{a-b} \cdot \frac{b-c}{a-c} + b^2 \cdot \frac{b-a}{b-a} \cdot \frac{b-c}{b-c} + c^2 \cdot \frac{b-a}{c-a} \cdot \frac{b-b}{c-b} = b^2$$

$$a^2 \cdot \frac{c-b}{a-b} \cdot \frac{c-c}{a-c} + b^2 \cdot \frac{c-a}{b-a} \cdot \frac{c-c}{b-c} + c^2 \cdot \frac{c-a}{c-a} \cdot \frac{c-b}{c-b} = c^2$$

Уравнение степени не выше двух имеет три различных корня в том, и только в том случае, когда оно вырождено в тождество, то есть ответом на задачу является любое число ($x \in \mathbb{R}$).

Ответ: x – любое действительное число.

2. На пункте питания четыре легкоатлета выпили весь запас кола-локового лимонада. Если бы только атлет Быстров пил в два раза меньше, то осталась бы десятая часть лимонада. Если бы, дополнительно, еще атлет Шустров тоже пил в два раза меньше, то осталась бы восьмая часть лимонада. Если бы, дополнительно к ним обоим, еще атлет Востров тоже пил в два раза меньше, то осталась бы треть лимонада. Какая часть лимонада осталась бы, если бы в два раза меньше пил один только атлет Перескочизаборов?

Решение

Пусть было выпито V условных единиц лимонада. Если бы атлет Быстров пил вдвое меньше, то он выпил бы половину своей доли, что по условию составляет $\frac{1}{10}V$. Таким образом, Быстров выпил $\frac{1}{5}V$.

Если бы атлеты Быстров и Шустров пили вдвое меньше, то они выпили бы половину своей совместной доли, что по условию составляет $\frac{1}{8}V$. Следовательно, их совместная доля равна $\frac{1}{4}V$, откуда доля Шустрова есть $\frac{1}{4}V-\frac{1}{5}V=\frac{1}{20}V$.

Рассуждая аналогично про Быстрова, Шустрова и Вострова вместе, получаем, что доля Вострова составляет $\frac{2}{3}V-\frac{1}{5}V-\frac{1}{20}V=\frac{5}{12}V$.

Таким образом, Перескочизаборов выпил $V-\frac{1}{5}V-\frac{1}{20}V-\frac{5}{12}V=\frac{1}{3}V$. Если бы он выпил вдвое меньше, то осталась бы половина его доли, что составляет $\frac{1}{6}$ всего лимонада.

Ответ: $\frac{1}{6}$ часть.

3. Ателье «Тяжкая ноша» закупило большую партию чугунных пуговиц. Если пришивать на каждое пальто по две пуговицы или если пришивать на каждое пальто по три пуговицы, то от всей партии в каждом случае останется 1 штука. Если же пришивать на каждое пальто по четыре пуговицы или если пришивать на каждое пальто по пять пуговиц, то от всей партии в каждом случае останется по 3 штуки. Какое количество пуговиц останется, если пришивать на каждое пальто по двенадцать штук?

Решение

Пусть a – искомое число Из условия следует, что число $a-1$ делится на 2 и на 3. Поэтому $a=6k+1$. Также число $a-3$ делится на 4 и на 5. Поэтому $a=20n+3$. Решим уравнение

$$6k+1=20n+3.$$

Или, что то же

$$3k=10n+1.$$

Его общее решение имеет вид

$$k=7+10s, \quad n=2+3s, \quad \Rightarrow \quad a=60s+43.$$

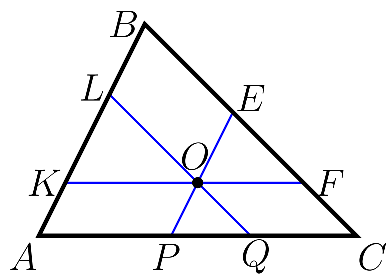
Найдем остаток от деления a на 12. Поскольку 60 кратно 12-ти, то искомый остаток есть остаток от деления 43 на 12, который равен 7.

Ответ: 7.

4. Через точку, лежащую внутри треугольника, параллельно его сторонам проведены три прямые, которые разбивают треугольник на шесть частей: три треугольника и три четырехугольника. Площади трех внутренних треугольников относятся друг к другу как $1:4:9$. Определите, в каком диапазоне может лежать отношение площади большего из них к площади исходного треугольника.

Решение

Проведем $KF \parallel AC$, $LQ \parallel BC$, $PE \parallel AB$.



Треугольники KLO, OEF, POQ подобны друг другу и треугольнику ABC (их соответствующие углы равны как углы при параллельных прямых). Обозначим их площади S_1, S_2, S_3, а площадь исходного треугольника S.

Поскольку площади подобных треугольников относятся как квадраты их (подобных) сторон, то

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{KO}{AC}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{OF}{AC}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{PQ}{AC}.$$

$AKOP$ и $QOFC$ – параллелограммы, следовательно,

$$KO + PQ + OF = AC.$$

Таким образом, $\dfrac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = 1.$

Пусть теперь $S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 4 : 9$ (это не соответствует рисунку, но для дальнейших рассуждений не важно, который из внутренних треугольников наибольший). Тогда

$$S_1 = \tfrac{1}{9}S_3, \quad S_2 = \tfrac{4}{9}S_3$$

и, далее, $1 = \dfrac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \dfrac{\frac{1}{3}\sqrt{S_3}+\frac{2}{3}\sqrt{S_3}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \dfrac{2\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}.$

Следовательно, $S_3 = \frac{1}{4}S$.

Ответ: указанное отношение может быть равно только $\frac{1}{4}$.

5. Выясните, больше или меньше двух число $\sqrt[2023]{3+\sqrt{8}}+\sqrt[2023]{3-\sqrt{8}}$.

Решение

Заданные слагаемые являются взаимно обратными величинам, поскольку

$$\frac{1}{3+\sqrt{8}}=3-\sqrt{8}.$$

Очевидно, что они не равны друг другу.

Обозначим $a=\sqrt[2023]{3+\sqrt{8}}$. Тогда заданное выражение равно $a+\dfrac{1}{a}$, а сумма двух различных положительных взаимно обратных величин строго больше двух.

Ответ: $\sqrt[2023]{3+\sqrt{8}}+\sqrt[2023]{3-\sqrt{8}}>2$.